

第八章 哈密顿理论

牛顿以后，经典力学得到了蓬勃的发展。首先，经典力学被广泛应用于工程，促进了社会技术的进步。其次，很多基本物理量，比如能量和角动量，以及相关的守恒定律被逐渐认识和理解，并进一步升华为超越经典力学的普适结果。最后，经典力学的理论形式得到了推广和发展。人们通过对经典力学的研究，发现了更普适的拉格朗日理论和哈密顿理论，牛顿第二定律只是这两个理论的特例。我们将在这一章讲述哈密顿理论，并在这个框架内重新定义守恒量，并介绍可积性等概念。我们的重点将是基本概念的阐述，而不是数学的严格。



图 8.1: 哈密顿 (1805–1865).

哈密顿理论的提出者威廉姆·哈密顿 (William Rowan Hamilton, 1805–1865) 自小聪慧，跟叔叔学习了很多外国语。在都柏林的三一学院学习时，哈密顿门门功课第一。大学还没有毕业便被任命为都柏林大学的天文学教授和爱尔兰皇家天文学家。哈密顿在不到三十岁时提出了他的不朽理论，他的出发点是作用量和它的变分。现在的高级力学课程也都是按照这个思路引入哈密顿量以及相关的理论。但是我们完全可以把哈密顿理论当作最基本的理论或公理，不去纠结它从何而来，就像我们前面介绍牛顿三大定律时把这三个定律

当作最基本的公理一样. 我们将单刀直入, 跳过作用量等概念直接介绍哈密顿理论.

在第四章讨论能量时, 我们已经看到了哈密顿量的影子. 考虑一个只受保守力作用的物体, 它的能量具有如下数学形式

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}). \quad (8.1)$$

这个能量的表达式包含了和物体机械运动相关的所有信息: 第一项动能告诉我们物体的质量为 m ; 第二项势能让我们得到物体受的力 $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$. 利用这两条信息, 根据牛顿第二定律, 我们就能得到这个物体的微分运动方程. 哈密顿充分利用了能量数学表达式的这个特点, 发展了一个新的运动学理论, 哈密顿理论. 这个理论的核心就是系统能量的数学表达式, 被称为哈密顿量. 从哈密顿量出发, 遵照哈密顿理论的规则, 可以推导出系统的动力学方程. 对于我们常见的力学系统, 如此得到的动力学方程就是牛顿的动力学方程, 和 $\vec{F} = m\vec{a}$ 完全等价. 但是令人惊叹的是, 虽然哈密顿理论是在研究经典力学时发展起来的, 它的适用范围却远远超出了经典力学. 现在已经被实验证实的物理理论都具有哈密顿理论的形式, 这包括量子力学、量子场论和广义相对论. 后面我们会以量子力学为例来展示这一点.

根据力和功的关系, 我们在第四章把力分为三类, 保守力、束缚力和摩擦力. 根据现代物理, 世界是由电子、质子、原子和分子等微观粒子构成的. 这些微观粒子之间的相互作用都是保守力. 由于保守力等价于势能函数的梯度, 我们完全可以用势能函数来描述粒子所受的外力, 以及粒子之间的相互作用力. 在更基本的物理理论中, 势能函数完全取代了力的地位. 束缚力和摩擦力都是在一些复杂情况下对这些势能相互作用的近似. 基于这个考虑, 我们在下面的讨论中将只讨论保守力及其势能函数.

8.1 哈密顿理论

考虑一个简单的系统, 在一维空间运动的一个质量为 m 的粒子, 它感受到的势能是 $U(x)$. 由于势能 $U(x)$ 是来自粒子之外的其他物体, 比如, 重力势

能来自地球，弹性势能来自弹簧，所以 $U(x)$ 经常被称为外势。这个简单系统的哈密顿量是

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x). \quad (8.2)$$

这实质上就是粒子的能量，和前面的能量表达式的唯一区别是用动量 $p = mv$ ，而不是速度，来表达动能。在哈密顿理论里，动量 p 被定位为一个基本物理量，和粒子的位置 x 形成一对共轭变量。哈密顿量 H 正是这对共轭变量 x, p 的函数。针对这对共轭变量，我们定义泊松括号

$$\{f_1(x, p), f_2(x, p)\} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial p} - \frac{\partial f_1}{\partial p} \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad (8.3)$$

这里 $f_1(x, p)$ 和 $f_2(x, p)$ 是 x, p 的任意函数。根据这个定义，很容易验证

$$\{x, p\} = 1, \quad \{x, x\} = \{p, p\} = 0. \quad (8.4)$$

利用泊松括号，粒子的运动方程可以写成

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\}, \quad \frac{dp}{dt} = \{p, H\}. \quad (8.5)$$

这两个方程被称为哈密顿运动方程，它们看起来似乎和牛顿的运动方程很不一样。但直接的计算可以证实它们是相同的。从第一个方程我们有

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{p}{m}. \quad (8.6)$$

这是动量和速度的关系。再看第二个方程，

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{dU(x)}{dx}. \quad (8.7)$$

这正是牛顿第二定律给出的运动方程。这样我们在哈密顿理论的框架内推导出了牛顿第二定律。对于一个在三维空间运动的粒子，它的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(\vec{r}). \quad (8.8)$$

泊松括号定义为

$$\begin{aligned} \{f_1(\vec{r}, \vec{p}), f_2(\vec{r}, \vec{p})\} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial p_x} - \frac{\partial f_1}{\partial p_x} \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial p_y} - \frac{\partial f_1}{\partial p_y} \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial p_z} - \frac{\partial f_1}{\partial p_z} \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

类似地可以验证

$$\{x, p_x\} = \{y, p_y\} = \{z, p_z\} = 1, \quad (8.10)$$

而其他泊松括号，比如 $\{x, y\}$, $\{y, p_z\}$, $\{p_y, p_z\}$, 都等于零。根据哈密顿理论，粒子的位置 \vec{r} 和动量 \vec{p} 的运动方程是

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \{\vec{r}, H\}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \{\vec{p}, H\}. \quad (8.11)$$

通过直接的运算可以验证三维空间的运动有类似的结果：上面第一个方程是动量和速度的关系；第二个方程则是牛顿第二定律。

哈密顿理论的基本框架如下。系统由哈密顿量 H 描述，哈密顿量

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (8.12)$$

是 n 对共轭变量 q_i, p_i 的函数，具有能量的量纲。对于任意两个函数

$$f_1 = f_1(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (8.13)$$

和

$$f_2 = f_2(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (8.14)$$

它们的泊松括号定义为

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right). \quad (8.15)$$

由此可以得到共轭变量 q_i, p_i 之间的泊松括号，

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0. \quad (8.16)$$

这里 δ_{ij} 是克罗内克 δ 函数，它的定义是，当 $i \neq j$ 时 $\delta_{ij} = 0$ ；当 $i = j$ 时 $\delta_{ii} = 1$ 。这个系统的运动方程为

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}, \quad n = 1, 2, \dots, n. \quad (8.17)$$

任何一个系统，如果它的动力学符合上面的框架，这个系统就被称为哈密顿系统。在这个框架内， q_i 被称为广义坐标， p_i 被称为广义动量。每一对坐标

和动量 q_i, p_i 被称为描述一个自由度；对于一个具有 n 对坐标和动量的系统，它的自由度是 n . 一个在三维空间运动的粒子，有 3 对坐标和动量，因此它的自由度是 3. 坐标和动量的任意函数 $f(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$ 被称为一个哈密顿系统的力学量.

