

**Mémoire présenté devant l'Institut des Actuaire**  
**pour l'obtention du diplôme**  
**d'Actuaire – Statisticien Economiste**  
**et l'admission à l'Institut des Actuaire**

le \_\_\_\_\_

Par : M. TRABELSI Saber

Titre: Risque de Longévité : Modélisation et Couverture.

Confidentialité : NON Confidentiel

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

Membre présent du jury de l'Institut  
des Actuaire

signature

Entreprise :

**AON Benfield**

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

**DERIEN Anthony**

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de**

**diffusion de documents actuariels**

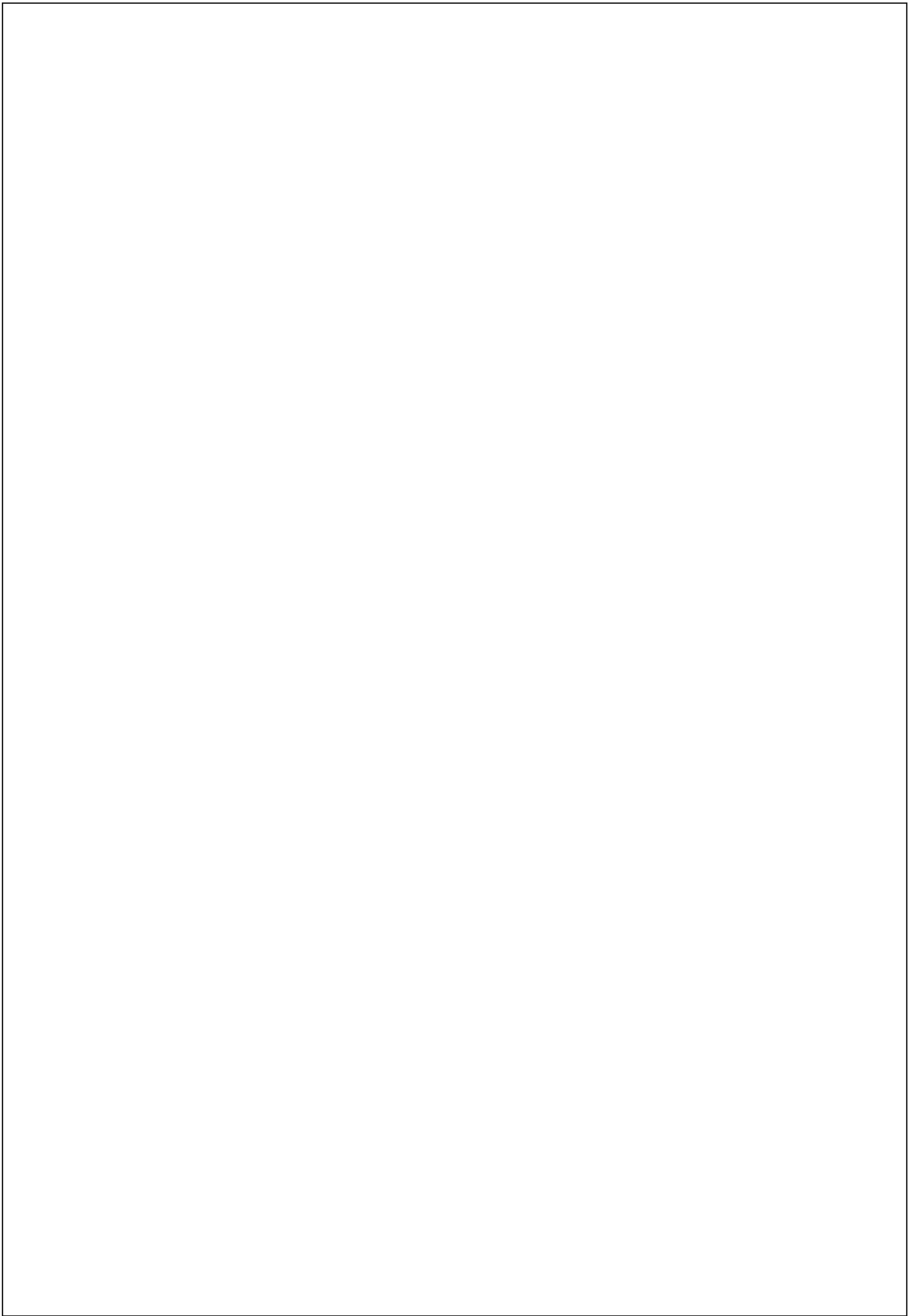
(après expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Signature du candidat

Bibliothèque :



# RISQUE DE LONGÉVITÉ : MODÉLISATION ET COUVERTURE

Saber TRABELSI

Mémoire d'actuariat - Promotion 2011

## Résumé

Le risque de longévité se définit comme étant le fait que les individus vivent plus longtemps qu'anticipé. Il est devenu un risque important pour les activités de retraites en raison de la croissance de l'espérance de vie et de l'incertitude entourant les évolutions futures de l'amélioration de la mortalité. Ce risque retient de plus en plus l'attention des compagnies d'assurance et des entreprises qui gèrent leurs engagements sociaux.

L'objectif de ce mémoire est double : étudier et modéliser au mieux ce risque dans un premier temps et dans un second temps proposer une couverture financière.

Il sera nécessaire dans la partie introductive de préciser quelques notions actuarielles indispensables pour la compréhension de la problématique, comme les tables de mortalité, le diagramme de Lexis ou encore les rentes viagères. Nous faisons aussi une revue de littérature qui relate l'historique de la modélisation du risque de longévité.

Notre mémoire étant le résultat d'un vrai besoin d'entreprise, nous commençons par décrire notre portefeuille d'application grâce à des statistiques descriptives. Tout au long de ce mémoire, nous alternons entre la théorie et la pratique. L'application mettra en oeuvre les formules et les méthodes développées pour étudier le cas de notre portefeuille et lui appliquer les différentes étapes d'analyse, de modélisation et de couverture du risque inhérent.

Afin de modéliser le risque de longévité, nous le décomposons en trois parties : la partie systématique, le risque de base et le risque idiosyncratique. La première composante de ce risque consiste en la tendance générale de longévité pour une population large. Pour modéliser cette tendance, nous mettrons l'accent sur deux modèles particuliers : le modèle de Lee-Carter et le modèle de Poisson. Le premier est encore considéré comme étant le *Benchmark* des modèles depuis son apparition en 1992. Le deuxième modèle repose sur la correction du défaut d'homoscédasticité du modèle de Lee-Carter. Ils seront expliqués, implémentés et comparés. Ces deux modèles servent à projeter la mortalité future et construire des tables de mortalité dites prospectives.

Le risque de base, deuxième composante du risque de longévité, est le décalage entre la mortalité de la population<sup>1</sup> et celle du portefeuille de l'assureur, notamment à cause de l'effet de sélection. Nous remédions à ce risque en proposant une méthode d'ajustement de la mortalité "générale" sur la mortalité réelle du portefeuille d'étude.

Le risque idiosyncratique, contenant tous les événements non prévisibles par les modèles, ne peut être anticipé. Nous traitons donc la couverture de ce risque ainsi que le risque de longévité dans sa globalité.

---

1. Nationale par exemple.

Deux solutions de couverture sont envisageables. La première est d'immobiliser une partie des fonds propres (un capital réglementaire) dont le niveau est déterminé suite à un choc de la longévité. Nous expliquons dans ce cadre le capital réglementaire défini par les normes de Solvabilité II. La deuxième solution est de céder ce risque à une tierce partie à travers un contrat financier. Nous nous focalisons sur le Swap de longévité. Ce contrat rencontre une réussite sur le marché depuis la première émission en 2008, mais se limite encore au marché de gré à gré. Cela s'explique par le manque de transparence et donc un problème de liquidité.

Nous proposons un montage clair et deux méthodes de valorisation : l'une actuarielle se basant sur un chargement technique et l'autre financière se reposant sur la valorisation sous une probabilité risque neutre. Ces deux approches différentes de valorisation confirmeront le problème d'illiquidité du risque de longévité sur le marché et feront apparaître les points à traiter pour dépasser les problèmes actuels du marché de la longévité.

Notons que la valorisation de cette couverture nous a permis de mettre en place un modèle interne et ainsi d'avoir une deuxième méthode de calcul d'un capital réglementaire plus en lien avec le profil de risque de l'entreprise.

Pour élargir le champ de réflexion sur la couverture, nous proposons d'autres contrats de couverture et nous nous intéressons aussi aux impacts éventuels de leur mise en place.

Enfin, dans le but de donner plus de perspectives à nos recherches, nous mentionnons des points annexes qu'il conviendrait de traiter dans un cadre plus large que le notre.

**MOTS CLEFS :** RISQUE DE LONGÉVITÉ, PROJECTION DE MORTALITÉ, LEE-CARTER, MODÈLE DE POISSON, COUVERTURE DU RISQUE DE LONGÉVITÉ, SWAP DE LONGÉVITÉ, SOLVABILITÉ II.

## Abstract

Longevity risk is defined as being the fact that the individuals live longer than expected. It has become a significant risk to pension activities due to the growth of life expectancy and the uncertainty surrounding the future evolution of mortality improvement. This risk retains more and more the attention of insurance companies and companies which manage their social commitments.

The aim of this dissertation is twofold. First, study and model at best this risk. Second, propose a financial cover of this risk.

It will be necessary in the introduction to clarify some indispensable actuarial concepts in order to understand the problem, such as mortality tables, Lexis diagram and life annuities. We will also review the literature that traces the history of the modeling of longevity risk.

Our dissertation is the result of a real company need. We will begin by describing our application portfolio through descriptive statistics. Throughout the dissertation, we will alternate between theory and practice. The application will implement formulas and methods developed to examine our portfolio of study and will apply the various stages of analysis, modeling and hedging the inherent risk.

In order to model the longevity risk, we will break it down into three parts : the systematic risk, the basis risk and the idiosyncratic risk. The first component of this risk consists in the general trend of longevity for a broad population. To model this trend, we will focus on two specific models : the Lee-Carter model and Poisson model. The first is still considered as being the benchmark of the models since its introduction in 1992. The second model is based on the correction of the homoscedasticity defect of the Lee-Carter model. They will be explained, implemented and compared. These two models are used to project future mortality and construct life tables.

Basis risk, the second component of longevity risk, is the difference between the population mortality and the mortality of the insurer portfolio, particularly due to the selection effect. We remedy this risk by providing an adjusting method of the "general" mortality on the actual mortality of the portfolio of study.

The idiosyncratic risk, containing all the unforeseeable events by the models, cannot be anticipated. We treat the cover of this risk as well as longevity risk in its entirety.

Two solutions of cover are possible. The first is to immobilize an equity capital portion (regulatory capital) whose level is determined following a shock in longevity. We will explain in this framework the regulatory capital set by Solvency II standards. The second solution is to transfer this risk to a third party through a financial contract. We will focus on the longevity swap. This contract meets a market success since the first issue in 2008, but is still limited

to the OTC<sup>2</sup> market. This reflects the lack of transparency and therefore a problem of liquidity.

We propose two valuation methods. An actuarial method based on the prime technique and a financial method based on the valuation under the risk neutral probability. These two different approaches of valuation will confirm the illiquidity problem of longevity risk in the market and will highlight the points to be considered to overcome current problems of longevity market. Let us note that the valuation of this cover has allowed us to set up an internal model and thus to have a second method of calculation of regulatory capital more closely related to the risk profile of the company.

To broaden the discussion on coverage, we will propose other hedging contracts and we will focus on potential impacts of their implementation.

Finally, in order to provide more perspectives to our research, we will include appendices points that should be addressed in a wider context than ours.

**KEY WORDS :** LONGEVITY RISK, MORTALITY PROJECTION, LEE-CARTER, LONGEVITY MODEL OF POISSON, LONGEVITY HEDGE, LONGEVITY SWAP, SOLVENCY II.





## Remerciements

J'adresse un remerciement très spécial à toutes les personnes qui m'ont aidé à faire aboutir ce projet.

Je commence par mon encadrant Anthony DERIEN, responsable de l'équipe *Analytics* de *AON Benfield*, que je remercie pour ses conseils. Je remercie également Benoit BUTEL, Selma JAZIRI et Anne-Laure RATH, de l'équipe *Aon Benfield*, pour leur soutien tout au long de ce projet.

Je ne pourrais aussi oublier Marc AZOUZ, responsable de l'équipe *AON Global Risk Consulting (AGRC)*, grâce à qui ce projet de recherche a pu avoir lieu. Je lui exprime toute ma reconnaissance et je présente toute ma gratitude à tous les membres de son équipe qui m'ont soutenu aux différents moments de mon projet.

Ce mémoire doit également énormément à Sylvie CANEPARO, Sophie DEMESY et Lautaro PEUCH pour leurs relectures attentives.

Avec beaucoup d'égard, je remercie mon correspondant à l'E.N.S.A.E., M. Donatien HAINAUT, pour son suivi, son assistance précieuse et ses remarques pertinentes.

*“Le calcul des probabilités, appliqué à la mortalité humaine a donné naissance  
à une science nouvelle : celle des assurances.”*

Émile de Girardin

Journaliste Français (1806 - 1881)

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>II</b>	<b>Cadre de l'étude</b>	<b>12</b>
<b>1</b>	<b>Le risque de longévité</b>	<b>13</b>
1.1	Présentation générale . . . . .	13
1.2	Notations actuarielles . . . . .	14
1.3	Notions de base . . . . .	18
1.3.1	Diagramme de Lexis . . . . .	18
1.3.2	Rentes viagères . . . . .	19
1.3.3	Tables de mortalité . . . . .	21
1.4	Modélisation . . . . .	23
1.4.1	Historique . . . . .	23
1.4.2	Lee-Carter . . . . .	23
1.4.3	Les modèles plus récents . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Approche de la problématique</b>	<b>26</b>
2.1	Méthodologie . . . . .	26
2.2	Données . . . . .	26
2.2.1	Les tables HMD . . . . .	26
2.2.2	Le portefeuille d'étude . . . . .	27
2.3	Outils informatiques . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Étude du portefeuille de la cédante</b>	<b>28</b>
3.1	Données reçues . . . . .	28
3.2	Descriptif de l'analyse . . . . .	29
3.3	Profil de l'ensemble des rentes . . . . .	29
3.4	Profil des rentes par profil de risque . . . . .	32
3.4.1	Profil des rentes Une Tête sans réversion . . . . .	33
3.4.2	Profil des rentes de réversataire . . . . .	36
3.4.3	Profil des rentes avec Réversion . . . . .	37
3.4.4	Conclusions . . . . .	39

<b>III</b>	<b>Modélisation du risque de longévité et construction des tables d'expérience</b>	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>Projection stochastique des tables de mortalité</b>	<b>42</b>
4.1	Lee Carter . . . . .	42
4.1.1	Présentation . . . . .	42
4.1.2	Implémentation . . . . .	44
4.1.3	Interprétation des résultats . . . . .	48
4.1.4	Inconvénients . . . . .	51
4.2	Modèle Poissonnien . . . . .	52
4.2.1	Hypothèse de Poisson . . . . .	52
4.2.2	Implémentation du modèle . . . . .	53
4.2.3	Interprétation des résultats (comparaison avec Lee-Carter) . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Table de mortalité de la population du portefeuille d'étude (<i>risque de base</i>)</b>	<b>60</b>
5.1	Mortalité de l'assureur . . . . .	60
5.2	Étape 1 : Table "du moment" <i>partielle</i> de l'assureur . . . . .	61
5.3	Étape 2 : Ajustement et complétude de la Table d'expérience . . . . .	62
<b>IV</b>	<b>Couverture du risque de longévité</b>	<b>64</b>
<b>6</b>	<b>Cadre Solvabilité II</b>	<b>66</b>
6.1	Cadre général . . . . .	66
6.2	Formule du SCR longévité . . . . .	68
6.3	Application numérique : calcul du SCR . . . . .	69
6.4	Alternatives de couverture . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Swap de longévité</b>	<b>71</b>
7.1	Montage . . . . .	71
7.2	Fonctionnement et spécificités . . . . .	72
7.2.1	Fonctionnement . . . . .	72
7.2.2	Spécificités . . . . .	78
7.2.3	Exemples de contrats : . . . . .	79
7.3	Valorisation "Best Estimate" des Flux . . . . .	80
7.3.1	Simulation des tables de mortalité . . . . .	81
7.3.2	Projection des rentes viagères dans le futur . . . . .	81
7.3.3	Profil par année . . . . .	82
7.4	Prix du Swap : Prime de risque . . . . .	85
7.4.1	Approche Actuarielle : Chargement technique . . . . .	86
7.4.2	Approche Financière : Transformation de la probabilité historique . . . . .	88
7.4.3	Conclusion . . . . .	95
7.4.4	Le " <i>Juste Prix</i> " . . . . .	96
7.5	Utilité et Limites . . . . .	97

7.5.1	Utilité . . . . .	97
7.5.2	Limites . . . . .	98
<b>8</b>	<b>Autres contrats de couverture</b>	<b>100</b>
8.1	Swap hybride . . . . .	100
8.2	Contrat de réassurance non proportionnel . . . . .	101
8.3	<i>Longevity Bond</i> . . . . .	101
8.4	Titrisation . . . . .	102
<b>9</b>	<b>Différents impacts de la couverture</b>	<b>103</b>
9.1	Impact Financier : . . . . .	103
9.2	Impact comptable : . . . . .	104
9.3	Impact opérationnel : . . . . .	104
9.4	Autres impacts . . . . .	104
<b>V</b>	<b>Conclusion et Limites</b>	<b>106</b>
<b>10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>107</b>
<b>11</b>	<b>Limites de l'étude</b>	<b>109</b>
<b>VI</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>114</b>
<b>VII</b>	<b>Annexes</b>	<b>118</b>



Première partie

Introduction

Depuis un certain temps, les études démographiques montrent un accroissement significatif de la longévité et du vieillissement des populations. L'espérance de vie progresse d'un trimestre par an dans tous les pays du monde. Le nombre de personne âgées de plus de 65 ans risque de tripler d'ici 40 ans pour atteindre près d'un milliard et demi. Ces modifications du paysage démographique mondial seront à long terme lourdes de conséquences sur les plans économique et social pouvant même provoquer des déséquilibres financiers.

Ce phénomène d'allongement de la durée de vie humaine appelé «longévité» est probablement l'un des défis majeurs du 21<sup>ème</sup> siècle et il convient d'y accorder un intérêt particulier dans les prochaines années pour prévoir les éventuelles dérives. Dans les 5 prochaines années, toutes les entreprises d'assurance vie pourraient voir leurs ventes de distribution destinées aux seniors s'accroître significativement. La longévité représente donc pour ces entreprises un enjeu majeur sur le long terme et certaines tentent déjà de répondre au problème par de nouveaux produits innovants.<sup>3</sup>

Le risque de longévité n'a pas été prioritaire pendant des années à cause de son aspect long terme qui n'est pas prépondérant à court terme par rapport aux autres risques classiques (comme le risque de taux pour les banques ou le risque de provisionnement pour les assurances). Mais plusieurs enjeux économiques, financiers et politiques mettent l'accent sur ce risque depuis quelques années.

C'est un risque que les assurances sont désormais obligées de couvrir selon les normes de Solvabilité II. L'irrégularité de la publication des tables réglementaires de mortalité<sup>4</sup> peut leur poser des problèmes majeurs. A titre d'exemple, les tables réglementaires prospectives de mortalité de la France en 2006, qui remplacent les tables de 1993, ont impliqué une augmentation des réserves des entreprises d'assurance vie d'environ 8%<sup>5</sup> (cf [Barrieu et al (2010)]).

L'amélioration de la longévité pose un vrai défi pour la planification du régime public de la retraite ainsi que pour les entreprises privées d'assurance vie (Les contrats à "annuités variables" sont un exemple de contrats fortement liés au risque de longévité).

Beaucoup d'institutions financières, comme les banques, s'intéressent à ce risque. Même si la longévité ne fait pas partie de leurs risques habituels à couvrir, elle représente désormais un domaine d'investissement qui attire les capitaux des marchés financiers. Une analyse approfondie de ce risque est nécessaire pour éviter les spéculations excessives.

D'ailleurs, plusieurs chercheurs s'organisent sous forme de chaires ou groupes de travail pour étudier ce risque et la littérature relative à ce sujet est en train de prendre une grande ampleur.

Contrairement aux risques d'assurance classiques, la taille du portefeuille ne permet pas d'atténuer le risque global, l'ensemble du portefeuille est en ef-

---

3. Voir les défis annoncés par AXA à titre d'exemple : <http://longevity.axa.com/fr/forum.php>

4. Les tables de mortalité sont fondées sur une modélisation de la longévité.

5. Ce chiffre est une moyenne, quelques acteurs ont augmenté leurs réserves de plus de 15%.



est affecté de manière homogène. La longévité est récemment devenue encore plus visible depuis que les produits financiers ne permettent plus de compenser l'impact de l'allongement de la durée de vie.

Les risques biométriques forment le cœur de métier des assureurs-vie. Ils peuvent bénéficier, dans une certaine mesure, de la compensation naturelle entre la longévité et la mortalité aussi bien que la diversification apportée par la longévité sur le portefeuille de risque dans son ensemble. De grands progrès ont été réalisés dans la modélisation, la compréhension et la quantification du risque de longévité.

Relativement aux autres preneurs de risques de longévité, l'exposition des assureurs à ce type de risque est relativement faible. Un des challenges est d'accroître la capacité des assureurs à accepter les risques de longévité ou à transférer ces risques, aux réassureurs ou aux marchés financiers.

Au vu de ces éléments, l'exposition globale au risque de longévité est substantielle. Comme l'âge de la population et la conscience d'un risque financier s'accroissent, il va y avoir une demande croissante pour des solutions d'atténuation des risques de longévité.

Les assureurs ont un rôle important à jouer pour fournir des solutions de couverture du risque de longévité. Leur capacité à porter ce risque étant inadéquate, des solutions de transfert de ce risque peuvent aider.

Ce mémoire s'organise en trois grandes parties :

La première partie présente une revue de littérature où nous définissons le risque de longévité, les résultats des recherches ainsi que quelques notions générales nécessaires à la compréhension de la suite du mémoire. Et pour bien définir tout le contexte de l'étude nous nous attardons dans un dernier chapitre de cette partie sur la description du portefeuille qui fera l'objet de l'application de nos méthodes et formules.

Nous modélisons dans la deuxième partie le risque de longévité à travers l'étude de deux modèles stochastiques : le modèle de Lee-Carter jusqu'à considéré comme le benchmark de la modélisation de la longévité, puis le modèle Poissonnien qui présente une extension du premier modèle. Nous proposons ensuite une méthodologie de passage de la modélisation d'une longévité de référence (la longévité nationale par exemple) à la modélisation de la longévité spécifique d'un portefeuille d'expérience d'un assureur.

Dans la troisième partie notre objectif est d'étudier la couverture de ce risque. Après un premier chapitre de présentation du cadre réglementaire de Solvabilité II, nous nous focalisons sur le contrat de Swap de Longévité. Nous en expliquons les détails du montage et de la valorisation. Nous proposons par ailleurs d'autres contrats de couverture possibles sans rentrer dans les détails. A la fin de cette partie nous analysons les différents impacts de la couverture de la longévité.

Avant de conclure nous aborderons dans un dernier chapitre quelques pistes qui peuvent être approfondies en guise d'élargissement du cadre de nos recherches.



Deuxième partie

Cadre de l'étude

# Chapitre 1

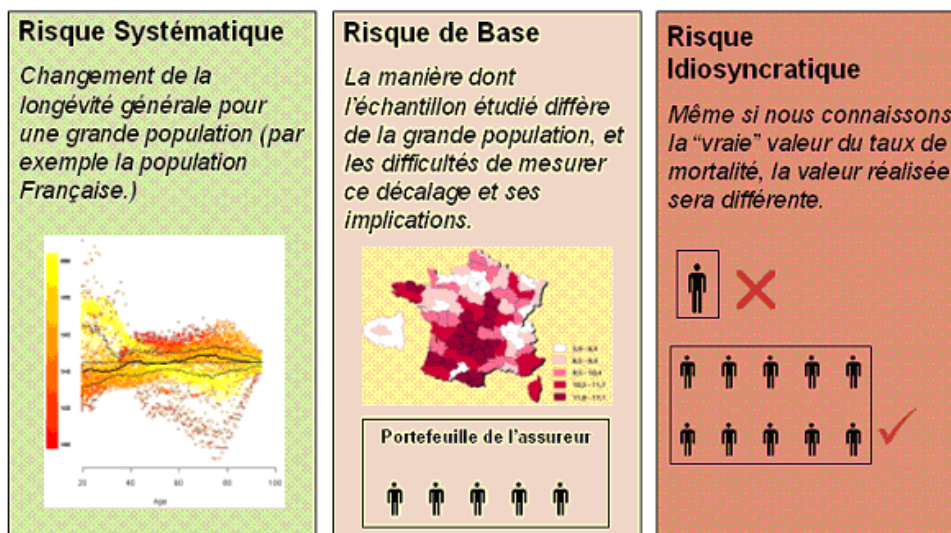
## Le risque de longévité

### 1.1 Présentation générale

Les compagnies d'assurance ayant d'importants portefeuilles de rentes sont exposées au risque de longévité. Ce risque fait d'ailleurs l'objet d'une série de mesures dans la réglementation Solvabilité II qui fera l'objet de toute une partie de ce mémoire. Estimer correctement ce risque passe dès lors par le développement et le calibrage d'un modèle de prédiction de la mortalité. Actuellement, la référence est le modèle à un facteur de Lee-Carter. Mais plusieurs autres modèles sont également développés et c'est aux actuaires de ladite compagnie de faire leurs choix tout en le justifiant.

Le risque de longévité se structure en trois composantes développées dans le schéma suivant :

## Composantes du risque de longévité



A travers la modélisation de la longévité nous traiterons le côté systématique. Nous procéderons ensuite à un ajustement de nos résultats afin de tenir compte du risque de base. Enfin, une élimination totale du risque de longévité (y compris le risque idiosyncratique<sup>1</sup>) suppose un transfert total du risque grâce à un contrat financier. Ce sera la démarche de ce mémoire.

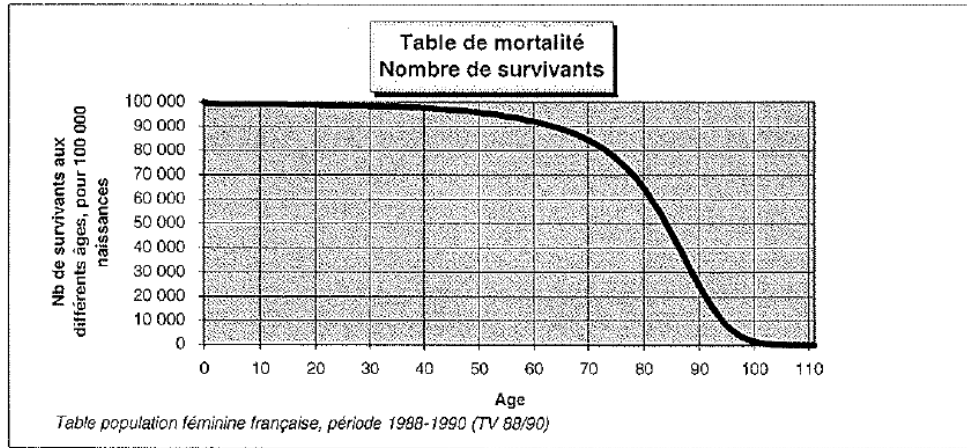
## 1.2 Notations actuarielles

Pour commencer, et afin de faciliter la compréhension des formules tout au long de ce mémoire, nous explicitons dans ce paragraphe toutes les notations utilisées par la suite.

- $L_{xt}$  est le nombre d'individus de  $x$  années révolues durant l'année  $t$  (nombre de survivants par âge).

On considère souvent un échantillon initial de 100 000 personnes et on observe la décroissance de sa taille au cours du temps due aux décès. Ce qui donne le graphe suivante :

1. ou encore "non-systématique"

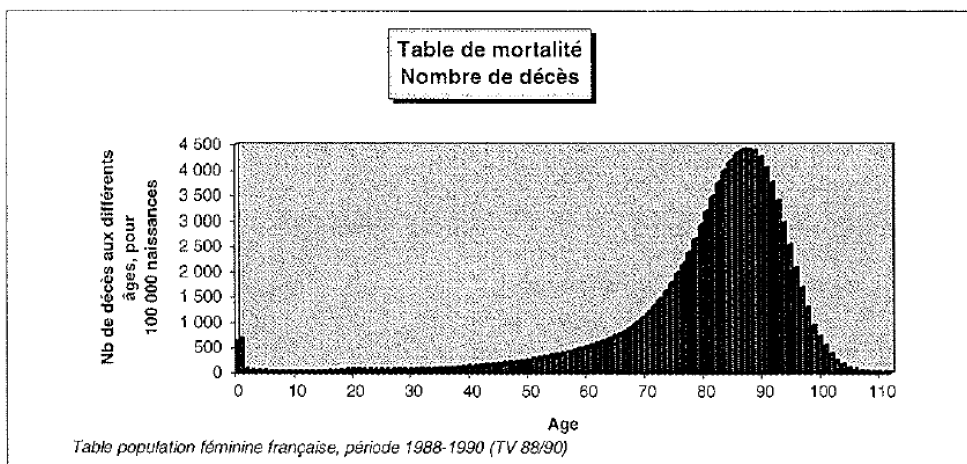


- Exposition au risque :  $E_{xt}$  est la taille moyenne de la population d'âge  $x$  durant l'année  $t$ . Nous la définissons par :

$$E_{xt} = \int_{\theta=0}^{\theta=1} L_{x+\theta, t+\theta} d\theta$$

C'est ce qui est considéré comme étant notre exposition au risque car c'est sur l'échantillon des survivants que nous observons le nombre de décès.

