

BRUIT THERMIQUE DANS UNE RESISTANCE**(JOHNSON-NYQUIST noise)**

Un conducteur (résistor), même quand il n'est pas traversé par un courant fini, n'est pas dans un état de repos absolu. En effet, à température non nulle, il est le siège d'une agitation thermique qui entraîne le déplacement des électrons à l'intérieur de ce conducteur. Un courant de bruit, de valeur moyenne nulle, prend donc naissance à l'intérieur. C'est l'interaction entre le "gaz d'électrons libres" assurant la conduction et le réseau fixe qui assure la mise à l'équilibre thermique du système. Cette interaction expliquant microscopiquement la *résistance* du conducteur, il est donc naturel que l'on trouve une relation liant les fluctuations du courant (ou de la tension), la résistance et la température dans ce conducteur.

Une première étude expérimentale due à J. B. JOHNSON des fluctuations de tension dans un conducteur et l'analyse thermodynamique publiée par H. NYQUIST établirent la formule suivante:

$$\overline{v_{thermique}^2} = 4k_B T R \Delta f$$

Dans une bande de fréquence Δf , un conducteur de résistance R , en équilibre thermique à la température T , se comporte comme un générateur de tension: cette tension de bruit, de valeur moyenne nulle, de variance (valeur efficace moyenne) donnée par la formule de

NYQUIST possède une densité spectrale $S_{v_{ther.}}(f) = \frac{\overline{v_{thermique}^2}}{\Delta f} = 4k_B T R$ ne dépendant que de R et T .

Expérience théorique

Prenons l'exemple du circuit simple de la figure 1, comportant une résistance R et une capacité C . L'ensemble du circuit est à la température T . Les porteurs de charges (les électrons libres d'un métal par exemple) sont soumis à l'agitation thermique et les fluctuations de leur répartition se traduisent, au niveau des armatures du condensateur, par une charge aléatoire $q(t)$.

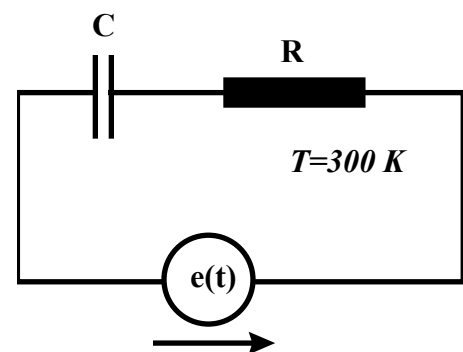


Figure 1

Propriétés statistiques du bruit thermique

On modélise donc la source de bruit thermique comme un générateur de tension $e(t)$. $e(t)$ est une fonction aléatoire ergodique stationnaire. On suppose de plus que des échantillons de tension pris aux instants t et $t+\tau$ sont statistiquement indépendants, quelle que soit la valeur de τ .

Cette dernière hypothèse de non-corrélation du bruit se traduit par une fonction d'autocorrélation $C_e(\tau)$ en forme de pic de Dirac, ou ce qui est équivalent, par une densité spectrale de puissance $S_e(f)$ uniforme (voir figure 2). Un tel bruit est dit "blanc".

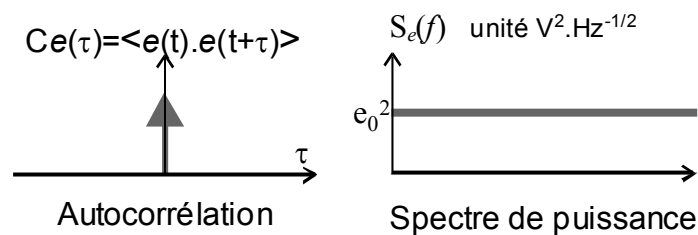


Figure 2 - Bruit "blanc"