只有保守力的力学系统都是哈密顿系统，它们的哈密顿量都具有如下形式¹

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i} + U(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (8.18)$$

在这里含动量 p_i 的项和含坐标 q_i 的项是完全分开的，而且含动量的项总具有形式 $p_i^2/(2m_i)$. 并不是所有的哈密顿量都具有这样的形式. 比如下面这个哈密顿量

$$H = -\alpha p^2 + \frac{\beta}{2} \sqrt{1 - 4p^2} \cos q, \quad (8.19)$$

其中 q, p 是一对广义坐标和动量， α, β 是两个系统参数. 这个哈密顿量的第一项可以被看作是动能，但是第二项由于既含有 p 也含有 q ，和经典力学常见的能量形式都不一样. 这个哈密顿量并不是随意写出来的，它实质上可以描述一种特殊的相互作用的玻色子体系的行为. 利用泊松括号，我们可以写出它的运动方程

$$\frac{dq}{dt} = \{q, H\} = -2\alpha p - \frac{2\beta p \cos q}{\sqrt{1 - 4p^2}}, \quad (8.20)$$

$$\frac{dp}{dt} = \{p, H\} = \frac{\beta}{2} \sqrt{1 - 4p^2} \sin q. \quad (8.21)$$

这种非常规的哈密顿量正是哈密顿理论比牛顿第二定律优越的原因之一，后面我们会看到更多哈密顿理论的优势.

¹对有电磁场的系统，形式稍微有些变化，我们这里暂不讨论.

下面是几个关于泊松括号的数学关系：

$$\{f_1, f_2\} = -\{f_2, f_1\}, \quad (8.22)$$

$$\{af_1 + bf_2, f_3\} = a\{f_1, f_3\} + b\{f_2, f_3\}, \quad (8.23)$$

$$\{f_1 \cdot f_2, f_3\} = \{f_1, f_3\}f_2 + f_1\{f_2, f_3\}, \quad (8.24)$$

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 0. \quad (8.25)$$

这里 f_1, f_2 和 f_3 是任意三个力学量，而 a, b 是两个常数。这些关系都可以通过直接计算来验证，最后一个恒等式被称为雅克比恒等式(Jacobi identity)。

8.2 相空间

根据哈密顿量 (8.18) 写出的运动方程和根据牛顿第二定律得到的微分方程在数学上是完全等价的。但是在物理上，它们有微妙的差别。简单而又不失一般性，我们讨论一维空间中单个质点的运动。按照牛顿第二定律，这个质点满足的微分方程是

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d}{dx}U(x). \quad (8.26)$$

与之对应的哈密顿运动方程是

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dU(x)}{dx}. \quad (8.27)$$

数学上，哈密顿运动方程似乎有些平庸：第一个方程是熟知的动量和速度的关系式，第二个方程则是牛顿第二定律的另外一种表达方式。但是哈密顿理论给我们带来了新的视角。

首先，动量被放到了一个更基本的地位，并且和位置形成共轭关系。动量和位置乘积 xp 的物理量纲是焦耳·秒，这正是能量和时间乘积的量纲。这意味着动量和位置的关系与能量和时间的关系类似。这种对偶关系和狭义相对论是一致的：和四维时空向量 (ct, x, y, z) 对应的四维动量向量是 $(E/c, p_x, p_y, p_z)$ 。动量和位置对偶共轭以及能量和时间对偶共轭在牛顿理论的框架内不是很明显，但是在哈密顿理论里开始显现出来。在量子力学中，这种对偶关系被

进一步发展，成为物理学中最基本的关系.

其次，通过将一个关于时间的二阶微分方程 (8.26) 等价地转化成了两个关于时间的一阶微分方程，哈密顿理论明确地告诉我们，在经典力学中一个粒子的状态由位置和动量共同确定：一旦我们知道一个粒子在某个时刻 t 的位置 x 和动量 p ，哈密顿运动方程 (8.27) 会告诉我们后面任意时刻这个粒子的位置和动量。基于这个认识，我们定义粒子的状态空间，相空间。如图8.2所示，对于一个在一维空间运动的粒子，它的相空间是二维的：一个维度是位置；另外一个维度是动量。相空间里中的任何一点给出粒子确切的位置和动量，哈密顿运动方程则决定粒子在下一个时刻到达哪一个点。由于粒子在运动过程中，能量是守恒的，所以粒子完整的轨迹是相空间中的等能线。对于一个自由粒子，由于不受任何外力的作用，它做匀速直线运动，在相空间的轨迹是平行于 x 轴的直线（见图8.2(a))。对于弹簧振子，它的哈密顿量是

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2. \quad (8.28)$$

它的轨迹在相空间是椭圆。图8.2(b) 展示了弹簧振子的六条轨迹，它们分别对应不动点和五条不同的等能线，其中最外面的轨迹由于振幅较大，只画出了一部分。图8.2(a,b) 虽然展示的是两种特殊系统，自由粒子和弹簧振子，的运动轨迹，但是它们代表了在一维粒子在相空间运动轨迹的典型类型：(1) 不闭合轨迹，粒子可以达到相空间的无穷远点；(2) 闭合轨迹，粒子在相空间中的有限范围内运动，并且形成闭合回路；(3) 不动点。

粒子的不动点有很多类。按照稳定性分为稳定不动点和不稳定不动点。这在第三章讨论过。按照能量，不动点有能量极大点、能量极小点和能量鞍点。能量最大的极大点是能量最大点；能量最小的极小点是能量最小点。图8.2(c) 展示了另外一个哈密顿系统 (8.19) 在相空间的运动轨迹。这个系统有能量最大点，能量极小点和鞍点。显然，能量极值点都是动力学稳定的，鞍点是不稳定的。

相空间的概念很容易推广。对于一个在二维空间运动的粒子，它的相空间是四维：两个空间维度 x, y 加上两个动量维度 p_x, p_y ；对于一个在三维空间

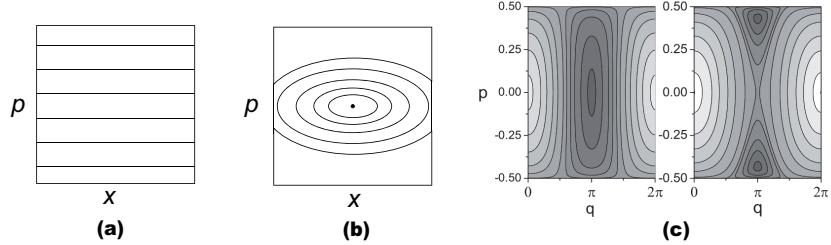


图 8.2: 相空间. (a) 自由粒子在相空间的轨迹或等能线; (b) 弹簧振子在相空间的轨迹或等能线, 最外面的轨迹由于振幅太大, 没有画全; (c) 哈密顿系统 (8.19) 的轨迹和不动点: 左边 $\alpha = 0.1, \beta = 0.2$; 右边 $\alpha = 0.4, \beta = 0.2$. (a,b) x, p 是通常的坐标和动量; (c) q, p 是一对广义坐标和动量.

运动的粒子, 它的相空间是六维: 三个空间维度 x, y, z 加上三个动量维度 p_x, p_y, p_z . 对于一个有 n 个自由度的体系, 它的相空间是 $2n$ 维: n 个空间维度加上 n 个动量维度. 如果体系的能量守恒, 那么它的运动会被限制在一个 $2n - 1$ 维的等能面上. 对于这些高维体系, 它们的不动点类型依然分为能量极大点、能量极小点和鞍点; 前面两类是动力学稳定的, 鞍点是不稳定的.