- Nombre de décès à l'âge  $x$  pendant l'année  $t$  :  $d_{xt}$ . Généralement nous remarquons deux pics pour le nombre de décès : un premier pic post-natal (âge 0) et un deuxième pic qui s'étale sur les âges entre 80 et 90 ans. Nous illustrons ceci par le graphique suivant :



Comme le groupe étudié est toujours un groupe fermé, le nombre de décès s'exprime ainsi (en l'absence de considération pour l'année d'étude) :

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

( Nombre de décès entre l'âge  $[x]$  et l'âge  $[x + 1]$  = Nombre de survivants à l'âge  $[x]$  - Nombre de survivants à l'âge  $[x + 1]$  )

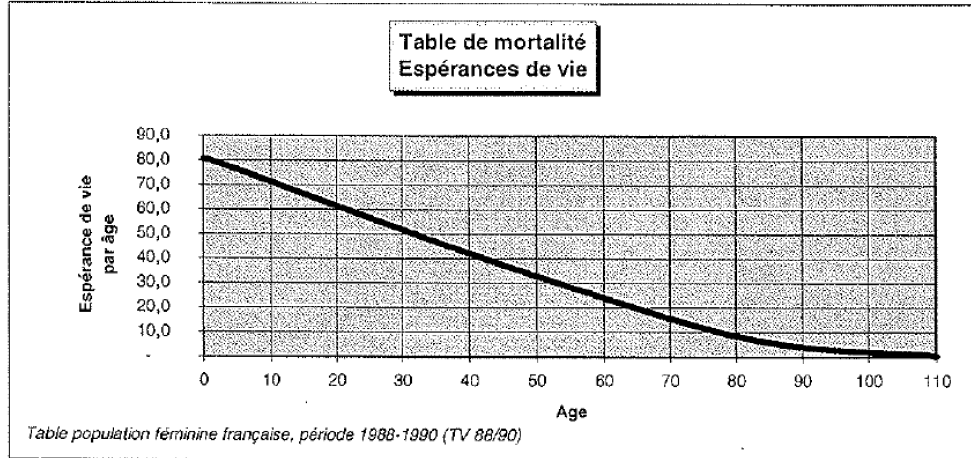
- Taux annuel de décès par âge  $q_x(t)$  : c'est le rapport entre le nombre de décès annuel et le nombre de survivants au même âge. En notations actuarielles :

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

- Taux annuel de survie par âge  $p_x(t)$  : cette mesure se déduit de la précédente selon la formule suivante :

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

- Durée de vie résiduelle en  $t$  pour une personne d'âge  $x$  :  $T_x(t)$  appelée aussi Espérance de vie par âge pendant l'année  $t$  .



- Probabilité de survie jusqu'à l'âge  $x + k$  pour une personne ayant atteint l'âge  $x$  à l'année  $t$  :  ${}_k p_x(t)$  . C'est une extension naturelle de la quantité  $p_x(t)$ . De manière analogue nous avons la formule suivante :

$${}_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

En termes de probabilité nous avons la formule suivante (probabilité conditionnelle) :

$${}_k p_x(t) = \mathcal{P}(T_x(t) > k \mid T_x(t) > 0)$$

où  $\mathcal{P}$  est la probabilité historique.

L'une des formules actuarielles pratiques qui en découle :

$${}_{k+j} p_x(t) = {}_k p_x(t) \cdot {}_j p_{x+k}(t+k) = \mathcal{P}(T_x(t) > k+j \mid T_x(t) > 0)$$

Ou encore d'une façon plus générale nous utilisons assez souvent la formule suivante :

$${}_k p_x(t) = p_x(t) \cdot p_{x+1}(t+1) \dots p_{x+k-1}(t+k-1)$$

En d'autres termes, la probabilité de survie pendant la période  $[x, x+k]$  est la probabilité de survivre pendant chaque année de cette période. L'indépendance de ces événements donne ainsi un produit de probabilités.

- La probabilité de décès entre l'âge  $x$  et l'âge  $x+k$  :  ${}_k q_x(t)$  se déduit automatiquement de la formule précédente (complémentaire de la probabilité précédente) :

$${}_k q_x(t) = 1 - {}_k p_x(t)$$

ce qui s'écrit en termes de probabilité :

$${}_k q_x(t) = \mathcal{P}(T_x(t) \leq k \mid T_x(t) > 0)$$

- Taux de mortalité instantané :  $\eta_x$ . Nous le considérons comme un taux annualisé et il s'exprime ainsi :

$$\eta_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx}$$

Nous avons donc la relation suivante entre la probabilité de survie et le taux instantané de mortalité :

$${}_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x} = \exp\left(-\int_0^k \eta_{x+t} dt\right)$$

Cette dernière formule nous permet de faire le lien avec la formule de calcul de la valeur actuelle d'un montant de 1 euro payé dans  $k$  années :  $\exp(-\int_0^k \tau_{x+t} dt)$ , avec  $\tau$  le taux d'intérêt instantané.

De la même façon nous avons :

$${}_k q_x(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^k \eta_{x+t} dt\right)$$

En résonnant sur une seule année nous avons les deux relations fondamentales suivantes :



$$q_x(t) = 1 - \exp\left(-\int_t^{t+1} \eta_{x-t+s}(s)ds\right)$$

et

$$\eta_x(t) = -\ln(1 - q_x(t))$$

Nous ferons l'hypothèse usuelle que ce taux est constant par morceaux : nous supposons qu'il reste constant pendant chaque année, i.e :

$$\eta_{x+u}(t+s) = \eta_x(t)$$

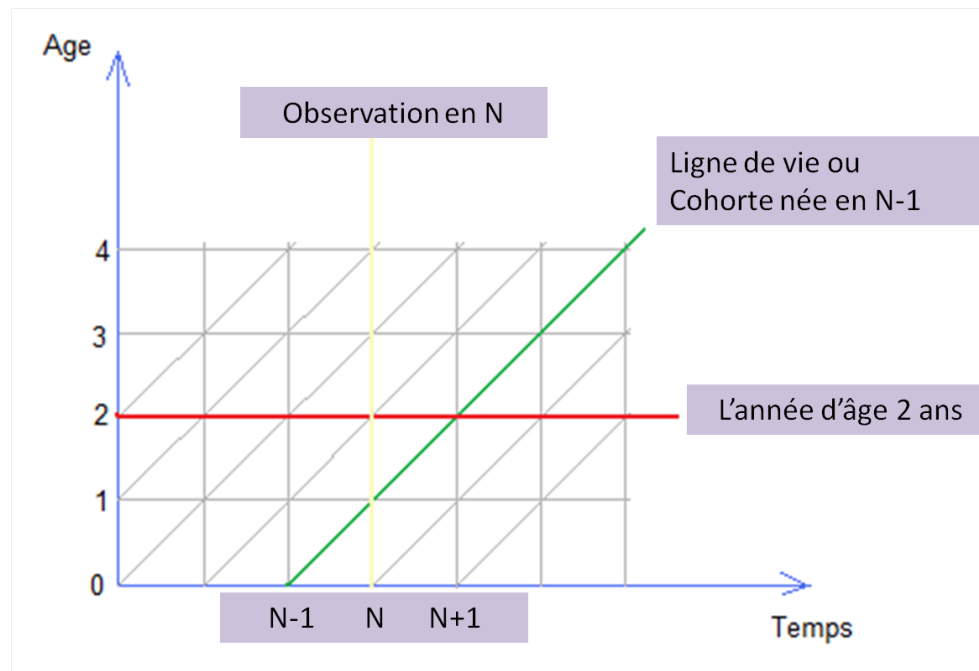
ceci  $\forall u$  et  $s$  tel que  $0 \leq u, s \leq 1$  et avec  $x, t \in \mathbb{N}$ .

## 1.3 Notions de base

Nous introduisons dans cette partie quelques notions utiles pour bien comprendre le sujet de la mortalité avec ses différents aspects démographiques, statistiques et assurantiels.

### 1.3.1 Diagramme de Lexis

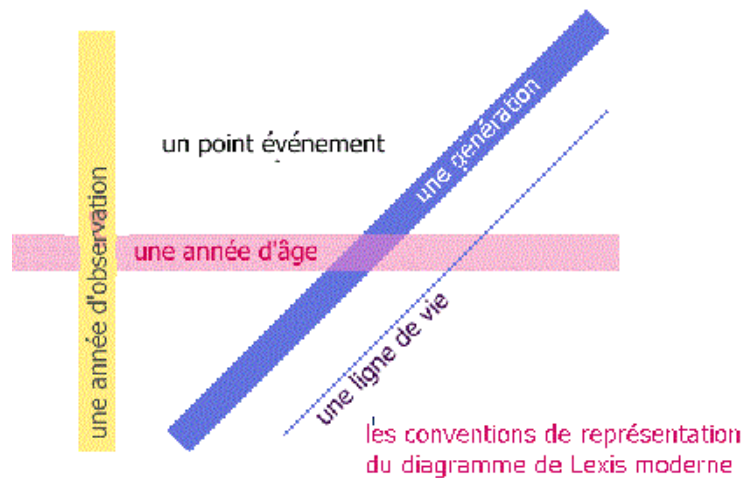
Le diagramme de Lexis est un outil graphique qui permet d'étudier l'évolution de la mortalité en fonction de l'âge et du temps, comme le montre le schéma suivant :



L'axe horizontal représente le temps écoulé. L'axe vertical représente l'âge.

Les lignes obliques montrent l'évolution dans le temps d'une génération donnée, ou ce qu'on appelle une "*Cohorte*". Les études démographiques montrent qu'il est pertinent de cibler les études statistiques sur des cohortes pour des raisons pratiques : une génération donnée fait face aux mêmes événements comme par exemple les guerres, les catastrophes naturelles ou industrielles ou encore la découverte d'un vaccin.

Le schéma suivant donne une vision plus pratique du diagramme de Lexis.



Les tables de Cohort sont obtenues à partir des diagonales de ce diagramme. Nous pouvons avoir une vision continue ou discrète du taux de mortalité. La vision discrète est applicable pour les tables nationales où les données sont généralement observées annuellement. Ce sera notre hypothèse de travail.

### 1.3.2 Rentes viagères

Expliquons maintenant le mécanisme des rentes viagères et son fonctionnement.

Notons qu'une analyse descriptive détaillée du cas du portefeuille d'étude (de rentes) sera donnée dans le chapitre 3 de cette partie..

Une rente viagère est une rente versée jusqu'au décès du bénéficiaire. Les pensions de retraites sont un cas particulier de rentes viagères, dont on peut acquérir les droits via un plan d'épargne retraite, une assurance vie ou encore un régime obligatoire ou facultatif mis en place par l'état ou l'entreprise. Le défi est de savoir estimer les primes pour assurer la solvabilité de l'organisme qui gère ces engagements, notamment les compagnies d'assurance dans notre cadre d'étude.

Comme c'est le cas de la majorité des portefeuilles de rentes des assureurs, nous avons deux catégories de rentes :

- RENTES EN COURS DE SERVICE : qui concernent les personnes déjà à la retraite et qui ont donc un âge au moins supérieur à 55 ans (en général).
- RENTES EN COURS DE CONSTITUTION : qui concernent les personnes qui cotisent encore, sauf que généralement les personnes commencent à cotiser dans ces régimes supplémentaires à des âges assez élevés : généralement 40 ans au moins.

La gestion des rentes dépend du pays. Nous remarquons par exemple une grande divergence de prise en charge des rentes viagères entre la France et l'Angleterre. En Angleterre, l'essentiel des engagements de retraites sont gérés par les fonds de pensions qui ont des conventions avec presque toutes les entreprises. Par contre, en France, c'est l'état qui organise l'essentiel du régime des retraites à travers un régime obligatoire scindé en un régime de base et un régime complémentaire (pour les cadres mais aussi pour les non-cadres), fonctionnant par répartition.

Toutefois, un régime supplémentaire s'ajoute à ce régime obligatoire. C'est un régime par capitalisation qui est mis en place pour augmenter le niveau de la rente viagère et ainsi garantir un meilleur niveau de vie lors de la retraite. Cette cotisation supplémentaire peut être mise en place par l'entreprise pour ses salariés ou bien par le particulier lui-même, qui souscrit une assurance vie ou une complémentaire retraite<sup>2</sup>. Dans les deux cas c'est toujours une compagnie d'assurance qui prend la responsabilité de ces engagements (les entreprises contractent une convention avec les assureurs).

Nous pouvons distinguer :

- LES RÉGIMES À COTISATION DÉFINIE : la cotisation de l'assuré est connue et définie contractuellement, mais le niveau de la prestation qu'il percevra pendant sa retraite change en fonction du contexte économique, démographique et financier.
- LES RÉGIMES À PRESTATIONS DÉFINIES : les prestations qui seront servies par le régime de retraite sont définies contractuellement (dans les conditions générales et particulières du régime), les cotisations du régime sont ajustées régulièrement. Les prestations peuvent être définies de manière absolue (*régime additionnel*) ou relative (*régime différentiel*).

Prenons le deuxième cas pré-cité, celui du régime supplémentaire (qui est le cas de notre portefeuille d'étude). Ce type de régime (régime à prestations définies) est générateur de passif social qui traduit les engagements de la compagnie d'assurance. C'est ce passif que l'on doit être capable de valoriser, en s'appuyant sur les tables de mortalité afin de probabiliser les flux futurs.

Nous allons introduire les tables de mortalité dans la partie 1.3.3, mais avant cela notons qu'il y a des clauses supplémentaires qui peuvent être introduites dans le mécanisme de rentes viagères : La rente viagère peut par exemple être indexée sur l'inflation. Mais la clause la plus classique est la "réversion". La notion de réversion est le droit en vertu duquel la

---

2. Madelin, Perco, Perp...etc.

retraite versée à une personne doit continuer à être versée à une autre (généralement le conjoint) en cas de décès de la première personne. La réversion peut être de 100% ou d'un niveau inférieur : 80% ou 60% (par exemple) du montant de la rente.

### 1.3.3 Tables de mortalité

Les tables de mortalité sont un outil utilisé en démographie et en actuariat afin d'étudier différents indicateurs comme les probabilités de décès, l'espérance de vie ou encore le nombre de décès.

On distingue deux types de tables de mortalité :

1. Les tables de mortalité du moment :

Pour construire ces tables on part généralement d'une population fictive de 100 000 personnes sur lesquelles on applique les conditions de mortalité qui prévalent en ce moment. On met en place des ajustements et des techniques pour lisser les taux de mortalité et les nombres de décès. Les tables sont finalement fermées pour les âges les plus élevés en choisissant un âge maximum et une technique de fermeture (généralement linéaire ou quadratique). Ces tables nous fournissent beaucoup d'informations comme l'espérance de vie ou la durée de vie résiduelle.

2. Les tables de mortalité par génération :

Ce sont des tables d'expérience où l'on sélectionne un échantillon d'une génération donnée (par exemple parmi les personnes nées en 1940) et on suit l'évolution de cet échantillon. Il ne s'agit donc pas d'une population fictive ce qui a l'avantage d'être plus représentatif de la réalité. Toutefois l'inconvénient est que l'on doit attendre l'extinction de toute la génération pour pouvoir construire la table. Le besoin des compagnies d'assurance étant imminent pour tarifier leurs produits, nous devons quand même avoir des tables pour la génération née en 1960 (par exemple) sans avoir à attendre 50 ou 60 ans la disparition de la dernière personne de cet échantillon. C'est pour cela que l'on a recours aux techniques de projection de la mortalité en se basant sur des modèles qui feront l'objet de notre étude dans la partie III. C'est ainsi que nous obtenons des tables prospectives de mortalité.

Nous énumérons dans le tableau suivant les principales tables utilisées en France :

TABLE	ORIGINE	UTILISATION
TV 88/90	Mortalité de la population <i>féminine</i> française pour la période d'observation 1988-1990.	Tarification et provisionnement des garanties "Vie" (autres que les rentes viagères) par les compagnies d'assurances, les institutions de prévoyance et les mutuelles. Tables de référence jusqu'au 31/12/2005.
TD 88/90	Mortalité de la population <i>masculine</i> française pour la période d'observation 1988-1990.	Tarification et provisionnement des garanties "Décès" par les compagnies d'assurances, les institutions de prévoyance et les mutuelles. Tables de référence jusqu'au 31/12/2005.
TF 00-02	Mortalité de la population <i>féminine</i> française pour la période d'observation 2000-2002.	Tarification et provisionnement des garanties "Décès" ou "Vie" par les compagnies d'assurances, les institutions de prévoyance et les mutuelles. Tables de référence jusqu'au 01/01/2007.
TH 00-02	Mortalité de la population <i>masculine</i> française pour la période d'observation 2000-2002.	Tarification et provisionnement des garanties "Décès" ou "Vie" par les compagnies d'assurances, les institutions de prévoyance et les mutuelles. Tables de référence jusqu'au 01/01/2007.
TPRV (Tables Prospectives de Rentes Viagères - Tables générationnelles)	Mortalité prospective de la population féminine française.	Tarification et provisionnement des rentes viagères par les compagnies d'assurances, les institutions de prévoyance et les mutuelles. A compter du 01/01/07 pour les compagnies d'assurance et 01/01/08 pour les mutuelles et Institutions de Prévoyance, ces tables ne sont plus applicables.
TGF05 et TGH05	Mortalité prospective de la population féminine (TGF) et masculine (TGH) des rentiers assurés auprès d'entreprises d'assurances.	Tarification et provisionnement des rentes viagères par les compagnies d'assurances (à compter du 01/01/07), les institutions de prévoyance et les mutuelles (à compter du 01/01/08). Période transitoire de 15 ans pour mettre à niveau les provisions.

## 1.4 Modélisation

### 1.4.1 Historique

La modélisation de la mortalité est le sujet de nombreuses recherches menées depuis le 17ème siècle et nous avons vu les premières lois de mortalité apparaître pendant le 18ème siècle. L'objectif est d'avoir un modèle qui dure dans le temps et qui tienne compte de la tendance générale de la mortalité. Le tableau suivant recense les premiers modèles de mortalité :

NOM	DATE	FORMULE
de Moivre	1725	$l_x = k(w - x)$ avec $w$ l'âge limite de la table
Gompertz	1825	$\eta_x = b.c^x$
Makeham (1ère loi)	1860	$\eta_x = a + b.c^x$
Makeham (2ème loi)	1889	$\eta_x = a + d.x + b.c^x$
Perk's	1931	$\eta_x = (a + b.c^x)/(k.c^{-x} + 1 + d.c^x)$

Les grandes variations de la mortalité pendant des périodes clés comme les Guerres Mondiales ont rapidement dévoilé les défauts de ces modèles assez simples.

### 1.4.2 Lee-Carter

En 1992, un article écrit par Lee et Carter se distingue des anciens modèles - qui imposent généralement une structure linéaire de  $\ln(\eta_{x,t})$  - et propose pour la première fois un modèle qui soit à la fois solide et flexible tout en restant simple à comprendre. Ce modèle définit la relation entre la mortalité, le temps et l'âge de la manière suivante :

$$\ln(\eta_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t + \varepsilon_{x,t}$$

avec  $\varepsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma)$ ,  $\alpha_x$  et  $\beta_x$  des composantes qui dépendent de l'âge et  $\kappa_t$  la composante temporelle (une analyse plus profonde sera donnée dans la partie III).

Ce modèle nous laisse une marge de liberté sur la modélisation de la structure d'évolution du terme temporel  $\kappa_t$ .

Cette équation est devenue, depuis, la référence de la modélisation de la mortalité. Et même s'il est aujourd'hui dépassé par des modèles plus sophistiqués, le modèle de Lee-Carter demeure le benchmark pour tous les actuaires qui s'intéressent à la modélisation de la mortalité.

### 1.4.3 Les modèles plus récents

Plusieurs groupes de travail se sont formés dans plusieurs laboratoires de recherches universitaires ou départements de R&D d'entreprises pour traiter ce sujet.

Nous reprenons ci dessous un panel de modèles parmi les plus aboutis qui ont fait l'objet de plusieurs études dont le document de [Cairns et al (2010)] :

MODÈLE	FORMULE MATHÉMATIQUE
M 1	$\log \eta(t, x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}$
M 2	$\log \eta(t, x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(3)} + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}^{(3)}$
M 3	$\log \eta(t, x) = \beta_x^{(1)} + n_a^{-1} \kappa_t^{(3)} + n_a^{-1} \gamma_{t-x}^{(3)}$
M 4	$\log \eta(t, x) = \sum_{i,j} \theta_{ij} B_{ij}^{ay}(x, t)$
M 5	$\text{logit } q(t, x) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x})$
M 6	$\text{logit } q(t, x) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}$
M 7	$\text{logit } q(t, x) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \kappa_t^{(3)}((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) + \gamma_{t-x}^{(4)}$
M 8	$\text{logit } q(t, x) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}(x_c - x)$

Dans ce tableau nous identifions les modèles suivants :

1. M1 : Lee-Carter (1992)
2. M2 : Le modèle de Renshaw - Haberman (2006)
3. M3 : Un cas particulier de M2.
4. M4 : Un modèle où les  $B_{ij}^{ay}$  sont des B-Splines.
5. M5 : Le modèle CBD : qui doit son nom aux personnes qui l'ont développé Cairns (Andrew) - Blake (David) - Dowd (Kevin).
6. M6 : Une variante du modèle CBD qui tient compte de l'effet Cohort à travers la composante en  $(t - x)$ .
7. M7 et M8 : Des extensions de M6 (ou encore du CBD).

Nous citons parmi les acteurs de la recherche dans ce domaine la banque JP Morgan, qui a développé un outil spécifique nommé "LIFEMETRIX". Cet outil implémente six modèles parmi les modèles cités dans le tableau précédent.

D'autres modèles peuvent être consultés dans le même article de [Cairns et al (2010)], les recherches continuent et de nouveaux modèles sont actuellement testés.

Les défis de ces modèles sont de deux types :

- DÉFIS INTRINSÈQUES AUX MODÈLES : c'est par exemple la capacité du modèle à capter l'effet cohorte ou à assurer l'hétéroscédasticité (variation des résidus selon l'âge d'étude).  
Mais c'est aussi le pouvoir explicatif du modèle qui se baserait typiquement sur des données qualitatives autres que l'âge : genre, éducation, catégorie

socio-professionnelle, état de santé, indicateurs de style de vie...etc. Ces derniers facteurs sont souvent absents dans les modèles existant aujourd'hui, mais plusieurs chercheurs prouvent qu'il faut en tenir compte pour améliorer la capacité prédictive de ces modèles.

Sur ce dernier point, le problème reste qu'il n'est pas seulement difficile de mesurer ces variables mais il est parfois question de problèmes juridiques et d'éthiques qui sortent du cadre du modèle. A titre d'exemple, il est interdit aux assureurs de sonder quelques informations jugées "discriminantes" de la part des assurés. Dans d'autres cas on peut disposer d'une donnée mais on ne peut pas l'utiliser dans la modélisation, comme c'est le cas du genre : Il sera bientôt interdit aux assureurs de considérer la variable "*genre*" comme paramètre de tarification pour les contrats d'assurance.

- DÉFIS EXOGÈNES : la qualité du modèle n'est pas une valeur intrinsèque à ce modèle. Ce dernier peut être plus ou moins "bon" selon les données utilisées par exemple.

Donc, un modèle doit ses qualités (pouvoir explicatif, bonne prédiction...etc) à des facteurs exogènes comme le pays d'étude. Un modèle peut être parfait pour modéliser la longévité en Angleterre mais il n'est pas bon pour expliquer celle de la France. D'autres choix arbitraires interviennent : comme la période considérée de l'échantillon sur lequel on calibre les modèles. On évite généralement d'appliquer les modèles sur la période entre les deux guerres mondiales car la mortalité a été impactée par des événements atypiques, et on fait l'hypothèse que ces événements ne se reproduisent pas.

Il est aussi intéressant de comparer plusieurs modèles de mortalité et d'en lister les avantages et les inconvénients. . Le cadre de ce projet n'étant pas de couvrir le maximum de modèles et de les comparer, nous renvoyons le lecteur intéressé vers le document de [Cairns et al (2010)] où l'on trouve une liste de critères de jugement des modèles mis en place par les auteurs.



## Chapitre 2

# Approche de la problématique

### 2.1 Méthodologie

Dans notre contexte, la modélisation du risque de longévité revient à étudier les modèles de construction de tables de mortalité. Nous aborderons deux modèles de mortalité en commençant par le modèle de Lee-Carter qui est le modèle le plus classique de modélisation du risque de longévité. Ensuite, nous aborderons un autre modèle avec lequel on dépasse la limite principale du modèle de Lee-Carter<sup>1</sup> : le modèle Poissonnien. Nous appliquerons ces deux modèles stochastiques pour construire des tables de mortalité dressant ainsi un profil de mortalité de notre portefeuille d'assurés. Nous ajusterons ces taux obtenus de sorte à tenir compte de la mortalité d'expérience de l'assureur.

Après l'explication du modèle standard de Solvabilité II qui traite de ce risque, nous nous intéresserons à la couverture du risque de longévité via la mise en place d'un swap de longévité en proposant un montage et deux valorisations possibles. La valorisation suppose une simulation des flux financiers futurs. Puis pour évaluer l'impact d'une telle couverture, nous traiterons différents impacts de la mise en place du swap.

### 2.2 Données

#### 2.2.1 Les tables HMD

Ce sont des tables de mortalité (Human Mortality Database) disponibles sur la site [www.mortality.org](http://www.mortality.org) pour plusieurs pays et sous plusieurs formes. Elles nous sont d'une grande utilité car elles fournissent des tables bien adaptées pour l'application de nos modèles de projection de la mortalité. Ce point sera

---

1. cette limite est l'hypothèse d'hétéroscédasticité des résidus. Cela sera développé dans la partie III.

développé avec l'explication des modèles de mortalité.<sup>2</sup>

**Remarque :** Dans notre étude nous travaillons sur des tables relatives à toute la population, sans faire de séparation selon le genre. Ce choix a été fait suite aux nouvelles mesures imposées aux compagnies d'assurance. En effet, il a été décidé que les assureurs ne peuvent plus considérer le genre comme facteur de tarification, en assurance auto par exemple (ainsi que les autres assurances). Nous écartons donc cette variable des facteurs usuels de tarification et nous resterons dans cette logique tout au long de cette étude.

### 2.2.2 Le portefeuille d'étude

Les données de l'étude proviennent d'une entreprise d'assurance qui veut céder le risque viager de son portefeuille d'assurés. Nous l'appelons dans le jargon du monde de la réassurance : "cédante". Les données de ce projet se présentent sous forme d'un fichier Excel qui contient le portefeuille des assurés détaillé contrat par contrat. Ce fichier représente les engagements sociaux, sensibles à la durée de vie des assurés, que l'on doit couvrir. Nous nous baserons sur ces engagements pour faire le montage de la couverture financière via le swap de longévité.

## 2.3 Outils informatiques

Sur le plan informatique nous allons utiliser le logiciel libre R et aussi l'environnement de développement Visuel Basic (*VB*) sur Microsoft Excel.

En effet, le logiciel R sera l'outil de développement de nos modèles de mortalité et de construction de tables de mortalité. L'environnement VB servira à appliquer ces tables de mortalité sur le portefeuille de la cédante afin de calculer les flux futurs qui serviront à la valorisation du swap de longévité.

---

2. En effet, ces tables sont complètes et parfaitement rectangulaires, ce qui n'est jamais le cas pour les portefeuilles réels des assureurs.

## Chapitre 3

# Étude du portefeuille de la cédante

Dans cette partie, nous analysons le portefeuille des rentes en cours de service de l'assureur.

Nous considérons un portefeuille fermé<sup>1</sup> afin de pouvoir monter *in fine* un contrat de couverture qui soit acceptable par la contrepartie qui réassure (banque ou réassureur).

L'exploration des données dont nous disposons nous aide à mieux comprendre les résultats que nous obtiendrons par la suite de ce projet de recherche. Nous tenons compte des spécificités de ce portefeuille dans l'implémentation des différents algorithmes que nous mettrons en place même si nous l'annoncerons pas explicitement à chaque fois.

### 3.1 Données reçues

Nous allons analyser le portefeuille des rentes en cours de service actualisé au 31/12/2010.

L'objectif est :

- De caractériser le portefeuille en cours de service,
- De dégager des comportements et constantes permettant la projection des flux pour les rentes en cours de constitution, qui représentent la majeure partie des flux.

Parmi les rentes en cours de constitution, nous pouvons en effet rencontrer certains contrats à «prestations définies», comme les contrats relevant de l'article 39 du CGI (Code Général des Impôts) où le montant de la rente est défini à l'avance, et des contrats à «cotisations définies», pour lesquels les éléments (réversion, capital constitutif . . . ) sont définis à la liquidation. Afin de projeter les

---

1. pas d'entrée d'assurés sur ce portefeuille.

flux futurs, nous faisons l'hypothèse que le comportement des rentiers potentiels est identique à celui des rentiers en cours.

## 3.2 Descriptif de l'analyse

Nous utilisons le portefeuille des rentes en cours de service.

Le portefeuille contient environ 5000 rentiers. Pour chacune d'elles, des champs d'information sont fournis (dont quelques uns définis en annexe VII).

En outre, nous disposons d'une information complémentaire sur l'origine de la rente (rente d'assuré ou rente de réversataire).

Grâce à cette information, il est possible de distinguer 3 types de profil de rentes :

- les rentes à une tête sans réversion,
- les rentes de réversataire (l'assuré principal est décédé),
- les rentes avec réversion, qui impliquent deux têtes.

A chaque rente en cours de constitution, à cotisations définies, sera appliqué le profil associé le plus proche (rente sans réversion, ou rente avec réversion).

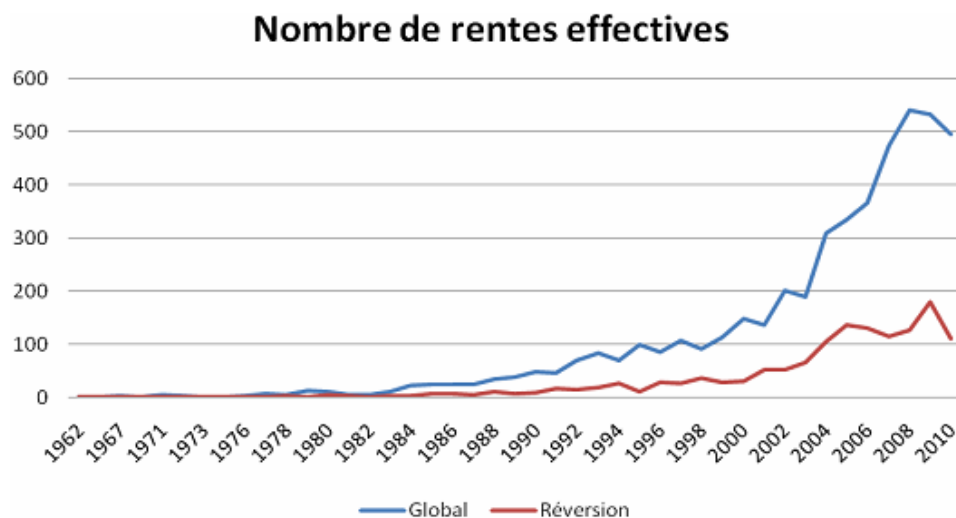
Enfin, les dates d'effet et de souscription des rentes données au format AAAA/MM/JJ sont converties en millésime, arrondi par défaut lorsqu'il s'est écoulé moins de 6 mois à partir du 1er janvier de l'année, par excès dans le cas contraire.