Une approche plus réaliste devrait tenir compte du temps de relaxation τ_r des électrons (temps de libre parcours moyen). Pour un métal à température ordinaire, $\tau_r < 10^{-12}$ s. Sans entrer dans le détail du modèle statistique décrivant le comportement des électrons de conduction, on remplace alors le Dirac représentant des fluctuations de tension totalement décorrélées par une fonction élargie (par exemple une exponentielle décroissante) dont la largeur est de l'ordre de grandeur de τ_r . Le spectre de puissance associé décroît donc au fréquence élevées, avec une fréquence de coupure $f \approx \frac{1}{2\pi\tau_r}$. Les fréquences usuelles de

l'électronique sont encore largement inférieures à cette limite (< 150 GHz), c'est pourquoi l'hypothèse d'un bruit blanc, de densité spectrale constante, est toujours largement vérifiée.

Puissance efficace de bruit

Dans l'hypothèse du bruit blanc ci-dessus, calculons la valeur e_0^2 de la densité spectrale du bruit. L'énergie moyenne stockée dans le circuit peut se calculer au niveau du condensateur par exemple. Elle est égale, d'après le principe de l'équipartition de l'énergie, à celle d'un degré de liberté (on fait l'hypothèse que la population d'électrons libres est à l'équilibre thermique à la température T):

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\langle q^2 \rangle}{C} = \frac{1}{2} \cdot k_B T$$

où $\langle \rangle$ représente une moyenne sur les échantillons¹. L'hypothèse d'ergodicité du bruit permet de remplacer cette valeur moyenne par une moyenne temporelle sur $q^2(t)$.

Une analyse de Fourier du circuit fournit l'équation électrique suivante pour la composante de fréquence f :

$$e_f = \frac{q_f}{C} + 2j\pi f R q_f$$

d'où

$$|q_f|^2 = \frac{C^2 \cdot e_f^2}{1 + R^2 C^2 (2\pi f)^2}$$

Le calcul de l'énergie s'effectue alors en sommant la contribution de toutes les pulsations:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \int_{f=0}^{f=\infty} \frac{q_f^2}{C} df = \frac{1}{2} \cdot \int_{f=0}^{f=\infty} \frac{C \cdot e_0^2}{1 + R^2 C^2 (2\pi f)^2} df = \frac{1}{2} \cdot \frac{e_0^2}{4R} = \frac{1}{2} \cdot k_B T$$

Finalement on obtient pour la **densité spectrale de puissance de bruit**:

$$S_{v_{ther.}} = 4k_B T R$$

ou la formulation équivalente de NYQUIST, donnant la **puissance de bruit** pour une bande de fréquence Δf :

$$e^2 = 4k_B T R \Delta f$$

Valeur numérique

A titre d'exemple numérique, le bruit thermique pour une résistance de 10 MΩ à température ambiante, mesuré dans un circuit dont la bande passante est de 100 MHz crée une tension de bruit dont la valeur efficace est de 4 mV. C'est donc un bruit peu apparent dans les manipulations d'enseignements, où l'on travaille à fréquence (donc bande passante faible).

Par comparaison, un récepteur FM (bande 88-108 MHz) affiche à l'entrée, chargée par une antenne d'impédance 300Ω une sensibilité de quelques microvolts. Le bruit thermique de l'antenne devra donc être pris en compte et limité dans ce cas.



¹Ce résultat s'obtient par exemple en écrivant que la charge du condensateur suit une distribution de Maxwell/Boltzmann

$$\text{i.e. } P(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi C k T}} \exp\left(-\frac{q^2}{k T C}\right) \text{ puis en exprimant } \langle q^2 \rangle = \int_0^\infty P(q) q^2 dq$$

Mesure du bruit thermique

Le but de la manipulation est donc de vérifier la formule de NYQUIST donnant la puissance de bruit de tension aux bornes d'un circuit de résistance R à la température T .

$$v_{thermique}^2 = \int_f 4kTR df$$

On dispose pour cela d'un amplificateur à faible niveau de bruit (alimenté par des batteries au plomb et protégé par un boîtier blindé). On peut raccorder à l'entrée de cet amplificateur des résistances de valeurs variables, elles aussi en boîtier blindé.