8.3 运动常数

考虑一个哈密顿系统 $H(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$. 可以证明它的任何一个力学量 $f(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n; t)$ 随时间的变化满足如下方程,

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (8.29)$$

对于 $n = 1$ 的情况, 上式的证明如下:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

这个证明可以直接推广到任意的 n . 如果 $df/dt = 0$, f 被称为运动积分(integral of motion). 如果运动积分 f 不显含时间, 即 $\partial f/\partial t = 0$, 那

么它满足

$$\{f, H\} = 0. \quad (8.31)$$

这类不含时的运动积分经常被叫做运动常数(constant of motion). 如果运动常数 \tilde{f} 不是其他运动常数 $f_1, f_2, f_3, \dots, f_i$ 的函数, 那么我们说运动常数 \tilde{f} 独立于 $f_1, f_2, f_3, \dots, f_i$. 比如, 如果 f 是运动常数, 则 f^2 也是运动常数, 但是 f^2 不是独立于 f 的运动常数. 类似地, 如果 f_1 和 f_2 是运动常数, 那么 $f_3 = 5f_1 + f_2^2$ 也是运动常数. 但是 f_3 不是独立运动常数. 在数学上如何严格确定一组运动常数是否相互独立超越了本书的范畴, 我们不再讨论.

运动积分或常数普遍存在于经典哈密顿系统中, 事实上在一个具有 n 个自由度的系统中, 一定存在 $2n$ 个独立的运动积分. 对于一个具有 n 个自由度的系统, 它的相空间的维数是 $2n$, 加上时间, 它的轨迹其实是 $2n+1$ 维空间中的一条曲线 (参加图8.3(a)). 因为需要 $2n$ 个限制条件来确定这条曲线, 因此这个系统必须有 $2n$ 个独立的运动积分. 如果一个哈密顿系统的能量、动量和角动量是守恒的, 那么这些守恒量也是运动积分或常数, 我们将在下面的讨论中阐明它们之间的关系.

考虑一个有 n 个自由度的哈密顿系统 $H(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$. 它有 n 对共轭变量 (q_i, p_i) , 它的运动方程是

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}. \quad (8.32)$$

对于一组给定的初始条件 $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}; p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0}$, 通过解哈密顿

运动方程 (8.32)，我们得到这个哈密顿系统的一个解

$$q_1 = q_1(t, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}; p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0}) \quad (8.33)$$

$$q_2 = q_2(t, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}; p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0}) \quad (8.34)$$

... ...

$$q_n = q_n(t, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}; p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0}) \quad (8.35)$$

$$p_1 = p_1(t, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}; p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0}) \quad (8.36)$$

$$p_2 = p_2(t, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}; p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0}) \quad (8.37)$$

... ...

$$p_n = p_n(t, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}; p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0}) \quad (8.38)$$

这些函数描述了一条以 q_{i0}, p_{i0} 为初始条件的运动轨迹。在数学上，初始条件 $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}; p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0}$ 可以被看作是积分常数，因为求解微分运动方程 (8.17) 实质上就是在做不定积分。反解上述方程可以得到

$$q_{10} = f_1(t, q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (8.39)$$

$$q_{20} = f_2(t, q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (8.40)$$

... ...

$$q_{n0} = f_n(t, q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (8.41)$$

$$p_{10} = g_1(t, q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (8.42)$$

$$p_{20} = g_2(t, q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (8.43)$$

... ...

$$p_{n0} = g_n(t, q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (8.44)$$

这些函数 f_1, f_2, \dots, f_n 以及 g_1, g_2, \dots, g_n 只是共轭变量 q_i, p_i 和时间 t 的函数，它们是力学量。由于 $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}; p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0}$ 是常数，它们显然满足

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{dg_i}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.45)$$

所以 f_1, f_2, \dots, f_n 和 g_1, g_2, \dots, g_n 都是运动积分。它们正是前面提到的这个哈密顿系统的相互独立的 $2n$ 个运动积分。这里不严格证明它们是相互独

立的. 下面通过几个简单的例子进一步解读运动积分.

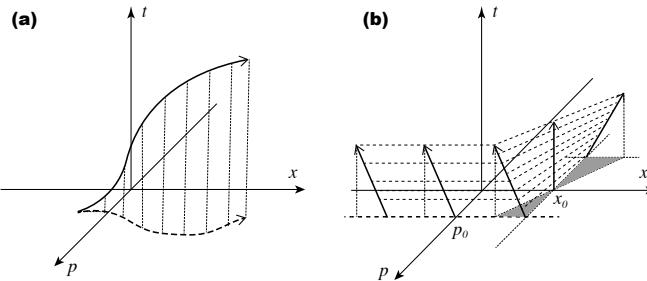


图 8.3: (a) 由相空间和时间构成的空间中粒子的轨迹, 它在相空间的投影(虚线)是粒子在相空间的运动轨迹. (b) 自由粒子的五条轨迹. 前面三条平行轨迹具有相同的动量 p_0 , 这类轨迹公共组成 $g_1(p) = p_0$ 这个平面; 右边的三条轨迹具有不同的动量但是具有相同的初始位置 x_0 , 这类轨迹一起构成 $f_1(x, p, t) = x_0$ 这个曲面.

第一个例子是一维自由粒子, 它的哈密顿量是 $H = p^2/(2m)$. 这个粒子的运动轨迹很容易解出, 它是

$$x = \frac{p_0}{m}t + x_0, \quad p = p_0. \quad (8.46)$$

这里 x_0 和 p_0 分别是粒子的初始位置和动量. 我们反解这两个轨迹方程, 得到

$$p_0 = g(p) = p, \quad x_0 = f(x, p, t) = x - \frac{p}{m}t. \quad (8.47)$$

显然 $df/dt = dg/dt = 0$, 所以力学量 f, g 都是运动积分, 而且相互独立. 从图8.3(b)可以看出, $g(p) = p_0$ 是一个平面, 它由所有初始动量为 p_0 的轨迹构成; 而 $f(x, p, t) = x_0$ 是一个曲面, 它是所有初始位置为 x_0 的轨迹的集合. 另外, 我们注意到 f 显含时间; 而 g 不显含时间. 因此 f 不是运动常数, 而 g 是运动常数, 而且是我们熟悉的动量. 从几何上看, $f(x, p, t) = x_0$ 这个曲面在相空间上的投影依然是二维的; 相对地, $g(p) = p_0$ 这个平面在相空间上的投影是一维的. 也就是说 $f(x, p, t) = x_0$ 这个运动积分对粒子在

相空间的轨迹没有维度上的限制；而 $g(p) = p_0$ 这个运动积分则将粒子在相空间的运动轨迹限制在一条一维的线上.

第二个例子是一个在二维空间运动的粒子，它的哈密顿量是

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{p_y^2}{2m} - \frac{1}{2}ky^2. \quad (8.48)$$

这个系统也可以被看作是由两个相互独立的一维粒子组成的，它们的哈密顿量分别是

$$H_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2, \quad H_y = \frac{p_y^2}{2m} - \frac{1}{2}ky^2. \quad (8.49)$$

这体系不难求解，它的运动轨迹是

$$x = A_x \sin(\omega t + \phi_x), \quad p_x = m\omega A_x \cos(\omega t + \phi_x), \quad (8.50)$$

$$y = ae^{\omega t} + be^{-\omega t}, \quad p_y = m\omega(ae^{\omega t} - be^{-\omega t}), \quad (8.51)$$

其中 $\omega = \sqrt{k/m}$ 而 A_x, ϕ_x, a, b 由初始条件决定. 反解这四个轨迹方程，我们得到

$$A_x^2 = g_1(x, p_x) = x^2 + \frac{p_x^2}{\omega^2 m^2} = \frac{2H_x}{k}, \quad (8.52)$$

$$\phi_x = f_1(x, p_x, t) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{kx^2}{2H_x}}\right) - \omega t, \quad (8.53)$$

$$a = g_2(y, p_y, t) = \frac{1}{2}(y + \frac{p_y}{m\omega})e^{-\omega t}, \quad (8.54)$$

$$b = f_2(y, p_y, t) = \frac{1}{2}(y - \frac{p_y}{m\omega})e^{\omega t}. \quad (8.55)$$

通过直接计算可以验证 f_1, f_2, g_1, g_2 都是运动积分. 和第一个例子类似，它们都可以被看作是满足某一个初始条件的所有轨迹的集合. 另外，它们也分为两类： f_1, f_2, g_2 显含时间，因此不是运动常数； g_1 不显含时间，是运动常数. 我们进一步注意到 g_1 正比于粒子 x 方向运动的能量，因此它是运动常数而且有明显的物理意义：粒子 x 方向运动的能量守恒.