Les âges tarifaires des assurés à la date de souscription, à la date d'effet et au 31/12/2010 sont calculés par différence entre chaque date respective et la date d'anniversaire, arrondi par défaut lorsqu'il s'est écoulé moins de 6 mois depuis la dernière date d'anniversaire, ou par excès dans le cas contraire.

## 3.3 Profil de l'ensemble des rentes

### ÉVOLUTION DU NOMBRE DE RENTES EFFECTIVES

Le nombre de rentes ayant pris effet ces 20 dernières années est en hausse moyenne de plus de 15% par an, le phénomène étant identique sur les rentes de réversion.



NOMBRE D'ANNÉES ÉCOULÉES ENTRE LA DATE DE SOUSCRIPTION ET LA DATE D'EFFET

Le nombre d'années s'écoulant entre la date de souscription et la date d'effet est estimé à 10,5 ans sur la période 2005-2011.

DATE D'EFFET	DIFFÉRENCE
avant 1990	13,31
1990 - 2000	11,39
2000 - 2005	10,62
2005 - 2011	10,49

Dans 38% des cas, la différence entre la date d'effet et la date de souscription est un entier (une rente souscrite au 1er janvier prendra effet au 1er janvier de l'année). Pour les 62% des autres cas, la différence modulo le nombre d'années est de 5,8 mois en moyenne.

#### ÂGES DES RENTIERS

L'âge moyen des rentiers dans le portefeuille des rentes en cours de service est de 69 ans.

L'âge moyen à la souscription augmente depuis les années 90 et se stabilise à 52 ans. De même, l'âge à la date de service de la rente est stable à 63 ans, ce qui correspond à un âge moyen de départ à la retraite.

DATE D'EFFET	ÂGE DU RENTIER AU 31/12/2010	ÂGE À LA SOUSCRIPTION	ÂGE À LA DATE DE L'EFFET
avant 1990	80	46	59
1990 - 2000	77	51	63
2000 - 2005	71	52	63
2005 - 2011	65	53	63

#### GENRE DES RENTIERS

L'évolution des contrats souscrits par des femmes diminue dans le temps et se stabilise en moyenne à 35%.

DATE D'EFFET	% FEMME
avant 1990	49,6%
1990 - 2000	36,1%
2000 - 2005	34,2%
2005 - 2011	34,4%

#### PÉRIODICITÉ DES RENTES

Depuis 2005, 99% des rentes sont versées trimestriellement et 1% des rentes sont versées annuellement.

DATE D'EFFET	AN	SEMESTRE	TRIMESTRE	MOIS
avant 1990	52%	7%	42%	0%
1990 - 2000	9%	4%	84%	2%
2000 - 2005	1%	0%	97%	1%
2005 - 2011	1%	0%	99%	0%

#### TERME ÉCHU OU AVANCÉ

Sur les 5 dernières années, les rentes à terme échu représentent 89% des contrats (une rente à terme échu est versé en fin de période). Selon que la rente soit à terme échu ou à terme avancé, l'actualisation ne se fait pas de la même manière.

DATE D'EFFET	AVANCÉ	ÉCHU
avant 1990	9%	91%
1990 - 2000	28%	72%
2000 - 2005	14%	86%
2005 - 2011	11%	89%

#### TAUX TECHNIQUE DES RENTES

Avant les années 2000, près de 95% des rentes étaient provisionnées au taux technique de 4,50%. Sur les 5 dernières années, les rentes sont provisionnées suivant un taux de 2,5% dans 36% des cas, 4,50% dans 13% des cas et 2% dans 22% des cas.

On note également quelques contrats provisionnés au taux technique de 0%.

Au global, le taux technique moyen du portefeuille est de 3,5%. Ce taux conditionne la revalorisation de la rente par la PB (Participation aux Bénéfices). Il est appelé à diminuer au fur et à mesure de l'intégration de nouvelles rentes en cours de service dans le portefeuille.

DATE D'EFFET	TAUX MOYEN
avant 1990	4,5%
1990 - 2000	3,4%
2000 - 2005	2,8%
2005 - 2011	2,7%

### 3.4 Profil des rentes par profil de risque

Le portefeuille se décompose suivant les 3 profils de risque comme le montre le graphe suivant :



### 3.4.1 Profil des rentes Une Tête sans réversion

NOMBRE D'ANNÉES ÉCOULÉES ENTRE LA DATE DE SOUSCRIPTION ET LA DATE D'EFFET

Le nombre d'années écoulées entre la date de souscription et la date d'effet est en moyenne de 9,5 ans sur les 5 dernières années.

La différence entre les dates modulo le nombre d'année est nul dans 42% des cas. Dans le cas contraire, la différence modulo le nombre d'années est en moyenne de 5,8 mois.

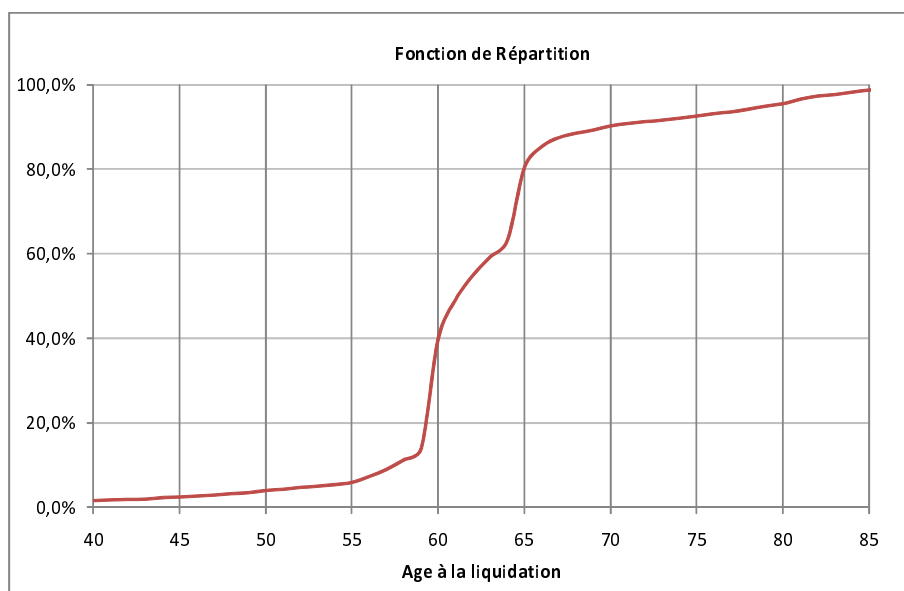
ÂGE DES RENTIERS

Nous constatons les mêmes tendances que sur le portefeuille global : l'âge des rentiers au 31/12/2010 est de 65 ans et l'âge à la date d'effet est de 63 ans. L'âge à la souscription augmente d'un an en moyenne.

DATE D'EFFET	ÂGE DU RENTIER AU 31/12/2010	ÂGE À LA SOUSCRIPTION	ÂGE À LA DATE D'EFFET
avant 1990	85	46	59
1990 - 2000	77	51	62
2000 - 2005	66	53	63
2005 - 2011	65	54	63

L'âge à la date d'effet étant très proche de l'âge légal du départ en retraite, nous devons faire une analyse plus fine. L'âge de départ à la retraite pouvant varier d'un assuré à un autre, nous allons évaluer une répartition probabiliste de l'âge du rentier à la date d'effet. La fonction de répartition est telle que 85% des prises d'effet ont lieu entre 55 et 70 ans.





Cette fonction de répartition de l'âge à la liquidation sera utilisée pour évaluer de manière probabiliste la date de liquidation des rentes en cours de constitution.

#### GENRE DES RENTIERS

Sur la période 2005-2011, les femmes représentent 42% des bénéficiaires des rentes à une tête.

DATE D'EFFET	% FEMME
avant 1990	57,3%
1990 - 2000	45,3%
2000 - 2005	42,8%
2005 - 2011	41,6%

#### PÉRIODICITÉ DES RENTES

Depuis 2005, 99% des rentes sont versées sur une période trimestrielle pour les cinq dernières années.

DATE D'EFFET	AN	SEMESTRE	TRIMESTRE	MOIS
avant 1990	52%	7%	41%	0%
1990 - 2000	12%	4%	82%	2%
2000 - 2005	1%	0%	97%	1%
2005 - 2011	0,77%	0%	99%	0,55%

La périodicité trimestrielle sera donc utilisée pour évaluer les flux des rentes en cours de constitution.

#### TERME ÉCHU OU D'AVANCE

Même tendance que pour le cas général, 89% des rentes sont à terme échu et 11% à terme avancé. On considérera donc que les rentes en cours de constitution seront payées à terme échu.

#### TAUX TECHNIQUE DES RENTES

Les taux techniques retenus sont principalement 2,50%, 4,50% et 2%

DATE D'EFFET	0,0%	2,0%	2,25%	2,50%	2,75%	3,0%	3,25%	3,5%	4,5%
avant 1990	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	3%	97%
1990 - 2000	0,2%	0%	0%	2%	1%	0%	1%	3%	95%
2000 - 2005	0,2%	19%	1%	34%	0%	3%	0%	12%	31%
2005 - 2011	0,2%	25%	1%	35%	0%	3%	0%	13%	22%

#### TABLE D'INVENTAIRE

Dans 78% des cas, la table TPRV93 est retenue pour le calcul des PM<sup>2</sup>.

DATE D'EFFET	CERTAINE	TGF05/TGH05	TPRV 93
avant 1990	0%	0%	100%
1990 - 2000	0%	0%	100%
2000 - 2005	1%	16%	83%
2005 - 2011	1%	21%	78%

#### COEFFICIENT DE MAJORATION LÉGALE

Ce coefficient a été mis en place par le gouvernement pour compenser l'impact des variations de l'inflation sur le montant des rentes. L'inflation étant contrôlée par la BCE<sup>3</sup> depuis les dernières années, les périodes à forte inflation connues dans les années 70 ont une probabilité quasi nulle de se reproduire. De fait, le coefficient de majoration légale est aujourd'hui très proche de zéro pour les rentes prenant effet après les années 2000.

DATE D'EFFET	0%	20%	90%
avant 1990	17%	74%	9%
1990 - 2000	64%	19%	17%
2000 - 2005	95%	1%	4%
2005 - 2011	98%	1%	2%

---

2. Provisions Mathématiques.

3. Banque Centrale Européenne.

### 3.4.2 Profil des rentes de réversataire

NOMBRE D'ANNÉES ÉCOULÉES ENTRE LA DATE DE SOUSCRIPTION ET LA DATE D'EFFET

Il n'y a pas de rentes de réversataires avant les années 1990. La différence d'années est de 21,13 ans en moyenne, presque le double des rentes à une tête non réversataires. En effet, l'âge à la date d'effet du profil des rentiers non réversataires à une tête est de 63 ans.

Les rentes de réversion, nous le verrons plus loin étant principalement souscrites par des hommes, leur espérance de vie est en moyenne sur les 10 dernières années de 75 ans, soit une différence de plus de vingt ans après la date de souscription.

DATE D'EFFET	DIFFÉRENCE
1990 - 2000	22,15
2000 - 2005	20,30
2005 - 2011	21,13

ÂGE DES RENTIERES

L'âge à la date d'effet (entrée en vigueur de la réversion) est de 71 ans en moyenne. L'âge à la date de souscription est de 50 ans et l'âge moyen du rentier au 31/12/2010 est de 73 ans. L'âge de souscription est sensiblement équivalent à celui du profil précédent (54 ans en moyenne).

DATE D'EFFET	ÂGE DU RENTIER AU 31/12/2010	ÂGE À LA SOUSCRIPTION	ÂGE À LA DATE D'EFFET
1990 - 2000	84	48	70
2000 - 2005	74	50	71
2005 - 2011	73	50	71

GENRE DES RENTIERES

Le profil des rentiers réversataires est principalement féminin avec 87,8 % moyenne sur les 5 dernières années. Ce pourcentage est en hausse depuis les années 2000.

PÉRIODICITÉ DES RENTES

La tendance des rentes annuelles des réversataires est plus marquée que dans les autres profils, avec en moyenne 7,50% des rentes. La grande partie des rentes est trimestrielle à 89% et ce chiffre est en hausse.

DATE D'EFFET	AN	SEMESTRE	TRIMESTRE	MOIS
1990 - 2000	38%	8%	54%	4%
2000 - 2005	12%	4%	81%	4%
2005 - 2011	7,50%	4%	89%	0%

#### RENTE À TERME ÉCHU OU AVANCÉ

En moyenne sur les 5 dernières années, 85% des rentes sont à terme échu.

#### TAUX TECHNIQUE DES RENTES

Contrairement au profil précédent, les rentes à taux techniques de 4,50% sont très majoritaires en moyenne sur les 5 dernières années, même si la tendance est baissière au profit des taux techniques de 2,50%, 2% et 4%. Les rentes de réversataires représentent une charge de provisions importantes.

DATE D'EFFET	2,0%	2,25%	2,50%	2,75%	3,0%	4%	4,5%
1990 - 2000	0%	0%	0%	4%	0%	0%	96%
2000 - 2005	4,4%	1%	9%	0%	2%	5%	79%
2005 - 2011	6,3%	1%	10%	0%	0%	6%	76%

#### TABLE D'INVENTAIRE

Sur les 5 dernières années, 91% des rentes de réversataires sont provisionnées avec la table TPRV 93, ce qui est supérieur au profil précédent. Étant donné que le principal taux technique utilisé est de 4,5%, la table utilisée doit être plus prudente que dans celle du profil précédent.

Le nombre de rente certaine est plus élevé (6% en moyenne contre 1% précédemment).

### 3.4.3 Profil des rentes avec Réversion

#### ÂGE DES RENTIERS

Nous utiliserons l'indice 1 pour l'assuré ayant souscrit la rente et l'indice 2 pour la réversion. Le nombre de rentes avec réversion augmente en moyenne sur les 20 dernières années de plus de 17% avec un ralentissement sur les 5 dernières années (+5% d'évolution en moyenne).

DATE D'EFFET	AGE1 DU RENTIER AU 31/12/2010	AGE1 À LA SOUS- SCRIPTION	AGE1 À LA DATE D'EFFET	AGE2 DU RENTIER AU 31/12/2010	AGE2 À LA SOUS- SCRIPTION	AGE2 À LA DATE D'EFFET
avant 1990	86	47	62	83	44	59
1990 - 2000	76	52	62	73	49	60
2000 - 2005	66	51	62	64	49	60
2005 - 2011	64	51	62	62	48	60

Les assurés ayant souscrit des rentes avec réversion sont plus jeunes en moyenne à la souscription : 51 ans contre 54 ans pour les rentiers simples sans réversion.

L'âge moyen à la date d'effet est de 62 ans, sensiblement égal au départ en retraite légal.

D'autre part, l'écart d'âge entre le rentier et son bénéficiaire est de deux ans en moyenne.

#### TYPE DE RÉVERSATAIRES

Dans 99,5% des cas, les rentes de réversion sont souscrites par un homme avec une réversion pour une femme. Les 0,5% restants sont des rentes dont le bénéficiaire est du même genre que l'assuré.

#### PÉRIODICITÉ DES RENTES

Elles sont trimestrielles dans 99% des cas.

#### TERME DES RENTES

Sur les 5 dernières années, en moyenne, 87% des rentes sont à terme échu et cette tendance est à la hausse (+20% des rentes à terme échu en 20 ans).

#### TAUX TECHNIQUE DES RENTES

A partir des années 2000, les rentes sont majoritairement provisionnées aux taux techniques de 4,50% et 2,50%.

DATE D'EFFET	0,0%	2,0%	2,25%	2,50%	3,0%	4%	4,5%
avant 1990	0,0%	0%	0%	0%	0%	8%	92%
1990 - 2000	0,0%	0%	0%	0%	0%	2%	98%
2000 - 2005	0,1%	6%	1%	36%	3%	14%	39%
2005 - 2011	0,1%	9%	2%	39%	4%	14%	33%

#### TABLE D'INVENTAIRE

94% des rentes sont provisionnées avec la TPRV93 mais tendance à la baisse au profit des tables TGH05/TGF05.

#### TAUX DE RÉVERSION

La tendance est stable dans le temps. 78% des rentes sont reversées en totalité contre 21% de rentes qui sont reversées à un niveau de 60% de la rente de la tête principale.

DATE D'EFFET	0,0%	50%	60%	100%
avant 1990	0,0%	3%	21%	76%
1990 - 2000	0,5%	0%	21%	79%
2000 - 2005	0,3%	1%	21%	78%
2005 - 2011	0,0%	1%	21%	78%

#### 3.4.4 Conclusions

L'analyse des rentes en cours de service a permis de dégager quelques constantes qui seront utiles pour l'évaluation des flux des rentes en cours de constitution :

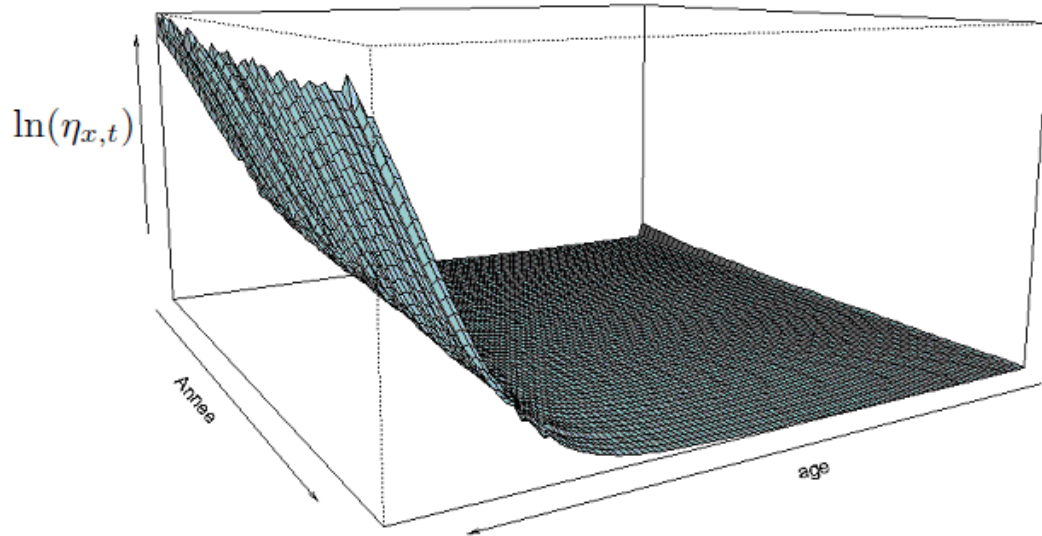
- 70% des assurés ont choisi de bénéficier d'une rente sans réversion.
- Parmi les 30% ayant choisi une réversion, 78% ont choisi une réversion en totalité (100%) et 22% ont choisi une réversion à 60%.
- Les rentes sont versées à terme échu, avec une périodicité trimestrielle. Le bénéficiaire de la réversion est en moyenne deux ans plus jeune que l'assuré.
- L'âge de liquidation de la retraite est variable , mais 85% de la population étudiée a bénéficié de cette retraite entre 55 et 70 ans. La fonction de répartition de la liquidation sera utilisée pour évaluer la liquidation des rentes en cours de constitution.

Nous allons voir dans la partie de la mise en place de la couverture que seule la partie des rentes en cours de service fera partie du portefeuille à couvrir.

## Troisième partie

# Modélisation du risque de longévité et construction des tables d'expérience

Le graphe suivant représente, en 3 dimensions, les taux instantanées de mortalité de la table HMD :



Nous voyons bien que le taux de mortalité augmente avec l'âge (jusqu'à atteindre 100%) et pour un âge fixe, nous remarquons une amélioration de la longévité (i.e une baisse du taux de mortalité) en avançant sur l'échelle du temps.

Il est question maintenant de traduire ces informations sous la forme d'un modèle qui prend en compte l'évolution de la mortalité selon l'âge dans le temps.

Parmi les idées les plus répandues sur la longévité nous trouvons : "On gagne 2 à 3 mois d'espérance de vie chaque année". Par ailleurs, comme nous le verrons dans le chapitre 6, la méthode standard proposée par le régulateur suppose un abattement linéaire de la table de la mortalité de 20% .

De telles informations, de part et d'autre, ne permettent pas une compréhension fondée du risque de longévité. Seule une modélisation économétrique robuste permet une analyse justifiée que l'on peut compléter par une projection stochastique de la tendance de la mortalité.



## Chapitre 4

# Projection stochastique des tables de mortalité

Dans toute modélisation il y a deux approches possibles (cf [Cairns et al (2010)]).

La première approche consiste à assumer que tout modèle est “faux”, et plus nous poussons la complexité du modèle plus nous nous éloignons de la réalité. Donc il est préférable de commencer avec un modèle simple et de le compléter dans le but de remédier à ses défauts.

La deuxième approche consiste à partir d’un modèle qui soit le plus général possible. Ensuite essayer de le simplifier à partir des estimations et des tests appliqués sur des données réelles. Le principe de parcimonie implique qu’un modèle simple mais bien expliqué serait mieux qu’un modèle plus complexe.

Même si plusieurs disciplines comme l’économie et la finance optent pour la deuxième approche en se basant sur une modélisation qui part du général pour arriver au spécifique, la modélisation de la mortalité a été historiquement modélisée selon la première approche.

Nous pouvons noter que c’est une approche qui a ses avantages, sachant que partir d’un modèle simple ne nous empêche pas d’aboutir à un modèle complexe alors qu’un modèle complexe en amont peut nous empêcher de détecter des modèles beaucoup plus simples et intuitifs.

Nous allons donc commencer par le modèle de Lee-Carter considéré comme le modèle stochastique le plus simple, qui puisse rendre une image fidèle aux spécificités de la mortalité. Nous allons ensuite traiter le modèle de Poisson qui est une amélioration du modèle de Lee-Carter.

### 4.1 Lee Carter

#### 4.1.1 Présentation

Le modèle de Lee Carter est considéré comme le premier modèle fiable pour le risque de longévité. Ses paramètres sont assez robustes et son interprétation

est assez intuitive. Il a été proposé par Ronald Lee et L. Carter dans le «*Journal of the American Statistical Association*» en 1992 [Lee-Carter (1992)]. La simplicité de ce modèle a fait de lui une référence. Il est encore considéré comme un benchmark de valorisation même s'il présente quelques limites qui sont actuellement dépassées par d'autres modèles plus sophistiqués qui sont proposés depuis.

Ce modèle propose d'ajuster les logarithmes népériens du taux instantané de décès selon le modèle mathématique suivant :

$$\ln(\eta_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t + \varepsilon_{x,t}$$

avec  $\varepsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma)$

### Interprétation des paramètres :

Le nombre de paramètres de cette équation est limité et voici l'interprétation des différents termes :

- $\alpha_x$  est la valeur moyenne temporelle des  $\ln(\eta_{x,t})$  pour l'âge  $x$ .
- La composante temporelle  $\kappa_t$  décrit l'évolution de la mortalité à travers le temps.
- $\beta_x$  est la sensibilité pour chaque âge  $x$  des logarithmes des taux de mortalité par rapport à la composante temporelle  $\kappa_t$ . Cette variable traduit le fait que tous les âges ne profitent pas de la même façon de l'amélioration de la longévité.
- Les termes d'erreur  $\varepsilon_{x,t}$  captent les résidus. On suppose que ces résidus sont indépendants et identiquement distribués selon une loi normale centrée. Cette hypothèse d'homoscédasticité est forte en pratique puisque le logarithme du taux de mortalité a une variabilité plus importante aux âges élevés qu'aux âges jeunes par manque de nombre d'observations.

Il est nécessaire de rajouter des contraintes pour que le modèle soit identifiable. Les contraintes sont généralement les suivantes :

$$\sum \beta_x = 1 \text{ et } \sum \kappa_t = 0$$

On procède alors à l'estimation des paramètres par la méthode des moindres carrés ordinaires :

$$(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t) = \underset{\alpha_x, \beta_x, \kappa_t}{\operatorname{argmin}} \sum (\ln(\eta_{x,t}) - \alpha_x - \beta_x \cdot \kappa_t)^2$$

L'extrapolation du paramètre temporel de ce modèle nous permet de projeter nos tables de mortalité et obtenir ainsi des tables prospectives. L'extrapolation des  $\kappa_t$  est souvent effectuée en se basant sur un processus ARIMA notamment le processus de marche aléatoire (cf [Cox et al (2011)]<sup>1</sup>). Nous reviendrons sur ce point dans l'explication détaillée de l'implémentation de ce modèle.

---

1. dont une présentation est consultable sur le lien suivant : <http://www.crest.fr/images/LFACONFERENCE2011/CONFERENCEFEVRIER/PRESENTATION/pedersen.pdf>

### 4.1.2 Implémentation

Dans cette partie nous détaillons les étapes d'exécution du modèle de Lee-Carter. Cette partie peut aussi être vue comme étant une description détaillée de l'implémentation sous R de ce modèle. Nous expliquons les étapes ci dessous.

#### 4.1.2.1 Adaptation de la base des données :

L'application du modèle de Lee-Carter demande des *inputs* sous un format bien spécifique. En effet, il nous faut une table de mortalité qui répond aux deux critères suivants :

- Le terme général de cette table est le logarithme népérien du taux instantané de mortalité :  $\eta_{x,t}$ .
- La table doit être bien rectangulaire : toutes les cases doivent contenir une valeur sinon nous risquons d'avoir des valeurs indéterminées pendant l'exécution de notre algorithme. (Nous verrons plus clairement la raison de cette exigence dans l'étape de l'estimation des  $\beta_x$  et  $\kappa_t$ .)

Une telle table aura la structure suivante :

<i>Age/Année</i>	<i>YearMin</i>	...	...	<i>YearT</i>	...	...	<i>YearMax</i>
0	$\ln(\eta_{0,YearMin})$	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
<i>X</i>	...	...	...	$\ln(\eta_{x,t})$	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
<i>Xmax</i>	...	...	...	...	...	...	$\ln(\eta_{Xmax,YearMax})$

Les tables HMD sont bien adaptées à cette structure. Il nous a suffit d'extraire les taux de mortalité et d'appliquer la fonction logarithme népérien. Une autre approche serait de considérer les tables réglementaires (de l'INSEE dans notre cas) et de les tronquer au niveau âges extrêmes (bébés ou 4ème âge : là où des valeurs sont manquantes) afin d'avoir une table parfaitement rectangulaire.

**Remarque :** Ici, nous faisons l'hypothèse que les  $\eta_{x,t}$  sont constants chaque année.

Nous commencerons par estimer les paramètres de ce modèle pour extrapoler par la suite la composante temporelle  $\kappa_t$ .

#### 4.1.2.2 Estimation des $\alpha_x$ :

Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} \sum_{t=t_m}^{t=t_M} (\ln \eta_{yt} - \alpha_y - \beta_y \kappa_t) = 2(t_M - t_m + 1)\alpha_x - 2 \sum_{t=t_m}^{t=t_M} (\ln \eta_{xt} - \beta_x \kappa_t)$$

où  $t_m$  et  $t_M$  sont respectivement l'année minimale et l'année maximale de la table de mortalité.

Or nous sommes dans le cadre d'un modèle d'optimisation donc ce dernier terme est nul.

En tenant compte de la condition suivante :  $\sum \kappa_t = 0$  nous obtenons :

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t=t_M} \ln \eta_{xt}$$

#### 4.1.2.3 Estimation des $\beta_x$ et des $\kappa_t$ :

Nous considérons la matrice  $Z = (z_{xt})$  des taux centrés par rapport à la dimension temporelle :

$$z_{xt} = \ln \hat{\eta}_{xt} - \hat{\alpha}_x$$

Nous cherchons une approximation de cette matrice de la forme  $Z = \hat{\beta} \hat{\kappa}'$ , or la décomposition en valeurs singulières offre cette garantie car elle donne :

$$Z = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \nu_i' u_i \text{ avec } \nu_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Z u_i$$

$u_i$  et  $\nu_i$  sont respectivement le vecteur propre normé de  ${}^t Z Z$  et le vecteur propre de  $Z^t Z$  pour la même valeur propre  $\lambda_i$ .

Nous choisissons l'approximation  $Z \approx \sqrt{\lambda_{max}} \nu_{\lambda_{max}} {}^t u_{\lambda_{max}}$ , où  $\lambda_{max}$  est la plus grande valeur propre.

Nous obtenons alors les approximations suivantes :

$$\hat{\beta} = \frac{\nu_{\lambda_{max}}}{\nu_{\lambda_{max} \bullet}}$$

et

$$\hat{\kappa} = \sqrt{\lambda_{max}} \nu_{\lambda_{max} \bullet} u_{\lambda_{max}}$$

où  $\nu_{\lambda_{max} \bullet}$  est la somme des composantes de  $\nu_{\lambda_{max}}$ .

**Remarque : Réajustement des  $\kappa_t$  :** A ce niveau, si nous étions partis des tables réglementaires de l'INSEE nous aurions dû rester fidèles aux données

d'origine : le nombre de décès doit être un entier et en même temps  $\eta_{x,t} = \frac{D_{xt}}{ER_t}$ . Ceci se traduit par l'égalité entre le nombre de décès prévu chaque année et le nombre de décès observé, ce qui s'écrit :

$$\sum_{x_{min}}^{x_{max}} d_{xt} = \sum_{x_{min}}^{x_{max}} er_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t)$$

Généralement il suffit d'appliquer l'algorithme itératif de Newton Raphson pour s'assurer que la fonction suivante est nulle pour tout  $k$  :

$$f(k) = \sum_{x_{min}}^{x_{max}} er_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x k) - \sum_{x_{min}}^{x_{max}} d_{xt}$$

Dans notre cas, nous ne sommes pas partis des tables de décès et d'exposition au risque, donc nous ne sommes pas concernés par cette étape.

#### 4.1.2.4 Extrapolation de la composante temporelle $\kappa_t$ :

Comme nous l'avons cité dans la présentation de ce modèle, cette composante temporelle est souvent extrapolée selon un processus de séries temporelles de type ARIMA avec une tendance linéaire<sup>2</sup>. Nous avons choisi de modéliser le mouvement des  $\kappa_t$  par un processus de marche aléatoire avec drift (cf [Cox et al (2011)]) :

$$\kappa_t = at + b + \nu_t$$

avec  $\nu_t$  les résidus de loi normale centrée.

