

# Rapport d'apprentissage - Partie 1

Erwan Rahis - M2 EIF

Mars 2020

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Le groupe AXA . . . . .	3
1.2	L'équipe Risques Vie, Epargne et Santé . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Le risque de longévité</b>	<b>4</b>
2.1	Solvabilité II . . . . .	4
2.2	Le modèle de longévité . . . . .	6
2.2.1	Composantes du modèle . . . . .	6
2.2.2	Modèles stochastiques . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Projets menés</b>	<b>9</b>
3.1	Sélection de modèle . . . . .	9
3.1.1	Critères de prudence . . . . .	9
3.1.2	Critères statistiques . . . . .	10
3.1.3	Outils . . . . .	11
3.2	L'entropie . . . . .	13
3.2.1	Notations . . . . .	13
3.2.2	Indicateurs . . . . .	13
3.2.3	Formule . . . . .	14
3.2.4	Rectangularisation de la courbe de survie . . . . .	14
3.2.5	Flat Shock . . . . .	15
3.2.6	Equivalent Flat Shock . . . . .	15
3.2.7	Sensibilités . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Impacts et objectif</b>	<b>17</b>
4.1	Impacts . . . . .	17
4.2	Objectifs . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Annexe</b>	<b>18</b>
5.1	Données et graphiques : Entropie . . . . .	18

*Tuteur d'apprentissage : M. VERMANDEL Gauthier, Université Paris Dauphine*

*Maître d'apprentissage : M. BURG Antoine, Analyste Risque de Longévité, AXA GRM*

# 1 Introduction

Ce rapport a pour but de présenter la première partie de ma mission en tant qu'apprenti Analyste Risque de Longévité au sein de la direction des risques du groupe AXA, de présenter le contexte, les projets menés et de réfléchir aux objectifs. La mission principale en cette première partie d'apprentissage est de découvrir les sujets traités par l'équipe, comprendre les procédés et les modèles utilisés, ainsi qu'apporter une aide technique à l'équipe.

## 1.1 Le groupe AXA

Le Group Risk Management fait partie du GIE d'AXA, ou groupement d'intérêt économique. C'est un groupement qui permet de mettre en commun les activités des membres, améliorer ou accroître les résultats. L'objectif du GIE AXA est d'assurer la cohérence des stratégies du groupe, la consistance des approches commerciales et l'optimisation des risques et des résultats. Le GIE définit et coordonne les politiques du groupe, les projets transversaux et les standards du groupe en identifiant et partageant les *best practices*<sup>1</sup>. Le GIE fournit un support pour les entités dans le but de les aider à développer leurs offres, leur management, à piloter leurs standards ainsi que leur gestion des risques.

Le groupe AXA est présent dans 61 pays, majoritairement en Europe, et possède de nombreuses filiales couvrant plusieurs domaines tels que la banque, la gestion d'actifs et l'assurance son activité principale. Le chiffre d'affaires du groupe est de 103 532 millions d'euros et le résultat opérationnel de 6451 millions d'euros selon les chiffres de 2019<sup>2</sup>. La majorité du résultat est créé par l'activité d'assurance P&C<sup>3</sup> puis par les activités liées à l'assurance vie, épargne et retraite. 126 000 collaborateurs travaillent pour le groupe dirigé depuis 2016 par l'homme d'affaires allemand Thomas Buberl.

## 1.2 L'équipe Risques Vie, Epargne et Santé

Au sein du GIE se trouve le GRM, qui est lui-même divisé en différentes structures, parmi lesquelles le **GRM Life, Health & Savings** et le **GRM P&C**. L'un s'occupant des activités vie et l'autre des activités non-vie du groupe. Le directeur des risques du groupe est M. Guidée, il supervise tous les départements risques du groupe. L'équipe retraite et fonds de pensions se trouve dans la division Life du GRM et englobe les sujets liés au risque de longévité et au suivi des produits de retraite et fonds de pension.

Les équipes risques ont pour mission de développer les modèles de risques internes tout en étant alignés avec la réglementation Solvabilité II relative aux compagnies d'assurances. Le risque de longévité est inclus dans la catégorie des risques dits techniques. Les risques vie techniques sont des risques actuariels (non financiers) qui peuvent provenir d'un choc sur les niveaux des *Best Estimates*<sup>4</sup>, la volatilité et/ou la tendance des sinistres liés aux contrats d'assurance. Ils couvrent donc les risques associés au taux de survie ou à l'état de santé des assurés (risques biométriques), à leur comportement étant donné les options de leur contrat et aux coûts liés à la gestion des déclarations et à la gestion administrative des opérations. Les risques biométriques incluent donc les risques de catastrophe (pandémie, terrorisme, tremblement de terre...), les risques de mortalité (sous-estimation des taux de mortalité), les risques de longévité (sur-estimation des taux de mortalité) ainsi que les risques liés aux dépenses de santé. L'équipe en charge du modèle interne a pour but de développer ces modèles mais aussi de fournir un support aux entités AXA qui sont soumises au risque de longévité en répondant à leurs questions, en mettant en place des formations et en faisant la revue de leurs *Best Estimates*.

---

<sup>1</sup>Pratiques communes au groupe.

<sup>2</sup><https://www.axa.com/fr/page/chiffres-cles>

<sup>3</sup>*Property and casualty*, en français : assurance IARD, incendie, accidents et risques divers par opposition à l'assurance vie.

<sup>4</sup>c.f. partie 2.1.

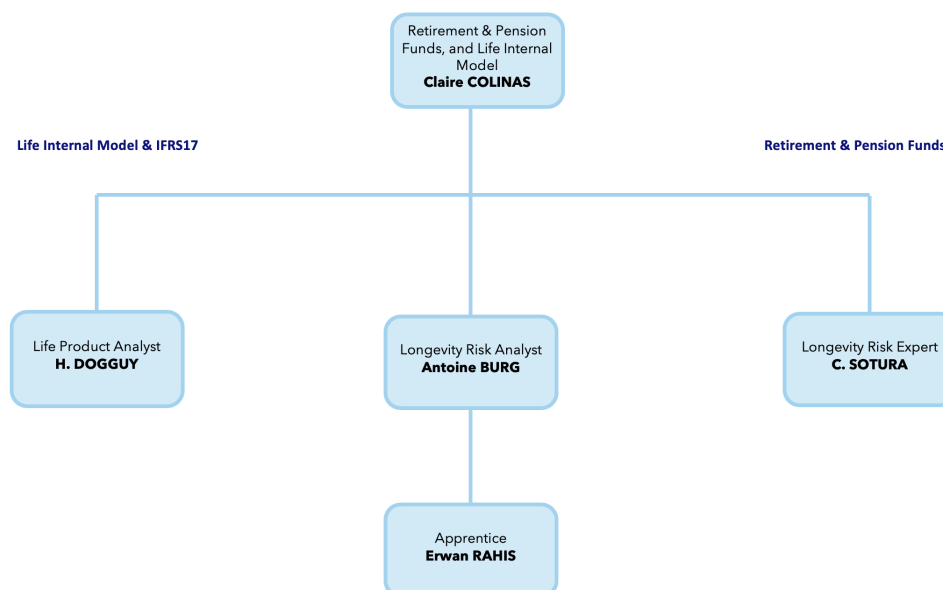


Figure 1: Organigramme de l'équipe Retraite, Fonds de pension et modèle interne

Ma mission en tant qu'analyste risque de longévité est de participer aux travaux de l'équipe concernant ce sujet et de développer une problématique liée aux modèles. Les deux sections suivantes vont présenter le contexte dans lequel j'évolue pour une meilleure compréhension de l'utilité de ces missions.

## 2 Le risque de longévité

### 2.1 Solvabilité II

Les compagnies d'assurances évoluent dans le contexte de Solvabilité II à l'instar des banques qui évoluent dans celui de Bâle 3. Cette directive mise en place depuis le 1er janvier 2016 a pour but de garantir la protection des assurés en incitant à renforcer la gestion des risques tout en harmonisant les normes au niveau européen. Cela passe par les piliers suivants : une exigence de fonds propres, une surveillance des risques et de l'exposition et un devoir de transparence pour permettre le contrôle.