第一个例子告诉我们，显含时间的运动积分不但物理意义不明显而且对相空间的运动轨迹不会有显著的约束. 让我们尝试消除运动积分 f_1, f_2, g_2 中的

时间 t . 一个办法是将其中的一个反解，得到 t 的表达式，然后代入其它两个运动积分. 比如反解公式 (8.54) 得到 t 的表达式，然后代入 (8.53) 得到

$$\tilde{f}_1(x, p_x, y, p_y; a) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{kx^2}{2H_x}}\right) + \ln\left[\frac{2am\omega}{m\omega y + p_y}\right]. \quad (8.56)$$

\tilde{f}_1 是一个新的运动积分，而且不再显含时间 t 所以也是运动常数. 但是 \tilde{f}_1 却依赖初始条件 a ，因此它和第一个例子中的 $g(p) = p$ 以及前面的 $g_1(x, p_x) = 2H_x/k$ 不一样. 运动常数 $g(p)$ 和 $g_1(x, p_x)$ 不但不显含时间而且和初始条件完全无关，这意味着对于任何运动轨迹，这些运动常数的函数形式都是一样的. 我们把这类既不显含时间又不依赖初始条件的运动积分称为守恒量. 对于任何一个守恒量，它的数学表达式里只有共轭变量 q, p 和系统的参数. 如果某一个哈密顿系统的能量或动量守恒，那么能量或动量就是守恒量，一种特殊的运动常数. 对于任何初始条件，它们都具有相同的函数形式而且不会随时间变化. 能量和动量都有明显的物理意义，后面我们会看到并不是所有的守恒量都具有明显的物理意义.

上面获得 \tilde{f}_1 的方法在原则上是普适的，可以应用于任何一个有 n 个自由度的哈密顿体系. 比如，我们可以反解公式 (8.39)，得到

$$t = h(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; q_{10}) \quad (8.57)$$

然后将其代入其他运动积分. 这给我们 $2n - 1$ 个不显时间的运动常数. 这其实也告诉我们一个有 n 个自由度的哈密顿体系总是有 $2n - 1$ 个不显含时间的运动常数. 但是这样得到的大多数运动常数会和 \tilde{f}_1 类似，明显依赖初始条件.

有必要进一步讨论和澄清 \tilde{f}_1 这类运动常数，特别是它们和初始条件的关系. 现在讨论的例子很简单，因此当 a 取不同值的时候， \tilde{f}_1 有相同的函数关系. 这是因为对于不同的初始条件，这个系统的运动轨迹是由相同的函数描述. 可惜这不是普遍成立的. 事实上，对于绝大多数哈密顿系统，它们在相空间的运动轨迹会随着初始条件的变化有很大的变化. 比如一个一维粒子，它感受的势 $U(x) = V_0 \tanh^2(kx)$. 对于这个粒子，如果它的动能很小，那么它在

$x = 0$ 附近做近似简谐的振动；如果它动能很大，远远大于 V_0 ，那么它的运动和自由粒子近似。对于这个系统的依赖初始条件的运动常数，当初始条件改变时，这些运动常数的函数形式会相应发生很大的改变。我们前面讨论过的哈密顿系统 (8.19) 有类似的性质：如图8.2(c) 所示，在能量极小点附近的轨迹和它在鞍点附近的轨迹有非常大的差别。可以预见，这个体系依赖初始条件的运动常数在极小点附近和鞍点附近会具有非常不同的函数形式。

对于这个简单的例子，我们事实上有更好的办法消去运动常数中的时间 t 。将 f_2 和 g_2 相乘，我们得到一个新的运动常数

$$\bar{g}_2(y, p_y) = \frac{1}{4} \left(y^2 - \frac{p_y^2}{mk} \right) = -\frac{1}{2k} H_y. \quad (8.58)$$

这个运动常数 \bar{g}_2 不再显含时间，而且不依赖初始条件。我们还可以经过变换 $f_1 + \ln f_2$ 得到一个新的不显含时间的运动常数

$$\bar{f}_2(x, p_x, y, p_y) = \arcsin \left(\sqrt{\frac{kx^2}{2H_x}} \right) + \ln \left[\frac{y}{2} - \frac{p_y}{2m\omega} \right]. \quad (8.59)$$

这个新的运动常数同样不显含时间而且不依赖初始条件，因此 \bar{f}_2, \bar{g}_2 都是守恒量。基于这些分析，我们发现对于这个系统 $f_1, g_1, \bar{f}_2, \bar{g}_2$ 是一组更好的相互独立的运动积分。守恒量 \bar{g}_2 的物理意义很显然，它实质表示粒子沿 y 方向运动的能量守恒，但是 \bar{f}_2 的物理意义不是很明确。很多哈密顿系统都存在物理意义不明显的守恒量，后面我们还会遇到更多这样的例子。

让我们总结一下。对于一个有 n 个自由度的哈密顿体系，它有且仅有 $2n$ 个相互独立的运动积分，其中至少有一个运动积分是显含时间的。如果运动积分不显含时间，那么它被称为运动常数。如果既不显含时间也不依赖初始条件，那么这个运动积分是守恒量。我们熟悉的能量，动量和角动量如果是守恒的，那么它们属于守恒量。

在上面的讨论中，我们通过反解轨迹方程得到 $2n$ 个运动积分 (8.39–8.44)。遗憾的是，这个方法是原则性的，并不实用。一般情况下，我们无法得到解析的轨迹方程；即使有解析的轨迹方程，它们的形式也会非常复杂以至于反

解非常困难. 只有对于一些非常简单的系统, 比如上面举的两个例子, 我们才能利用这个原则性的方法来找到运动积分, 并且对这些运动积分进行巧妙的组合最后得到我们熟悉的守恒量, 比如能量. 对于任意一个哈密顿系统, 如果它的哈密顿量不显含时间, 那么能量是守恒量. 然后人们再检查动量和角动量是否守恒. 现在还没有一个普适而实用的寻找其他守恒量的方法.

在后面的讨论中, 我们会看到哈密顿体系分为可积体系和不可积体系. 可积体系的运动轨迹比较规则, 不可积体系的运动轨迹则会非常敏感地依赖初始条件显得很不规则. 无论系统是可积的还是不可积的, 它都有 $2n$ 个相互独立的运动积分. 但是只有可积系统才会具有多个独立的守恒量; 不可积系统通常只有能量、动量和角动量这些的守恒量, 甚至一个没有. 绝大多数哈密顿系统都是不可积系统. 对于一个不可积系统, 它具有的少数守恒量一般都和对称性有关, 我们可以通过分析哈密顿量的对称性来寻找守恒量. 对于一个可积系统, 除了能量、动量和角动量, 它还有很多其他的守恒量, 现在还没有普适的办法把这类系统所有的守恒量找到, 必须具体问题具体分析.

8.4 守恒量

在第四章我们已经讨论过力学系统的守恒量, 这包括能量、动量和角动量, 并且发现这些守恒量能很好地帮助我们深入理解和分析系统的运动. 通过上节的讨论, 我们对守恒量有了一个新的认识, 它们是一种特殊的运动常数. 在这一节, 我们在哈密顿理论的框架里进一步讨论守恒量, 探讨它们和体系整体性质的关系. 我们会发现能量、动量和角动量的守恒和系统的对称性有关, 还有一些守恒量则是源自系统是线性的. 在一些罕见的可积模型中, 守恒量的存在则纯属偶然, 它们的物理意义也不清晰.