Il suffit donc d'estimer les paramètres de ce modèle via une régression linéaire sur nos données historiques. Puis nous projetterons les  $\kappa_t$  en simulant les  $\nu_t$ .

#### 4.1.2.5 Fermeture de table :

A ce stade il faut tenir compte de l'amélioration de la longévité aux âges élevés. En d'autres termes, l'âge de fermeture de la table (l'âge maximal observé sur la table) aura tendance à augmenter avec les années de projection. Nous pouvons envisager qu'il passe par exemple de 110 ans à 130 ans dans 40 années. Nous devons donc nous écarter de notre modèle de mortalité pour les âges élevés et appliquer une autre formule qui permet d'augmenter l'âge de fermeture à un niveau supérieur. La fermeture des tables de mortalité est un problème classique et plusieurs méthodes sont proposées dans la littérature : fermeture linéaire (cf [Planchet et Thérond (2006)]) ou quadratique (cf [Denuit et Goderniaux (2005)]) par exemple. L'objectif demeure toutefois le même : le taux de mortalité, pour les âges élevés, doit augmenter d'une façon moins rapide jusqu'à se stabiliser avec un profil plat (comme les démographes l'indiquent).

Nous optons pour la solution proposée par [Denuit et Goderniaux (2005)]. Il s'agit de considérer la régression quadratique suivante pour les âges élevés :

$$\ln \hat{\eta}_{xt} = a_t + b_t x + c_t x^2 + \varepsilon_{xt}$$

où  $\varepsilon_{xt}$  sont iid et suivent une loi normale  $N(0, \sigma^2)$ . Cette équation est calibrée séparément pour chaque année calendaire et ensuite appliquée pour la fermeture de la table. Deux contraintes sont proposées par les auteurs pour assurer l'identifiabilité du modèle (pour un âge limite proposé de 130 ans) :

1. Une contrainte de fermeture à l'âge de 130 ans :  $\eta_{130,t} = 1$ . En effet, même si les études biologiques ne semblent pas donner une limite d'âge, il ne semble pas aberrant de considérer l'âge de 130 ans comme étant un âge limite observé à notre horizon de travail.

---

2. il y a des cas rares où ceci n'est pas vrai, comme le cas de la Russie (pour laquelle  $\kappa_t$  ne sont pas linéaires) ou encore quelques états américains (pour lesquels les  $\kappa_t$  stagnent ou sont même en régression pour cause d'obésité entre autres).

2. Une contrainte “d’inflexion” :  $\eta'_{130,t} = 0$  (pour tout  $t$ ). Ceci permet d’avoir une tangente horizontale à l’âge de 130 ans.

La première contrainte nous permet d’écrire :

$$a_t + b_t.130 + c_t.130^2 = 0$$

La deuxième s’écrit :

$$(b_t + 2c_t.130) \exp(a_t + b_t.130 + c_t.130^2) = 0$$

donc :

$$b_t + 2c_t.130 = 0$$

Ainsi nous obtenons 2 relations entre les 3 paramètres  $a_t$  ,  $b_t$  et  $c_t$  :

$$b_t = -260.c_t$$

et

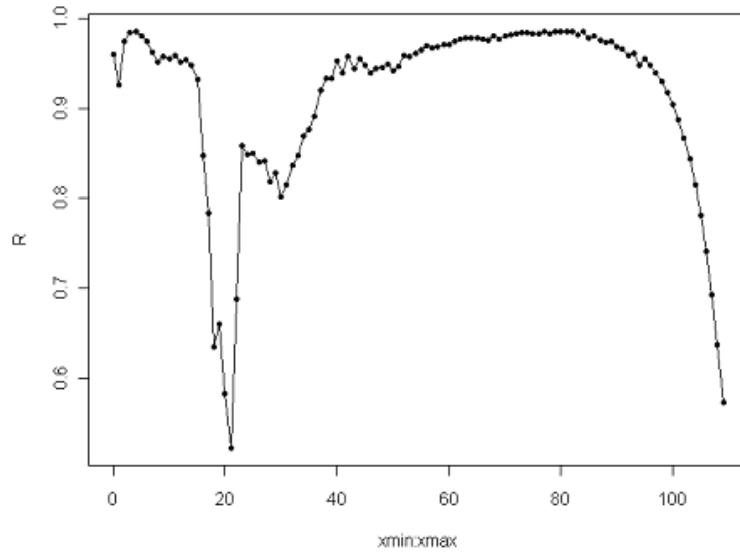
$$a_t = 130^2.c_t$$

Nous obtenons enfin :

$$\ln \hat{\eta}_{xt} = c_t(130 - x)^2 + \varepsilon_{xt}$$

Nous devons faire cette régression sur les âges élevés : nous avons choisi de la faire sur les âges :  $[99ans, 109ans]$  puis nous appliquons cette équation pour calculer les taux de mortalité jusqu’à 130 ans (l’âge de clôture de la table). Le choix de la fourchette d’âge sur laquelle s’applique cette régression non-linéaire est purement arbitraire.

**Remarque :** Nous pouvons juger de la qualité des estimations du modèle de Lee-Carter à travers plusieurs indicateurs comme le coefficient de détermination  $R^2$  par exemple. Nous calculons cet estimateur et nous remarquons qu’il est la plupart du temps proche de 1.

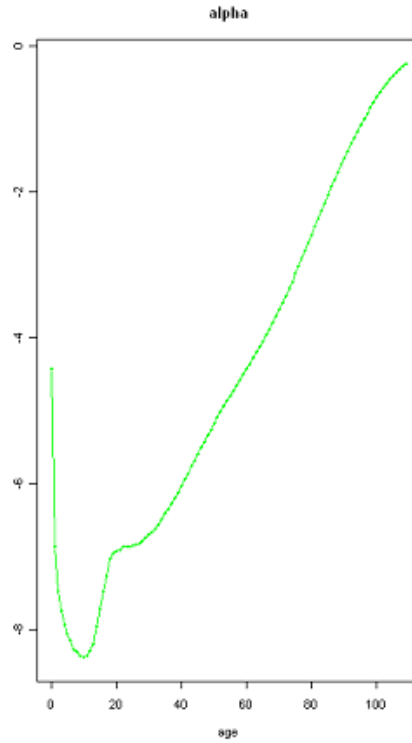


Cette valeur chute pour les âges élevés ce qui est prévisible à cause de la difficulté de modélisation de la mortalité pour ces âges où les données sont rares. Nous remarquons aussi de faibles valeurs de  $R^2$  pour la catégorie d'âge [18 ans, 22 ans] cette surmortalité remarquée aux alentours de 20 ans (connue sous le nom de “la bosse des 20 ans”) s'explique assez souvent par un grand nombre d'accidents durant cette période, notamment les accidents de la route liés à un comportement de jeunesse peu prudent. Notre modèle n'a clairement pas vocation à capter de tels phénomènes spécifiques, d'où la difficulté de son pouvoir explicatif de la mortalité de cette catégorie d'âge.

#### 4.1.3 Interprétation des résultats

Suite à la première étape d'estimation des paramètres du modèle de Lee-Carter nous obtenons les graphes suivants pour les différents paramètres :

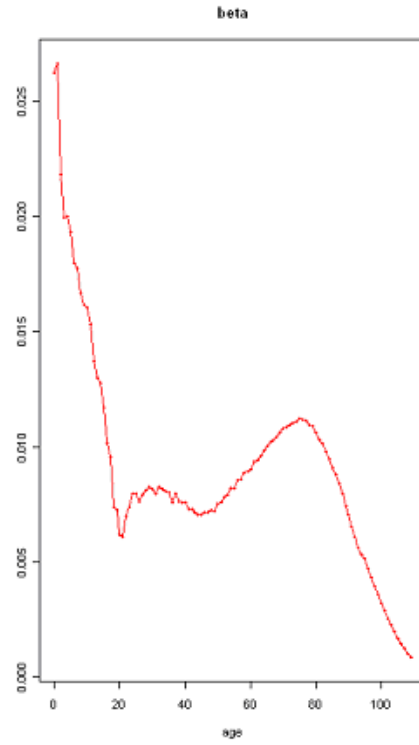
- La composante  $\alpha_x$  : moyenne du taux de mortalité par âge :



Nous notons un premier pic à l'âge 0 qui marque le risque de décès à la naissance, ce qui reste un événement plus probable que de mourir pendant l'enfance par exemple. Après ce pic, la mortalité moyenne augmente avec l'âge avec deux paliers :

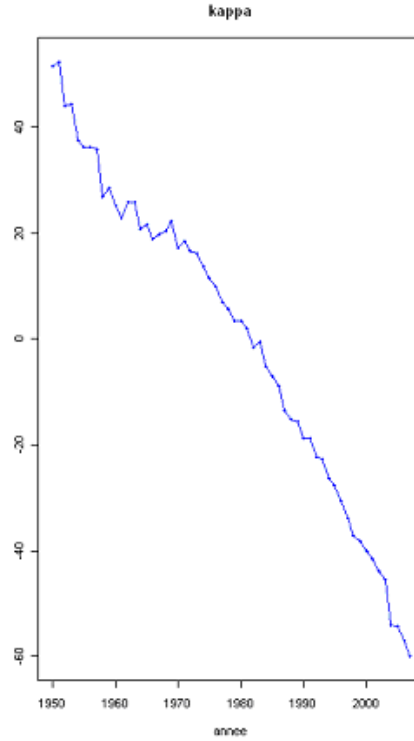
1. Un premier palier entre 20 et 30 ans, où la probabilité de mourir n'augmente pas.
  2. Un deuxième palier pour les âges les plus élevés qui marque l'arrivée à l'âge de fermeture de table.
- La composante  $\beta_x$  qui traduit la dépendance de chaque catégorie d'âge avec sa composante temporelle :





Les pics que nous remarquons sur le profil de  $\beta_x$  peuvent s'interpréter comme étant une dégradation moins rapide de la mortalité. En d'autres termes, c'est une augmentation plus lente de la longévité, qui correspond essentiellement (sur le graphique) aux deux périodes [25 ans, 35 ans] et [65 ans, 75 ans].

- Pour la composante temporelle  $\kappa_t$  qui rend compte de l'effet de l'échelle du temps sur la mortalité, :



nous voyons bien la tendance linéaire de la composante temporelle qui confirme notre choix de modélisation par une marche aléatoire avec drift pour les  $\kappa_t$ . La régression linéaire nous donne l'équation suivante :

$$\kappa_t \simeq -1.76182 t + 51.97370 + \nu_t$$

où  $\nu_t \sim N(0, \sigma)$ , avec  $R_{ajusté}^2 = 0.9749$  et des tests de significativité des paramètres concluants. Les sorties de cette régression sont fournies dans l'annexe.

#### 4.1.4 Inconvénients

Le principal défaut de la méthode repose sur l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus lors de l'estimation par les moindres carrés ordinaires<sup>3</sup>. On constate bien souvent que la variance des taux de mortalité observés croît pour les âges élevés en raison du faible nombre d'observations (voir [Planchet et Thérond (2006)]).

Une solution est proposée par [Brouhns et al (2002)], où ils suggèrent de modéliser le nombre  $D_{xt}$  de décès à l'âge  $x$  comme une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de moyenne  $E_{xt} * \eta_{x,t}$ , où  $E_{xt}$  est l'exposition au risque, soit la

3. voir l'article suivant : <http://actudactuaires.typepad.com/laboratoire/2007/08/quelles-alterna.html>

taille moyenne de la population d'âge  $x$  durant l'année  $t$ , et  $\eta_{x,t} = \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)$  le taux instantané de mortalité.

Sous cette hypothèse nous sortons du cadre de Lee Carter, et nous estimons nos paramètres avec le critère “maximum de vraisemblance” à la place du critère des moindres carrés. Ceci est l'hypothèse de Poisson que nous aborderons dans la partie suivante.

Par ailleurs, le modèle de Lee-Carter ne tient pas compte de l'effet cohorte. Quelques modèles proposent une solution à ce problème en intégrant des variables en  $(t - x)$  qui retrouvent l'année de naissance et donc la génération.

Enfin, l'estimation des paramètres se fait en employant une méthode de décomposition en valeurs singulières. Cette méthode nécessite d'avoir à disposition des tables rectangulaires complètes de taux de décès. Il se pose alors le problème, traditionnellement appelé problème de fermeture de la table, aux âges élevés où l'effectif soumis à exposition n'est plus assez important pour fournir des résultats stables, voir inexistants (cf [Planchet et Thérond (2006)]).

## 4.2 Modèle Poissonnien

Comme nous l'avons remarqué dans notre premier modèle, le principal défaut du modèle de Lee-Carter est l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus lors de l'estimation des moindres carrés ordinaires. Nous remarquons généralement une augmentation de la variance des taux de mortalité pour les âges les plus élevés. Cette augmentation de variance s'explique principalement par le nombre très limité d'observations pour ces âges. Pour pallier à ce problème, nous optons pour l'hypothèse de Poisson proposée par [Brouhns et al (2002)] et détaillée par [Delwarde (2005)].

### 4.2.1 Hypothèse de Poisson

Cette hypothèse, suggérée par [Brouhns et al (2002)] consiste à modéliser le nombre  $D_{xt}$  de décès à l'âge  $x$  durant l'année  $t$  à l'aide de la loi de Poisson, c'est à dire :

$$D_{xt} \sim \text{Poisson}(E_{xt}\eta_x(t))$$

avec :

- $E_{xt}$  : nombre de personnes d'âge  $x$  durant l'année  $t$ , considéré comme notre exposition au risque.
- $\eta_x(t)$  : taux instantanée de mortalité.

Ce modèle est complété par la spécification :

$$\eta_{x,t} = \exp(\alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t)$$

Avec toujours les mêmes contraintes retenues précédemment pour le modèle de Lee-Carter (bien nécessaire ici aussi pour l'identifiabilité du modèle) :

$$\sum \beta_x = 1 \text{ et } \sum \kappa_t = 0.$$

Nous trouvons dans la littérature d'autres propositions de modélisation de  $\eta_{x,t}$ , notamment ce que suggère [Renshaw et Haberman (1996)] :

$$\ln(\eta_{xt}) = \sum_{j=1}^p \psi_j(x, t) \beta_j$$

où :

- $\psi_j(.,.)$  : fonctions de l'âge et du temps calendaire qui jouent le rôle de variables explicatives.
- $\beta_j$  : paramètres à estimer sur la base de données.

Nous avons privilégié le modèle  $\eta_{x,t} = \exp(\alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t)$  afin de rester dans une logique de continuité dans l'étude des différents modèles. Ainsi nous conservons la forme log-bilinéaire de Lee-Carter en remédiant uniquement au défaut d'homoscédasticité.

Ce modèle Poissonien présente, au delà de son atout principal déjà annoncé, d'autres avantages :

1. Le modèle donne des valeurs entières pour le nombre de décès  $D_{xt}$ , ce qui n'est pas assuré par le modèle de Lee-Carter.
2. L'estimation des paramètres est faite avec le critère du maximum de vraisemblance et non plus par les moindres carrés ordinaires. Nous ne devons donc plus passer par la décomposition en valeurs singulières et nous ne sommes plus obligés d'avoir des données rectangulaires.
3. La modélisation du nombre de décès  $D_{xt}$  plutôt que du taux de mortalité  $\eta_{xt}$  nous permet de ne pas passer par la phase de réajustement des  $\kappa_t$  évoquée précédemment dans les phases d'implémentation du modèle de Lee-Carter. En effet, la considération du critère du maximum de vraisemblance dans nos calculs nous garantit de reproduire le nombre annuel total observé de décès :

$$\frac{\partial L(\alpha, \beta, \kappa)}{\partial \alpha_x} = 0 \Leftrightarrow \sum_{x_{min}}^{x_{max}} d_{xt} = \sum_{x_{min}}^{x_{max}} E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)$$

avec  $L(\alpha, \beta, \kappa)$  la fonction de vraisemblance du modèle de Poisson.

Nous expliquons maintenant les étapes de l'implémentation de ce modèle (inspirées des documents suivants : [Delwarde et al (2005), Renshaw et Haberman (2003)]).

#### 4.2.2 Implémentation du modèle

Dans l'implémentation de ce modèle nous conserverons quelques étapes de l'implémentation du modèle de Lee-Carter tout en adaptant d'autres parties. Nous proposerons une explication par la suite.

#### 4.2.2.1 Adaptation de la base des données :

Contrairement au modèle de Lee-Carter, nous avons besoin pour ce modèle de deux types de tables :

- Les tables de décès
- Les tables d'exposition

#### 4.2.2.2 Estimation des paramètres par maximum de vraisemblance :

L'un des avantages de ce modèle est la facilité d'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance. En effet, en notant  $\lambda_{xt}$  le nombre attendu de décès à l'âge  $x$  durant l'année  $t$ , nous avons selon le modèle Poissonien :

$$\lambda_{xt} = E[D_{xt}] = E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)$$

et

$$P(D_{xt} = d_{xt}) = \exp(-E_{xt} \eta_{xt}) \frac{(E_{xt} \eta_{xt})^{d_{xt}}}{d_{xt}!}$$

La fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L(\alpha, \beta, \kappa) = \prod_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} \prod_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} \exp(-\lambda_{xt}) \frac{\lambda_{xt}^{d_{xt}}}{d_{xt}!}$$

En appliquant le logarithme népérien et en remplaçant  $\lambda_{xt}$  par son expression nous obtenons :

$$\ln(L(\alpha, \beta, \kappa)) = \sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} \sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} (d_{xt}(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) - E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)) + cste$$

Les paramètres du modèle doivent maximiser cette expression afin de donner l'image la plus vraisemblable de la mortalité réelle. Or la structure de l'équation n'est pas linéaire (à cause de la présence du terme :  $\beta_x \kappa_t$ ) ce qui n'est pas facile à résoudre par les logiciels classiques. Nous utiliserons donc la solution suggérée par [Goodman (1979)] qui reprend l'algorithme de Newton-Raphson. Cette méthode repose sur une logique itérative qui consiste à mettre à jour, à chaque itération, l'ensemble des paramètres en se basant sur les valeurs de l'itération précédente. Si on note  $\mathfrak{S}$  l'ensemble des paramètres, alors l'algorithme se traduit par :

$$\hat{\mathfrak{S}}_j^{(\xi+1)} = \hat{\mathfrak{S}}_j^{(\xi)} - \frac{\partial L^{(\xi)} / \partial \mathfrak{S}_j}{\partial^2 L^{(\xi)} / \partial \mathfrak{S}_j^2}$$

où  $L^\xi = L(\hat{\mathfrak{S}}^{(\xi)})$ .

Dans notre cas, il s'agit de trois paramètres  $(\alpha_x, \beta_x, \kappa_t)$  d'où les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_x^{(k+1)} &= \hat{\alpha}_x^{(k)} - \frac{\sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} (d_{xt} - E_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{\kappa}_t^{(k)}))}{-\sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} (E_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{\kappa}_t^{(k)}))} \\ \hat{\kappa}_x^{(k+1)} &= \hat{\kappa}_x^{(k)} - \frac{\sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} (d_{xt} - E_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k+1)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{\kappa}_t^{(k)})) \hat{\beta}_x^{(k)}}{-\sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} (E_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k+1)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{\kappa}_t^{(k)})) (\hat{\beta}_x^{(k)})^2} \\ \hat{\beta}_x^{(k+1)} &= \hat{\beta}_x^{(k)} - \frac{\sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} (d_{xt} - E_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k+1)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{\kappa}_t^{(k+1)})) \hat{\kappa}_t^{(k+1)}}{-\sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} (E_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k+1)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{\kappa}_t^{(k+1)})) (\hat{\kappa}_t^{(k+1)})^2}\end{aligned}$$

La condition d'arrêt de cet algorithme est que l'augmentation marginale de la log-vraisemblance ne dépasse plus un certain minimum que nous fixons par avance. Nous devons initialiser ces trois valeurs sous la contrainte que  $\hat{\beta}_x^{(0)} \neq 0$  afin d'éviter la division par zéro. Ce choix est libre. Toutefois, pour accélérer la convergence du modèle nous partons de valeurs "vraisemblables" qui soient proches des valeurs que l'on trouve dans les tables dont nous disposons. Pratiquement nous allons mettre comme valeurs initiales celles déterminées par le modèle de Lee-Carter.

A ce stade le seul problème est que nos paramètres ne vérifient pas forcément les contraintes :  $\sum \beta_x = 1$  et  $\sum \kappa_t = 0$ . Il suffit donc d'appliquer les transformations suivantes :

$$\hat{\alpha}_x \leftarrow \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \bar{\kappa}$$

$$\hat{\kappa}_t \leftarrow (\hat{\kappa}_t - \bar{\kappa}) \hat{\beta}_\bullet$$

$$\hat{\beta}_x \leftarrow \frac{\hat{\beta}_x}{\hat{\beta}_\bullet}$$

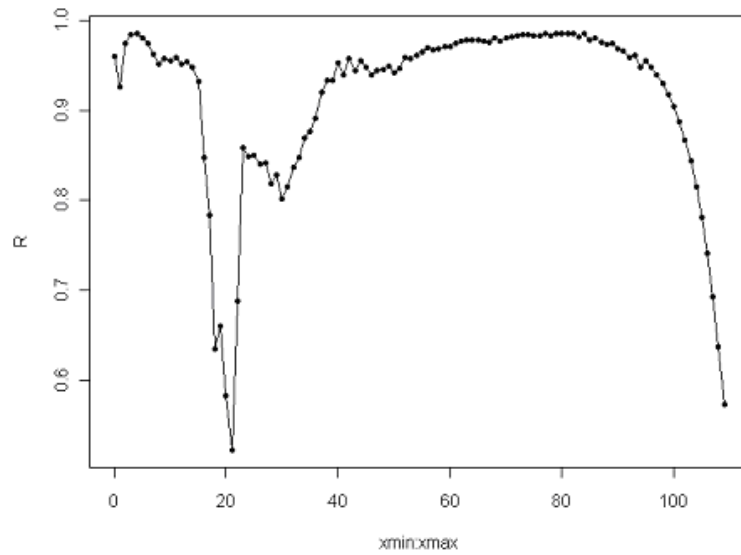
où  $\bar{\kappa}$  est la moyenne des  $\hat{\kappa}_t$  estimés et  $\hat{\beta}_\bullet$  la somme des  $\hat{\beta}_x$  estimés. Suite à ces transformations, nos estimateurs vérifient bien les contraintes d'identifiabilité du modèle.

#### 4.2.2.3 Extrapolation de la composante temporelle :

Cette étape reste la même que celle détaillée dans le modèle de Lee-Carter.

#### 4.2.2.4 Mesure de la qualité du modèle :

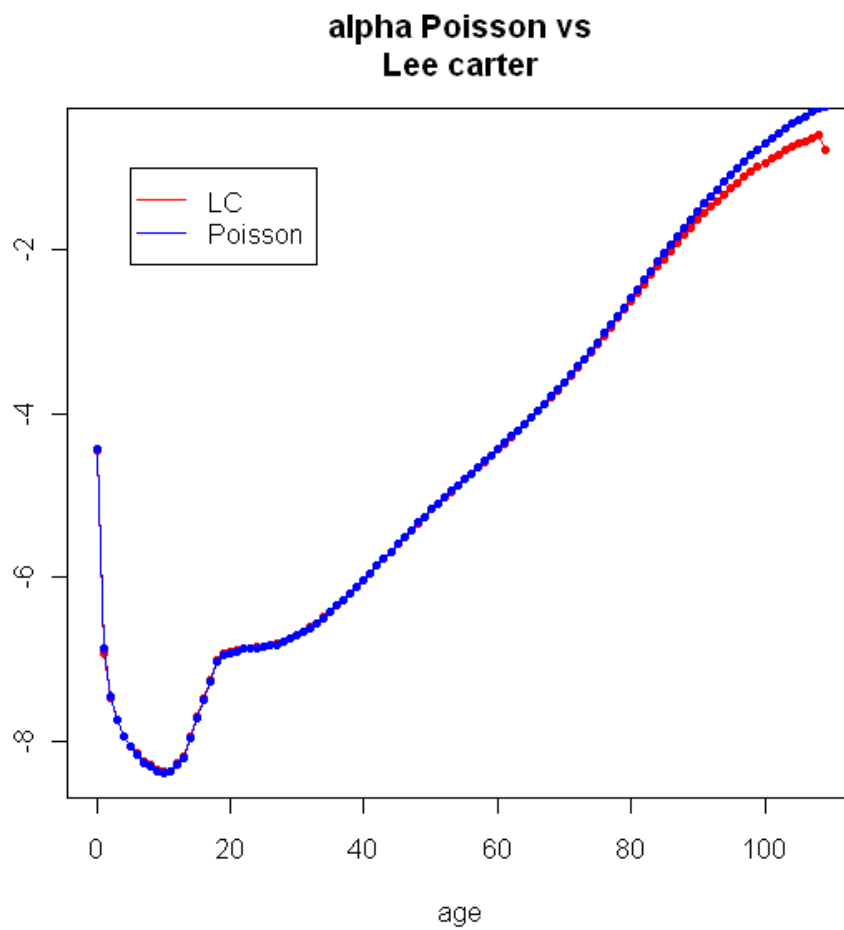
A l'instar du modèle de Lee-Carter, nous calculons le  $R^2$  pour avoir un indicateur du pouvoir explicatif du modèle. Nous remarquons le même profil pour cet indicateur.



### 4.2.3 Interprétation des résultats (comparaison avec Lee-Carter)

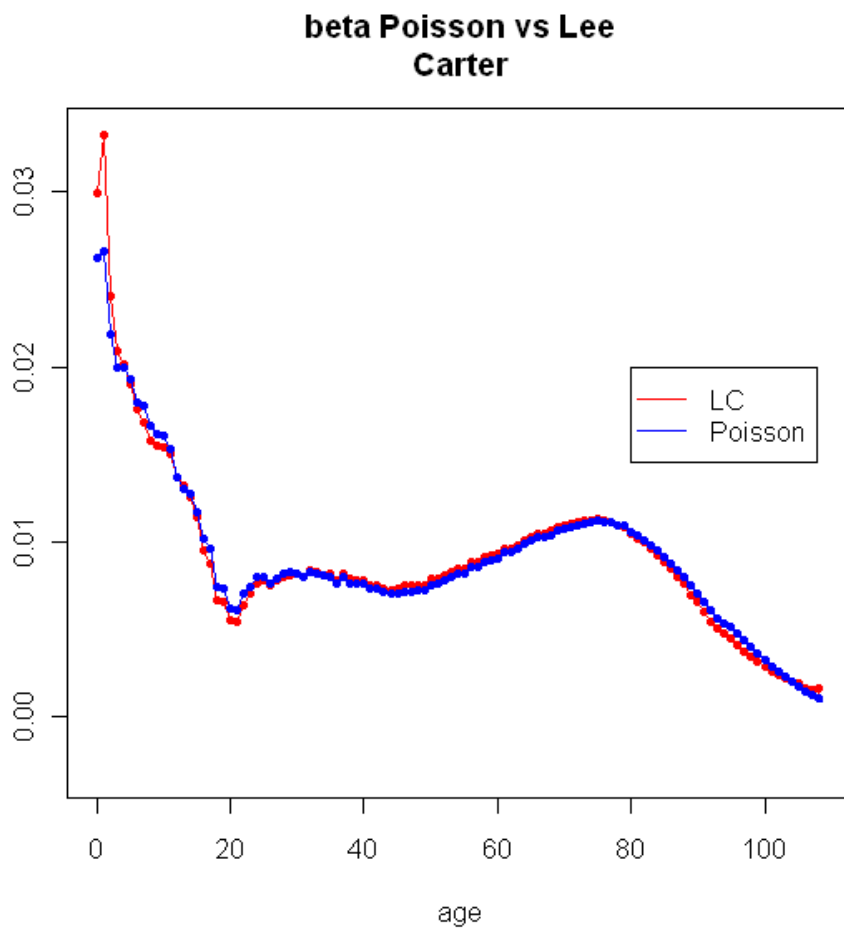
A l'instar du modèle de Lee-Carter, nous essayons d'interpréter les résultats du modèle Poissonien. Nous essayons aussi de comparer les résultats des deux modèles. Ainsi nous présentons les trois graphes suivants pour les trois facteurs du modèle :

- Pour la composante  $\alpha_x$  qui présente, nous le rappelons, la moyenne du taux de mortalité par âge :



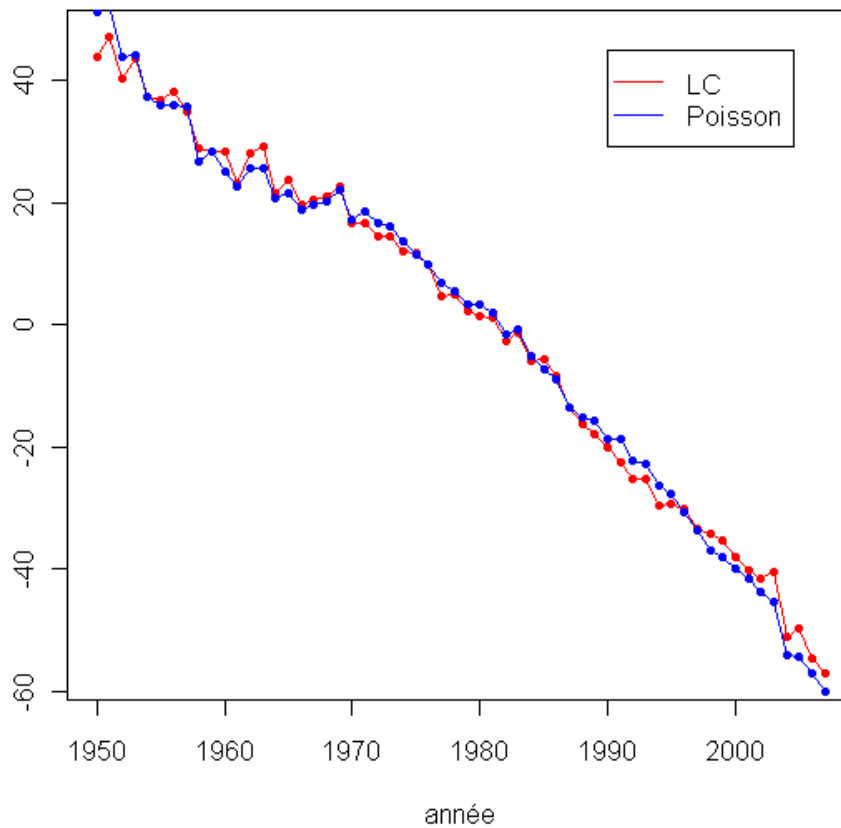
- Pour la composante  $\beta_x$  qui traduit la dépendance de chaque catégorie d'âge par rapport à la composante temporelle :





- Pour la composante temporelle  $\kappa_t$  qui rend compte de l'effet de l'échelle du temps sur la mortalité :

### kappa Poisson vs Lee Carter



Nous avons des valeurs semblables pour les paramètres  $\beta_x$  et  $\kappa_t$  (ceci rejoint les résultats trouvés dans les recherches de *références*). La différence entre les deux modèles apparaît essentiellement au niveau des valeurs des  $\alpha_x$  pour les âges élevés. Ce qui prouve la pertinence du rejet de l'hypothèse d'homoscédasticité.