Le pilier 1 contient les exigences quantitatives. Au niveau comptable, la directive promeut une vision du bilan plus prudentielle (comme avec les IFRS) avec une évaluation des actifs et des passifs dite *market consistent*, et une utilisation des hypothèses *Best Estimates* pour les provisions techniques (Figure 2). Pour les actifs, les hypothèses *Best Estimates* consistent en une comptabilisation en valeur de marché. Pour le passif, les *Best Estimates Liabilities* reflètent une vision des engagements de l'assureur consistante avec le marché, basée sur les données de l'assureur. Ils sont calculés comme la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents<sup>5</sup>. Les calculs doivent être appliqués sur des données actualisées. Les hypothèses doivent être réalistes et les modèles adéquats et robustes. Deux exigences de capital ont été mises en place dans ce pilier : le **Solvency Capital Requirement (SCR)** et le **Minimum Capital Requirement (MCR)**. Le SCR est un besoin cible, c'est le capital exigible pour faire face à une ruine à horizon 1 an dans 99,5% des cas. Le MCR est une condition d'agrément, c'est le minimum absolu de capital à détenir. Le SCR se calcule pour tous les types de risques (Figure 3) et est composé du BSCR, plus un ajustement pour capacité d'absorption des pertes par les provisions techniques

<sup>5</sup>Code des assurances. Art. R. 351-2, Décret du 7 mai 2015.

et les impôts différés, plus le capital requis par le risque opérationnel.

Le BSCR est le capital de solvabilité de base et contient le SCR Longévité qui est l'objet de cette partie. La formule du BSCR est modulaire, c'est à dire que chaque module est étudié de manière indépendante des autres risques. Il peut être quantifié par une approche scénario ou facteur, soit par un stress donné ou alors par l'application d'une formule fermée. La diversification entre les risques est finalement prise en compte en utilisant les matrices de corrélation pour agréger les modules. L'entreprise a également la possibilité d'utiliser un modèle interne validé par le régulateur pour calculer le SCR. C'est le cas d'AXA.

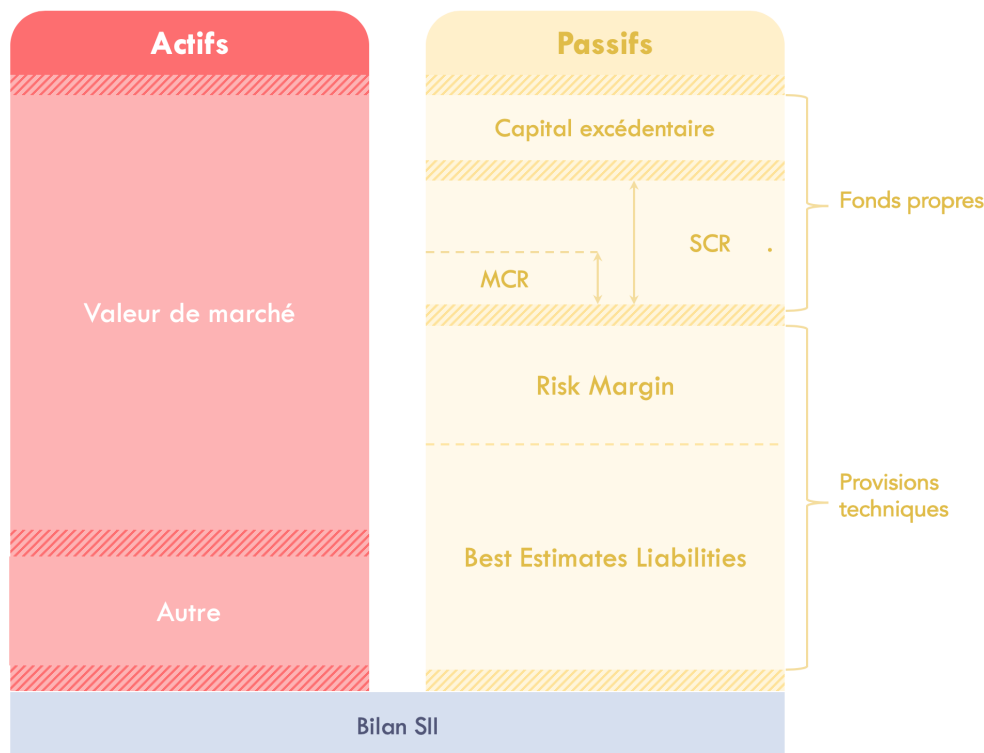


Figure 2: Bilan SII

Le pilier 2 regroupe les exigences qualitatives. Il comprend le renforcement de la gouvernance, du contrôle interne, de la gestion des risques au sein de l'entreprise et de l'auto-évaluation des besoins en capital (ORSA). Le principe de prudence est appliqué. La gouvernance doit garantir une gestion saine, prudente et efficace de l'entreprise. Elle doit mettre en place un dispositif de contrôle interne garantissant la fiabilité de l'information permettant d'alimenter le pilier 1. D'après le pilier 2, le système de gouvernance doit avoir 4 fonctions clés : le système de gestion des risques et du contrôle interne, la fonction de conformité et la fonction actuarielle. L'organisme est soumis à une évaluation interne appelée ORSA. Son objectif est de relier le profil de risque au niveau de solvabilité et à l'allocation de capital. C'est un rapport qui permet de vérifier la cohérence entre les montants sur le bilan et le profil de risque de l'entreprise, d'évaluer les risques émergent des calculs et le besoin global de solvabilité, puis planifier les besoins futurs.

Le pilier 3 fait état des exigences en termes de reporting prudentiel et d'information du public. Les informations doivent être mises à la disposition du grand public afin de renforcer la transparence et la discipline de marché. Le rapport doit contenir le niveau d'information suffisant pour permettre aux marchés et analystes de se défaire de la dépendance vis-à-vis des agences de notation (c.f. Crise des Subprimes). Ce rapport doit être détaillé aux autorités de contrôle et les données doivent être auditées.



### 2.2.2 Modèles stochastiques

Le modèle utilisé par une entité pour la calibration de son scénario STEC est choisi parmi plusieurs modèles stochastiques. Dans le domaine de la longévité, deux modèles sont largement utilisés et étudiés.

Le premier est le modèle de Lee Carter créé en 1992. Il estime le logarithme du taux de mortalité en fonction d'un paramètre lié à l'âge et d'un autre lié à la période.

$$\ln(m(x, t)) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} \quad (1)$$

C'est un modèle extrapolant qui utilise l'historique de l'expérience de mortalité d'un pays pour calibrer les paramètres. C'est un modèle à deux facteurs de la surface de mortalité (âge/temps) où le niveau général de mortalité est un processus stochastique dans le temps et où la distribution de la mortalité selon l'âge est déterministe et calibrée sur les données historiques. Il suppose que les futurs taux de mortalité vont continuer de s'améliorer à la même vitesse que dans le passé en ignorant les dynamiques spécifiques à certaines cohortes.

Le deuxième est le modèle *Age Period Cohort* introduit en 2006, qui est une amélioration du modèle Lee Carter. Il introduit en plus un paramètre cohorte qui prend en compte la dynamique résultant de l'expérience vécue par une génération spécifique.

$$\ln(m(x, t)) = \beta_x^{(1)} + \frac{1}{n_a} \kappa_t^{(2)} + \frac{1}{n_a} \gamma_{t-x}^{(2)} \quad (2)$$

C'est une alternative robuste, simple et suffisamment prudente au modèle Lee Carter. Sa faiblesse est qu'il intègre un effet cohorte qui n'est peut-être pas réaliste et qui engendre plus de volatilité.