对称性的概念来自现实的生活, 它的实质是“变而不变”. 如果你对一个物体进行一个操作或变换, 试图改变它, 但操作或变换之后发现这个物体并没有发生改变, 那么这个物体就具有某种对称性. 对于图8.4中的圆, 如果让它绕圆心转动一个角度, 试图改变它, 但转动之后这个圆并没有改变. 因此我

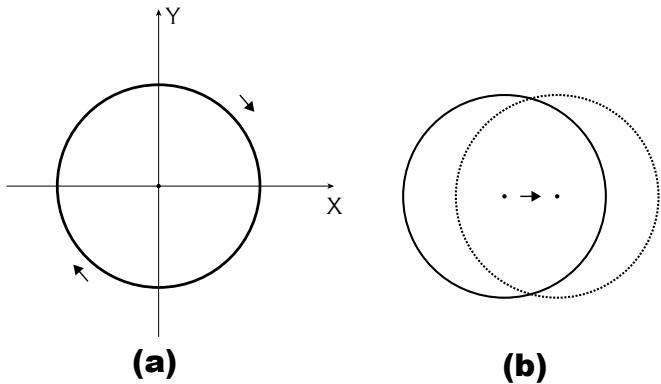


图 8.4: (a) 圆的转动; (b) 圆的平移.

们说圆具有旋转对称性. 如果把圆平移一下, 圆心的位置发生了移动, 圆确实发生了改变, 因此圆不具有平移对称性. 对称性可以用数学准确表达. 如图8.4(a) 所示建立一个二维直角坐标系. 在这个坐标系下, 圆在数学上可以表达为

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (8.60)$$

这里 r 是圆的半径. 绕圆心旋转任意一个角度 θ , 圆上任意一点 (x, y) 会发生如下变化

$$\tilde{x} = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad (8.61)$$

$$\tilde{y} = x \sin \theta + y \cos \theta. \quad (8.62)$$

可以验证这些新坐标 (\tilde{x}, \tilde{y}) 满足如下方程,

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = r^2. \quad (8.63)$$

这和方程 (8.60) 完全一样. 但是如果我们将圆向右平移一个距离 c , 那么平移后圆上的点满足如下方程

$$(\tilde{x} - c)^2 + \tilde{y}^2 = r^2. \quad (8.64)$$

这个方程和 (8.60) 是不一样的. 基于这个认识, 我们可以进一步推广对称性的定义. 一个数学方程如果在某种变换下不变, 那么我们就说这个数学方

程具有某种对称性. 如果这个数学方程恰好描述某一个真实的物体或物理系统, 那么我们就说这个物体或物理系统具有同样的对称性. 下面我们将讨论经典哈密顿量 H 在时空变换下的对称性. 哈密顿量 H 具有的对称性即是相应哈密顿物理体系具有的对称性. 我们的讨论将注重图像而不是数学的严格.

能量守恒 哈密顿量本身是体系的一个力学量, 它随时间的变化满足

$$\frac{d}{dt}H = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (8.65)$$

因此如果系统的哈密顿量不含时间, 只是共轭变量 p, q 的函数, 那么哈密顿量是守恒的, 即能量是守恒的. 我们来看一下哈密顿量在时间变换下如何变化. 假设时间变换是 $t \rightarrow t'(t)$, 这时动量会发生相应的变换

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt} = m\frac{d\vec{r}}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \vec{p}'\frac{dt'}{dt}. \quad (8.66)$$

显然只有在如下时间平移变换下

$$t \rightarrow t' = t + t_0. \quad (8.67)$$

我们才能保证 $\vec{p} = \vec{p}'$, 从而保证系统的哈密顿量在时间变换下不变. 因此哈密顿量不含时等价于系统具有时间平移对称性. 这种情况下系统的能量守恒.

对于一个实际物理体系, 它的哈密顿量不含时间其实等价于这个体系和其他体系没有任何相互作用, 或者相互作用可以忽略. 为此, 我们看两个例子. 第一个例子是一个劲度系数 k 随时间变化的弹簧振子, 它的哈密顿量是

$$H_t = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k(t)x^2. \quad (8.68)$$

这里 m 是振子的质量, x 是它偏离平衡位置的位移. 这个系统的能量不守恒, 会随时间变化

$$\frac{d}{dt}H_t = \frac{x^2}{2}\frac{dk(t)}{dt}. \quad (8.69)$$

在实际生活中，一个弹簧的劲度系数 k 会随时间变化是因为它受到其它因素的影响，比如温度和电场。当这些因素随时间变化时，劲度系数 k 会随之变化。这个例子很好地说明了，当一个系统的哈密顿量显含时间时，这个系统一定和其它体系有耦合，从而有能量交换。它的能量不守恒是很容易理解的。同时，这和系统不具有时间平移对称性也是一致的。当这个系统和其它体系耦合时，在时刻 t_1 其它体系处于一个状态，在时刻 t_2 其它体系处于另一个状态；这样在这两个不同的时刻，系统受到的影响一般是不同的，从而失去时间平移对称性。

第二个例子是自由落体，它的哈密顿量是

$$H_1 = \frac{p^2}{2m} - mgz, \quad (8.70)$$

这里 m 是落体的质量， z 是它垂直方向的位置。这个哈密顿量描述的体系的能量是守恒的。但仔细想一下，你会发现问题。这个重力势能其实是来自于地球，落体在运动中改变自己的位置和动量时也会影响地球的位置和动量，从而改变地球的能量。所以严格意义上，对于真实的落体，它的能量守恒只是近似，是由于它和地球之间的能量交换非常小可以忽略。当然我们可以把地球包括进来，写下关于落体和地球的哈密顿量

$$H_2 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\vec{P}^2}{2M_\oplus} - G \frac{M_\oplus m}{|\vec{r} - \vec{r}|}. \quad (8.71)$$

由于 H_2 不显含时间，这个哈密顿的体系的能量守恒。但事实是，这还是一个近似。地球其实还和地球上很多其他物体相互吸引，它们之间有能量交换；地球还和月亮、太阳等其他星体有相互作用和能量交换。同时落体本身也还和地球上其他物体相互吸引，它们之间也有能量交换。我们可以进一步扩充我们的哈密顿量，把更多的相关的系统加进来。由于迄今为止，人类发现的所有基本物理体系都是哈密顿系统。这样每扩充一次，我们非常有信心依然会得到一个哈密顿系统。如此一直加下去，最后我们会得到整个宇宙的哈密顿量 H_{universe} 。这时候，因为不再有外界因素， H_{universe} 不会显含时间，同时也不再是近似。所

以宇宙的能量是绝对守恒的，即

$$\frac{d}{dt}H_{\text{universe}} = 0. \quad (8.72)$$

这个结果虽然是在经典力学的框架下得到的，但我们没有理由怀疑它会在更新的理论框架下不成立。

动量守恒 先考虑一个不受任何外力作用的粒子，这种粒子被称为自由粒子。为了简单，假设它在一维空间运动，这样它的哈密顿量是 $H_1^0 = p^2/(2m)$ 。动量 p 如何随时间变化实质上就是运动方程，因此我们有

$$\frac{dp}{dt} = \{p, H_1^0\} = 0. \quad (8.73)$$

这说明自由粒子的动量是守恒的。再考虑一个稍微复杂一点的系统，一维空间中的两个粒子。它们之间的相互作用势是 $U(x_1 - x_2)$ ，这个相互作用势只依赖两个粒子位置之差 $x_1 - x_2$ 。该系统的哈密顿量是

$$H_2 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + U(x_1 - x_2). \quad (8.74)$$

直接计算可以验证

$$\{P, H_2\} = 0, \{p_1, H_2\} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \neq 0, \{p_2, H_2\} = -\frac{\partial U}{\partial x_2} \neq 0. \quad (8.75)$$

这里 $P = p_1 + p_2$ 是系统的总动量。上面的计算结果表明总动量 P 是守恒的，单个粒子的动量不守恒。下面的分析将表明，动量守恒和空间平移对称性是紧密相关的。

