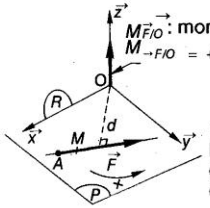
14 Formulaire de mécanique

14.1 Statique

■ Force et moment d'une force

Ce sont des grandeurs vectorielles qui sont caractérisées par les éléments :
— point d'application, — sens,
— direction, — intensité.

L'unité de force est le Newton .... N
L'unité de moment est le mètre Newton ..... m.N



Le sens + est donné par la rotation autour de z, de l'axe des x vers l'axe des y.

— Expression analytique du moment :

$\overrightarrow{M_{\vec{F}/O}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

$$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_R \quad \vec{F} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_R$$

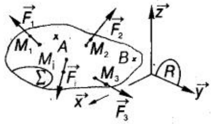
x, y, z : coordonnées de M.
M : point du support de $\vec{F}$.
X, Y, Z : composantes de $\vec{F}$.

Composantes du moment en O de $\vec{F}$ (dans le repère R)

$$\overrightarrow{M_{\vec{F}/O}} \begin{vmatrix} yZ - zY \\ zX - xZ \\ xY - yX \end{vmatrix}_R$$

■ Eléments de réduction en un point d'un système de forces extérieures s'appliquant sur un solide isolé

Le solide Σ est sollicité par : $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots \vec{F}_i$.
En A on considère :



$\vec{S} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots \vec{F}_i$

$\vec{M}_A = \overrightarrow{AM}_1 \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{AM}_2 \wedge \vec{F}_2 + \overrightarrow{AM}_3 \wedge \vec{F}_3 + \dots + \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{F}_i$

Les vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{M}_A$ s'appellent les éléments de réduction *au point A* du système de forces $\vec{F}_i$

Au point B par exemple, ces éléments deviennent :

$\vec{S} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots \vec{F}_i$

$\vec{M}_B = \overrightarrow{BM}_1 \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{BM}_2 \wedge \vec{F}_2 + \overrightarrow{BM}_3 \wedge \vec{F}_3 + \dots + \overrightarrow{BM}_i \wedge \vec{F}_i$

Remarque :

$\vec{S}$ (au point B) $= \vec{S}$ (au point A)

$\vec{M}_B$ (au point B) $\neq \vec{M}_A$ (au point A)

$$\boxed{\vec{M}_B = \vec{M}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}}$$

■ Equilibre du solide

Condition d'équilibre du solide :

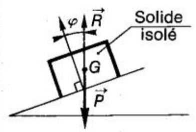
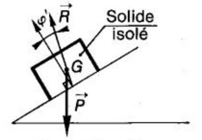
En n'importe quel point A $\boxed{\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{O} \\ \vec{M}_A &= \vec{O} \end{aligned}}$

■ Conséquences de l'équilibre du solide

Solide sollicité par :

Deux forces	Trois forces
Elles sont directement opposées	Elles sont coplanaires et concourantes ou parallèles
Leur somme est nulle	

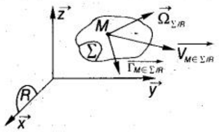
■ Adhérence et frottement

Adhérence	Frottement
	
Le solide est sur le point de glisser $\mathrm{tg}\varphi = f$ f : coef. d'adhérence	Le solide glisse $\varphi' < \varphi$ $\mathrm{tg}\varphi' = f'$ f' : coef. de frottement

Valeur de f et f'

Matériaux	Adhérence f		Frottement f'	
	sec	graissé	sec	graissé
Bronze sur bronze	—	0,11	0,2	0,06
Bronze sur fonte	—	—	0,21	0,08
Fonte sur fonte	—	0,16	0,44	0,1
Acier doux sur acier doux	0,13	0,11	0,44	0,08
Acier doux sur fonte	0,19	—	0,18	0,08
Acier trempé sur acier tr.	0,15	0,12	—	0,09
Fonte sur bois de chêne	0,6	0,11	0,49	0,1
Acier sur bois de chêne	—	0,11	0,4	0,08
Courroie en cuir sur fonte	0,56	—	0,28	0,12
Courroie en coton sur fonte	0,34	—	—	—
Câble acier sur fonte	0,13	—	—	—
Acier sur glace	0,027	—	0,014	—
Amiante sur métaux Revêtement de frein	—	—	0,45	—
Pneux sur chaussée	roue roulante		roue bloquée	
Béton sec	0,75		—	
Asphalte sec	0,67		0,6	

14.2 Cinématique du solide



Le solide Σ est en mouvement par rapport au repère fixe R. On définit trois vecteurs en $M \in \Sigma$:

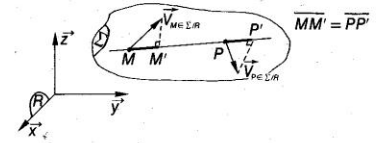
$\vec{\Omega}_{\Sigma/R}$: vitesse de rotation................. rad/s
$\vec{V}_{M\in\Sigma/R}$: vitesse du point M .... m/s
$\Gamma_{M\in\Sigma/R}$: accélération du point M............ m/s²