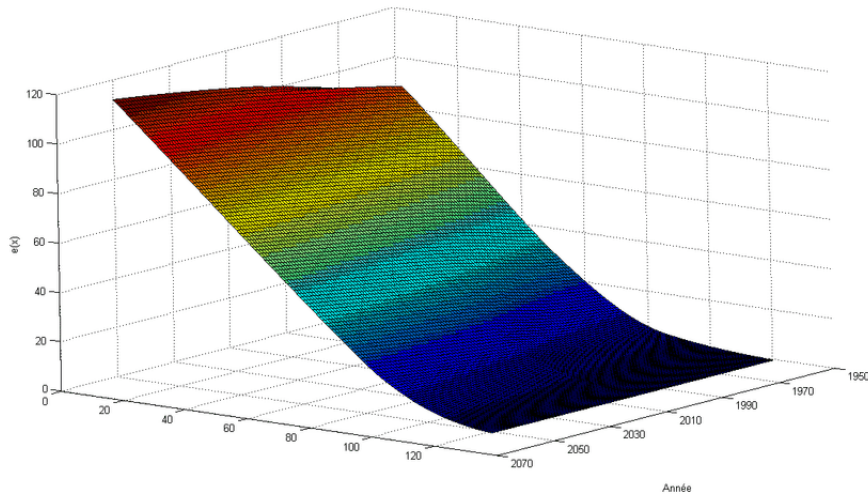


Figure 4: Surface de mortalité ajustée (Lee Carter) - par Frédéric Planchet

Les tables générées sont des tables de taux d'améliorations cumulés à deux dimensions, l'âge et le temps. La figure 4 est une représentation en trois dimensions des taux de mortalité. Ces tables sont créées à partir des données de mortalité historiques des pays. Elles permettent la création de scénarios lorsqu'elles sont appliquées aux *Best Estimates* des entités. L'application aux *Best Estimates* consiste à multiplier la première année du BE aux taux d'améliorations cumulés. La première année des taux d'améliorations contient uniquement des taux égaux à 1 ce qui correspondent à l'année de projection. La multiplication des années suivantes permet la création d'un scénario à partir du BE. La figure 5 illustre la méthode de calcul.

1. Taux d'améliorations cumulés générés par le modèle  
sur les données Françaises des Femmes, quantile 99.5%

	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
30	100%	85%	85%	79%	79%	73%	71%	68%	65%
31	100%	85%	85%	78%	78%	72%	71%	67%	64%
32	100%	86%	86%	80%	80%	74%	73%	70%	67%
33	100%	86%	86%	80%	80%	75%	73%	70%	67%
34	100%	86%	86%	80%	80%	75%	73%	70%	67%
35	100%	87%	87%	81%	81%	75%	74%	71%	68%
36	100%	88%	88%	82%	82%	77%	76%	73%	70%
37	100%	89%	89%	85%	85%	80%	79%	76%	74%
38	100%	90%	90%	86%	86%	82%	80%	78%	76%
39	100%	89%	89%	85%	85%	80%	79%	77%	74%
40	100%	90%	90%	86%	86%	82%	80%	78%	76%
41	100%	90%	90%	86%	86%	82%	81%	78%	76%
42	100%	91%	91%	87%	87%	84%	83%	80%	78%
43	100%	92%	92%	89%	89%	85%	84%	82%	80%
44	100%	92%	92%	89%	89%	85%	84%	82%	81%
45	100%	93%	93%	90%	90%	87%	86%	84%	82%
46	100%	94%	94%	91%	91%	88%	87%	86%	84%
47	100%	94%	94%	91%	91%	88%	88%	86%	85%
48	100%	95%	95%	93%	93%	91%	90%	89%	88%
49	100%	94%	94%	92%	92%	89%	88%	87%	85%
50	100%	96%	96%	94%	94%	92%	91%	90%	89%
51	100%	96%	96%	94%	94%	92%	92%	91%	90%
52	100%	95%	95%	93%	93%	91%	90%	89%	87%
53	100%	95%	95%	93%	93%	91%	91%	89%	88%

2. Table réglementaire Française des taux de mortalité des Femmes (TGF)

TGF	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
30	0,028%	0,028%	0,027%	0,027%	0,027%	0,027%	0,027%	0,027%	0,027%
31	0,028%	0,028%	0,028%	0,028%	0,028%	0,028%	0,028%	0,028%	0,027%
32	0,029%	0,029%	0,029%	0,029%	0,029%	0,029%	0,029%	0,029%	0,029%
33	0,030%	0,031%	0,031%	0,030%	0,030%	0,031%	0,030%	0,030%	0,030%
34	0,032%	0,032%	0,032%	0,032%	0,032%	0,032%	0,031%	0,031%	0,031%
35	0,034%	0,034%	0,035%	0,034%	0,034%	0,034%	0,034%	0,034%	0,034%
36	0,037%	0,036%	0,036%	0,036%	0,036%	0,036%	0,036%	0,035%	0,036%
37	0,039%	0,039%	0,039%	0,039%	0,038%	0,038%	0,038%	0,038%	0,038%
38	0,042%	0,042%	0,042%	0,042%	0,042%	0,042%	0,042%	0,042%	0,041%
39	0,046%	0,046%	0,046%	0,046%	0,046%	0,045%	0,045%	0,045%	0,044%
40	0,051%	0,051%	0,051%	0,051%	0,050%	0,050%	0,050%	0,050%	0,049%
41	0,056%	0,057%	0,056%	0,056%	0,055%	0,055%	0,055%	0,055%	0,054%
42	0,064%	0,063%	0,063%	0,063%	0,062%	0,062%	0,062%	0,062%	0,062%
43	0,077%	0,076%	0,076%	0,075%	0,074%	0,074%	0,074%	0,073%	0,073%
44	0,078%	0,078%	0,077%	0,077%	0,076%	0,076%	0,076%	0,075%	0,075%
45	0,088%	0,087%	0,086%	0,086%	0,085%	0,085%	0,084%	0,083%	0,083%
46	0,096%	0,094%	0,094%	0,093%	0,092%	0,092%	0,091%	0,091%	0,091%
47	0,104%	0,103%	0,103%	0,102%	0,102%	0,101%	0,100%	0,100%	0,099%
48	0,115%	0,114%	0,114%	0,113%	0,112%	0,111%	0,110%	0,110%	0,108%
49	0,137%	0,136%	0,135%	0,133%	0,132%	0,131%	0,130%	0,129%	0,127%
50	0,154%	0,152%	0,151%	0,149%	0,148%	0,147%	0,145%	0,143%	0,142%
51	0,162%	0,160%	0,159%	0,157%	0,156%	0,155%	0,153%	0,151%	0,150%
52	0,173%	0,173%	0,171%	0,169%	0,168%	0,166%	0,164%	0,162%	0,161%
53	0,188%	0,186%	0,184%	0,182%	0,180%	0,178%	0,176%	0,173%	0,171%

3. Taux de mortalités projetés par le scénario  
du modèle , quantile 99.5%

F_995	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
30	0,028%	0,024%	0,024%	0,022%	0,022%	0,020%	0,020%	0,019%	0,018%
31	0,028%	0,024%	0,024%	0,022%	0,022%	0,020%	0,020%	0,019%	0,018%
32	0,029%	0,025%	0,025%	0,023%	0,023%	0,021%	0,021%	0,020%	0,019%
33	0,030%	0,026%	0,026%	0,024%	0,024%	0,022%	0,022%	0,021%	0,020%
34	0,032%	0,028%	0,028%	0,026%	0,026%	0,024%	0,024%	0,023%	0,022%
35	0,034%	0,030%	0,030%	0,028%	0,028%	0,026%	0,025%	0,024%	0,023%
36	0,037%	0,033%	0,033%	0,031%	0,031%	0,029%	0,028%	0,027%	0,026%
37	0,039%	0,035%	0,035%	0,033%	0,033%	0,031%	0,030%	0,029%	0,028%
38	0,042%	0,038%	0,038%	0,036%	0,036%	0,034%	0,034%	0,033%	0,032%
39	0,046%	0,041%	0,041%	0,039%	0,039%	0,037%	0,037%	0,036%	0,034%
40	0,051%	0,046%	0,046%	0,044%	0,044%	0,042%	0,041%	0,040%	0,039%
41	0,056%	0,051%	0,051%	0,048%	0,048%	0,046%	0,045%	0,044%	0,043%
42	0,064%	0,059%	0,059%	0,056%	0,056%	0,054%	0,053%	0,052%	0,051%
43	0,077%	0,071%	0,071%	0,068%	0,068%	0,065%	0,064%	0,063%	0,062%
44	0,078%	0,072%	0,072%	0,069%	0,069%	0,066%	0,065%	0,064%	0,063%
45	0,088%	0,082%	0,082%	0,079%	0,079%	0,076%	0,075%	0,074%	0,072%
46	0,096%	0,090%	0,090%	0,087%	0,087%	0,084%	0,084%	0,082%	0,081%
47	0,104%	0,098%	0,098%	0,095%	0,095%	0,092%	0,091%	0,090%	0,088%
48	0,115%	0,110%	0,110%	0,107%	0,107%	0,105%	0,104%	0,102%	0,101%
49	0,137%	0,129%	0,129%	0,125%	0,125%	0,122%	0,120%	0,118%	0,117%
50	0,154%	0,147%	0,147%	0,144%	0,144%	0,141%	0,140%	0,139%	0,137%
51	0,162%	0,156%	0,156%	0,153%	0,153%	0,150%	0,149%	0,147%	0,146%
52	0,175%	0,166%	0,166%	0,162%	0,162%	0,158%	0,157%	0,155%	0,153%
53	0,188%	0,180%	0,180%	0,175%	0,175%	0,172%	0,170%	0,168%	0,166%
54	0,192%	0,184%	0,184%	0,181%	0,181%	0,177%	0,176%	0,174%	0,172%
55	0,198%	0,190%	0,190%	0,187%	0,187%	0,183%	0,182%	0,180%	0,178%
56	0,222%	0,213%	0,213%	0,208%	0,208%	0,204%	0,202%	0,201%	0,198%