L'intérêt des blindages, utilisés ici comme cage de Faraday, est d'isoler aux mieux les circuits étudiés des inductions parasites. L'alimentation par accumulateur à le même objectif, isoler du bruit véhiculé par l'alimentation sur secteur.

Du fait de l'alimentation sur batteries, **on veillera à n'alimenter l'amplificateur que pendant le temps strictement nécessaire aux mesures.**

- ♦ **Mesure du bruit thermique:** mesurer l'écart-type de la tension de sortie de l'amplificateur pour différentes valeurs de R . On fait l'hypothèse que le bruit propre de l'amplificateur est totalement décorréllé du bruit thermique de la résistance placée à l'entrée. On vérifiera aussi que l'appareil de mesure placé en sortie ne prend pas en compte une éventuelle valeur moyenne non nulle de la tension de sortie. Alors les valeurs efficaces des tensions de bruit s'ajoutent et :

$$v_{RMS}^2 = v_{thermique}^2 + v_{ampli}^2 = 4kTR \int_f G(f)^2 df + v_{R=0}^2$$

On tracera donc $v_{RMS}^2(R) - v_{R=0}^2 = f(R)$.

La mesure de l'écart-type de la tension nécessite un voltmètre de large bande passante capable d'effectuer une moyenne des mesures quadratiques (mesure RMS). Un oscilloscope numérique, utilisé en échantillonnage rapide (200 Méchantillons/s) peut permettre d'estimer cet écart-type du bruit (Mode Peak Détection, BW limit off, mesure de V_{rms} sélectionnée).

- ♦ **Mesure de k :** On peut à l'aide du même matériel estimer la valeur de k . Il faut pour cela estimer la valeur du terme $\int_f G(f)^2 df$ pour l'amplificateur utilisé. On introduit donc

à l'entrée de l'amplificateur un signal sinusoïdal de faible amplitude (**MAXIMUM 10 mVrms**) et l'on mesure le gain sur le signal de sortie. Le gain en amplitude attendu est de l'ordre de 300 entre 0.1 et 1MHz. Une intégration simple (méthode des trapèzes) permet d'estimer la bande de puissance découpée dans le bruit thermique (supposée blanc) et d'en déduire une valeur de k .

- ♦ **Influence de T:** On peut enfin vérifier l'influence de T sur la puissance de bruit thermique émise par une résistance de $1\text{k}\Omega$, qui peut être plongée dans l'azote liquide par exemple (la mise à l'équilibre thermique de la résistance placée dans le boîtier métallique de blindage est lente). Le rapport des puissances de bruit est alors suffisamment grand pour être mesuré ($\sqrt{295/77} = 1.96$).

Bibliographie

J. B. JOHNSON, "*Thermal agitation of electricity in conductors*", Physical Review, **32**, 97-109 (1928)

H. NYQUIST, "*Thermal agitation of electric charge in conductors*", Physical Review, **32**, 110-113 (1928)

pour un exposé pédagogique du théorème de NYQUIST voir

KITTEL, Eléments de physique statistique, chap.29 & 30, Dunod

Matériel

Liste de matériel.		Notice
<ul style="list-style-type: none"> Amplificateur bas bruit pour mesure de bruit thermique. Jeu de résistances en boîtier blindé ($0 \rightarrow 1\text{ k}\Omega$) Résistance en boîtier étanche 	Montage ENS Cachan	437
<ul style="list-style-type: none"> Oscilloscope numérique Mesure de tension rms, 200 Méch./s mode <i>Peak Detection</i>, <i>BW limit off</i> 	HP 54645A	
<ul style="list-style-type: none"> Générateur BF à faible niveau de sortie signal sinusoïdal $1\text{kHz} \rightarrow 10\text{ MHz}$, $\sim 10\text{mV rms}$ 	American Reliance Inc. 13 MHz	147
<ul style="list-style-type: none"> Dewar + azote liquide 		