En effet, le modèle Poissonnien rejetant l'hypothèse d'homoscédasticité, nous confirmons une variation importante de la variance sur les âges élevés et un non lissage des valeurs du taux de mortalité. Nous observons donc un taux moyen de mortalité plus élevé pour le modèle Poissonnien que celui de Lee-Carter au niveau des âges supérieurs à 78 ans.

## Chapitre 5

# Table de mortalité de la population du portefeuille d'étude (*risque de base*)

Dans cette partie nous modélisons la mortalité spécifique du portefeuille de l'assureur. En effet, à ce stade, plusieurs questions sont légitimes : quelle mortalité sommes nous en train de modéliser : celle de la population ou celle de l'assureur ?

Laquelle de ces mortalités doit être projetée ?

Sur quelles données observées pouvons nous nous baser (HMD, INSEE...) ?

La réponse apportée à cette partie est la nécessité d'avoir des données “complètes” pour mener à bien les étapes d'estimation des paramètres. Nous sommes d'une certaine manière obligés de nous baser sur des tables standards comme les tables de l'INSEE ou celles de HMD. Les données de mortalité historique de l'assureur ne permettent jamais, en pratique, de construire une table de mortalité historique complète. Toutefois, pour calculer les provisions mathématiques de l'assureur il faut bien tenir compte du profil de mortalité de son portefeuille. L'écart entre la mortalité de l'assureur et la mortalité de référence (nationale par exemple) est ce que nous appelons le “*risque de base*”.

Nous allons considérer une table de mortalité historique de référence (table HMD) et nous essayerons de la transformer pour avoir une table spécifique relative à la mortalité de l'assureur, afin d'éliminer le *risque de base*. Pour cela, nous proposerons un ajustement (abattement) de la table initiale que nous expliquerons dans cette partie.

### 5.1 Mortalité de l'assureur

Les données de mortalité historique de l'assureur ne nous permettent pas de construire une table de mortalité complète mais nous permettent de remplir

certaines parties de cette table. Par exemple si l'assureur possédait un portefeuille de 10 000 assurés en 2003 et que 3 personnes âgées de 75 ans sont décédées parmi 100 personnes du même âge, alors nous pouvons remplir la case  $[x = 75, t = 2003]$  de la table avec  $\eta_{75,2003} = 3/100$ .

Nous pouvons remplir quelques cases d'une table de mortalité sur la base de la mortalité historique de l'assureur. Cependant la taille de la population sous risque étant limitée, il sera difficile de mener une construction intrinsèque qui se base sur un modèle standard parmi ceux utilisés pour la construction des tables réglementaires TGH05 et TGF05 (Makeham par exemple, voir plus de détails dans [Serant (2005)]).

Parmi les méthodes proposées dans la littérature figurent celles développées dans [Planchet (2010)]. Il s'agit d'utiliser un positionnement des taux de décès d'expérience par rapport à une référence externe.

Nous retenons cette idée comme première étape d'une méthode à deux étapes que nous expliquerons par la suite.

## 5.2 Étape 1 : Table “du moment” *partielle* de l'assureur

La méthode que nous allons utiliser commence par la construction d'une *ébauche* de table du moment pour l'expérience de l'assureur. Plus concrètement nous allons observer la mortalité du portefeuille de la cédante sur trois ans : de 2005 à 2007. Notre objectif sera d'avoir ces trois colonnes (pour les 3 années : 2005, 2006 et 2007) complètes pour la table d'expérience qu'on cherche à construire *in fine*.

Nous notons que le choix de trois ans est arbitraire et dépend clairement des contraintes techniques et de la densité des données que nous pouvons récupérer sur ledit portefeuille.

Pour atteindre ce premier objectif nous avons recours, comme annoncé, à la méthode proposée par [Planchet (2010)] (à une différence près que nous utilisons l'opérateur logit). En effet, nous régressons les logits des taux de mortalité d'expérience sur les logits des taux de mortalité d'une table de référence (celle de HMD en l'occurrence), ce qui donne la formule suivante :

$$z_x = \ln(q_x/(1 - q_x)) = a \cdot \ln(q_x^{ref}/(1 - q_x^{ref})) + b + \varepsilon_x$$

où

- $z_x$  est le logit de  $q_x$ .
- l'exposant  $^{ref}$  désigne les informations venant de la table de référence qu'est la table HMD.
- $a$  et  $b$  sont les facteurs de cette régression linéaire qui s'obtiennent avec la méthode des moindres carrés ordinaires.
- $\varepsilon_x$  sont les résidus.

Toujours face aux problèmes pratiques qu'induit la non complétude des données de notre portefeuille, nous ne pouvons faire cette régression que pour certaines

catégories d'âges.

Les taux de mortalité de notre table d'expérience pour les années 2005 - 2007 sont disponibles pour la plage d'âge :  $[40ans, 85ans]$ . Nous ne tenons pas compte des taux des plus de 85 ans à cause des mauvaises estimations qui découlent du manque de données.

Ensuite, nous complétons nos données à gauche  $[0an, 39ans]$  et à droite  $[86ans, \text{âge de fermeture de la table de référence} : 110ans]$  en nous basant sur les coefficients de l'équation précédente (notons que les coefficients  $a$  et  $b$  ne dépendent pas de l'âge), et ce en utilisant la formule suivante (qui en découle) :

$$q_x = \frac{\exp(z_x)}{1 + \exp(z_x)}$$

### 5.3 Étape 2 : Ajustement et complétude de la Table d'expérience

Suite à la première étape, nous disposons d'une ébauche d'une table d'expérience de l'assureur sous cette forme (à partir de l'ajustement appliqué sur la table de référence) :

2005	2006	2007
$q_{0,2005}$	$q_{0,2006}$	$q_{0,2007}$
...	...	...
...	...	...
$q_{x,2005}$	$q_{x,2006}$	$q_{x,2007}$
...	...	...
...	...	...
$q_{110,2005}$	$q_{110,2006}$	$q_{110,2007}$

Maintenant, il faudra compléter ces tables pour obtenir la totalité de la table d'expérience. Pour s'y prendre nous allons utiliser les taux d'accroissement de la table de référence.

Ainsi si nous remarquons par exemple un taux d'accroissement de 2% pour le  $q_{40}^{ref}$  en passant de l'année 2004 à 2005, nous l'appliquons à  $q_{40}$  de la table d'expérience de l'assureur i.e, si :

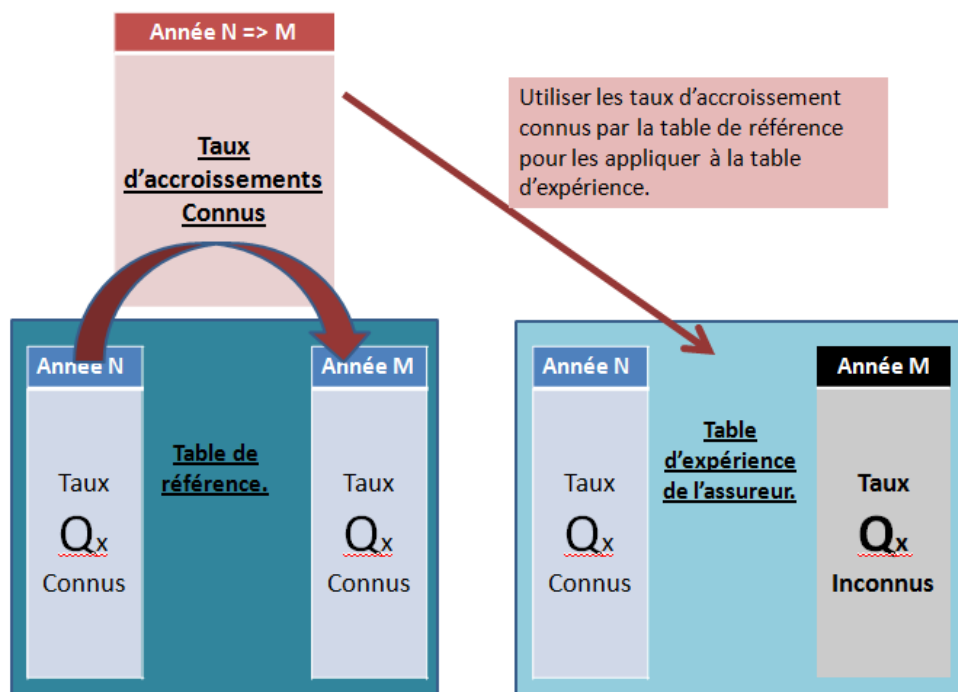
$$(q_{40,2005}^{ref} - q_{40,2004}^{ref})/q_{40,2004}^{ref} = 2\%$$

Alors nous cherchons  $q_{40,2004}$  qui vérifie :

$$(q_{40,2005} - q_{40,2004})/q_{40,2004} = 2\%$$

D'une façon plus globale, et en fonctionnant par colonne, si nous avons la colonne de taux d'accroissement d'une année  $N$  (pour laquelle nous avons les données expérimentales) à une autre année  $M$  (pour laquelle nous voulons trouver

les données expérimentales), alors nous cherchons la colonne des taux d'accroissement de la table de référence et nous l'appliquons à la table expérimentale. Le schéma suivant explique la procédure :



Enfin nous obtenons la table dite d'expérience de l'assureur. C'est sur cette table que nous appliquons les modèles de longévité que nous avons expliqués avec tous les détails de la procédure, comme le problème de la fermeture de table.

Quatrième partie

Couverture du risque de  
longévité

Dans les parties précédentes nous avons montré que la longévité peut être expliquée par un modèle dont quelques facteurs évoluent au cours du temps, ce qui génère un risque de longévité sur certains portefeuilles d'assurance vie (à cause de la volatilité des facteurs temporels).

Nous avons aussi compris que la modélisation de la mortalité humaine ouvre sur un grand panel de modèles et que le risque de modèle reste prépondérant dans ce contexte. Même dans le cas où le modèle est bien adapté et robuste, l'assureur ne pourra éviter le risque idiosyncratique qui relève du décalage entre la mortalité anticipée et la mortalité constatée.

L'assureur serait donc intéressé par un transfert de ce risque pour se protéger contre toute fluctuation de la longévité qui ne correspondrait pas à ce qui était prévu par le modèle.

Il s'agit donc d'un contrat qui couvre à la fois le risque de modèle et le risque idiosyncratique de la longévité.



## Chapitre 6

# Cadre Solvabilité II

### 6.1 Cadre général

Solvabilité II est une réforme réglementaire européenne du monde de l'assurance. Elle cherche à mieux adapter les fonds propres des compagnies d'assurances et de réassurance avec les risques que celles-ci encourent.

Elle repose sur trois piliers :

1. Un pilier quantitatif : qui définit les principes et les formules<sup>1</sup> de calcul des fonds propres nécessaires à la pérennité des assureurs et des réassureurs. Deux niveaux de capital réglementaire sont introduits :
  - (a) Le MCR (Minimum Capital Requirement) : qui est le niveau minimum des fonds propres sous lequel l'Autorité de contrôle se doit d'intervenir et de prendre des mesures qui vont jusqu'à retirer l'agrément qui permet le fonctionnement de la compagnie.
  - (b) Le SCR (Solvency Capital Requirement) : c'est le niveau cible censé pouvoir absorber les chocs aléatoires auxquels l'assureur doit faire face.
2. Un pilier qualitatif : qui vise à mettre en place une culture de gestion des risques et des procédures de suivi de la “santé” de l'assureur.
3. Un dernier pilier qui vise à améliorer la transparence de l'assureur vis à vis du public et des autorités de contrôle pour que ces dernières puissent améliorer leur pouvoir de surveillance.

Dans ce cadre réglementaire, le capital requis est calculé selon la notion de “*Best Estimate*” qui se traduit par la définition suivante :

*“La meilleure estimation est égale à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs), déterminée à partir de la courbe des taux sans risque pertinente. Le calcul de la meilleure estimation*

---

1. Les formules sont proposés dans les QIS : *Quantitative Impact Study*.

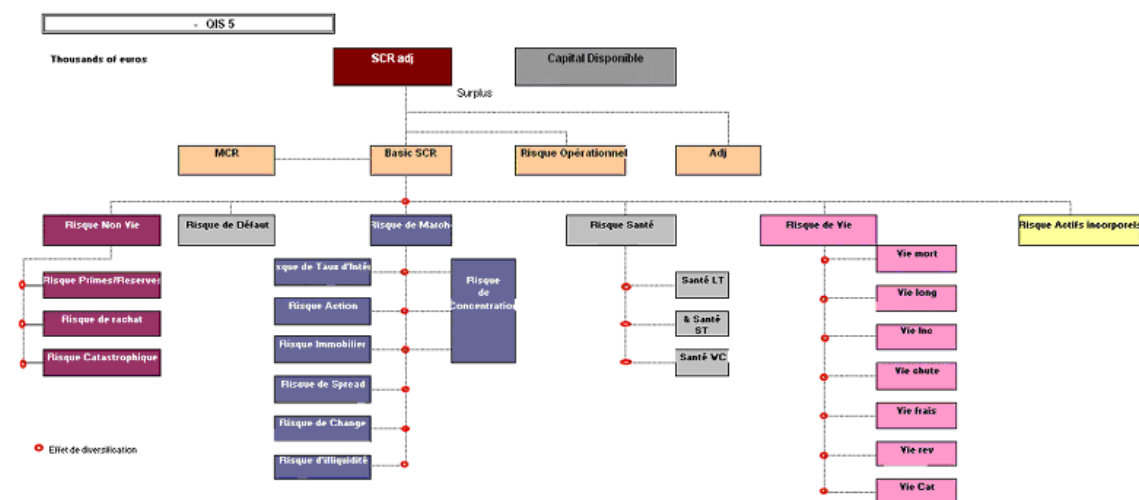
*est fondé sur des informations actuelles crédibles et des hypothèses réalistes et il fait appel à des méthodes actuarielles et des techniques statistiques adéquates”* (voir [ACAM (2007)])

En d’autres termes, les provisions techniques sont l’espérance des flux futurs de règlements actualisés. Pour réaliser ce calcul, les méthodes utilisées peuvent être :

- soit stochastiques, impliquant l’évaluation de la distribution des flux futurs, dont la moyenne actualisée conduit à la définition du best estimate;
- soit déterministes, avec l’évaluation de la sinistralité ultime «moyenne» permettant, après application de cadences et de la courbe des taux, de déduire la valeur actualisée des flux futurs.

Les calculs sont faits selon la logique “Bottom-up” : nous partons des risques spécifiques un par un, pour agréger dans un deuxième temps les montants correspondant en tenant compte des différentes corrélations.

Le comité de EIOPA<sup>2</sup> fournit le tableau suivant qui détaille la nature des risques d’une société d’assurance :



Le calcul du capital réglementaire se fait à travers la formule standard ou via un modèle interne. Nous nous intéressons dans un premier temps à la formule standard et nous l’expliquons notamment pour le risque de longévité (le cadre de notre étude).

2. European Insurance and Occupational Pensions Authority, anciennement CEIOPS : Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors

## 6.2 Formule du SCR longévité

Les détails des calculs de la Formule standard de Solvabilité II sont spécifiés dans le document des Spécifications Techniques publié par le CEIOPS (plus spécifiquement le chapitre 7, page 147 du [CEIOPS (2010)]). En effet, la contribution du risque de longévité dans le capital réglementaire propre à l'assurance vie est de la forme :

$$SCR_{life} = \sqrt{\sum_{r,c} CorrLife_{r,c} \cdot Life_r \cdot Life_c}$$

où  $Life_i$  parcourt les différents modules de l'assurance vie (sept modules) :

- Les risques biométriques avec le risque de mortalité  $Life_{mort}$ , de longévité  $Life_{long}$  et d'invalidité  $Life_{dis}$ .

A l'issu du QIS5, le risque de mortalité se base sur un scénario d'augmentation des taux de mortalité de 15% pour chaque âge tandis que le risque de longévité fait l'hypothèse inverse, soit une baisse des taux de mortalité de 20% pour chaque âge.

Le risque invalidité suppose une augmentation des taux d'invalidité de 35% la première année, puis de 25% les années suivantes pour chaque âge. Avec une baisse de 20% de la probabilité de retourner de l'état d'incapable à celui de valide.

- Des éléments financiers au travers des risques de rachat  $Life_{lapse}$ , de dépenses  $Life_{exp}$  et de révisions  $Life_{rev}$ .

Pour le risque de rachat trois alternatives sont envisagées. Un risque de diminution des taux de rachats (baisse de 50%), un risque d'augmentation des rachats (hausse de 50%). Enfin un risque de rachat massif correspondant à 30% du coût du rachat.

Le risque de dépense consiste à appliquer une hausse de 10% des dépenses futures combinée à une hausse de 1% par an du taux d'inflation. Quant au risque de révision qui concerne le risque d'une augmentation des rentes, il faut appliquer une hausse de 3% du montant annuel à payer.

- Des éléments imprévisibles, le risque catastrophe  $Life_{CAT}$  couvre des événements comme les pandémies.

Il n'y a pas de scénario précis communiqué par le régulateur, le risque Cat se matérialise par une augmentation de 1,5 pour mille du taux de souscripteurs décédant dans l'année et une hausse de 1,5 pour mille du taux de souscripteurs touchés par la maladie. Cet impact se répartit proportionnellement dans le temps, puisque 1/3 des personnes malades le sont pendant les 6 premiers mois de l'année, un autre tiers dans le second semestre

$CorrLife_{r,c}$  correspond à la corrélation entre chacun des deux modules de l'assurance vie, il faut considérer le tableau des corrélations suivant (imposé par le comité du CEIOPS) :

	Mortality	Longevity	Disability	Lapse	Expenses	Revision	CAT
Mortality	1						
Longevity	-0.25	1					
Disability	0.25	0	1				
Lapse	0	0.25	0	1			
Expenses	0.25	0.25	0.5	0.5	1		
Revision	0	0.25	0	0	0.5	1	
CAT	0.25	0	0.25	0.25	0.25	0	1

Nous remarquons que la longévité n'est pas fortement corrélée aux autres risques vie. Nous notons que sa corrélation avec le risque de mortalité est de  $-0,25$  (la seule corrélation négative dans la table) ce qui prouve l'hypothèse de "couverture naturelle" qui sera abordée dans le chapitre 11. Cette couverture naturelle reste cependant partielle et les risques de mortalité et de longévité ne se compensent pas totalement.

Le calcul du risque de longévité passe par un stress test qui consiste à choquer tous les taux de mortalité (pour tout âge et pour toute police d'assurance qui contient un risque de longévité) uniformément de 20% de baisse. Ainsi la formule proposée est la suivante :

$$Life_{long} = (\Delta(NAV)|choc\ de\ Longévité)$$

où  $\Delta NAV$  est la variation de la Valeur Nette d'Actif (*Net Asset Value*), c'est à dire la variation de la différence entre actif et passif.

A titre de comparaison, le capital réglementaire du risque de mortalité se calcule selon une formule similaire :

$$Life_{mort} = (\Delta(NAV)|choc\ de\ Mortalité)$$

avec cette fois, selon la formule standard, un choc de mortalité de 15 % (au lieu de 20 %).

### 6.3 Application numérique : calcul du SCR

La première étape consiste à comprendre l'activité de l'assureur et à explorer les spécificités de son portefeuille.

Dans notre cas il s'agit de l'assurance vie, notre portefeuille ne contenant que le risque de longévité.

Pour déterminer le capital réglementaire nous allons donc procéder au calcul des PM (Provisions Mathématiques) de l'assureur selon deux scénarios :

- Le premier avec la table prospective de mortalité de l'assureur.
  - Le deuxième avec la même table prospective sur laquelle nous appliquons un abattement linéaire de 20% uniformément sur toute la table.
- La méthode de calcul des PM est détaillée dans la partie 7.3.3.
- Nous faisons l'hypothèse que l'Actif est constant. Donc nous choquons seulement le Passif<sup>3</sup>.
- L'application numérique nous donne le capital réglementaire suivant :

$$SCR_{life} = 7\%PM$$

## 6.4 Alternatives de couverture

Dans le cadre de Solvabilité II, il y a une incitation claire à utiliser un modèle interne plutôt que la formule standard. Un des avantages pour l'entreprise est de mieux assimiler ses risque. Par ailleurs, les paramètres des études d'impact de Solvabilité II (les QIS) sont généralement "très" prudents. Un deuxième avantage d'un modèle interne est donc qu'il devrait, généralement, impliquer un capital réglementaire inférieur à celui obtenu par la formule standard.

Une autre alternative serait de céder son risque à une tierce partie et ainsi la compagnie d'assurance aura moins de capital réglementaire à constituer. Elle se doit toutefois de prouver la conformité et l'efficacité de la couverture qu'elle a achetée.

Dans les deux alternatives, l'assureur cherchera à optimiser le coût de la solution tout en respectant la réglementation.

Dans notre cas nous avons :  $SCR = 7\%PM$  .

Ce capital devrait être amputé des fonds propres et mis en réserve. Actuellement la rémunération des fonds propres sur le marché varie entre 8% et 15%. Nous retiendrons le taux d'intérêt de 10%<sup>4</sup> et nous gardons l'idée suivante :

**La solution alternative (à horizon un an) doit coûter à l'assureur moins de 0,7% des PM, que ce soit via un capital calculé à base d'un modèle interne ou à travers le paiement du prix d'une couverture.**

Nous allons étudier dans le chapitre suivant un contrat de couverture de longévité qui devient répandu depuis la fin de l'année 2007. Notre démarche nous permettra de passer par un modèle interne et ainsi comparer les différents coûts des choix possibles pour l'assureur ainsi que les avantages et les limites de chaque choix.

---

3. Nous rappelons que NAV=Actif-Passif

4. Le chiffre arrondi de la somme de 6% (comme coût indiqué dans QIS 5 pour le Risk Margin) et 3,5% comme taux technique constant.

## Chapitre 7

# Swap de longévité

### 7.1 Montage

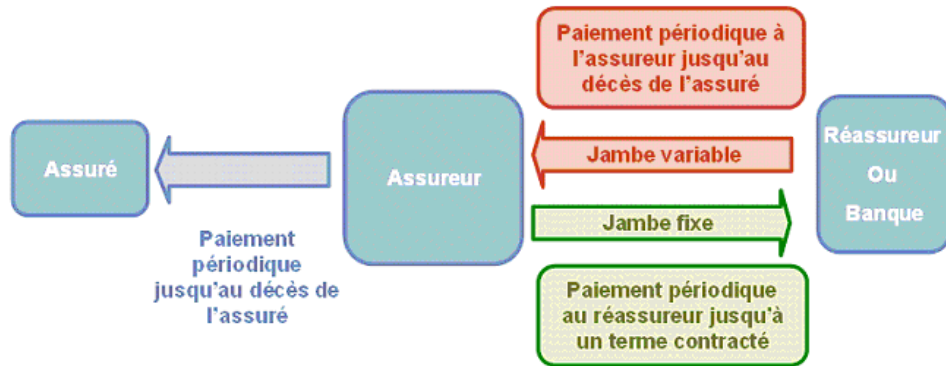
Un contrat de swap est classiquement l'échange de deux jambes de flux financiers entre les co-contractants. L'un des deux contractants paie une jambe fixe définie dans les clauses du contrat. L'autre contrepartie paie une jambe variable en prenant le risque de fluctuation du sous-jacent (taux d'intérêt, taux de change, indice,...etc).

Dans notre cas le sous-jacent est la mortalité future et l'objectif est de se prémunir contre la fluctuation de la longévité.

Le contrat qui semble être le plus répandu sur le marché depuis quelques années est le Swap de longévité[Denuit et al (2007)]. Le principe de base de ce contrat financier reste le même : l'échange de deux jambes entre deux acteurs. Le premier paie une jambe fixe et le deuxième paie une jambe variable. Dans notre cas, l'assureur voudrait figer ses flux financiers futurs, en se basant sur une anticipation de la longévité de son portefeuille, et aimerait trouver une contrepartie qui lui paie les flux réellement réalisés à base de la mortalité réelle.

Le schéma suivant illustre les flux et les parties prenantes de ce contrat :

### Schéma d'un swap de longévité

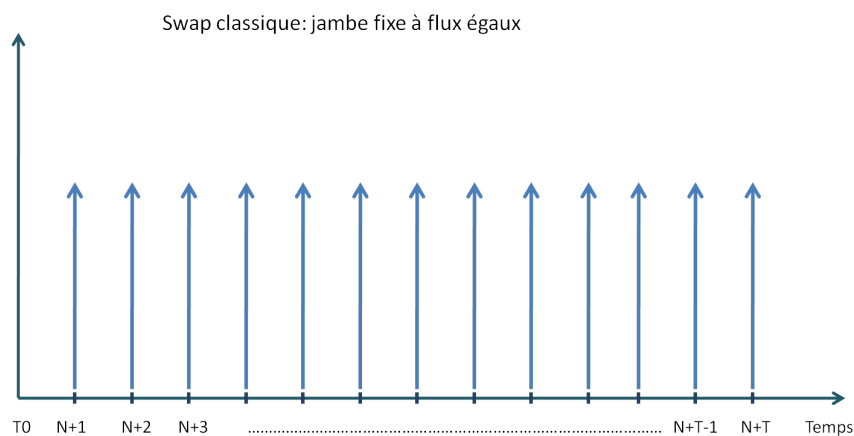


## 7.2 Fonctionnement et spécificités

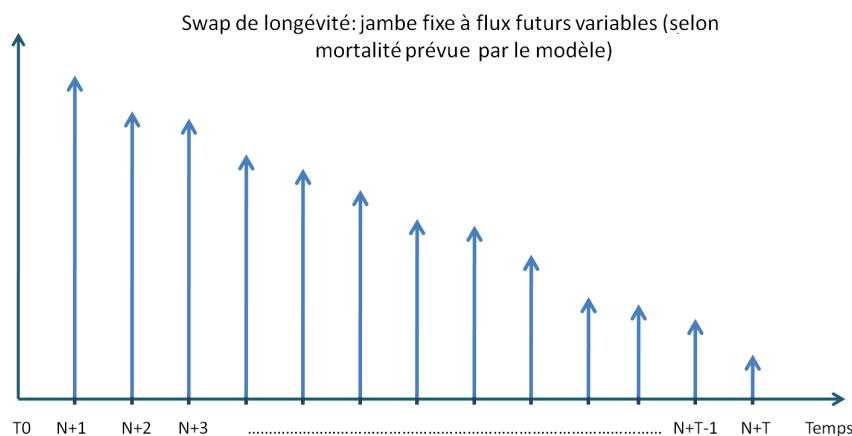
### 7.2.1 Fonctionnement

Le contrat de swap de longévité possède des spécificités par rapport aux contrats de swap classiques que nous expliquons en détail dans cette partie.

En effet, un contrat de swap classique aurait une jambe fixe à flux égaux, un taux d'intérêt ou de change fixe sur un nominal donné par exemple, comme le montre le graphe suivant :



Or dans notre cas, les flux que l'assureur voudrait figer correspondent à ses engagements sur les rentes des assurés. Donc les flux ne sont pas égaux et le schéma suivant est obtenu grâce aux modèles de projection de la mortalité : (Les calculs seront détaillés dans la partie suivante qui traite de la valorisation du swap)



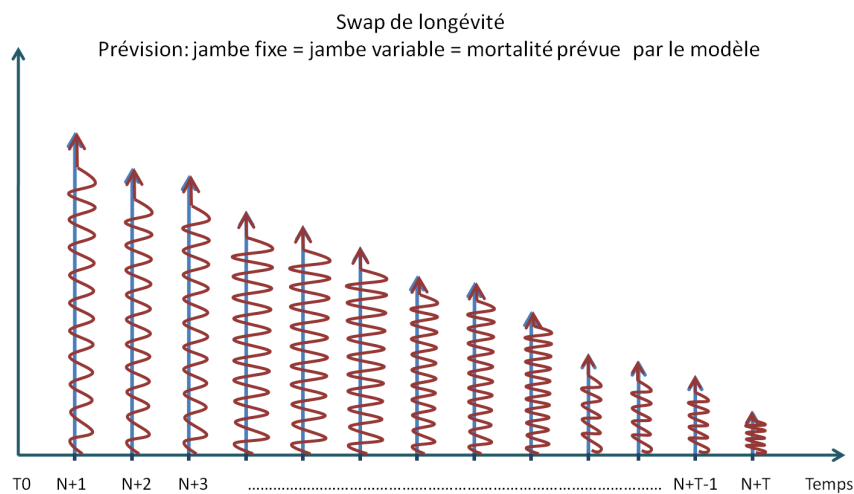
A ce stade, les deux parties prenantes (assureur et réassureur/banque) peuvent signer leur contrat de swap : la jambe fixe étant fixée et connue, la jambe variable étant inconnue (facteur de risque). En d'autres termes, il est implicitement admis qu'on a une égalité entre la jambe fixe et la moyenne de la jambe variable à l'instant  $T = 0$  (le modèle de projection étant fixé, nous choisissons, par construction, une jambe fixe égale à l'espérance mathématique de la jambe variable).