Données du modèle : *Human Mortality Database*, University of California, Berkeley (USA), and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Available at [www.mortality.org](http://www.mortality.org)  
Données de la table réglementaire : INSEE, Tables de mortalité par sexe, âge et niveau de vie. [www.insee.fr](http://www.insee.fr)

Figure 5: Calcul d'un scénario avec des taux d'améliorations cumulés et une table de taux de mortalité



### 3 Projets menés

En première partie d'apprentissage, deux principaux projets ont été menés en parallèle. L'un concerne la refonte des outils utilisés pour sélectionner un modèle, l'autre porte sur l'implémentation d'un indicateur de mortalité qui n'est pas encore utilisé par l'équipe : l'entropie.

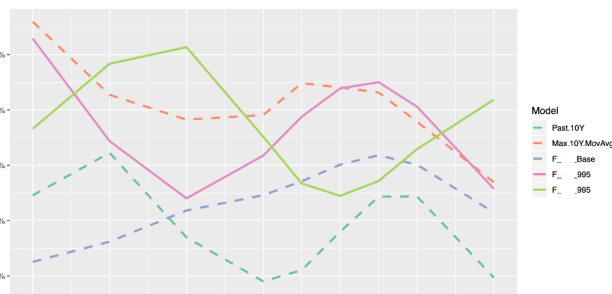
#### 3.1 Sélection de modèle

La sélection d'un modèle stochastique se base sur des critères quantitatifs et qualitatifs impliquant un jugement d'expert. La calibration est faite séparément pour les hommes et les femmes pour chaque pays. Les indicateurs et résultats analysés permettent d'éliminer progressivement les modèles pour n'en retenir qu'un. Pour la cohérence, il est préféré de choisir le même modèle pour les deux genres. De nombreuses études ont montré que les améliorations pour les hommes et les femmes sont fortement corrélées et devraient suivre la même dynamique au sein d'un pays.

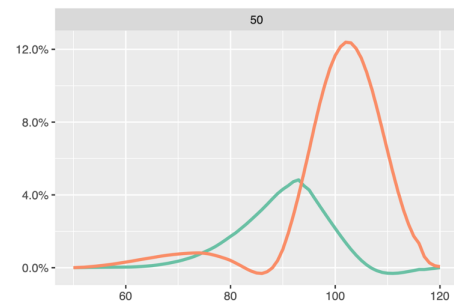
##### 3.1.1 Critères de prudence

La première étape de pré-sélection est faite sur les critères de prudence. Nous comparons les résultats des scénarios extrêmes aux données historiques. Un indicateur est le **Average anual improvements by age group** qui permet de comparer les améliorations moyennes des 10 premières années de projection du scénario aux améliorations observées sur les 10 dernières années. Nous les comparons également à un Benchmark qui est l'amélioration historique maximum sur les 10 dernières années (Figure 6.1).

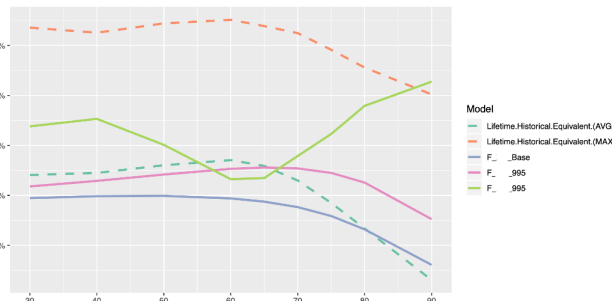
1. Moyenne des améliorations annuelles par âge, Femmes, comparaison entre les scénarios et les Benchmarks



2. Probabilité de survie additionnelle, cohorte 50, Femmes,



3. Lifetime Equivalent Improvement, scénarios et Benchmarks



4. Résultats en tableaux

Model	variable	30	40	50	60	65
F_._Base	10YEquivalent	0,22%	0,69%	1,25%	1,49%	1,76%
F_._Base	AVG10Y	0,26%	0,62%	1,18%	1,46%	1,71%
F_._Base	AVG20Y	0,30%	0,65%	1,28%	1,57%	1,83%
F_._Base	Lifetime Equivalent	1,47%	1,49%	1,50%	1,47%	1,44%
F_._005	10YEquivalent	0,63%	0,36%	0,20%	0,32%	0,42%
F_._005	AVG10Y	0,35%	0,20%	0,11%	0,17%	0,23%
F_._005	AVG20Y	0,66%	0,37%	0,21%	0,33%	0,44%
F_._005	Lifetime Equivalent	0,43%	0,42%	0,39%	0,35%	0,32%
F_._995	10YEquivalent	4,59%	2,55%	1,60%	2,66%	3,42%
F_._995	AVG10Y	4,29%	2,44%	1,40%	2,18%	2,88%
F_._995	AVG20Y	4,05%	2,29%	1,31%	2,04%	2,71%
F_._995	Lifetime Equivalent	1,59%	1,65%	1,71%	1,77%	1,78%
F_._Base	10YEquivalent	2,10%	1,13%	0,73%	1,27%	1,62%
F_._Base	AVG10Y	2,33%	1,31%	0,75%	1,17%	1,55%
F_._Base	AVG20Y	2,38%	1,34%	0,76%	1,19%	1,58%
F_._Base	Lifetime Equivalent	1,09%	1,10%	1,12%	1,11%	1,09%
F_._005	10YEquivalent	0,53%	1,60%	0,86%	0,18%	0,20%
F_._005	AVG10Y	0,29%	1,26%	1,42%	0,21%	0,11%
F_._005	AVG20Y	0,15%	0,71%	1,55%	0,81%	0,26%
F_._005	Lifetime Equivalent	0,54%	0,55%	0,16%	0,16%	0,20%

Figure 6: Graphiques et tableau des indicateurs, données de la France

Les **probabilités de survie additionnelles** sont calculées de manière à s'assurer que nous appliquons bien un choc sur certains âges. Ce sont les différences de probabilité de survie entre le

modèle et le BE. En effet, le risque de longévité est plus significatif aux âges élevés, nous souhaitons donc que nos modèles accentuent les améliorations à ces âges. Ces courbes (Figure 6.2) permettent de manière générale de voir à quel âge un modèle est plus ou moins conservateur que le *Best Estimate*.

Nous calculons le **Lifetime equivalent improvement** qui est l'amélioration unique qui, appliquée à tous les âges du *Best Estimate*, égalise les espérances de vie aux espérances de vie projetées pour une cohorte donnée. Cet indicateur permet de voir de manière générale quel modèle génère le plus d'améliorations (Figure 6.3).

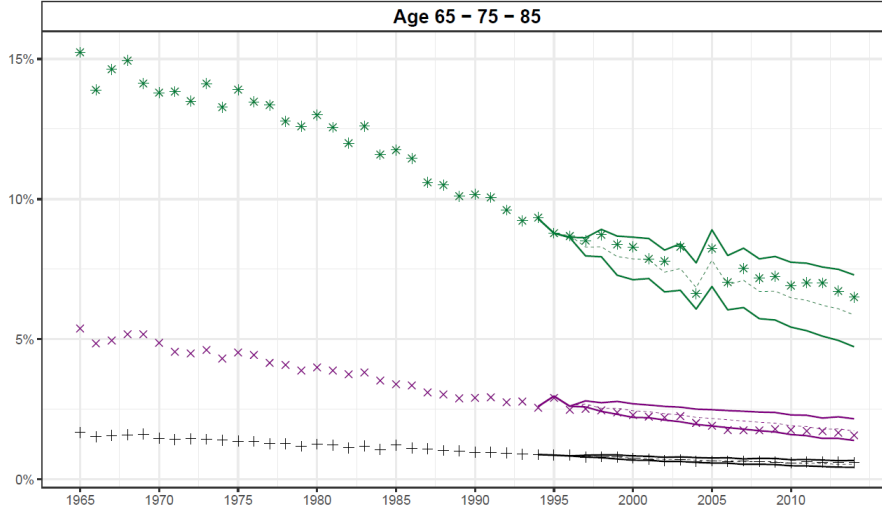


Figure 7: Backtesting sur la période 1665 - 2010, aux âges 65, 75 et 85

Un *backtesting* des modèles est ensuite effectué. Il consiste en la génération de scénarios calibrés sur une période antérieure afin d'obtenir des projections sur les dernières années d'historique. Cela va permettre d'évaluer le pouvoir prédictif du modèle en comparant le scénario de base aux données historiques (Figure 7).