对于一个粒子，空间平移变换具有如下形式

$$x = \tilde{x} + a_0. \quad (8.76)$$

在这个变换下我们有

$$p = mv = m \frac{dx}{dt} = m \frac{dx}{d\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{p}. \quad (8.77)$$

这意味着 $\tilde{H}_1^0 = \tilde{p}^2/(2m)$ ，即自由粒子的哈密顿量在空间平移变换下是不变的。从上面的公式还可以看出，为了保证自由粒子的哈密顿量不

变, 空间变换 $x(\tilde{x})$ 必须满足 $\frac{dx}{d\tilde{x}} = 1$, 这只有平移变换可以满足. 另外, 很容易看出如果粒子感受到任意的外势 $U(x)$, 这种空间平移对称性会被破坏. 这时粒子的哈密顿量是 $H_1 = p^2/(2m) + U(x)$. 在公式 (8.76) 平移变换下, 哈密顿量会变成 $\tilde{H}_1 = \tilde{p}^2/(2m) + U(\tilde{x} + a_0)$, 形式发生了变化. 另外, 直接计算告诉我们

$$\{p, H_1\} = -\frac{dU(x)}{dx} \neq 0, \quad (8.78)$$

即动量不守恒. 这些分析清楚表明, 动量守恒和空间平移对称性紧密相关.

对于两粒子体系, 空间平移变换需要同时对两个粒子的坐标进行变换

$$x_1 = \tilde{x}_1 + a_0, \quad x_2 = \tilde{x}_2 + a_0. \quad (8.79)$$

在这个变换下, 我们有 $p_1 = \tilde{p}_1$ 和 $p_2 = \tilde{p}_2$. 同时我们有

$$U(x_1 - x_2) = U(\tilde{x}_1 + a_0 - \tilde{x}_2 - a_0) = U(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2). \quad (8.80)$$

因此

$$\tilde{H}_2 = \frac{\tilde{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\tilde{p}_2^2}{2m_2} + U(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2). \quad (8.81)$$

这个形式和变换前的哈密顿 H_2 完全一样. 因此 H_2 具有空间平移对称性, 这保证了它的总动量 P 是守恒的. 这些讨论可以推广到有更多粒子的系统中并得到类似的结论.

角动量守恒 考虑一个粒子受到有心力的作用, 它的哈密顿量是

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + U(r). \quad (8.82)$$

考察角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. 这个力学量也不显含时间, 我们直接计算泊松

括号

$$\begin{aligned}
 \{L_x, H\} &= \{yp_z - zp_y, H\} \\
 &= \frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial p_y} \\
 &\quad + \frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial p_z} - \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial p_z} \\
 &= \frac{p_z p_y}{m} + \frac{dU}{dr} \frac{yz}{r} - \frac{p_z p_y}{m} - \frac{dU}{dr} \frac{yz}{r} = 0. \tag{8.83}
 \end{aligned}$$

类似地我们有

$$\{L_y, H\} = \{L_z, H\} = 0. \tag{8.84}$$

因此角动量 \vec{L} 是守恒量. 角动量守恒和系统具有转动对称性是相对应的. 为了简单, 我们先考虑一个以 z 轴为转动轴的二维转动

$$\tilde{x} = x \cos \theta - y \sin \theta, \tag{8.85}$$

$$\tilde{y} = x \sin \theta + y \cos \theta. \tag{8.86}$$

将上式的两边对时间求导数, 我们有

$$\tilde{v}_x = v_x \cos \theta - v_y \sin \theta, \tag{8.87}$$

$$\tilde{v}_y = v_x \sin \theta + v_y \cos \theta. \tag{8.88}$$

利用这两个式子, 我们很容易验证 $\tilde{v}_x^2 + \tilde{v}_y^2 = v_x^2 + v_y^2$ 或者 $\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2 = p_x^2 + p_y^2$. 我们可以验证在沿 x, y 轴转动时有类似的结果. 因为任何三维的转动可以分解为二维的转动, 因此在三维转动下, 我们总是有

$$\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2 + \tilde{p}_z^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2. \tag{8.89}$$

在转动下向量的长度不变, 即 $\tilde{r} = r$, 因此转动后的哈密顿是

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{p}_x^2}{2m} + \frac{\tilde{p}_y^2}{2m} + \frac{\tilde{p}_z^2}{2m} + U(\tilde{r}). \tag{8.90}$$

和原来的哈密顿量 H 完全一样. 这表明哈密顿量具有转动对称性. 类似的讨论可以推广到其他具有旋转对称性的系统.

在数学上严格建立某个守恒量和某种对称性的关系，我们必须同时证明：(1) 如果哈密顿系统具有对称性 A，那么它具有守恒量 I_A ；(2) 如果哈密顿系统具有守恒量 I_A ，那么它具有对称性 A。在上面的讨论中，我们只能对能量守恒和时间平移对称性建立这样的严格对应。其它两个对应也可以在数学上严格建立，但这超越了本书范畴，有兴趣的读者可以参阅高等力学教程。

从上面的讨论可以看到，对称性和守恒量有紧密的联系。但并不是每一个守恒量都有相应的对称性。我们现在通过两个简单的例子来演示这种和对称性无关的守恒量。第一个例子的哈密顿量是

$$\mathcal{H}_1 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_1)^2. \quad (8.91)$$

这个哈密顿量描述的是三个质量相同的一维粒子，通过弹性势能相互作用。显然这个系统的能量和总动量守恒。作为一维系统，它没有角动量。但是我们马上会看到这个系统还有第三个守恒量。我们定义三个新的位置坐标

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3, \quad (8.92)$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3, \quad (8.93)$$

$$\tilde{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3). \quad (8.94)$$

将上式两边对时间求导数，然后乘上质量 m ，这样我们得到三个新动量

$$\tilde{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}p_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}p_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}p_3, \quad (8.95)$$

$$\tilde{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}p_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}p_3, \quad (8.96)$$

$$\tilde{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(p_1 + p_2 + p_3). \quad (8.97)$$

利用这些新坐标和新动量，我们可以将哈密顿量 \mathcal{H}_1 改写成

$$\mathcal{H}_1 = \frac{\tilde{p}_1^2}{2m} + \frac{\tilde{p}_2^2}{2m} + \frac{\tilde{p}_3^2}{2m} + \frac{3}{2}k\tilde{x}_1^2 + \frac{3}{2}k\tilde{x}_2^2. \quad (8.98)$$

我们看到，在新的坐标和动量下，这个系统是由三个独立的子系统构成，它们分别由三对共轭变量 $(\tilde{x}_1, \tilde{p}_1)$, $(\tilde{x}_2, \tilde{p}_2)$ 和 $(\tilde{x}_3, \tilde{p}_3)$ 描述。子系统 $(\tilde{x}_1, \tilde{p}_1)$ 和

$(\tilde{x}_2, \tilde{p}_2)$ 分别是两个弹簧振子; $(\tilde{x}_3, \tilde{p}_3)$ 则是自由粒子, 由于这三个子系统之间没有任何耦合, 所以下面三个都是相互独立的守恒量

$$E_1 = \frac{\tilde{p}_1^2}{2m} + \frac{3}{2}k\tilde{x}_1^2, \quad E_2 = \frac{\tilde{p}_2^2}{2m} + \frac{3}{2}k\tilde{x}_2^2, \quad \tilde{p}_3. \quad (8.99)$$

\tilde{p}_3 实质上是系统的总动量, 和这个系统具有空间平移对称性对应. 利用上面三个守恒量, 我们可以构造出系统的总能量, 这和时间平移对称性是对应的. 但是第三个独立守恒量 E_1 或 E_2 , 不对应任何对称性. 有人可能会反对这个观点, 认为哈密顿量 (8.91) 具有置换对称性: x_1, x_2, x_3 相互置换同时 p_1, p_2, p_3 做相应的置换, 哈密顿量形式不变; 守恒量 E_1 和 E_2 或许和这个对称性相关. 事实不这样: 如果哈密顿量 (8.91) 中三个粒子的质量不一样, 三个劲度系数也不同, 系统依然会有类似 E_1 或 E_2 这样的守恒量. 有兴趣的读者可以自己验证. 另外, 这个系统还有两个独立的守恒量, 它们和公式 (8.59) 中的守恒量类似, 这两个守恒量显然和对称性无关.