Nous remarquons que la valeur du swap, hors frais de gestion et chargement technique, est initialement nulle comme tout contrat de swap classique : l'assureur et le réassureur<sup>1</sup> se mettent d'accord sur une même prédiction de la mortalité comme l'illustre le schéma suivant :

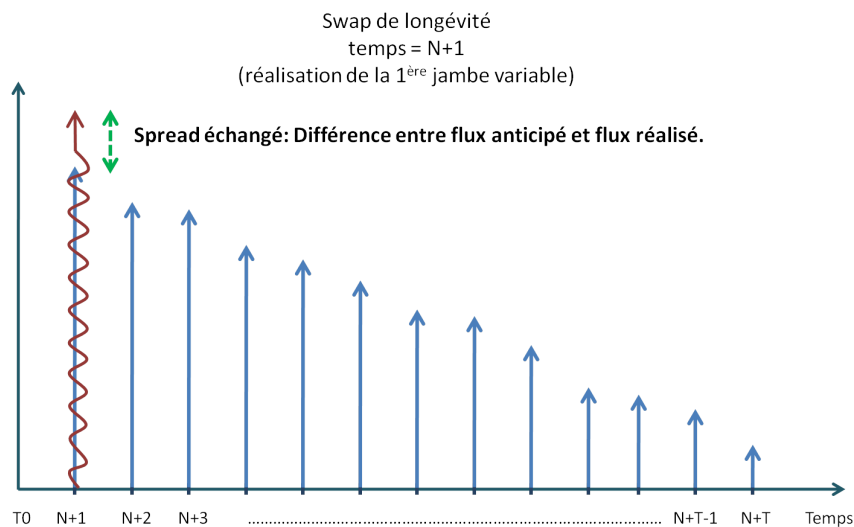
---

1. ou banque

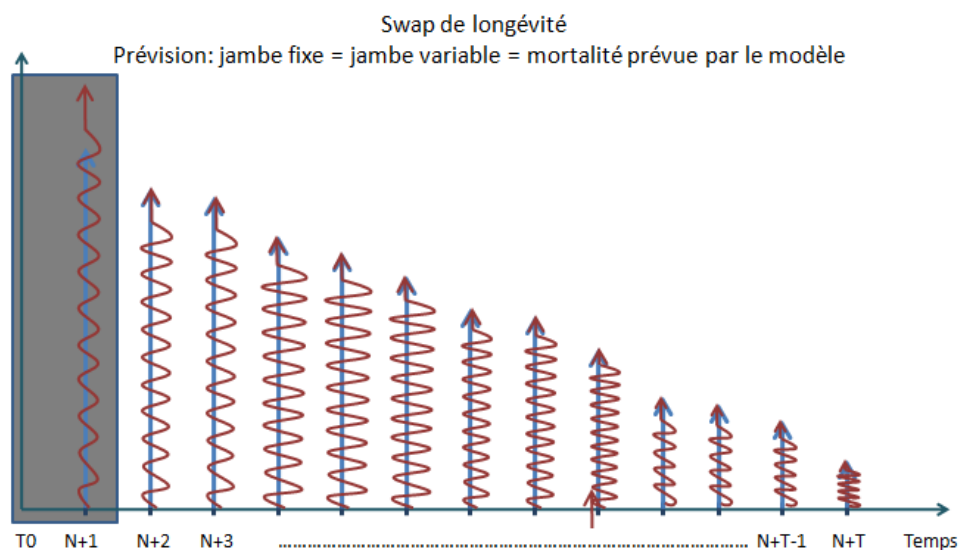




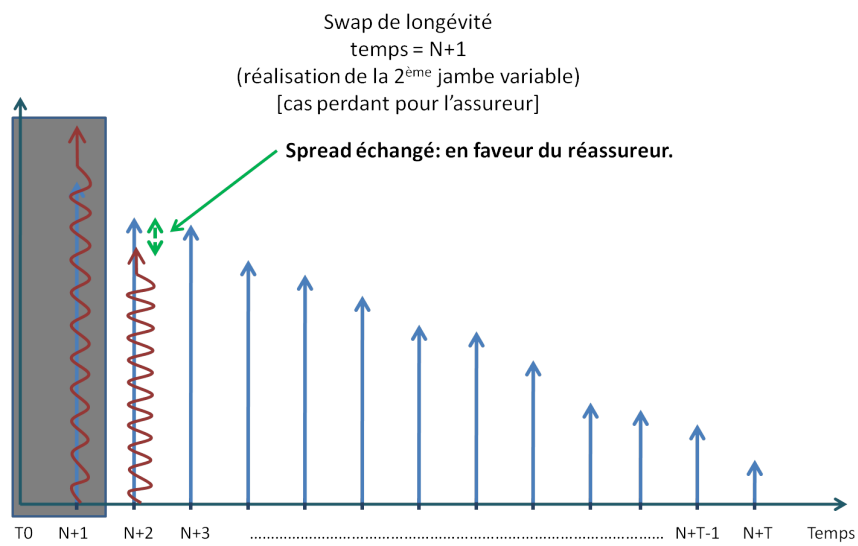
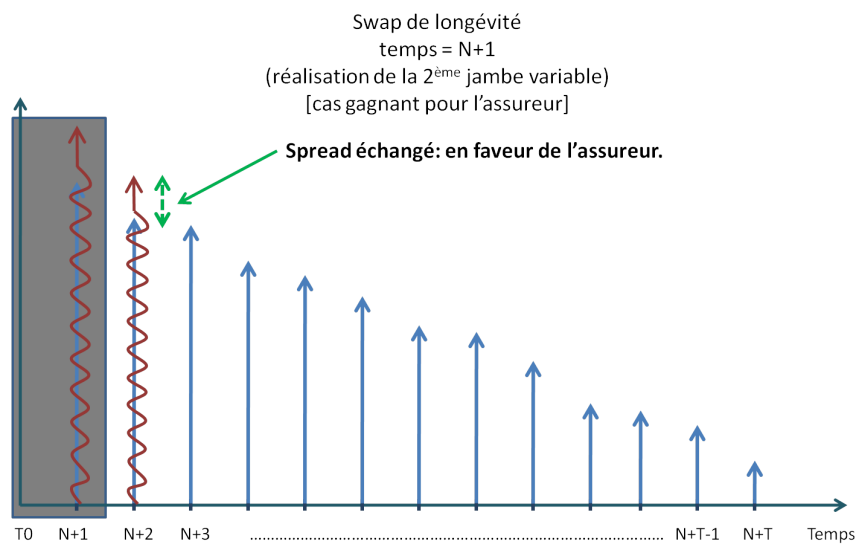
Ensuite, au fur et à mesure que le temps passe, nous notons la mortalité réalisée qui sera logiquement plus ou moins décalée par rapport aux anticipations. Un point est fait à la fin de chaque année entre les co-contractants pour s'échanger la différence entre les deux jambes. La flèche verte dans le graphe suivant montre le montant échangé au bout de la première année :



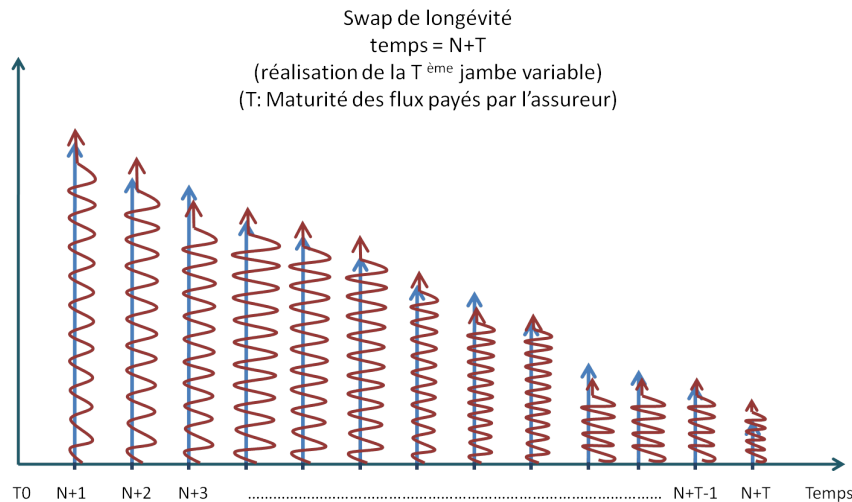
Une fois ce “*spread*” échangé, les co-contractants repartent sur la position et la logique initiales : même prédiction de mortalité donc égalité entre jambe fixe (contractuelle) et jambe variable (inconnue). La prévision de la mortalité future n’est pas remise en question, comme illustré dans le graphe suivant :



Nous nous positionnons en fin de la deuxième année et encore une fois il y aura un échange du *spread* réalisé après l’observation de la mortalité réalisée. Cet échange peut être favorable pour une partie ou une autre (assureur ou réassureur) selon la variation de la mortalité du portefeuille. Nous illustrons les deux cas à travers les deux schémas suivants :



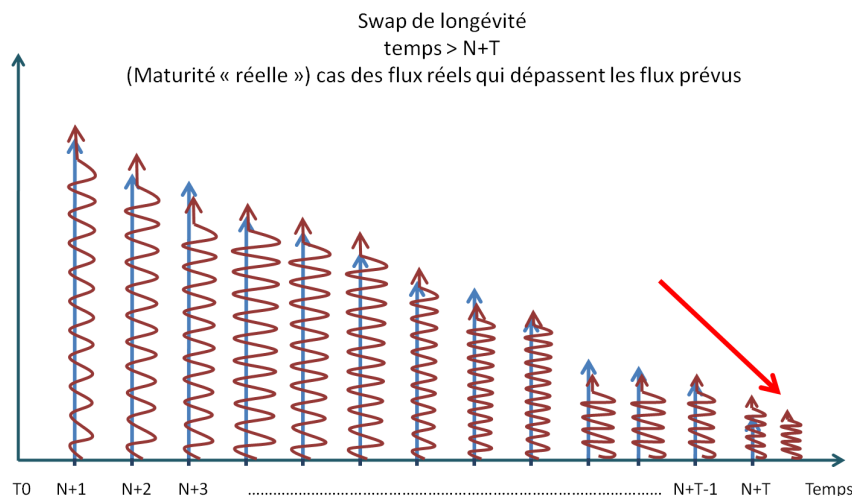
Et ainsi de suite, année par année, nous arrivons à une “*première maturité*”, la maturité contractuelle ou encore la dernière échéance de paiement de flux fixe par l’assureur.



Nous parlons de “*première maturité*” car nous pouvons considérer deux types de swaps :

1. Un swap à maturité fixe  $T$  : l’engagement du réassureur finit au même terme que celui de l’assureur à l’année  $N+T$ .
2. Un swap sur un portefeuille en “Run-off” : dans ce cas, l’engagement du réassureur finit avec le paiement de la dernière rente. C’est à dire au moment de la disparition de tout engagement envers les assurés (décès de tous les assurés ainsi que de leurs réversataires), alors que l’engagement de l’assureur finit à l’année “théorique” de fin de ces engagements (suite à la modélisation et à la projection).

Dans le deuxième type de contrats de swap, le réassureur peut se trouver dans le cas où il continue à assumer les engagements de l’assureur sans recevoir de flux financier de la part de ce dernier, comme le montre le graphe suivant (flèche rouge) :



Ci dessous nous aborderons quelques spécificités concernant ce contrat.

## 7.2.2 Spécificités

### 7.2.2.1 Swap sur indice ou swap sur mesure

Nous précisons que les swaps de longévité se sont développés depuis environ trois ans et deviennent de plus en plus fréquents.

Ils ont le point commun d'avoir l'une des deux forme (voir [Barrieu et al (2010)]) :

- SWAP BASÉ SUR INDICE : où le niveau de la jambe variable dépend d'un indice publié par un organisme. Ceci rappelle le cas des swaps de taux où l'on considère le Libor comme référence (ou indice) sur lequel on rajoute une base (appelée aussi spread). Pour la mortalité, les indices restent peu reconnus à l'échelle internationale. Nous citons quelques exemples d'indices de mortalité qui existent sur le marché actuellement :
  - Indice de longévité de Crédit Suisse : lancé en décembre 2005, basé sur les données nationales de la population des États Unis et contient des sous-indices selon l'âge et le genre.
  - Indice de longévité de JP Morgan (rattaché à l'outil LifeMetrics) : lancé en mars 2007. Cet indice couvre les États Unis, l'Angleterre et les Pays Bas. La modélisation a le mérite d'être totalement transparente et en open-source sur l'outil LifeMetrics.
  - Xpect Data : lancé en mars 2008 par "Deutsche Borse". Cet indice publiait initialement un indice de mortalité allemande, mais il inclue maintenant la mortalité des Pays Bas.
- SWAP SUR MESURE : (indemnitaire) qui dépend seulement des caractéristiques du portefeuille de l'assuré. Ceci est le cas de notre étude.

### 7.2.2.2 Clauses habituelles :

Généralement, il y a des pratiques et clauses habituelles qui règlent ce type de contrat. Ce sont des termes qui doivent exister explicitement dans le contrat signé.

Nous précisons quelques unes dans cette partie à titre purement informatif :

- L’assuré a la possibilité de sortir du contrat à partir du moment où il anticipe que le contrat ne lui est plus favorable, alors que le réassureur ne dispose généralement pas de cette option (si cette clause existe, il s’agit d’une option qu’il faut tarifier).
- Généralement, l’échange de la différence entre flux fixe et flux réalisé se fait seulement dans le cas où ceci est en faveur de l’assureur. En cas de sur-mortalité impliquant un flux de rentes moins important que prévu, le réassureur ne se verra pas accorder cette différence. Le payoff du contrat en faveur du réassureur devient :  $\text{Min}(0, \text{Flux}_{\text{fixe}} - \text{Flux}_{\text{variable}})$  au lieu de  $(\text{Flux}_{\text{fixe}} - \text{Flux}_{\text{variable}})$ .
- Le portefeuille concerné par l’assurance est un portefeuille fermé : tous les assurés sont connus individuellement et chaque nouvel assuré qui souscrit un contrat d’assurance vie auprès de l’assureur ne rentre pas dans le portefeuille objet de ce contrat de swap.
- Il s’agit dans la plupart des cas d’un contrat long terme de l’ordre de 40 ans. Mais il est aussi répandu de considérer des contrats moyen terme de maturité 10 ans renouvelables, afin de minimiser le risque de variation de la mortalité et de sa modélisation.
- Mise en place d’un collatéral : mécanisme de couverture (ou du moins de limitation) du risque de contrepartie. Il rappelle la procédure équivalente qui existe pour les contrats Futures. Une somme d’argent jugée “rassurante” pour les co-contractants est mise en banque (l’équivalent d’une chambre de compensation pour les contrats entre banques) afin de garantir la solvabilité des contreparties i.e le paiement des engagements futurs des contreparties au moment de la réalisation du risque.

### 7.2.3 Exemples de contrats :

Dans le tableau suivant nous présentons quelques exemples d’accords de contrats de longévité réalisés sur le marché :

DATE	ASSUREUR	NOMINAL	MATURITÉ (ANNÉES)	TYPE	INTERMÉDIAIRE / VENDEUR DE LA COUVERTURE
Janvier 2008	Lucida	Non Défini	10	Indexé	JPM / ILS funds
Juillet 2008	Canada Life	GBP 500m	40	Indemnitaire	JPM / ILS funds
Février 2009	Abbey Life	GBP 1.5Bn	Run-off	Indemnitaire	DB / Ils finds - Partner Re
Mars 2009	Aviva	GBP 475m	10	Indemnitaire	RBS
Juin 2009	Babcock International	GBP 750m	50	Indemnitaire	Credit Suisse - Pacific Life Re
Juillet 2009	RSA	GBP 1.9Bn	Run-off	Indemnitaire	GS (Rothesay Life)
Décembre 2009	Berkshire Council	GBP 750m	Run-off	Indemnitaire	Swiss Re
Février 2010	BMW UK	GBP 3Bn	Run-off	Indemnitaire	DB / Paternoster
Décembre 2010	Swiss Re (Kortis bond)	US 50m	8	Indexé	ILS finds
Février 2011	Pall Pension Fund	GBP 70m	10	Indexé	JPM

### 7.3 Valorisation “Best Estimate” des Flux

Il est indispensable, pour pouvoir monter ce type de contrat, d’estimer les flux futurs d’un assureur engagé sur le paiement de rentes viagères. Ces flux ne sont que la décomposition des PM de l’assureur (Provisions Mathématiques, engagements) par année pour avoir le profil anticipé des flux futurs, année par année, comme illustré dans les graphes précédents.<sup>2</sup>

La valorisation du swap revient donc à valoriser les flux futurs en question. Pour cela ces quelques éléments sont importants :

1. COMPRENDRE LES TERMES DES ENGAGEMENTS DE L’ASSUREUR. Il faut bien comprendre les flux imposés par les clauses du portefeuille de l’assureur. Nous avons développé ce point dans la partie 1.3.2 et 3.
2. AVOIR UN MOYEN QUI PERMET LA PRÉDICTION DE LA MORTALITÉ FUTURE. Dans la partie précédente nous avons modélisé la mortalité future

---

2. La valeur du swap est nulle au moment où les deux contreparties signent le contrat (Hors frais de dossier et chargements techniques qui feront l’objet d’étude dans la partie 7.4). Puis au fur et à mesure que l’on avance dans le temps, la valeur de la jambe variable varie dans un sens qui privilégie une contrepartie par rapport à l’autre. Cette valeur créée sera restituée sous forme de collatéral pendant la première échéance de paiement de coupons. Ce phénomène rappelle le processus d’*Appel de marge* pour les contrats Futures dans le monde des banques. On réinitialise la valeur du swap à zéro à  $t + 1$  et on recommence le même mécanisme jusqu’à la dernière échéance définie dans le contrat.

du portefeuille de l'assureur à travers des projections basées sur une modélisation stochastique. Ces méthodes statistiques restituent l'image la plus vraisemblable de la mortalité future et répondent donc au besoin des co-contractants en terme de prédiction.

3. DÉFINIR LA MÉTHODE DE CALCUL DES FLUX, notamment la méthode d'actualisation, le taux technique ou la courbe de taux et tous les autres paramètres et méthodes financières qui ont besoin d'être définis. Ceci est le seul point qui nous reste à analyser et il sera détaillé par la suite.

La détermination du profil des flux futurs passe par les étapes suivantes :

### 7.3.1 Simulation des tables de mortalité

Afin d'avoir toute une distribution des flux futurs, nous allons exploiter nos modèles de mortalité stochastiques. En pratique, nous générerons 10 000 tables de mortalité qui reflètent 10 000 chemins simulés de la composante temporelle  $\kappa_t$ .

Nous faisons ce nombre important de simulations afin d'avoir des estimateurs fiables par la suite, notamment la moyenne et le quantile 99,5% de la distribution (que nous utiliserons pour avoir le capital réglementaire inhérent à ce modèle interne).

Ces tables de mortalité serviront comme *Inputs* pour pouvoir aborder l'étape suivante.

### 7.3.2 Projection des rentes viagères dans le futur

Dans cette étape, il s'agit de valoriser les engagements de l'assureur envers ses assurés, chaque année jusqu'à la maturité que l'on souhaite considérer.

Nous mettons en place un algorithme de calcul de proche en proche qui calcule ces engagements tête par tête.

Pour chaque assuré nous avons des informations spécifiques comme :

- La date effective de rente.
- L'âge, le genre.
- Type de rente : avec ou sans réversion. Et s'il y a réversion nous avons aussi le niveau de réversion (80% par exemple).
- La valeur de la rente annuelle<sup>3</sup> et si elle est payée en terme échu ou en terme avance.

Ainsi la formule de passage d'une année à l'autre pour l'engagement de l'assureur envers son assuré est la suivante (sans actualisation) :

$$Rente_{i+1} = Rente_i \cdot ((1 - q_x^{principale}) + 1_{Réversion} \cdot \tau_{Réversion} \cdot q_x^{principale} \cdot (1 - q_x^{réversataire}))$$

où :

---

3. même dans le cas d'un rente non annuelle, nous considérons une rente annuelle équivalente.



- $Rente_i$  est la valeur de la rente à l'année  $i$ . Au moment du départ à la retraite, elle est égale au montant contractuel de la rente. Mais ce montant joue le rôle d'un nominal dont la valeur actuelle changera dans les calculs de l'assureur (comme le montre la formule) car nous tenons compte de plusieurs facteurs dont la probabilité de décès par exemple.
- $q_x^{principale}$  : est la probabilité de décès de la tête principale issue de la table d'expérience projetée de l'assureur.
- $1_{Réversion}$  : est la fonction indicatrice qui vaut 0 s'il n'y a pas de réversion, et 1 sinon.
- $\tau_{Réversion}$  : est le taux de réversion qui peut valoir 60%, 80% ou 100% dans le cas de notre portefeuille.
- $q_x^{réversataire}$  : est la probabilité de décès de la personne réversataire en cas de réversion.

Étant donné la discordance entre la date effective de paiement de la rente et la date de naissance de l'assuré (ainsi que son réversataire), nous considérons des taux de mortalité  $q_x$  pondérés sur deux années :

$$q_x^{principale}(t) = w.q_x(t) + (1 - w).q_{x+1}(t)$$

où  $w$  est un poids donné pour chaque âge.

A titre d'exemple, admettons que la rente est versée le 31/12 de l'année  $t$  et que l'assuré est né le 30/09. Alors en début de l'année  $t$  la probabilité de survie de l'assuré jusqu'à la fin de l'année dépend des probabilités de survie des deux âges  $x$  et  $x + 1$  selon les poids  $3/4$  et  $1/4$ .

Si nous étions dans le cas où le versement annuel de la rente ne se fait pas le 01/01 ou le 31/12 alors nous aurions fait une pondération selon l'année de calcul aussi.

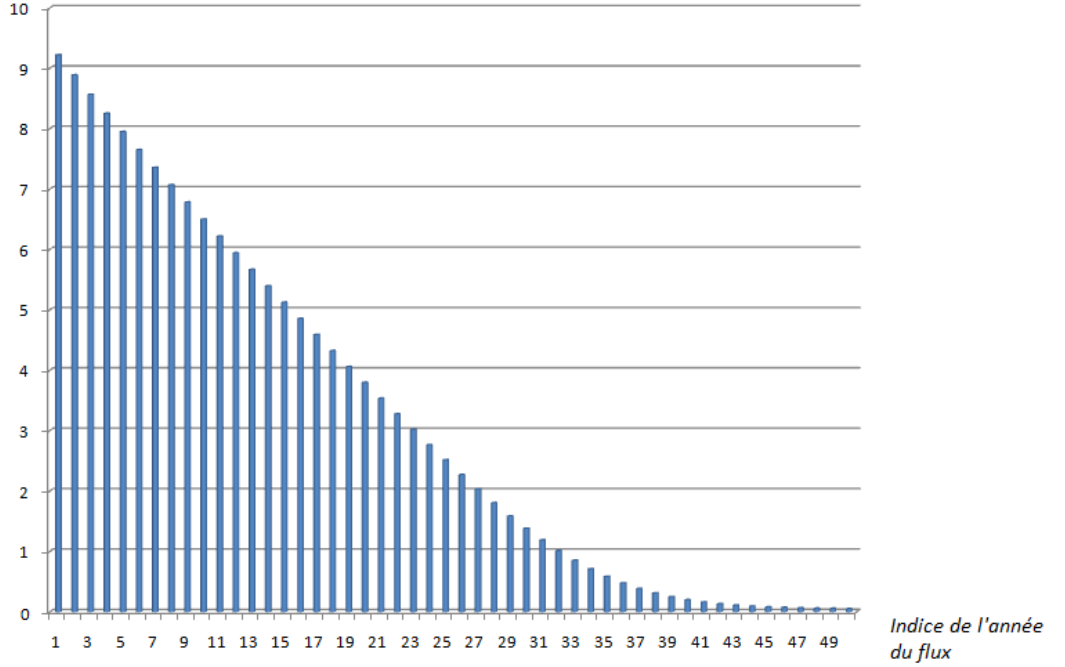
Nous parcourons donc les 10 000 tables de mortalité que nous avons simulées dans l'étape précédente et nous appliquons ce dernier algorithme pour chaque table. Nous obtenons ainsi 10 000 scénarios de flux futurs.

### 7.3.3 Profil par année

Jusqu'à la dernière étape nous avons raisonné comme si nous avançons dans le temps au fur et à mesure du paiement des engagements de l'assureur. Ceci nous permet d'avoir le profil des flux futurs par année, chaque flux étant la moyenne des 10 000 scénarios de mortalité simulés. Le graphe suivant présente les résultats selon le modèle de Lee-Carter (les flux sont non actualisés) :

### Profil des flux futurs : Jambe fixe du swap

Nominal du flux (M d'Euros)



Etant donné que nous considérons un Swap en Run-off, nous avons la projection de tous les engagements de rentes jusqu'à l'ultime. Nous pouvons donc raisonner en terme de PM (Provisions Mathématiques) et dresser ainsi toute la distribution. Pour cela, il faut faire le choix sur les taux d'actualisation que l'on doit utiliser. Le choix a été fait sur un taux technique fixe de 3,5%<sup>4</sup>.

La formule des PM étant la somme de l'espérance des flux futurs (ou encore les engagements futurs actualisés de l'assureur) :

$$PM = E\left(\sum_{i=1}^{i=T} \frac{1}{(1+\tau)^i} J_{variable,i}\right) = \sum_{i=1}^{i=T} \frac{1}{(1+\tau)^i} E(J_{variable,i})$$

où  $J_{variable,i}$  est la jambe variable payée par le réassureur pendant l'année  $i$ .  
Donc par définition de la jambe fixe nous avons :

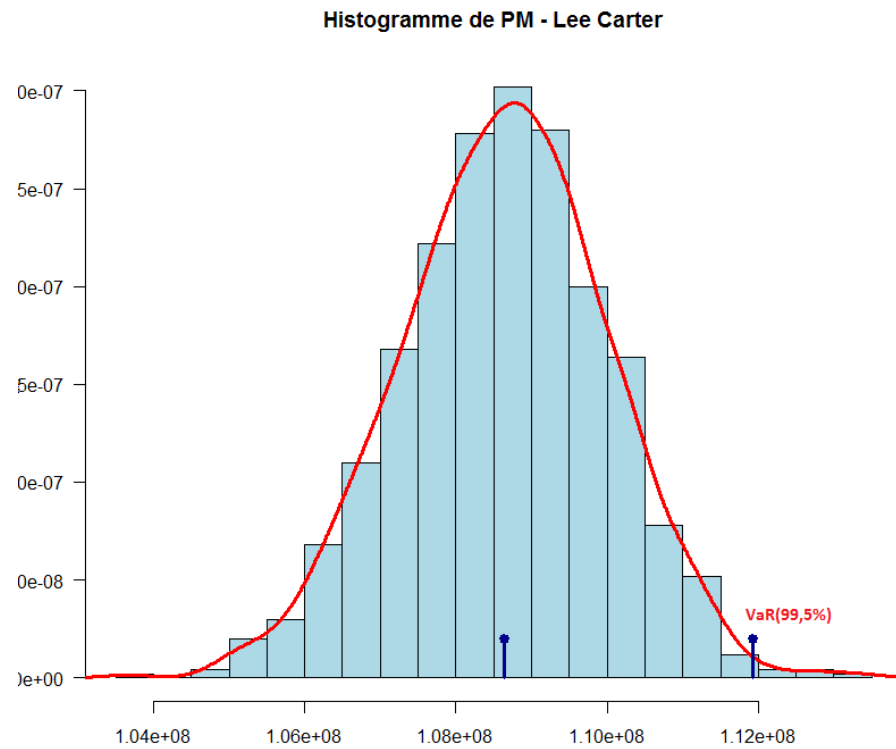
$$PM = \sum_{i=1}^{i=T} \frac{1}{(1+\tau)^i} J_{fixe,i}$$

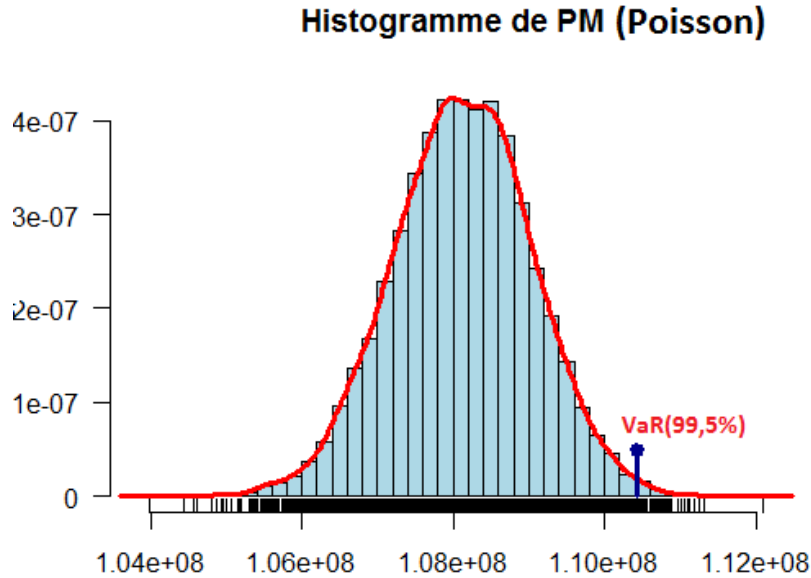
---

4. Comme la problématique du taux d'intérêt sort du cadre du mémoire nous adoptons une hypothèse simpliste d'un taux déterministe constant.

où  $J_{fixe,i}$  est la jambe fixe payée par l'assureur, et qui est définie à l'instant 0 du contrat de la manière suivante :  $J_{fixe,i} = E(J_{variable,i})$ .

Si nous considérons les PM comme étant une variable aléatoire centrée sur la valeur de l'équation précédente (qui sera réellement provisionnée), nous obtenons la distribution suivante des PM (selon les deux modèles Lee-Carter et Poissonnien) :





A titre de remarque (sur laquelle nous reviendrons ultérieurement dans la partie 7.4.1.2), nous marquons dans ce dernier graphe le quantile à 99,5% et nous obtenons ainsi (en faisant la différence avec la moyenne) le capital réglementaire imposé par ce modèle interne.

Les valeurs sont les suivantes (les deux modèles donnent presque les mêmes valeurs, nous allons considérer jusqu'à la fin de ce mémoire les valeurs, du modèle de Lee-Carter) :

- $PM = 108,6 \text{ M Euros}$
  - $VaR_{99,5\%} = 112 \text{ M Euros}$
  - $Capital \text{ Réglementaire}_{\text{modèle interne}} = VaR_{99,5\%} - PM = 3,4 \text{ M Euros}$
- Donc

$$Capital \text{ Réglementaire}_{\text{modèle interne}} = 3,1\% PM \leq SCR_{long\acute{e}vit\acute{e}}$$

- Avec :

$$Ecart - type = 1,24\%$$

## 7.4 Prix du Swap : Prime de risque

L'objectif de cette partie est de trouver le prix que doit payer l'assureur pour acheter la couverture. Un "juste prix" sera défini pour répondre à la fois aux contraintes de l'assureur et de sa contrepartie (acheteur et vendeur de la couverture).