### 3.1.2 Critères statistiques

L'étape suivante consiste en une sélection selon des critères statistiques de robustesse et de qualité du modèle. La qualité du modèle est évaluée par le critère d'information bayésien (BIC) donné par la formule :

$$BIC_k = \hat{l}_k - \frac{1}{2}n_k \log N \quad (3)$$

avec  $\hat{l}_k$  le maximum de log-vraisemblance,  $n_k$  paramètres et  $N$  observations. Cet indicateur doit être le plus faible possible. Le deuxième indicateur de la qualité du modèle est la forme des résidus standardisés, ou résidus de Pearson. Une des hypothèses de modélisation est de considérer le nombre de décès par âge et par année comme des tirages aléatoires indépendants suivant une loi de Poisson. Si cette hypothèse est vraie, les résidus standardisés, suivent approximativement une loi normale i.i.d. Pour vérifier cette hypothèse nous regardons le motif du signe des résidus de manière graphique (Figure 8).

La robustesse est ensuite évaluée en calculant des sensibilités. Les scénarios sont générés en étant calibrés avec des paramètres différents. Les différences d'estimation relatives à ces changements doivent être minimisées pour avoir le modèle le plus robuste. Nous comparons les variations relatives aux indicateurs de mortalité pour chaque scénario pour estimer ces sensibilités.

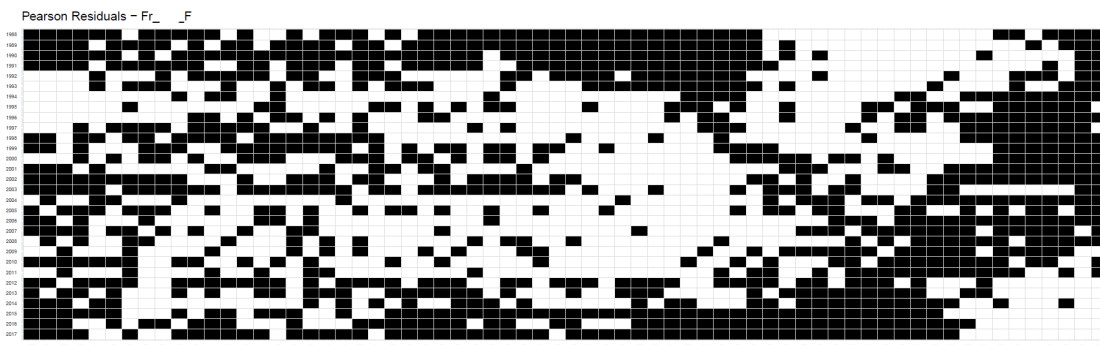


Figure 8: Résidus de Pearson pour un modèle

Quand le modèle contient un effet cohorte  $\gamma_{t-x}$ . Ce paramètre gamma est projeté dans les périodes futures grâce à un processus ARIMA(p,d,q) basé sur les données passées. La sélection des paramètres de l'ARIMA fait l'objet d'un procédé supplémentaire. Les paramètres retenus doivent respecter certaines conditions de robustesse.

### 3.1.3 Outils

Les outils utilisés pour effectuer ce processus ont fait l'objet de mon premier projet. Tout d'abord, une évaluation des outils existants et un diagnostic des aspects à améliorer était nécessaire. Ces outils étaient à l'origine implémentés sur Excel avec trois différents fichiers contenant des macros. Le premier outil est appelé l'outil CALCS et permettait pour chaque scénario<sup>6</sup> généré de calculer une batterie d'indicateurs et de graphiques liés à la mortalité et utiles à l'analyse et la comparaison des modèles. Le deuxième est un outil de backtesting servant à comparer les données historiques aux outputs des modèles calibrés sur des années antérieures, afin de voir si les projections des modèles peuvent correspondre aux données historiques. Le dernier outil est un outil d'agrégation des résultats qui aide à la sélection du modèle en mettant en forme des tableaux et des graphiques de comparaison.

Les premiers essais de l'outil CALCS permettent de dresser un diagnostic rapide. La vitesse d'exécution de l'outil doit être réduite. Il convient alors d'éplucher le code VBA et les feuilles du classeur pour en comprendre la source. Ce fichier contient en effet de nombreuses feuilles toutes inter connectées par des formules agrégées qui rendent difficile sa compréhension. Les macros consistent en l'importation de scénarios en csv puis en une dizaine d'optimisations de fonction pour chacun des modèles. Les optimisations font appel à l'outil *Goal Seek* d'Excel et est utilisé pour calculer certains indicateurs. Une étude des temps d'exécution des macros a mis en avant que plus de 90% du temps provient de l'optimisation (Figure 9)

Améliorer l'outil en se limitant à VBA n'offrait pas de réelle solution puisque la source du temps d'exécution provient d'une fonction propre à Excel. J'ai pris l'initiative de tester cette optimisation sous R, ce qui a immédiatement montré des résultats rapides et cohérents. Les tests faits ont donné des résultats similaires à l'outil Excel avec des temps d'exécution moins élevés (Première ligne du graphique Figure 9). Les tests ont été faits avec plusieurs modèles et avec deux types d'optimisation sur Excel : *Solver* et *Goal Seek*. La décomposition montre le temps d'exécution de l'optimisation pour l'indicateur Flat Shock équivalent et *Unique Equivalent Improvement*, et le reste du temps d'exécution lié aux imports de données. Les mêmes calculs sous R nécessitent des temps d'exécution jusqu'à 10 fois moins élevés.

La solution a donc été de reprendre entièrement l'outil et de le développer sous R. Il a fallu étudier toutes les fonctions, les indicateurs, graphiques et autres sorties pour les transcrire. La réflexion s'est ensuite portée sur l'entrée des données et la sortie. C'est donc un fichier Excel de paramètres

<sup>6</sup>Un scénario = une table de taux d'améliorations cumulés pour un sexe, un modèle et un quantile.

qui va être rempli par l'utilisateur contenant tous les chemins vers les fichiers et dossiers relatifs aux scénarios générés ainsi que des choix de sorties comme la liste des modèles à analyser, les quantiles et le genre. Une fois ce fichier complété, il suffit de lancer le script R pour obtenir un nouveau dossier contenant les sorties voulues. C'est ensuite l'outil de backtesting qui a fait l'objet d'un renouvellement. Cet outil nécessitait certaines manipulations manuelles des données qui pouvaient entraîner des erreurs. En intégrant cet outil à l'intérieur du premier outil R, cela a permis de réduire les manipulations des entrées et sorties, de centraliser tout dans un seul fichier et de réduire le temps passé à utiliser tous ces outils.

Pour finir, l'outil Model Selection d'agrégation des résultats a simplement été implémenté en ajoutant quelques paramètres dans le fichier de configuration et en ajustant les sorties pour correspondre aux anciennes sorties. Ces outils ont tous été développés en suivant parallèlement un rapport de calibration SII qui m'a aidé à mieux comprendre l'utilité de chacune des sorties et l'usage que nous en faisons.

De manière générale, ce nouvel outil a permis de réduire le temps passé à effectuer ce processus, d'en simplifier son utilisation en centralisant tous les paramètres dans un seul fichier de configuration et de réduire le risque d'erreur opérationnelle en passant de formules Excel à un code R.