第二个例子是户田模型 (Toda lattice), 它的哈密顿量是

$$\mathcal{H}_2 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} + U_0 \left(e^{\frac{x_1-x_2}{r_0}} + e^{\frac{x_2-x_3}{r_0}} + e^{\frac{x_3-x_1}{r_0}} \right). \quad (8.100)$$

这个哈密顿量描述的系统由三个质量相同的一维粒子组成, 它们通过势能 $U(r) = U_0 e^{r/r_0}$ 相互作用. 因为这个系统具有时间平移和空间平移对称性, 所以它至少有两个守恒量, 能量和总动量 $p_1 + p_2 + p_3$. 非常有趣的是, 这个系统也有第三个独立守恒量, 它是

$$\begin{aligned} I_3 = & \frac{1}{3m}(p_1^3 + p_2^3 + p_3^3) + U_0 p_1 \left(e^{\frac{x_1-x_2}{r_0}} + e^{\frac{x_3-x_1}{r_0}} \right) \\ & + U_0 p_2 \left(e^{\frac{x_2-x_3}{r_0}} + e^{\frac{x_1-x_2}{r_0}} \right) + U_0 p_3 \left(e^{\frac{x_3-x_1}{r_0}} + e^{\frac{x_2-x_3}{r_0}} \right). \end{aligned} \quad (8.101)$$

有兴趣的读者可以通过直接计算来验证这个力学量确实是守恒的.

从上面两个例子, 我们看到一个哈密顿系统确实存在和对称性无关的守恒量. 但是上面两个例子有一个根本的区别: 第一个例子是线性系统; 第二个例子是非线性系统. 一个线性的经典力学系统, 无论它有没有对称性, 如果有 n 个自由度, 它一定有 $2n - 1$ 个独立的守恒量. 在下一节我们会看到, 这

$2n - 1$ 个独立的守恒量中有 n 个还是相互对合的. 非线性系统则是几乎完全相反, 除了总能量、总动量和总角动量, 几乎就不会再有其他守恒量. 上面的户田模型是一个特例, 非常罕见. 正因为这种罕见性, 这类非线性系统都会以它们的发现者命名.

从上面的讨论我们可以看到, 一个经典力学系统存在守恒量的原因有三种: (1) 对称性; (2) 线性性; (3) 特殊性. 能量, 动量和角动量的守恒来自对称性. 一个具有 n 个自由度的线性力学系统至少具有 n 个相互独立的守恒量, 其中的很多守恒量没有明确的物理意义. 一般的力学系统都是非线性的, 这些系统一般除了能量, 动量和角动量就没有其他守恒量. 但是对于某些特殊的非线性力学系统, 比如前面讨论过的户田模型, 这些非线性力学系统也可以有很多守恒量. 这些守恒量的存在是因为某个非线性系统具有一些特殊的结构.

8.5 可积性

经典动力学方程通常是非线性的, 因此它所描述的动力学行为一般也非常复杂, 比如大量空气分子的碰撞、地球大气的运动、流体中的湍流. 这类复杂的动力学现象和混沌紧密相关. 和混沌相对的是较为规则的运动, 一般被称为可积的运动, 相应的力学体系被称为可积运动系统. 为了严格定义一个力学系统的可积性, 必须引入对合的概念. 如果两个力学量 f_1 和 f_2 的泊松括号等于零, 即 $\{f_1, f_2\} = 0$, 那么我们说 f_1 和 f_2 对合 (in involution). 一个自由度为 n 的哈密顿系统是可积的如果它具有 n 个相互独立和相互对合的守恒量. 还是和前面一样, 我们不从严格的数学角度来讨论, 而是通过例子来说明为什么要利用对合来定义可积.

考虑一个简单的相互作用系统, 它的哈密顿量是

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + kx_1x_2. \quad (8.102)$$

这个系统具有时间平移对称性, 因此它的能量 \mathcal{H} 是守恒量. 因为这个系统的自由度是 2, 为了判断它是否可积, 我们需要至少再找一个守恒量. 但是

由于这个系统不具有空间平移不变性和旋转不变性，它的其他守恒量不是一目了然。为此，我们引入如下变换

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), \quad (8.103)$$

$$\tilde{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_2), \quad \tilde{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2). \quad (8.104)$$

通过直接计算可以验证它们是两对正则变量，即除了

$$\{\tilde{x}_1, \tilde{p}_1\} = \{\tilde{x}_2, \tilde{p}_2\} = 1, \quad (8.105)$$

其他泊松括号都等于零，比如 $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\} = \{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2\} = 0$ 。利用这组新变量，哈密顿量可以改写为

$$\mathcal{H} = \frac{\tilde{p}_1^2}{2m} + \frac{k}{2}\tilde{x}_1^2 + \frac{\tilde{p}_2^2}{2m} - \frac{k}{2}\tilde{x}_2^2. \quad (8.106)$$

这说明这个系统可以等价地看作有下面两个完全独立的哈密顿系统组成的，

$$H_1 = \frac{\tilde{p}_1^2}{2m} + \frac{k}{2}\tilde{x}_1^2, \quad H_2 = \frac{\tilde{p}_2^2}{2m} - \frac{k}{2}\tilde{x}_2^2. \quad (8.107)$$

显然 H_1 和 H_2 都是守恒量，而且它们相互对合 $\{H_1, H_2\} = 0$ 。这表明这个系统是可积的。注意由于 $\mathcal{H} = H_1 + H_2$ ， \mathcal{H} 不再是一个独立的守恒量。但是我们注意到变换后的哈密顿量 (8.106) 和我们前面讨论过的系统 (8.48) 完全等价。系统 (8.48) 具有 3 个相互独立的守恒量，因此我们的系统也有 3 个，参照前面的结果，它的第三个守恒量是

$$B = \arcsin\left(\sqrt{\frac{k\tilde{x}_1^2}{2E_1}}\right) + \ln\left[\frac{\tilde{x}_2}{2} - \frac{\tilde{p}_2}{2m\omega}\right], \quad (8.108)$$

其中 $\omega = \sqrt{k/m}$ 。可以验证

$$\{B, H_1\} \neq 0, \quad \{B, H_2\} \neq 0, \quad (8.109)$$

即 B 和 H_1, H_2 是不对合的。因此这个系统不存在三个既相互独立又相互对合的守恒量。这个结论物理上很容易接受。从变换后的哈密顿量 (8.106)，我们清晰地看到这个系统等价于两个相互独立具有 1 个自由度的系统， H_1

和 H_2 . 对于这两个系统，它们分别只有一个守恒量，即各自的能量. B 是由于我们强行把这两个独立的系统放在一起考虑而额外出现的守恒量，它的物理意义不清晰，对我们理解这个复合系统也没有什么特别的帮助.