**Remarque :** Dans toute notre démarche nous ne tiendrons pas compte des frais purement commerciaux de type frais de gestion, commissions, etc... Ces frais relèvent des pratiques et des spécificités de chaque entité (compagnie d'assurance, réassurance ou banque) et ne peuvent faire l'objet d'une estimation mathématique fondée. Seules les pratiques commerciales les définissent.

Suite aux explications du swap et de ses flux dans les parties précédentes nous pouvons noter le résultat  $R$  (ou encore le *payoff*) de ce contrat sous la forme suivante :

$$R = \sum_{i=1}^{i=T} \frac{1}{(1+\tau)^i} (J_{fixe,i} - J_{variable,i})$$

(Ceci est le résultat du vendeur de la couverture, il suffit de changer de signe pour trouver le résultat de l'assureur.)

Où :

- $i$  est l'indice de l'année du flux en question.
- $T$  est la maturité du swap. En cas de contrat de couverture en Run-off sur un portefeuille, alors nous remplacerons  $T$  par  $\infty$  (l'*infini*).
- $\tau$  est le taux d'intérêt utilisé pour l'actualisation des différents flux. Nous notons que dans le monde de l'assurance on utilise souvent un taux technique fixe, ce que l'on gardera comme hypothèse pour le moment. Mais il serait éventuellement plus pertinent d'utiliser une courbe de taux. Nous aborderons ce sujet dans la partie 8.1 .
- $J_{fixe}$  est la jambe fixe. C'est le scénario résultat de la moyenne des simulations que nous avons faites dans la partie précédente de valorisation des flux.
- $J_{variable}$  est la jambe variable ou encore la jambe qui sera effectivement réalisée. Elle n'est observée qu'à l'instant  $i$ .

A partir de cette formule du résultat du contrat nous essaierons de trouver un juste prix au swap de longévité.

Nous proposons deux approches :

1. UNE APPROCHE ACTUARIELLE : nous tarifons notre produit selon la méthode de la Prime Pure et la Prime Technique (les autres chargements sont supposés nuls).
2. UNE APPROCHE FINANCIÈRE : nous cherchons une probabilité risque neutre sous laquelle nous pourrions considérer notre produit comme étant une martingale (nous en expliquons les détails dans la suite).

## 7.4.1 Approche Actuarielle : Chargement technique

### 7.4.1.1 Explication

La première approche s'inspire des pratiques de la réassurance où le prix d'un contrat de réassurance (la prime de réassurance) se décompose selon la formule suivante :

$$Prime = PP + PT + Autres\ Chargements$$

avec :

- *PP* est la Prime Pure. C'est la moyenne (espérance) du résultat après couverture.
- *PT* est la Prime Technique. C'est un chargement dont le rôle est de prémunir le réassureur contre les fluctuations du résultat autour de sa moyenne à cause de sa variance (plus ou moins importante). Il y a plusieurs principes de calcul de cette prime. Le vendeur de la couverture prendra en compte les pratiques du marché ainsi que d'autres facteurs comme la concurrence par exemple pour déterminer celle-ci.
- *Autres Chargements* : Il s'agit des autres chargements comme les frais de gestion ou la rémunération de certains intermédiaires (courtiers par exemple).

Nous détaillons ainsi le prix que doit verser l'assureur au réassureur. Nous avons :

1. La prime pure est l'espérance sous la probabilité historique du résultat :

$$PP = E(R) = E\left(\sum_{i=1}^{i=T} \frac{1}{(1+\tau)^i} (J_{fixe,i} - J_{variable,i})\right)$$

donc

$$PP = 0$$

Car

$$J_{fixe,i} = E(J_{variable,i})$$

2. La Prime Technique *PT* dépend de la méthode de calcul que l'on choisit. Nous avons opté pour le principe de l'écart-type. Ainsi nous avons :

$$PT = \beta \cdot \sigma(S)$$

avec

- *S* est l'évènement aléatoire générateur du risque. Dans notre cas ce sera les PM (Provisions mathématiques), ou de la même manière le résultat *R* qui sont aléatoires selon la mortalité (qui est l'origine de l'aléa).
  - $\beta$  est le coefficient de chargement. C'est le choix du réassureur ainsi que les normes du marché qui fixent ce niveau.
  - $\sigma$  est l'écart type de l'évènement aléatoire générateur du risque *S*.
- Ce principe de calcul de la *PT* a l'avantage d'être facile à calculer et de donner une prime homogène à la prime pure (contrairement au principe de calcul par la variance par exemple).

3. Dans le cadre de ce mémoire les *Autres Chargements* seront considérés nuls.

#### 7.4.1.2 Application numérique

Nous prenons les valeurs suivantes :

- $\beta = 3$ .
- $\tau = 3,5\%$

Après projection des flux futurs et calcul des PM avec un taux de  $3,5\%$  nous avons obtenu un écart-type d'environ  $1,24\%$  pour les deux modèles de mortalité.

Ce qui donne :  $Prix_{Swap} = 0 + 3.1,24\%PM + 0$

Donc :

$$Prix_{Swap} = 3,7\%PM$$

Nous remarquons que le coût de cette couverture est bien inférieur au coût du capital sous le modèle standard de Solvabilité II.

**Remarque :** Au delà de la couverture mise en place, nous notons que nous venons de développer un modèle interne qui donne pour un quantile de  $99,5\%$  environ  $103\%PM$ , donc un capital réglementaire de  $3,04\%PM$ . Ce qui est inférieur au niveau de  $7\%PM$  calculé avec la formule standard.

#### 7.4.2 Approche Financière : Transformation de la probabilité historique

##### 7.4.2.1 Explication

Notre deuxième approche s'inspire, elle, de la notion de base de valorisation de tous les contrats financiers :

*Le prix d'un actif financier est l'espérance actualisée de sa valeur finale sous la probabilité risque neutre. i.e La probabilité risque neutre rend les actifs réactualisés martingales.*

Nous revenons sur les deux termes que nous considérons comme les plus importants dans ce principe :

- RISQUE NEUTRE : ce terme provient de la théorie économique : si les intervenants n'ont pas d'aversion au risque, ils vont s'accorder pour évaluer la valeur d'un portefeuille comme l'espérance actualisée des flux qu'il génère (sous la probabilité historique qu'on observe). L'introduction d'une *probabilité risque neutre* permet de faire comme si les agents étaient neutres au risque.
- ACTIFS RÉACTUALISÉS MARTINGALES : cela veut dire que le prix "aujourd'hui" de l'actif est l'espérance, sous la probabilité risque neutre, de ses flux futurs actualisés.

En effet, nous avons raisonné jusque là en terme de probabilité historique. Toutefois une question s'impose :

*Le réassureur verra-t-il le risque de mortalité du portefeuille de l'assureur comme ce dernier le percevra ?*

La réponse intuitive est : “non” La première raison est que le réassureur (vendeur d'une couverture, acheteur du risque) maîtrise sûrement moins le risque contenu dans le portefeuille de l'assureur que l'assureur lui même. Surtout dans le contexte du risque de longévité qui n'est pas encore très exploré sur le marché. C'est ce que l'on appelle le coût d'opacité<sup>5</sup>.

Cette réponse se traduit mathématiquement par le fait que le réassureur verra une distribution du risque de longévité différente de celle vue par l'assureur. Si ce dernier voit le risque de longévité sous la probabilité historique, alors le réassureur, lui, la verra sous une éventuelle probabilité risque neutre i.e : la probabilité qui le rendrait neutre au risque et prêt à acheter ce risque et vendre la couverture.

Par contre, nous rappelons que la probabilité risque neutre existe sous l'hypothèse d'un *marché complet*<sup>6</sup>. Ceci n'étant pas le cas pour le marché de la longévité en tant que sous-jacent, nous ne pouvons pas trouver une probabilité risque neutre mais nous retenons le principe de base :

Il faudra tenir compte de l'aversion au risque, donc transformer la probabilité historique de façon à considérer une perception différente de la probabilité de survenance du risque.

Dans l'article de [Denuit et al (2007)], les auteurs proposent d'appliquer une fonction de distorsion, appelée TRANSFORMATION DE WANG, qui consiste en une fonction à un seul paramètre (qui dépend de l'âge et de l'année)  $\lambda_x(année)$  qu'on applique à la probabilité historique de mortalité selon la formule suivante :

$$\tilde{q}_x(t) = \phi(\phi^{-1}(q_x^{réf}(t)) + \lambda_x(année))$$

où :

- $\tilde{q}_x(t)$  jouera le rôle d'une probabilité “*risque neutre*”.
- $\phi$  est la fonction de distribution de la loi normale centrée réduite  $N(0, 1)$ . Et  $\phi^{-1}$  est sa fonction inverse.
- $q_x^{réf}(t)$  est la probabilité historique dont nous disposons. Dans notre cas c'est la probabilité qu'on obtient depuis la base de données HMD et ajustée selon la mortalité d'expérience du portefeuille de l'assureur comme expliqué dans le chapitre 5.
- $\lambda_x(année)$  est interprétée comme étant une prime de risque.

---

5. La forte rémunération des actionnaires dans les compagnies d'assurance s'explique aussi par le coût d'opacité : les actionnaires demandent d'autant plus de rémunération qu'ils ignorent les détails de placement de leurs capitaux.

6. Ceci est vrai si l'hypothèse d'AOA (Absence d'Opportunité d'Arbitrage) est vraie ainsi que l'hypothèse que tout actif est répliquable par d'autres actifs du marché. Le marché de la longévité n'est pas complet car il n'y a pas de stratégie de couverture autofinancante.



Ainsi nous obtenons une nouvelle table de mortalité *risque neutre* et le prix du swap sera le suivant :

$$Prix_{Swap} = E^Q(R) = E^Q\left(\sum_{i=1}^{i=T} \frac{1}{(1+\tau)^i} (J_{fixe,i} - J_{variable,i})\right)$$

Où  $E^Q$  est l'espérance sous la probabilité transformée de Wang. Nous obtenons :

$$Prix_{Swap} = \sum_{i=1}^{i=T} \frac{1}{(1+\tau)^i} (J_{fixe,i} - E^Q(J_{variable,i}))$$

Ou encore :

$$Prix_{Swap} = \sum_{i=1}^{i=T} \frac{1}{(1+\tau)^i} J_{fixe,i} - \sum_{i=1}^{i=T} \frac{1}{(1+\tau)^i} E^Q(J_{variable,i})$$

A ce niveau nous traiterons deux cas :

- PREMIER CAS : nous admettons une vision du risque qui soit différente entre l'assureur et le réassureur. Concrètement l'assureur continue à percevoir son risque sous la probabilité historique. Le réassureur demandera que ses flux soient considérés sous la probabilité risque neutre qui rémunère son aversion au risque. Dans ce cas nous avons :

$$J_{fixe,i} = E(J_{variable,i})$$

La jambe fixe payée par l'assureur est l'espérance sous la probabilité "historique" de la jambe variable. Les deux jambes sont valorisées sous deux probabilités différentes.

- DEUXIÈME CAS : nous tarifons l'intégralité du produit sous cette nouvelle probabilité. C'est à dire que les deux contreparties conviennent de la même façon de voir le risque, ou encore de la même table de tarification. Dans ce cas nous avons :

$$J_{fixe,i} = E^Q(J_{variable,i})$$

La jambe fixe payée par l'assureur est l'espérance, sous cette probabilité risque neutre, de la jambe variable. Les deux jambes sont valorisées sous la nouvelle probabilité.

Nous voyons bien que le prix du swap est dans les deux cas la différence entre :

- Une jambe fixe : qui est l'espérance d'un modèle de mortalité sous la probabilité historique ou une probabilité risque neutre.
- Une jambe variable : qui est stochastique et dont on prend la moyenne sous une probabilité transformée de Wang de la probabilité historique. C'est une probabilité qui tient compte de l'aversion au risque de l'assureur.

Nous commencerons par le calcul de la prime de risque pour déterminer la nouvelle table de mortalité risque neutre, puis nous aborderons les deux cas.

#### 7.4.2.2 Calcul des $\lambda_x(année)$

Comme nous l'avons avancé, le fondement de cette méthodologie est de trouver une probabilité analogue à la probabilité risque neutre des marchés financiers. Dans la même logique, cette probabilité "risque neutre" devrait nous permettre d'avoir le prix des produits financiers sur le marché.

Étant donné que la formule précédente contient deux inconnues  $\tilde{q}_x(t)$  et  $\lambda_x(année)$  il faudra trouver une référence qui jouera le rôle d'un prix de marché et qui nous permettra de calculer l'une de ces deux inconnues.

Les auteurs [Denuit et al (2007)] affirment que dans le cas de la Belgique par exemple le prix du marché est basé sur la tarification des annuités via la formule suivante :

$$p_{x+k}^{marché} = p_{x+k-5}^{référence}$$

où

- $p_{x+k}^{marché}$  : est la probabilité de survie d'un an à l'âge  $x + k$ .
- $p_{x+k-5}^{référence}$  : est la probabilité de survie d'un an à l'âge  $x + k - 5$ .

La règle est prudente, car dans toute logique :

$$p_{x+k}^{référence} \leq p_{x+k-5}^{référence}$$

plus on est jeune, plus la probabilité de survivre est importante. Pour tarifier les produits d'assurance vie en Belgique, l'assureur *décale* de cinq ans l'âge de chaque assuré.

Pour la France, les auteurs proposent de prendre les tables TPRV comme référence de tarification. Nous allons utiliser cette table car notre étude ne distingue pas les assurés selon leur genre (ce qui n'est pas le cas pour les tables TGH05 et TGF05). Cette table nous permettra d'estimer la probabilité risque neutre qui nous permet de calculer les annuités  $a_x^{marché}(t)$  : En d'autres termes, c'est le prix que devrait payer une personne, d'âge  $x$  en  $t$ , pour une rente annuelle de 1 euro qu'il recevra jusqu'à son décès. Nous avons :

$$a_x^{marché}(t) = \sum_{t \geq 1} (1 + \tau)^{-t} (1 - \tilde{q}_x(t))$$

Avec :  $p_x(t) = 1 - \tilde{q}_x(t)$ .

Par ailleurs notre probabilité de référence est celle de HMD ajustée sur la mortalité de l'assureur. Nous déduisons donc les  $\lambda_x(année)$  selon la formule suivante :

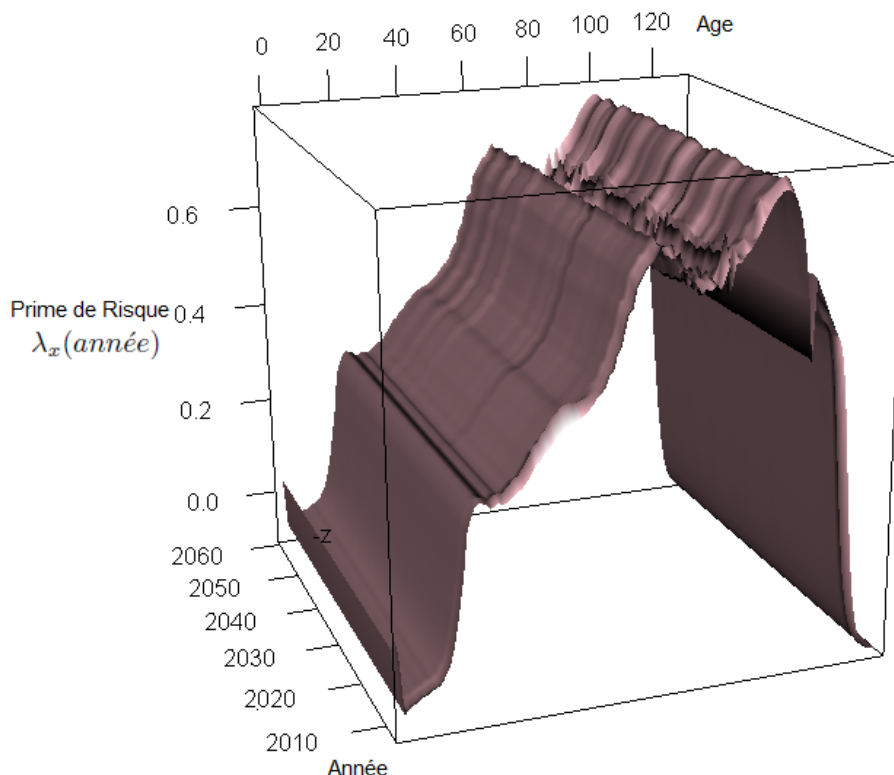
$$a_x^{marché}(t) = \sum_{t \geq 1} (1 + \tau)^{-t} (1 - \phi(\phi^{-1}(q_x^{réf}(t)) + \lambda_x(année)))$$

En pratique, nous suivons l'algorithme ci-dessous :

- Nous projetons la table TPRV (de tarification de marché).
- Nous calculons les  $a_x^{marché}(t)$ .
- Nous déterminons les  $\lambda_x(année)$ .

- Enfin, nous calculons les  $\tilde{q}_x(t)$  avec la formule  $\tilde{q}_x(t) = \phi(\phi^{-1}(q_x^{ref}(t)) + \lambda_x(année))$  où  $q_x^{ref}(t)$  sont les probabilités de mortalité de l'assureur (ajustées à partir des probabilités de la table d'expérience de l'assureur, obtenue elle même à travers un ajustement de la table HMD).

Le graphique suivant montre les valeurs de  $\lambda_x(année)$  :



Nous remarquons que cette prime de risque augmente avec l'âge jusqu'à atteindre un pic pour l'âge de 100 ans. L'augmentation est prononcée entre les âges de 80 ans et 100 ans. Il y a une chute de valeurs après l'âge de 120 ans à cause du nombre réduit de données.

L'impact de la considération de cette prime de risque sera très différent selon la composition du portefeuille d'assurés, notamment en terme d'âges d'assurés.

Revenons maintenant aux deux alternatives de valorisation du Swap en tenant compte de la probabilité risque neutre :

### 7.4.2.3 Premier cas : (Deux tables différentes )

Dans ce cas nous utilisons deux tables de mortalité qui reflètent deux perceptions différentes du risque :

- La table d’expérience historique de l’assureur pour tarifier la jambe fixe qu’il paie.
- La table risque neutre que nous venons de construire afin de tarifier la jambe variable payée par le réassureur (ou la banque).

**Application numérique** Avec un taux  $\tau = 3,5\%$  nous obtenons les nouvelles valeurs des taux de mortalité. En les utilisant pour calculer les PM, nous obtenons la moyenne suivante de la jambe variable :

$$\sum_{i=1}^{i=T} \frac{1}{(1+\tau)^i} E^Q(J_{variable,i}) = 130\%PM$$

D’où le prix du swap :

$$Prix_{Swap} = 30\%PM$$

Nous remarquons que ce prix est nettement supérieur au prix donné par la première méthode.

Ce prix ne peut pas être retenu sauf si l’assureur est convaincu qu’il faut céder ce risque même à un prix élevé. Cela met l’accent sur les problèmes importants de complétude du marché de longévité. Le manque de transparence sur la modélisation de ce risque rend facile de trouver des opportunités d’arbitrage : il est difficile de trouver “le” prix du marché.

Le marché de la longévité n’est pas un marché complet, nous ne pouvons admettre l’hypothèse d’Absence d’Opportunité d’Arbitrage.

Au vu de ces chiffres, nous nous sommes posé la question suivante : est ce que le Swap coûterait moins cher que le coût du capital réglementaire accumulé jusqu’à l’Ultime ? :

$$Prix_{Swap} \leq Coût\ Capital\ Réglementaire_{accumulé}$$

Nous considérons le coût accumulé du capital réglementaire pour comparer deux stratégies qui ont le même horizon. Le swap couvre l’assureur sur toute la durée du contrat jusqu’à la maturité, alors que le coût du Capital Réglementaire est considéré annuellement. L’hypothèse d’une couverture qui coûte moins cher s’écrit donc de la manière suivante :

$$Prix_{Swap} \leq \sum_{i=1}^{i=T} Coût\ Capital\ Réglementaire_{annuel,i}$$

où  $T$  est la durée du contrat (où l’Ultime dans notre cas).

L’application numérique dans notre cas pour un swap en *Run-Off* donne :

$$\text{Coût Capital Réglementaire}_{\text{accumulé}} = \theta \cdot 80\% \cdot PM_1$$

où  $\theta$  est la taux d'intérêt de rémunération des fonds propres,  $PM_1$  est le montant des Provisions Mathématiques calculées pendant la première année.

Avec la valeur  $\theta = 10\%$  utilisée dans la partie suivante, nous obtenons :

$$\text{Coût Capital Réglementaire}_{\text{accumulé}} = 8\% \cdot PM_1$$

Rappelons que le premier prix de Swap est inférieur au coût de capital réglementaire qu'aurait accumulé l'assureur. Le deuxième prix est supérieur à ce coût mais se base sur une autre table de mortalité risque neutre pour la jambe variable.

**Interprétation** Nous notons que le prix est assez élevé mais cela n'est pas choquant, car nous utilisons deux tables de mortalité différentes. Nous pouvons déduire toutefois que la prime de risque est assez élevée ou encore que l'aversion au risque du vendeur de la couverture est assez importante. La prime de risque inclue un prix d'opacité.

Par ailleurs, restons vigilants par rapport à toute comparaison de prix des deux méthodes. Toute comparaison serait non légitime, car l'approche n'est pas la même. La première approche n'est absolument pas dans l'AOA<sup>7</sup> : à partir du moment où nous raisonnons en terme de prime supplémentaire nous sommes dans l'arbitrage (qui est finalement une réalité économique bien existante).

Toutefois, il demeure intéressant de faire le rapprochement entre les deux méthodes en cherchant le coefficient de chargement  $\beta$  qui réalise une égalité des deux prix. Dans notre cas cela correspondrait à un chargement technique de 24.Ecart – type ( $\beta = 24$ ) au lieu de l'hypothèse de 3.Ecart – type ( $\beta = 3$ ) prise initialement.

#### 7.4.2.4 Deuxième cas : (La même table : risque neutre)

C'est le cas où nous tarifons l'intégralité du produit sous cette nouvelle probabilité. C'est à dire que les deux contreparties conviennent de la même méthode de voir le risque, ou encore la même table de tarification. Dans ce cas nous avons :

$$J_{\text{fixe},i} = E^Q(J_{\text{variable},i})$$

La jambe fixe payée par l'assureur est l'espérance sous cette probabilité risque neutre de la jambe variable. Les deux jambes sont valorisées sous la nouvelle probabilité.

---

7. Absence d'Opportunité d'Arbitrage

**Application numérique** Dans ce cadre d’hypothèse nous nous retrouvons dans les conditions de la première approche : le prix est nul en espérance, sauf que les coupons (flux du Swap) changent, ils sont revus à la hausse sous une probabilité risque neutre plus prudente. Donc :

$$Prix_{Swap}(t = 0) = 0$$

**Interprétation** Etant donné que nous appliquons la perception du risque du réassureur, ce dernier ne pourrait pas demander une prime technique comme la première approche. Même si le réassureur prend le risque sans prendre de prime, le contrat du Swap a de forte chance de lui payer des payoff positifs au futur.

L’assuré, lui, paiera un prix nul en amont, mais aura une probabilité importante de payer par la suite. Sous la probabilité risque neutre, la jambe fixe est beaucoup plus importante et contient déjà une prime de risque : les coupons sont revus dans un sens favorable pour le réassureur (chaque coupon contient une prime de risque supplémentaire).

### 7.4.3 Conclusion

L’approche actuarielle reste sujet d’arbitrage (probablement excessif) sur le marché. Plusieurs facteurs sont fixés à la guise du réassureur et nous pouvons remarquer un grand décalage de prix sur le marché. Cela ne facilite pas l’existence d’un marché efficient<sup>8</sup>.

Selon l’approche financière, le réassureur (ou encore la banque) pourrait accepter de vendre une couverture sous la condition de voir le risque sous son angle (sa propre perception du risque)

L’assureur, lui, peut :

- accepter de voir le risque du même angle (plus prudent) et ne paie rien en amont mais paiera plus tard.
- ne pas accepter cette vision, paiera en amont cher mais a des chances d’avoir un payoff positif sur les coupons futurs.

C’est clairement une “guerre” de perception de risque. Ceci explique que le risque de longévité ne soit pas encore très liquide. La solution serait un indice qui sera la référence qui rapproche les visions, et qui est annoncé par une tierce partie indépendante (typiquement l’état).

Nous pouvons aussi critiquer la probabilité risque neutre proposée par les auteurs (cf [Denuit et al (2007)]). Nous formalisons les limites suivantes :

- Quelques articles de recherche qui utilisent la même méthodologie, proposent un facteur de prime de risque  $\lambda$  constant. Nous rappelons que le notre dépend de l’âge et de l’année.

---

8. Un marché est efficient lorsque le prix des titres financiers y reflète à tout moment toute l’information pertinente disponible. Dans un tel marché, un titre financier est à tout moment à son prix. Un tel marché est également appelé marché à l’équilibre ou marché parfait.

- Nous pouvons critiquer la transformation de Wang qui semble donner un effet très prudent sur notre portefeuille. Une autre transformée qui modifie moins la probabilité historique pourrait être envisagée.
- La prime de risque peut être cherchée selon le principe d’indifférence d’Utilité plutôt qu’à travers une transformation de probabilité (cf [Barrieu et al (2010)]). Le défi dans ce cas serait de trouver la bonne forme de la fonction d’utilité du vendeur de la couverture.

#### **7.4.4 Le “*Juste Prix*”**

##### **7.4.4.1 Les contraintes**

A travers nos deux méthodes nous avons essayé de proposer une “juste valeur” au contrat de couverture.

Nous avons aussi considéré les contraintes pratiques de chaque contrepartie :

- L’assureur veut :
  - Céder son risque systématique.
  - Trouver une solution dont le coût est inférieur à l’immobilisation de fonds propres.
- Le réassureur veut :
  - Imposer un prix qui le couvre contre les fluctuations standard du risque de longévité.
  - Avoir un prix qui inclue une prime de risque reflétant sa connaissance réduite du vrai risque contenu dans le portefeuille spécifique de l’assureur.

Toutefois, l’une de ces contraintes peut ne pas exister. Un assureur très sceptique par rapport à son risque de longévité ne serait pas contre le paiement d’un coût supérieur à celui induit par le capital réglementaire s’il veut céder son risque à tout prix.

##### **7.4.4.2 Les hypothèses :**

Nous avons considéré tout au long de notre raisonnement qu’il y a indépendance entre le risque financier (taux) et le risque assurantiel. En pratique les contreparties vont devoir provisionner, donc se baser sur un certain rendement/coût de capital. Une dé-corrélation totale entre le prix du swap de longévité et le risque de taux serait une hypothèse forte à revoir.

Dans ce prix nous ne tenons pas compte de deux autres risques non négligeables : le risque de contrepartie et le risque opérationnel. Il reste néanmoins vrai que la mise en place d’un collatéral réduit considérablement le premier risque sans le faire disparaître (nous pouvons imaginer que ce collatéral couvre bien la faillite d’une contrepartie sur 2 ou 3 ans ). Mais le risque opérationnel existe toujours, surtout avec les détails des contrats d’assurance vie ou de retraite complémentaire.

Nous pouvons donc ajouter un coût supplémentaire pour le risque opérationnel, au prix du swap en utilisant la formule standard proposée par Solvabilité II.

## 7.5 Utilité et Limites

### 7.5.1 Utilité

#### 7.5.1.1 Développement d'un modèle interne

Pendant la valorisation de ce contrat de couverture, nous étions obligés de rentrer dans les détails de la modélisation de la longévité du portefeuille de l'assureur. Nous avons développé ainsi un modèle interne.

L'assureur maîtrisera mieux son risque et pourra développer la manière la plus adaptée pour le couvrir. Le coût du capital relativement prudent selon la formule standard de Solvabilité II incite l'assureur à mener ce genre d'étude même s'il ne compte pas acheter une couverture in fine.

La compagnie d'assurance pourra développer ses propres mesures de risque : les modèles de mortalité que nous utilisons étant stochastiques, permettent d'avoir une distribution du taux de mortalité (qui est le facteur de risque) et donc une distribution de la densité des flux futurs. Ceci nous permet de définir des mesures de risque comme la VAR pour différents quantiles.

#### 7.5.1.2 Acheter le risque moins cher : Analogie avec le risque Catastrophes Naturelles

Jusque là nous avons considéré que le risque de longévité est le risque de sa variation autour de sa moyenne. Un autre point de vue serait de dire que le vrai risque de longévité est le "Risque de tendance".

Le risque de tendance consiste en un changement radical (ou relativement important) de la longévité, c'est un risque "catastrophe" vraisemblable dont nous ne tenons pas compte dans la tarification de la prime car cela ne correspond pas aux pratiques actuelles du marché. Toutefois une simulation d'un tel scénario serait intéressante.

Étant donné la formule de la composante temporelle :

$$\kappa_t = at + b + \nu_t$$

il s'agirait de modifier le coefficient directeur  $a$  plutôt que de simuler les variations  $\nu_t$  et ainsi analyser l'impact sur la variation des PM réglementaires après projection des  $\kappa_t$  (selon le nouveau coefficient directeur).

Pour illustrer ce que la réalisation d'un tel risque pourrait induire, nous mentionnons les deux arguments suivants :

- LE FAIT HISTORIQUE DE L'ANNÉE 2005 : quand les tables réglementaires de tarification en France ont été revues, ceci a induit une revalorisation à la hausse des PM des compagnies d'assurance d'une moyenne de 8%. C'est un vrai risque de tendance de mortalité qui est constaté. Depuis 2005 et pour les années à venir, il y aura probablement encore existence de ce risque, et nous ne connaissons pas encore le coût à la charge des assureurs.



- UNE ANALOGIE AVEC LE RISQUE DE CATASTROPHES NATURELLES : Nous posons la question suivante : serait il plus judicieux de réagir aujourd’hui avant qu’il ne soit trop tard/trop cher comme pour le cas des CAT Bond (obligations Catastrophe) ?

Un Cat Bond est une obligation dont le versement des intérêts et le remboursement du principal dépendent de la survenance d’une ou plusieurs catastrophes naturelles.

Suite aux catastrophes naturelles affectant les États-Unis ces dernières années, et aux faillites d’assureurs, de nouvelles techniques de gestion des risques ont vu le jour. Le coût de couverture contre le risque catastrophe devient cher et les investisseurs demandent une rémunération importante en harmonie avec le risque de perte d’une partie de leur capital en cas de catastrophe.