— *Champ des vitesses du solide :*

En $M \in \Sigma$ $\begin{matrix} \vec{\Omega}_{\Sigma/R} \\ \vec{V}_{M\in\Sigma/R} \end{matrix}$ en $P \in \Sigma$ $\begin{matrix} \vec{\Omega}_{\Sigma/R} \\ \vec{V}_{P\in\Sigma/R} \end{matrix}$

$$\boxed{\vec{V}_{P\in\Sigma/R} = \vec{V}_{M\in\Sigma/R} + \overrightarrow{PM} \wedge \vec{\Omega}_{\Sigma/R}}$$

— *Conséquence :* le champ des vitesses du solide est équiprojectif.



■ Solide animé d'un mouvement de translation

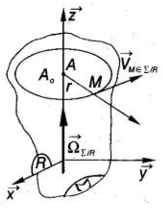
$$\boxed{\vec{\Omega}_{\Sigma/R} = \vec{O}}$$

— *Conséquence :* tous les points du solide ont :
— la même vitesse,
— la même accélération.

■ Solide animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Pour tous les points A du solide coïncidant avec un point A_o de l'axe.

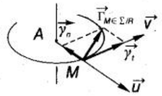
$$\boxed{\vec{V}_{A\in\Sigma/R} = \vec{O}}$$



Trajectoire de $M \in \Sigma$:
Cercle de rayon r ... m.

Vitesse angulaire : ω ... rad/s :
$\vec{\Omega}_{\Sigma/R} = \omega.\vec{z}$.

Vitesse du point M : v_M ... m/s :



$v_M = |\vec{V}_{M\in\Sigma/R}| = r.\omega$.

Accélération du point $M \in \Sigma$:

Accélération angulaire : $\dfrac{d\vec{\Omega}}{dv} = \omega'\vec{z}$ ... rad/s².

Accélération linéaire : $\vec{\Gamma}_{M\in\Sigma/R} = \vec{\gamma}_n + \vec{\gamma}_t$

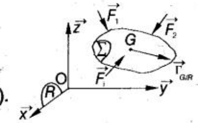
Accélération normale : $\vec{\gamma}_n = -\omega^2 r\vec{u}$ ... m/s²

Accélération tangentielle : $\vec{\gamma}_t = \dfrac{dv_M}{dt}\vec{v}$ ... m/s²

14.3 Dynamique du solide

— *Théorème de la résultante dynamique :*

$$\boxed{\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{\Gamma}_{G/R}}$$



G : centre de gravité de (Σ).

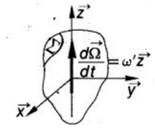
$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}}$: résultante des forces extérieures .... N
m : masse du solide Σ .... kg
$\vec{\Gamma}_{G/R}$: accélération du centre de gravité .... m/s²

Remarque : ce théorème est appliquable pour tous les mouvements du solide (Σ).

— *Théorème du moment dynamique :*

Cas particulier : (Σ) en rotation autour d'un axe fixe (l'axe $\vec{z}$ de R par exemple).

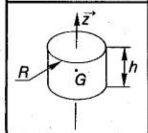
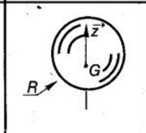
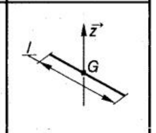
$$\boxed{\Sigma \vec{M}_t\,\vec{z} = J_z\,\omega'}$$



$J_z\,\omega'$ = moment dynamique en projection sur l'axe $\vec{z}$.

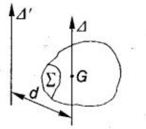
$\Sigma \vec{M}_t.\vec{z}$: résultante des moments des forces s'appliquant sur Σ en projection sur $\vec{z}$..................................... m.N
ω' : accélération angulaire de Σ .... rad/s²
J_{Gz} : moment d'inertie de Σ/axe $\vec{z}$....... kg.m²

Valeurs de J_z : masse m .... kg
dimensions .... m

Cylindre plein Disque épaisseur négligeable	Sphère pleine	Tige épaisseur négligeable
		
$J_{Gz} = m\,\dfrac{R^2}{2}$	$J_{Gz} = \dfrac{2\,m\,R^2}{5}$	$J_{Gz} = \dfrac{ml^2}{12}$

— *Théorème de Huyghens :*

$$\boxed{J'_{\Delta} = J_{\Delta G} + m\,d^2}$$



J'_{Δ} : moment d'inertie de Σ par rapport à Δ'
unité .... kg.m²

$J_{\Delta G}$: moment d'inertie de Σ par rapport à Δ_G (passant par son centre de gravité et parallèle à Δ)........................... kg.m²
m : masse du solide Σ........................ kg
d : distance séparant les deux axes parallèles Δ' et Δ_G.................................... m