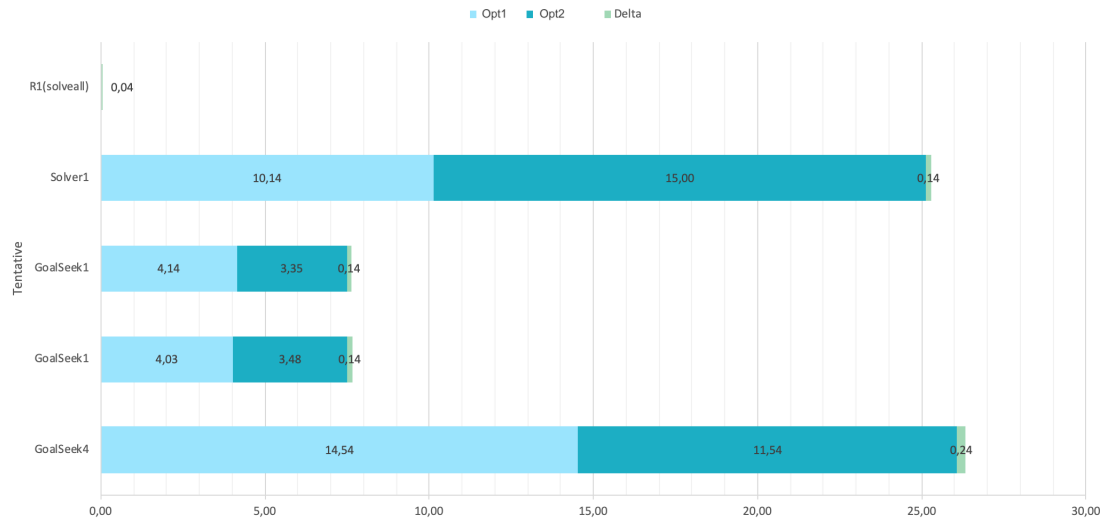


Figure 9: Temps de calcul des outils : En bleu les optimisations, en vert le reste des calculs.

## 3.2 L'entropie

L'entropie, qui signifie “transformation” en grec, est le nom d’une mesure utilisée en physique et mathématiques. De manière générale elle mesure le désordre ou le niveau de désorganisation d’un contenu. Sur une table de mortalité, l’entropie mesure l’homogénéité d’une population face aux événements décès. On peut la définir comme le pourcentage de variation en espérance de vie suite à une réduction de 1% des taux de décès à tous les âges. Afin de comprendre cet indicateur et ses interprétations, il convient de définir les indicateurs liés aux tables de mortalité.

### 3.2.1 Notations

- $D_{x,t}$  : le nombre de décès à l’âge  $x$  et l’année  $t$
- $L_{x,t}$  : l’exposition au risque, le nombre de vivants à l’âge  $x$  et l’année  $t$
- $q_x = \frac{D_{x,t}}{L_{x,t}}$  : le quotient de mortalité entre l’âge  $x$  et  $x+1$
- $l_x = S(x)$  : la fonction de survie qui correspond au nombre de survivant à l’âge  $x$ . Pour la calculer, nous démarrons à l’âge  $x_0 = 0$ , par  $l_{x_0} = 1$ , pour l’obtenir sous forme de pourcentage, ou par  $l_0 = 100,000$ , par convention. Puis, elle est calculée comme une suite :

$$l_{x_n} = l_{x_0} * \prod_{k=0}^{n-1} (1 - q_{x_k}) \quad (4)$$

### 3.2.2 Indicateurs

- $e_x$  : l’espérance de vie résiduelle, le nombre d’année qu’un individu peut espérer vivre après l’âge  $x$ . Par définition,  $e_x = \frac{1}{L_x} \sum_{h>0} l_{x+h}$ . Cet indicateur peut être formulé de deux manières, en période ou en cohorte. En période signifie que nous observons les quotients de mortalité pour une période donnée. En cohorte signifie que nous observons les quotients de mortalité pour une génération donnée, c’est à dire les taux liés aux individus nés la même année.

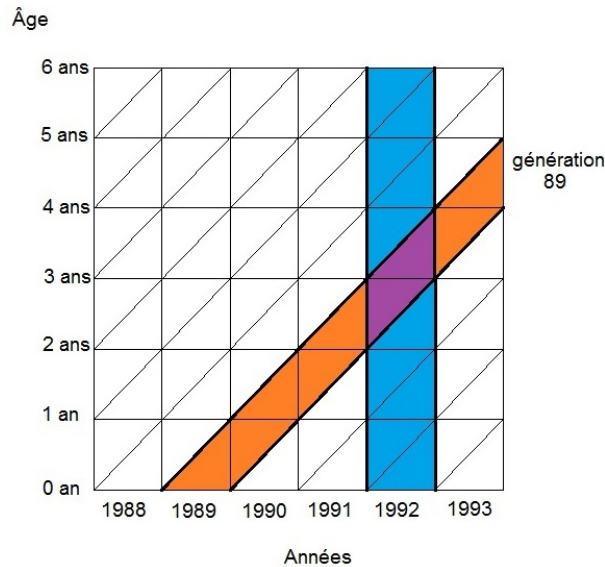


Figure 10: Diagramme de Lexis, en orange : la génération 1989

- **Le diagramme de Lexis** : c’est la représentation de la vie d’un individu sur un axe Âge/Temps. Le lecture peut se faire de manière transversale, en période, ou longitudinale, en cohorte (Figure 10).

### 3.2.3 Formule

L'entropie est une fonction de  $S(x)$  et peut se formuler de plusieurs façons. Si nous reprenons la définition introduite précédemment, elle correspond à la variation de l'espérance de vie par rapport à une variation des taux de décès. En prenant  $\varepsilon$  une petite variation des taux de décès, nous obtenons :

$$\frac{\Delta e_0}{e_0} \approx \left( \frac{\int_0^\infty S(x) \ln(S(x)) dx}{\int_0^\infty S(x) dx} \right) \varepsilon \quad (5)$$

L'écriture discrète de cette formule est :

$$H = - \frac{\sum_{h>0} \frac{l_{x+h}}{l_0} \ln \frac{l_{x+h}}{l_0}}{\sum_{h>0} \frac{l_{x+h}}{l_0}} \quad (6)$$

$$= - \frac{\sum_{h>0} l_{x+h} \ln \frac{l_{x+h}}{l_0}}{\sum_{h>0} l_{x+h}} \quad (7)$$

C'est le rapport du nombre moyen d'années d'espérance de vie perdues du fait des décès, au nombre d'années possibles d'espérance de vie à la naissance.

### 3.2.4 Rectangularisation de la courbe de survie

Cette mesure a permis d'observer un phénomène démographique qu'on appelle la rectangularisation de la courbe de survie. La courbe de survie est la représentation de la fonction de survie  $S(x)$  sur un axe Âge / Nombre de survivants (Figure 11). L'interprétation du coefficient d'entropie permet de déduire la manière dont les décès sont dispersés le long des âges. Si  $H = 0$ , tous les décès se produisent à un même âge, si  $H = 1$ , les décès sont uniformément répartis le long des âges et donc le taux instantané de mortalité est constant de la naissance à l'âge maximal. la rectangularisation témoigne d'une diminution des décès aux âges jeunes et d'une compression de la mortalité autour de l'âge modal<sup>7</sup>. Les décès ont lieu dans un intervalle de plus en plus restreint autour de l'âge modal.

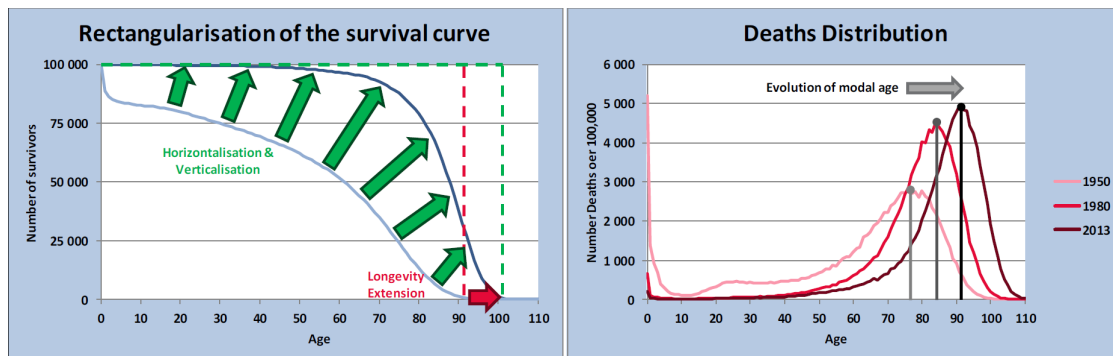


Figure 11: A droite : courbe de distribution des décès, à gauche : courbe de survie

Une première étude a été faite<sup>8</sup>, permettant de développer un nouvel outil sous VBA. Cet outil a pour utilité de comparer des tables de mortalité en calculant des indicateurs comme ceux mentionnés dans les parties 3.2.1 et 3.2.2 et d'y inclure le calcul de l'entropie. L'étude de l'entropie a été portée sur les données<sup>9</sup> de la France pour pouvoir confirmer les observations et comparer les résultats aux articles lus. Nous savons donc que la tendance est à la rectangularisation des courbes donc que le coefficient  $H$  devrait tendre vers 0. Nous obtenons les résultats Figure 12. Cette étude faite, nous avons commencé à chercher une utilisation de cet indicateur dans le cadre professionnel et à en tester les limites.