Pour clôturer ce point nous dirons que la simulation d’un scénario catastrophe n’est certes pas pris en compte dans la tarification d’une couverture mais présente un vrai argument qui pourrait sensibiliser l’assureur au risque de longévité même si le niveau du capital réglementaire semble négligeable (ce qui pourrait conduire à une banalisation du risque de longévité). Un assureur qui assimile bien le vrai risque de tendance de la mortalité aura un biais moral qui l’incitera à acheter une couverture.

Que ce soit de l’anticipation ou de la pure spéculation, un assureur pourrait regretter de ne pas avoir acheté une couverture plus tôt, même si le prix semble assez élevé aujourd’hui.

## **7.5.2 Limites**

### **7.5.2.1 Risque de contrepartie**

Le risque de contrepartie reste problématique dans ce type de contrats financiers qui peuvent durer 40 ans ou plus. C’est pour ces raisons que plusieurs assureurs appellent les états de l’Union Européenne à émettre des Obligations souveraines de mortalité. Dans ce cas, l’assureur aura plus de confiance et sera intéressé par l’achat de telles obligations quitte à garder le risque de base pour lui : contrairement au swap sur mesure, les obligations de longévité donneraient des coupons basés sur la mortalité nationale, différente de la mortalité d’expérience de l’assureur comme expliqué précédemment.

### **7.5.2.2 Maturité de la couverture**

Nous notons que jusqu’à l’instant de l’élaboration de ce mémoire, il est toujours difficile de trouver un vendeur de couverture long-terme. Même si quelques acteurs s’y intéressent (comme les exemples de swap réalisés sur le marché que nous avons cité), il est parfois difficile de convaincre la contrepartie de mettre en place un swap de 40 ans par exemple. Un swap de maturité 10 ans renouvelable est une alternative. Le principal handicap est relatif à la crainte d’une vraie déviation de tendance de la mortalité à un horizon lointain. La couverture

pourrait dans ce cas perdre son utilité (étant donné la différence de la maturité du risque et de la maturité de sa couverture).

### **7.5.2.3 Le juste prix**

Comme nous l'avons précisé dans la partie 7.4.4, le marché de la longévité est loin d'être complet pour le moment. La définition d'une *fair value* (juste prix) est difficile à déterminer. En pratique le prix peut sembler arbitraire et à définir au bout d'une discussion purement commerciale fondée toutefois sur des résultats de valorisation mathématique.

Dans notre cas, en l'absence de couverture, l'assureur devra assumer le coût du capital réglementaire accumulé sur la durée du swap. Lors des discussions avec le réassureur, les deux contreparties fixeront en pratique un tarif vers ce niveau de prix.

## Chapitre 8

# Autres contrats de couverture

Dans la partie précédente nous avons détaillé un contrat financier classique dans le monde de la banque qui couvre intrinsèquement le risque de longévité. Cependant, ce risque est souvent lié à d'autres risques de natures différentes, comme le risque de taux, de contrepartie ou de liquidité. Une couverture exhaustive de tous ces risques exigerait la mise en place de contrats plus sophistiqués qui rappellent les options hybrides.

Par ailleurs, les swaps de longévité ont historiquement commencé à être contractés entre les assureurs et les banques plutôt que les réassureurs. Or les réassureurs sont généralement mieux placés pour comprendre le risque de longévité, donc des traités classiques de réassurance peuvent être mis en place afin de faciliter le transfert de ce risque en tenant compte des exigences des co-contractants.

C'est ainsi que nous pouvons imaginer un panel très large d'autres contrats de couverture. Cette partie se limite à la description d'autres couvertures possibles sans rentrer dans les détails du type valorisation.

### 8.1 Swap hybride<sup>1</sup>

Comme nous l'avons noté dans les limites de la couverture via le swap de longévité, le risque de longévité ne peut être dissocié du risque de taux d'intérêt. Toutefois, une quelconque corrélation n'est pas simple à estimer. Et un produit qui couvre à la fois le risque de longévité et le risque de taux n'existe pas encore sur le marché. Toutefois nous proposons éventuellement la piste d'un swap hybride qui couvre ces deux risques.

Pour éviter la complexité de la valorisation et la mise en place d'un tel produit, nous pouvons traduire notre intérêt envers le risque de taux en appliquant une courbe de taux plutôt qu'un taux technique fixe. Ensuite, nous pouvons

---

1. Un contrat financier est dit hybride s'il traite plusieurs sous-jacents de natures différentes. Dans notre cas nous parlons de longévité et de taux d'intérêt.

stresser cette courbe comme nous le faisons pour le taux de mortalité afin de détecter l'effet d'une variation simultanée de ces deux facteurs.

Les défis d'une telle approche sont :

- La courbe de taux à considérer. Entre la courbe zéro coupon, la courbe swap<sup>2</sup> ou encore une autre courbe, l'impact ne sera pas le même.
- La structure de dépendance entre les deux facteurs de risque. Sur ce point nous pouvons imaginer par exemple de modéliser la dépendance par des copules. Ceci a l'avantage de dissocier la modélisation de la distribution de chaque risque d'une part et de la dépendance entre eux d'autre part. Une structure de dépendance selon le taux linéaire de corrélation n'est pas adaptée pour ce contexte selon les observations du marché.
- La commercialisation d'un tel produit : d'un point de vue purement commercial, l'assureur souhaiterait céder son risque de longévité, mais il a toujours tendance à garder le risque de rendement. Car les compagnies d'assurance disposent généralement de toute une structure avec une grande expertise sur les techniques de la gestion Actif-Passif.

## 8.2 Contrat de réassurance non proportionnel

Pour couvrir son risque de longévité, l'assureur peut avoir recours aux contrats et solutions classiques du monde de la réassurance.

En effet, il peut avoir recours aux contrats non proportionnels de réassurance. En souscrivant un traité de réassurance non proportionnel (XL : Excess of Loss par exemple), l'assureur se protège de toute amélioration excessive de la mortalité. Autrement dit l'assureur fera l'estimation des flux qu'il est prêt à assumer (cf la méthode de calcul des jambes fixes du swap de longévité) et cela définira le niveau de franchise de son traité de réassurance. Le réassureur couvrira tout ce qui dépasse ce niveau, et on peut définir éventuellement un niveau de rétention.

## 8.3 *Longevity Bond*

Avec l'apparition de différents indices de mortalité (nous avons cité quelques exemples dans la partie suivante : 7.2.2.1), il y a quelques Obligations de longévité (*Longevity Bond*) qui voient le jour sur le marché.

On pourrait penser que le swap n'est autre que la différence entre deux Obligations, dont l'une est à coupons fixes et l'autre à coupons variables. Or dans le contexte de la longévité, un risque très important que nous avons déjà expliqué est le risque de base. Il est très difficile d'admettre une quelconque corrélation entre l'indice de longévité d'une population type (pays par exemple) et la longévité du portefeuille spécifique de l'assureur.

Pour que les Obligations de longévité soient attractives du point de vue prix et fiabilité, l'assureur pourrait opter pour cette couverture partielle tout en étant

---

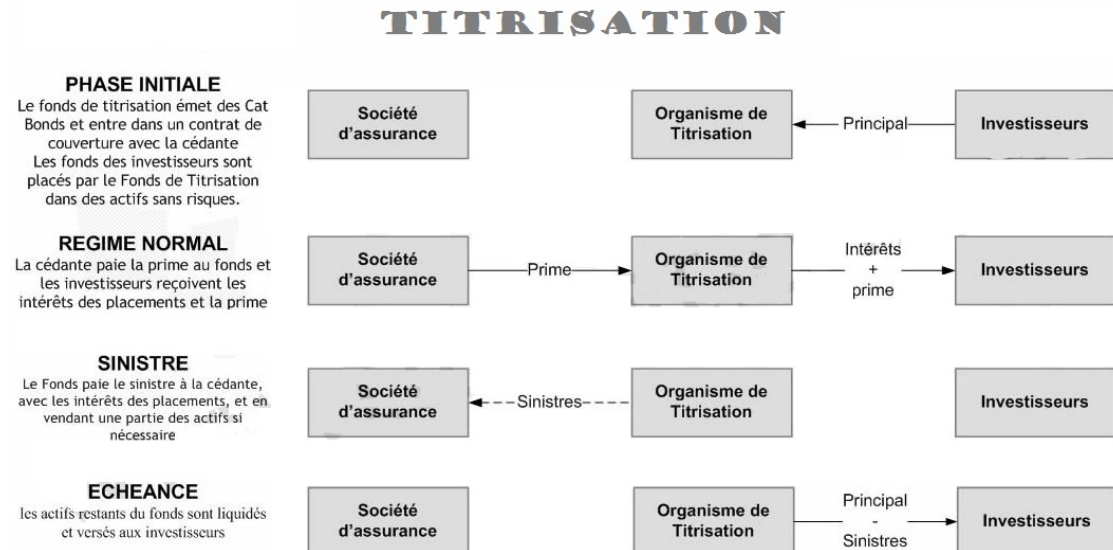
2. L'une des sources sur internet est : [www.swap-rates.com/EUROSwap.html](http://www.swap-rates.com/EUROSwap.html)

conscient qu'il garde dans son portefeuille un vrai risque de base.

## 8.4 Titrisation<sup>3</sup>

Le principe de la titrisation est connu sur les marchés financiers, ainsi que sur le marché de l'assurance avec les *Cat Bonds*. Le principe repose sur le montage d'une structure intermédiaire indépendante juridiquement (en anglais SPV : *Special Purpose Vehicle*). Cette structure s'occupera de structurer le risque de l'assureur et de le revendre sur le marché en proposant une rémunération aux investisseurs qui sont prêts à porter ce risque.

Le schémas suivant illustre les différentes étapes :



Dans le cas du risque de longévité, nous pouvons imaginer un tel montage qui a l'avantage de séduire les investisseurs du marché même dans le cas où ils ne maîtrisent pas assez ce risque, quitte à leur donner une rémunération relativement importante.

3. La Longevity Bond serait une forme de titrisation si c'est l'assureur qui émet l'obligation sur le marché.

## Chapitre 9

# Différents impacts de la couverture

A travers les parties précédentes nous avons mis l'accent sur l'importance de la couverture du risque de longévité. Dans cette partie nous allons analyser l'impact de cette couverture sous plusieurs angles.

La question à se poser est “Pourquoi transférer ce risque ?” ou encore “Pourquoi accepter d'acheter une couverture<sup>1</sup> ?”.

Nous donnons quelques éléments de réponses sous la forme d'une comparaison entre la situation où l'on est couvert et la situation où on ne l'est pas.

### 9.1 Impact Financier :

Le premier avantage tangible de la couverture du risque est le coût qu'elle génère.

Nous avons cherché et montré pendant la valorisation du contrat de swap que le prix payé par l'assureur à la contrepartie sera inférieur au coût des fonds propres qu'il devra immobiliser en cas d'absence de couverture.

Le capital réglementaire qu'il faut immobiliser dans le cadre de Solvabilité II (que ce soit en se basant sur la formule standard ou sur un modèle interne) sera obtenu à travers un emprunt de capital sur le marché ou à travers une mise en réserve d'une partie des fonds propres de l'entreprise.

Dans les deux cas l'assureur se trouve dans l'obligation de rémunérer les investisseurs du marché ou bien ses actionnaires. Et ce coût est actuellement dans la fourchette de 8%-15%.

Le coût du swap reste intéressant car il est inférieur au coût de ce capital réglementaire.

---

1. et ainsi payer en amont un prix

## 9.2 Impact comptable :

L'assurance a toujours eu ses spécificités en terme de comptabilité à commencer par le principe d'inversion du cycle de production qui donne une grande importance au passif des compagnies d'assurance.

Dans le cas du risque de longévité, l'engagement de l'assureur est de long terme et le résultat in fine n'est connu qu'au moment de l'extinction de tous les assurés ainsi que leur réversataires.

Le résultat s'écrit selon la formule suivante :

$$R = \sum_{i=1}^{i=T} \frac{1}{(1 + \tau)^i} (J_{fixe} - J_{variable})$$

où

- $J_{fixe}$  présente les engagements estimés et provisionnés.
- $J_{variable}$  présente la somme qui est réellement payée après observation de la mortalité réalisée.

Un résultat négatif au bout des premières années ne révèle rien quant au résultat final de l'assureur. Mais cela n'empêche pas l'assureur de comptabiliser une perte importante pendant les premières années du contrat en espérant que la tendance s'inversera et s'équilibrera pendant le reste du temps.

Avec une couverture mise en place, du type swap de longévité ou contrat de réassurance, l'assureur aura l'avantage de lisser son résultat sur la période de son engagement. Il n'assurera pas une perte, sur une année, et ce grâce à la couverture mise en place.

## 9.3 Impact opérationnel :

Le risque opérationnel est omni-présent dans toutes les activités de l'entreprise. Or en mettant en place une couverture, l'objectif de l'assureur est de céder son risque en partie. Il est donc obligé entre autre, et comme nous l'avons expliqué auparavant, de bien définir son portefeuille d'assurés. Ce portefeuille doit être fermé et bien transparent pour le réassureur.

Cette transparence exigée obligera l'assureur à prêter plus d'attention dans la souscription de ses contrats. Il gagnera en terme de vigilance opérationnelle.

Certes le risque opérationnel ne disparaîtra pas (et n'est évidemment pas cédé) mais il sera réduit. Notons que cela créera par contre un risque opérationnel chez le réassureur.

## 9.4 Autres impacts

Beaucoup d'autres impacts peuvent être décelés avec effets directs ou indirects concernant la mise en place de la couverture.

Nous citons à titre d'exemple deux autres pistes :

- Une vraie garantie de solvabilité de l'assureur : le capital réglementaire ne pouvant pas couvrir un scénario catastrophe, un contrat de swap peut quant à lui couvrir ce genre de scénario. C'est une immunité contre le risque catastrophe (si le réassureur ne fait pas défaut).
- Une opportunité de développement de l'activité commerciale : quand l'assureur cède son risque il sera amené à immobiliser moins de capital et pourra donc prendre d'autres engagements. Une telle procédure est très intéressante pour doubler ou même tripler ses engagements et l'ampleur de son activité. Toutefois il faut rester vigilant par rapport à cette stratégie. La dernière crise immobilière, dont le monde est encore en train d'assumer les conséquences, était, entre autres, le résultat d'une confiance excessive dans la procédure de titrisation que l'on jugeait comme une couverture efficace et qui permettait le développement de l'activité des banques qui accordaient de plus en plus de prêts. Il faut tirer les leçons de cette crise et en tenir compte.



Cinquième partie

**Conclusion et Limites**

## Chapitre 10

# Conclusion

Avec l'augmentation de l'espérance de vie depuis les années 1960, il devient important de mieux appréhender le risque de longévité. L'évolution de la régulation et l'importance du risque inhérent poussent le marché à mieux gérer ce risque.

Il devient aussi important pour les compagnies d'assurance vie de transférer leur risque de longévité aux réassureurs et aux marchés financiers grâce aux ILS<sup>1</sup> par exemple. Ceci reste difficile à cause de l'aspect long terme de ce risque et l'incertitude entourant les projections concomitamment à l'évolution d'autres facteurs, tel que le taux d'intérêt.

De plus, les compagnies d'assurance vie font face à la variation des taux de mortalité des portefeuilles d'assurés, qui sont bien différents des taux de mortalité de la population par l'effet de sélection. Alors plusieurs méthodes visent à calibrer cette longévité spécifique sur une longévité de référence et nous avons détaillé l'une d'elles.

Au niveau de la modélisation de la longévité, les recherches se font majoritairement dans le cadre du modèle de Lee-Carter et essaient de trouver des variantes pour améliorer ce modèle en gardant sa structure. Il demeure la référence et joue le rôle d'un *Benchmark*.

Plusieurs éléments ont un impact important sur ce modèle, telle la fermeture des table<sup>2</sup> ou bien encore l'évolution de la médecine<sup>3</sup>.

Tous ces éléments confirment la complexité de la modélisation de la longévité et expliquent pourquoi de plus en plus d'acteurs cherchent à céder ce risque sur le marché.

Après l'échec des premières tentatives en 2004/2005, le premier Swap de longévité a eu lieu en juillet 2008 entre la banque JP Morgan et un fond de

---

1. Insurance Linked Securities.

2. Certains biologistes avancent le chiffre de 150 ans comme âge maximum car les cellules humaines ne peuvent pas se diviser indéfiniment (cf [Les Cahiers d'AXA (2010)])

3. Des modèles basés sur des techniques économétriques tendent à capter les facteurs de type progrès de la médecine ou apparition de nouvelles maladies.

pension en Angleterre (UK Pension). Depuis, nous assistons à l'émission de plusieurs Swaps. Ce type de contrat prend le devant sur tous les autres contrats de couverture possibles.

Cependant, les transactions qui ont eu lieu jusqu'à présent sont confidentielles et ni le prix ni les détails du montage ne sont connus. Cela n'aide pas au développement d'un marché : des transactions confidentielles se développent dans une logique de gré à gré et tout ce que l'on sait d'un point de vue technique c'est que ce sont des échanges de taux de mortalité.

Nous proposons dans ce mémoire une explication détaillée d'un Swap de longévité, depuis son montage jusqu'à sa valorisation en passant par ses différentes spécificités. Nous proposons notamment deux méthodes de valorisation qui montrent deux visions différentes du risque de longévité : la vision actuarielle et la vision financière.

Le développement d'un véritable marché de produits dérivés de longévité se heurte toujours aux mêmes obstacles : manque de liquidité, non unicité des prix, absence d'indice fiable et, surtout, incertitude sur la fiabilité des prévisions.

La longévité reste donc un risque immature et incomplet pour le moment et un vrai besoin de transparence sur le montage et la valorisation des contrats de couverture est nécessaire. Nous avons élargi notre description du Swap de longévité par la proposition d'autres pistes de couvertures qui pourraient être investiguées.

Mais au delà des efforts fournis par les acteurs du marché, l'une des demandes principales de ces acteurs est que l'état investisse dans ce risque. Pour que les émetteurs soient sûrs qu'ils valorisent bien leurs swaps il faut que les états commencent à émettre des obligations de longévité<sup>4</sup>.

---

4. voir l'interview de David BLAKE : <http://www.easybourse.com/bourse/international/interview/1585/david-blake-cass-business-school.html>

## Chapitre 11

# Limites de l'étude

La problématique de la longévité est vaste et riche en pistes de recherches. Le cadre du mémoire ne prétend pas être exhaustif et nous présentons dans cette partie quelques axes d'approfondissement possibles.

### Modèle à facteurs qualitatifs

Une surmortalité peut être observée chez certaines catégories d'âge qui s'explique par plusieurs causes dont certaines sont de type médicales, d'autres accidentelles liées au suicide, à l'alcoolisme ou au tabagisme.

En pratique, les recherches sur la mortalité tendent actuellement à inclure ces facteurs qui ont à priori un apport explicatif. D'ailleurs ce point a été abordé pendant le dernier forum des CRO<sup>1</sup>, et le tableau suivant est proposé dans le rapport [CRO Forum (2010)] :

---

1. Chief Risk Officers Forum : est un groupe de professionnels, créé en 2004, qui s'intéressent aux bonnes pratiques de la gestion du risque dans l'industrie de l'assurance.

	FACTEURS QUI PEUVENT AMÉLIORER LA LONGÉVITÉ	FACTEURS QUI RÉDUISENT LA LONGÉVITÉ
STYLE DE VIE	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Moins de fumeurs</li> <li>- Des régimes alimentaires sophistiqués</li> <li>- Pratique régulière du sport</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Augmentation de l'obésité</li> <li>- Plus de stress</li> <li>- Moins d'activité sportive</li> </ul>
MÉDECINE	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Développement des médicaments qui traitent quelques dangers.</li> <li>- Diminution de la mortalité routière</li> <li>- Découverte d'une thérapie génétique efficace.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Les virus et les bactéries développent une résistance aux médicaments existants</li> </ul>
MALADIES GRAVES	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Amélioration du taux de survie des personnes atteintes par exemple de cancer ou de maladie cardiaque.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Nouvelles maladies graves et virus.</li> <li>- Pandémies</li> <li>- Diabète</li> </ul>

Un modèle de mortalité à variables qualitatives serait adapté dans ce sens (tabagisme, éducation, aversion au risque, mode de vie...). Le problème reste toujours que de telles données ne sont pas faciles à trouver, surtout quand il s'agit de données individuelles.

Toutefois, des études ont pu tenir compte de quelques variables qualitatives. Nous renvoyons le lecteur au document de [Planchet (2010)] où l'on trouve un exemple d'étude de l'impact du tabagisme sur la mortalité Canadienne.

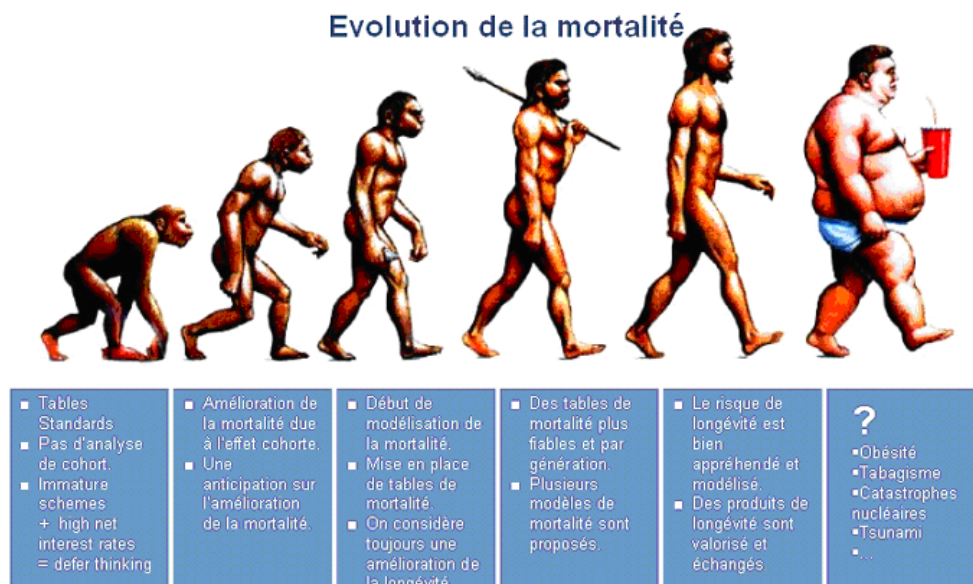
## La vraie tendance de la mortalité

La mortalité future est toujours vue comme une extrapolation de la mortalité passée. C'est ce que l'on désigne par le point de vue "*Inférentiel*" qui suppose que nous avons toute l'information sur la mortalité du passé et que nous reproduisons cette tendance dans le futur (c'est un principe général en économie connu sous le nom d'"Anticipation Adaptative")<sup>2</sup>. Or quelques facteurs peuvent nous faire hésiter sur la considération d'une longévité qui augmente dans le temps.

En effet, face aux progrès médicaux et l'amélioration des conditions de vie, il y a des facteurs comme l'obésité, le tabagisme (et son arrivée à maturité pour le sexe féminin) et la maladie d'Alzheimer qui peuvent causer une inflexion de la tendance à la baisse, bien à court terme qu'à moyen et long terme, de la courbe des taux de décès (cf [Les Cahiers d'AXA (2010)]).

Encore faut-il citer des événements récents comme la catastrophe nucléaire ou les Tsunamis qui ont un impact sur la mortalité de la population.

2. voir l'article suivant : <http://actudactulaires.typepad.com/laboratoire/2007/07/anticiper-la-mo.html>



## Risque hybride

Le risque de longévité est un risque de long terme qui est fortement lié aux risques de contrepartie et de taux. Ceci rend une étude, qui se veut exhaustive, compliquée (voir [Barrieu et al (2010)]). Ceci impacte même les contrats de couverture qui doivent être, selon cette logique, de nature hybride dans le but de couvrir ces différents risques en même temps. Un tel cadre complet s'avère très large pour qu'il soit traité comme il le faut dans le cadre de ce mémoire.

## Couverture naturelle

Quelques études cherchent à prouver l'existence d'une couverture naturelle entre le risque de longévité et le risque de mortalité. Et il semble difficile de trancher sur une telle couverture naturelle automatique, plusieurs détails devant être mis à l'étude.

## La dépendance : Données Exploitées - Qualité de modèle

Nos conclusions et nos interprétations des modèles stochastiques sont à considérer avec précaution. En effet, la qualité d'un modèle est à juger relativement

aux données utilisées. Dans notre cadre nous avons fait des choix sur le pays (la France) et sur la période d'étude par exemple. Dans l'article [Lee-Carter (1992)] les auteurs mettent l'accent sur la dépendance entre la qualité du modèle et les choix de nationalité, catégorie d'âge...etc. Les modèles jugés bons pour la France ne le sont pas forcément pour un autre pays Européen, encore moins pour les États Unis.





Sixième partie

**Bibliographie**

# Bibliographie

- [ACAM (2007)] Rapport du groupe de travail sur le calcul du best estimate en assurance dommages, 21 novembre 2007.
- [Barrieu et al (2010)] Barrieu, P., Bensusan, H., El Karoui, N., Hillairet, C., Loisel, S., Ravenelli, C., Salhi, Y. : *Understanding, Modelling and Managing Longevity Risk : Key Issues and Main challenges* (version 2, 16 juillet 2010)
- [Brouhns et al (2002)] Brouhns, N., Denuit, M., et Vermont, J. : *A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables*, Insurance : Mathematics & Economics, (31) : 373-393, 2002.
- [Cairns et al (2010)] Cairns, Andrew J.G, Blake, D., Dowd, K., Coughlan, Guy D., Epstein, D., Khalaf-Allal, M. : *A framework for forecasting mortality rates with an application to six stochastic mortality models*, March 2010
- [CEIOPS (2010)] CEIOPS : Technical Specifications, 2010
- [Cox et al (2011)] Cox, S., Pederson, H. : *Recent Developments in Longevity Risk Modelling with Application to Longevity Risk Management*, 2011.
- [CRO Forum (2010)] *Longevity. CRO briefing : Emerging Risks Initiative* - Position Paper, 03/11/2010.
- [Delwarde (2005)] Delwarde, A. : *Modèle log-bilinéaire pour l'élaboration de tables de mortalité prospectives*. Institut d'Administration et de Gestion & institut des Sciences Actuarielles, Université Catholique de Louvain, 2005.
- [Delwarde et al (2005)] Delwarde, A., Denuit, M., Guillén, M. et Vidiella-i-Anguera, A. : *Application of the Poisson log-bilinear projection model to the G5 mortality experience*, 2005.
- [Denuit et Goderniaux (2005)] Denuit, M. & Goderniaux, A. : *Closing and projecting lifetable using log-linear models*. Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires, 2005.
- [Denuit et al (2007)] Denuit, M., Devolder, P., Goderniaux, A. : *Securitization of Longevity Risk : Pricing survivor bonds with wang transform*

- in the Lee-Carter framework, The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 74, No. 1, 87-113, 2007.
- [Goodman (1979)] Goodman, L.A : *Simple models for the analysis of association in cross-classification having ordered categories*. Journal of the American Statistical Association 74, 537-552, 1979.
- [Lee-Carter (1992)] Lee, R.D and Carter, L.R : *Modeling and forecasting u.s. mortality*. Journal of the American Statistical Association, 87 :659–675, 1992.
- [Les Cahiers d'AXA (2010)] Numéro 1 : Longévité, 2010.
- [Planchet et Thérond (2006)] Planchet, F. et Thérond, P. : *Modèles de durée : Applications actuarielles*. Economica, 2006.
- [Planchet (2010)] Planchet, F. : *Modèles de durée*, support de cours 2010 - 2011, Novembre 2010.
- [Renshaw et Haberman (1996)] Renshaw, A.E & Haberman, S. : *The modelling of recent mortality trends in the United Kingdom male assured lives*. British Actuarial Journal, 449-477, 1996.
- [Renshaw et Haberman (2003)] Renshaw, A.E & Haberman, S. : *Lee-Carter mortality forecasting with age specific enhancement*, 2003.
- [Serant (2005)] Serant, D. : “*Construction de tables prospectives de mortalité*”, Document FFSA, 2005.



## Septième partie

### *Annexes*

## Sorties de la régression linéaire de $\kappa_t$

```
> summary(reg)

Call:
lm(formula = kappat ~ t)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-9.792 -2.817  1.093  4.300  7.277

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  51.97370    1.26995   40.93  <2e-16 ***
t            -1.76182    0.03744  -47.06  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.773 on 56 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9753,    Adjusted R-squared:  0.9749
F-statistic: 2214 on 1 and 56 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

## Variables du portefeuille

CHAMP	EXPLICATION
Date_Calcul	Date d'extraction
NUMERO_Rente	
Identifiant_Assuré	
DATE_EFFET_Rente	Date de liquidation de la rente
Date_Souscription	Date de souscription du contrat
Date_Naissance_Assuré 1	Assuré 1 : assuré principal
Sexe_Assuré 1	
Périodicité	1 : rente annuelle, 2 : rente semestrielle, 4 : rente trimestrielle, 12 : rente mensuelle
Terme Echu/ Terme Avance	Echu : versement à la fin de la période, Avance : versement au début de la période
Date d'extinction (pour rente certaine ou rente education)	
Taux de Réversion	Taux de réversion : part de la rente 1 versée à l'assuré 2
Date_Naissance_Assuré 2	Assuré 2 : réversataire
Sexe_Assuré 2	
Taux technique retenu	Utilisé pour le calcul des PM
Table d'origine	Table d'origine de calcul des PM
Coefficient Majoration Légale à la charge de la Compagnie	Elément légal de majoration de la rente (concerne les rentes anciennes)
Arrérage de base + arrérage acquis par PB	Rente incluant les revalorisations éventuelles
Arrérage Total à la charge de la compagnie	Rente calculée sur une base annuelle
PM Total compagnie Table Origine	PM calculée suivant la table d'origine mentionnée ci-dessus
PM Total compagnie TPRV 93	PM calculée suivant la table utilisée par Ageas France pour son inventaire
PM Total compagnie TGH05/TGF05	PM calculée en vue de la consolidation dans le Groupe Ageas
Coût total de la provision risque de table non lissée (passage à la TG05)	Ecart entre la PM calculée par TPRV93 et par TGH05/TGF05
Total provisions des rentes en service au 31/12/2010 (normes IFRS)	
Code Produit Origine	Référence au produit vendu