<sup>7</sup>âge auquel le nombre décès est maximal.

<sup>8</sup>Annexe 1.

<sup>9</sup>Human Mortality Database. University of California, Berkeley (USA), and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Available at [www.mortality.org](http://www.mortality.org). Downloaded Jan-2020.

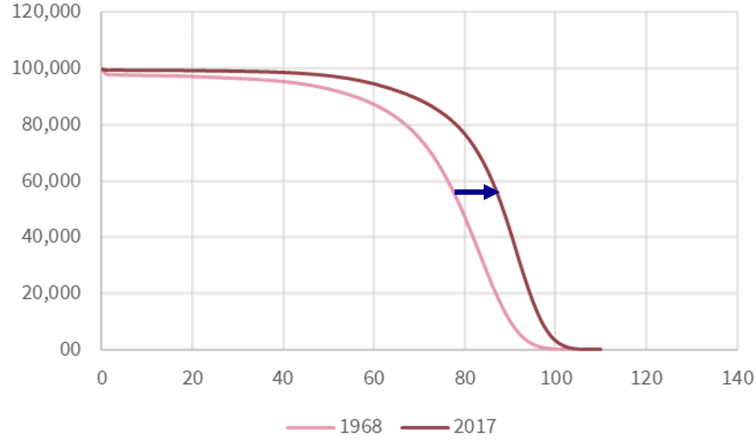


Figure 12: Courbes de survie et données de l'entropie pour la France entre 1968 et 2017

### 3.2.5 Flat Shock

Un *Flat Shock*, ou choc équivalent, est un choc instantané en % appliqué à tous les taux de mortalité à tous les âges de manière égale. Ces chocs sont utilisés dans le cadre du modèle interne pour simuler des événements de longévité. Nous avons testé si le calcul de l'entropie permet de simuler l'impact des chocs sur l'espérance de vie sans calculer tous les  $q_x$  des tables. Cette étude est faite sur les tables *Best Estimates* d'AXA France et AXA Winterthur (Suisse).

Nous avons calculé les coefficients d'entropie des tables et les espérances de vie à 30 ans pour la France et 60 ans pour la Suisse. Le calcul de l'espérance de vie suite à un choc de  $x\%$  sur les taux de mortalité se fait de la manière suivante :  $e^{xShock} = e^{noShock}(1 + H * x)$ . Nous avons ensuite calculé les espérances de vie des tables en appliquant le choc aux  $q_x$ , puis fini par calculer la différence entre les résultats (Figure 15). Nous observons la divergence entre les espérances de vie lorsque le choc augmente. A partir d'environ 10%, la différence d'espérance de vie devient significative. Cette divergence provient de l'approximation faite lors du développement dans l'équation (5). Cela nous permet de cibler les limites de cette mesure et de définir des champs d'application.

### 3.2.6 Equivalent Flat Shock

Le *Flat Shock* équivalent est un indicateur calculé dans le cadre de la sélection des modèles. Il permet de définir le % de choc à appliquer à tous les âges du BE pour que son espérance de vie, pour une cohorte donnée, égale celle du scénario. C'est un *Flat Shock* calculé grâce à une optimisation de fonction. Cette étude a pour but d'étudier si l'entropie peut permettre d'approximer cet indicateur sans passer par une optimisation de fonction.

Pour ce faire, nous avons calculé les espérances de vie et l'indicateur d'entropie sur les données de mortalité du *Best Estimate* Suisse puis les espérances de vie d'un scénario au quantile 99.5% appliqué à cette table. Le calcul de l'indicateur se retrouve alors en inversant la formule donnée dans la partie précédente :

$$EFS = \left( \frac{e^{Scenario}}{e^{BE}} - 1 \right) * \frac{1}{H^{BE}} \quad (8)$$

Les chocs sont enfin calculés par l'outil d'optimisation (Figure 13) et montrent un écart significatif avec les chocs calculés par la formule (8). Cependant la représentation graphique (Figure 14) nous permet d'observer la similarité des variations de l'indicateur en fonction de l'âge. Nous en déduisons que nous pouvons exploiter les variations relatives plus que les valeurs exactes.

Cohort	60	65	70	75	80	90
Ex BE						
Entropy BE	21.9%	25.9%	30.7%	36.8%	44.0%	60.5%

Ex	M995					
----	------	--	--	--	--	--

Shock Calculé	40.8%	30.0%	21.0%	18.6%	17.5%	13.8%
---------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

EFS	31.2%	23.9%	17.2%	15.1%	13.8%	9.5%
-----	-------	-------	-------	-------	-------	------

Figure 13: Espérance de vie (Ex) et entropie du BE et du scénario

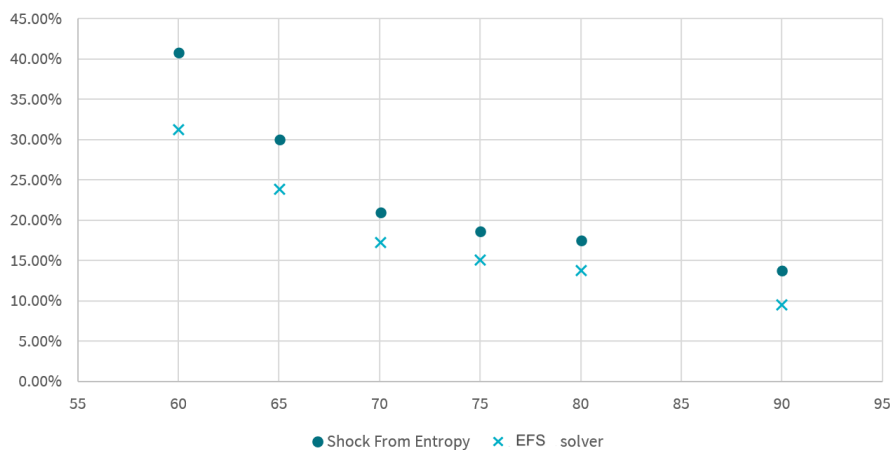


Figure 14: Comparaison des chocs calculés

### 3.2.7 Sensibilités

La dernière étude est portée sur l'utilisation de l'entropie comme un indicateur de la sensibilité des tables de mortalité aux chocs appliqués. La question est de savoir si en appliquant les mêmes taux d'améliorations sur deux *Best Estimates* différents, lequel sera le plus impacté. Les données utilisées sont des données d'ancien et de nouveau Best Estimate Suisse.

Nous calculons les espérances de vie des tables puis des scénarios appliqués à ces tables et comparons leurs variations au coefficient d'entropie en termes d'ordre de grandeur. L'entropie du nouveau BE est plus faible que celle de l'ancien et nous retrouvons que la variation relative d'espérance de vie de l'ancien BE est plus élevée que celle du nouveau. Ce premier exemple appliqué sur les tables des hommes appuie la définition littérale de l'indicateur.

L'étude est réitérée cette fois sur les tables des femmes (Figure 16). Les résultats montrent une incohérence entre l'entropie et les variations relatives d'espérance de vie entre les deux différentes tables. Alors que nous pensions que l'ancienne table était plus sensible car son entropie est de l'ordre de 19.74% contre 18.6% pour la nouvelle table, les variations calculées sont plus impor-



tantes pour la nouvelle table. Une analyse plus approfondie de la forme de la courbe de survie pour les femmes nous indique que l'ancien BE était plus prudent entre 50 et 75 ans environ mais moins prudent après. Un calcul de l'entropie sur deux tranches d'âges différentes permet d'isoler ce phénomène. L'entropie calculée sur la tranche d'âges 75-120 est plus faible que celle calculée sur la tranche d'âges 50-75. Nous pouvons en déduire que les variations de mortalité sur les âges plus élevés impactent plus l'espérance de vie que des variations sur des âges plus faibles. L'ordre de grandeur de l'entropie aux âges plus élevés est de  $\approx 33\%$  contre  $\approx 3\%$  aux âges jeunes.

Ces études faites sur l'entropie permettent de visualiser dans quelle mesure l'indicateur est exploitable et les limites relevées ont permis de définir le champs du possible.

## 4 Impacts et objectif

### 4.1 Impacts

D'un point de vue personnel, cette première partie d'apprentissage a été l'amorce nécessaire à l'appréhension des sujets de longévité. La construction et le développement des outils m'a permis de comprendre en profondeur les procédés définis par AXA, mais surtout les enjeux liés au sujet. J'ai donc pu d'affirmer mon intérêt pour cette thématique qui touche à la fois l'entreprise dans son fonctionnement, mais également le monde réel lorsqu'il s'agit d'analyser des tendances démographiques. Mes compétences techniques en informatique ont été renforcées avec le développement des outils en VBA et R. Grâce à des efforts supplémentaires, en lisant des cours d'actuariat par exemple, j'ai pu rapidement me mettre à niveau sur des compétences qui ne sont pas au programme de ma formation.

Du point de vue de l'équipe, les missions réalisées ont permis une avancée technique dans le processus de sélection du modèle de longévité. Le temps gagné n'est pas négligeable et permettra dans le futur de se concentrer davantage sur des aspects analytiques plutôt que techniques. Cette réalisation m'a valu l'opportunité de participer à une formation donnée aux équipes AXA du monde (Italie, Allemagne, Japon, France) et de présenter mon outil à nos collaborateurs. L'indicateur de l'entropie est un supplément dans l'analyse des tables de mortalité. Les études faites et la présentation menée par la suite permettent à l'équipe d'envisager son usage. Pour ma part, je pourrai l'utiliser lors de ma mission de développement du modèle.

### 4.2 Objectifs

La deuxième partie de l'apprentissage est dédiée à la recherche d'un sujet de longévité. Le thème choisi est la mortalité dans les pays émergents en lien avec le *Risk Appetite Framework* du groupe. Le RAF est une vision interne du groupe sur le risque. En terme de longévité, l'équipe a pu observer que la vision actuelle n'est pas totalement appropriée à des pays émergents. Dans ces pays, La mortalité infantile a des impacts spécifiques que nous souhaitons approfondir. Le RAF permet au top management de comprendre l'exposition du groupe au risque de longévité, de déterminer les limites de l'appétit au risque et, si nécessaire, d'entreprendre des actions. L'objectif est donc de développer un modèle fiable et adapté à l'appétit au risque.

# 5 Annexe

## 5.1 Données et graphiques : Entropie

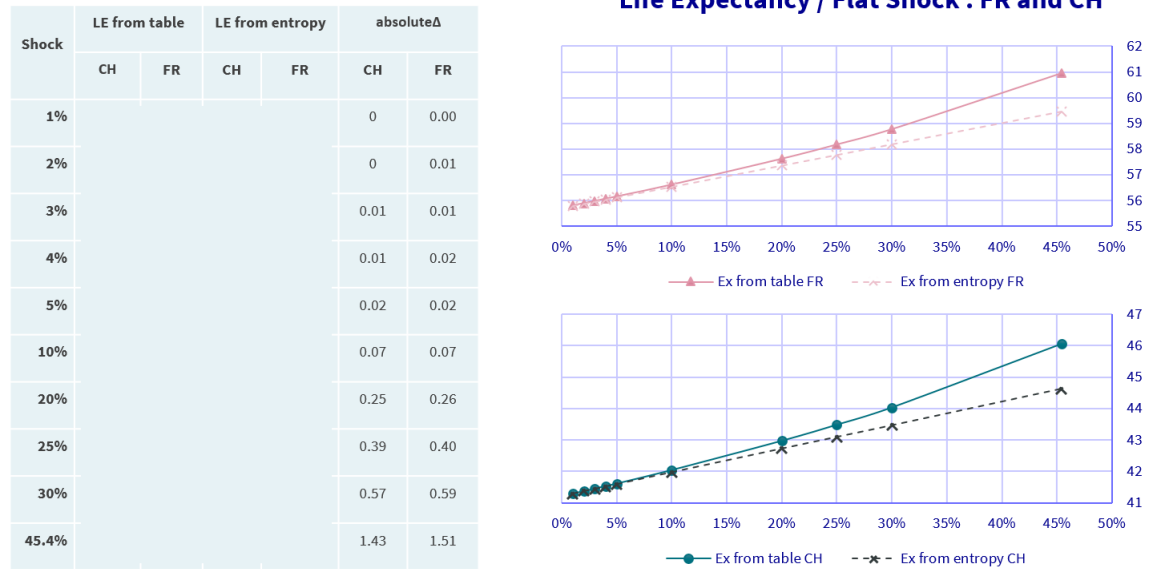


Figure 15: Espérances de vie calculées avec l'entropie pour la France (FR) et la Suisse (CH)

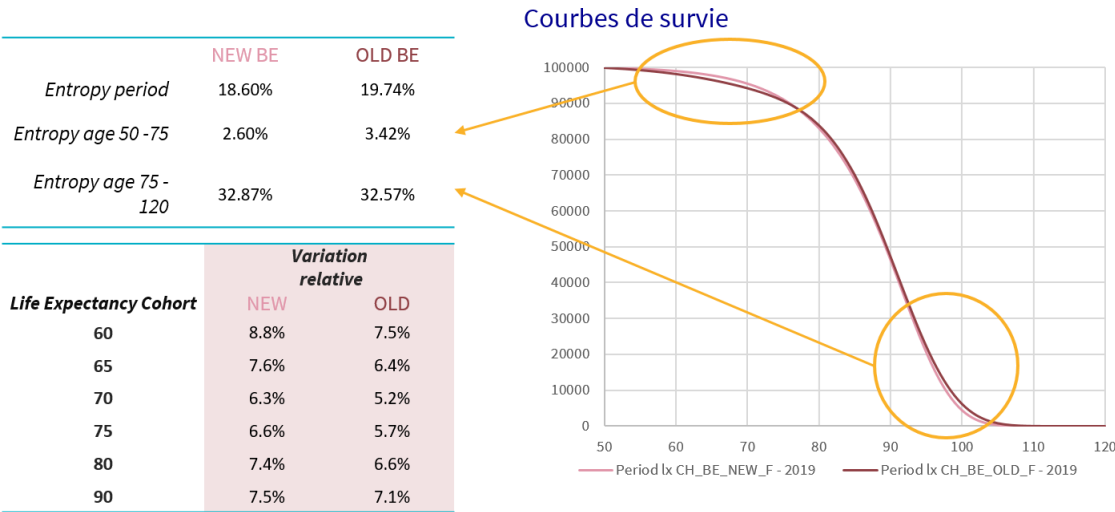


Figure 16: Etude des variations d'espérance de vie sur le BE Suisse Femmes

## References

- [1] O. Fernandez & H. Beltran-Sanchez. *The entropy of the life table : A reappraisal*. Theor Popul Biol, 2015.
- [2] L. Bouldi. La situation prudentielle d'un organisme d'assurance.
- [3] S. Martel & R. Bourbeau. *Compression de la mortalité et rectangularisation de la courbe de survie au Québec au cours du XXe siècle*. Cahiers québécois de démographie, 2004.
- [4] AXA GRM Life ISUP Février 2019. Risques biométriques en assurance vie & santé.
- [5] Group Risk Management. Solvency 2 im technical specifications, longevity and mortality risks. Technical report, AXA, 2019.
- [6] F. Planchet. *Modèles de durée, Tables de mortalité - Support de cours*. Institut de Science Financière et d'Assurances, 2018-2019.
- [7] J.W. Vaupel. *How change in age-specific mortality affects life expectancy*. International Institute for Applied Systems Analysis, 1985.
- [8] Fang Qi Wu. *Longevity Risk in Solvency II : Standard Formula and Internal Model*. Netspar, 2015.