再考虑一个简单的可积系统，一个在三维空间做匀速直线运动的粒子. 它的哈密顿量是

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (8.110)$$

这个系统有 3 个自由度，因此最多可以有 5 个相互独立的守恒量. 显然它的能量 E 和动量 \vec{p} 是守恒的. 作为一个三维向量，动量 \vec{p} 有三个分量， p_x, p_y, p_z . 这三个分量都是守恒量，而且相互独立. 另外，注意能量 $E = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/(2m)$ ，即它可以用动量表达出来. 因此在这个系统的四个守恒量 E, p_x, p_y, p_z 中只有三个是相互独立. 这个系统还有另外两个独立的守恒量，它们分别是

$$L_z = xp_y - yp_x, \quad L_x = yp_z - zp_y. \quad (8.111)$$

在这 5 个守恒量中，我们不妨选动量分量 p_x, p_y, p_z 作为一组相互独立的守恒量. 显然它们也是相互对合的，即

$$\{p_x, p_y\} = \{p_x, p_z\} = \{p_y, p_z\} = 0. \quad (8.112)$$

因此自由粒子是可积的. 这和它可以是被看成一个由三个独立运动的一维粒子构成是一致的. 对于这个系统，我们可以在数学上严格证明，不存在这样的一个守恒量，它和三个动量分量都对合. 假设有这样一个守恒量 I ，那么下面这些等式成立

$$\{I, p_x\} = \frac{\partial I}{\partial x} = 0, \quad \{I, p_y\} = \frac{\partial I}{\partial y} = 0, \quad \{I, p_z\} = \frac{\partial I}{\partial z} = 0. \quad (8.113)$$

这意味着 I 只能是 p_x, p_y, p_z 的函数，因此它不独立于动量.

有趣的是，这个系统还存在另外一组相互独立和相互对合守恒量，它们同样有 3 个，分别是 $H_{xy} = p_x^2/2m + p_y^2/2m$, L_z , 和 p_z . 很容易验证它们是相

互对合的. 对应这组守恒量, 利用极坐标 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $\theta = \arctan y/x$ (参见第2.4节), 我们可以重写哈密顿量

$$H = H_{xy} + \frac{p_z^2}{2m} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2mr^2} + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (8.114)$$

其中 $p_r = mdr/dt$, $L_z = mr^2d\theta/dt$. 它表示这个系统可以分解为三个独立的运动, 沿 z 方向的运动, 在 xy 平面的转动和径向运动. 通过这个例子我们看到, 对于同一个可积系统可以选择不同的对合守恒量组合, 不同的组合对应于将系统分解为不同的独立运动. 但是每组相互独立守恒量的个数是相同的, 它们等于系统的自由度.

通过上面两个例子, 我们可以总结出这样一个普适的结论: 一个具有 n 个自由度的系统, 如果它是可积的, 它一定可以通过变量变换等价地分解成 n 个独立的运动, 其中每一个运动对应一个守恒量; 反之亦然. 这个结论的严格证明超越了本书的范畴, 有兴趣的读者可以参阅 Arnold 的《Mathematical Methods of Classical Mechanics》.

前面讨论过的系统 (8.91) 是另外一个例子, 通过变量变换, 这个系统等价为由两个弹簧振子和一个自由粒子组成的复合系统 (8.98). 通过计算 I_3 和能量、动量的泊松括号可以证明户田模型 (8.100) 是可积的, 它也可以等价转换成三个独立的运动, 但是这个变换非常复杂, 没有具体的表达形式. 很多可积系统都是这样: 它被证明是可积的, 因此原则上可以转换成 n 个相互独立的运动, 但是人们并不知道如何把它们转换成 n 个相互独立的系统.

现在考察一下我们在前几章讨论过的系统, 看看它们是否可积.

单摆 单摆虽然在二维空间运动, 但是由于绳长不变, 只有角度 θ 在变, 因此它的自由度是 1. 由于它的能量守恒, 所以单摆是一个可积系统. 事实上, 对于任何只有一个自由度的体系, 如果它的能量守恒, 那么这个系统就是可积体系.

抛物运动 物体被限制在一个平面内运动, 因此自由度是 2. 有两个独立和对合的守恒量, 水平方向的动量和垂直方向的动能加重力势能. 因此这

个系统是可积的.

有心力 一个在有心力作用下运动的粒子的自由度是 3. 它的能量守恒, 角动量也守恒. 由于角动量有三个分量, L_x, L_y, L_z , 似乎这里有 4 个相互独立的守恒量. 事实上, 角动量的三个分量并不相互独立也不相互对合. 我们先计算角动量各分量之间的泊松括号,

$$\begin{aligned}
 & \{L_x, L_y\} = \{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\} \\
 &= \frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial x} \frac{\partial(zp_x - xp_z)}{\partial p_x} - \frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial p_x} \frac{\partial(zp_x - xp_z)}{\partial x} \\
 &+ \frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial y} \frac{\partial(zp_x - xp_z)}{\partial p_y} - \frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial p_y} \frac{\partial(zp_x - xp_z)}{\partial y} \\
 &+ \frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial z} \frac{\partial(zp_x - xp_z)}{\partial p_z} - \frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial p_z} \frac{\partial(zp_x - xp_z)}{\partial z} \\
 &= xp_y - yp_x = L_z.
 \end{aligned} \tag{8.115}$$

类似地我们有

$$\{L_y, L_z\} = L_x, \quad \{L_z, L_x\} = L_y. \tag{8.116}$$

因此角动量的不同分量之间的泊松括号不是零, 即它们不相互对合. 利用雅克比恒等式, 我们有

$$\{L_z, H\} = \{\{L_x, L_y\}, H\} = -\{\{L_y, H\}, L_x\} - \{\{H, L_x\}, L_y\} = 0. \tag{8.117}$$

这说明如果 L_x, L_y 守恒, 那么 L_z 一定守恒, 因此角动量的各个分量不是互相独立的. 虽然每一个分量都是守恒量, 但是 L_x, L_y, L_z 不是相互独立的守恒量. 这和动量有根本性的区别: 如果动量守恒, 它的三个分量是相互独立的守恒量. 物理上可以这样理解. 对于一个匀速直线运动的粒子, 如果我们知道它的动量和初始位置, 这个粒子的运动轨迹就完全确定了. 如果我们知道它的角动量和初始位置, 这个粒子的运动轨迹无法完全确定. 这时候必须再增加一个条件, 比如粒子运动的方向或速度的大小, 我们才能完全确定粒子的运动轨迹. 这从物理上说明了 L_x, L_y, L_z 中只有两个相互独立的守恒量.

因此我们可以选这个系统的能量和角动量分量 L_x, L_y 作为 3 个相互独立的守恒量. 但是上面的计算表明 L_x 和 L_y 不对合. 构建一个新的守恒量 $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, 通过直接计算可以验证

$$\{L_x, L^2\} = \{L_y, L^2\} = \{L_z, L^2\} = 0. \quad (8.118)$$

这样我们就有了三个既相互独立又相互对合的守恒量: 能量, L^2 和 L_x , 所以有心力体系是可积的. 当然, 我们也可以选择另外两种组合: 能量, L^2 和 L_y 或者能量, L^2 和 L_z ,

两体系统 我们只考虑不受外力, 而且两个粒子相互作用势只和它们之间的距离有关的两体系统. 因为每一个粒子的自由度是 3, 所以总的自由度是 6. 这类系统总是可以分解为质心运动和相对运动. 由于系统不受外力, 质心做匀速直线运动, 具有三个相互独立和对合的守恒量, 动量的三个分量. 相对运动可以等效看作有心力作用下的单粒子运动, 具有三个相互独立和相互对合的守恒量. 这样系统总共有 6 个相互独立和相互对合的守恒量, 和自由度数一样, 因此它是可积的.

三体系统 前面讨论了两个三体系统, 简谐振子链系统 \mathcal{H}_1 和户田系统 \mathcal{H}_2 , 它们都有三个独立的守恒量, 而且通过直接计算可以验证这些守恒量也是相互对合的. 因此这两个系统都是可积的. 但是一般的非线性三体系统是不可积的, 比如三个通过万有引力相互作用的物体.

这些分析表明我们在前面章节讨论过的各种体系都是可积的.

下面介绍可积系统的一个重要性质. 可以严格证明, 如果一个有 n 个自由度的哈密顿体系有 n 个相互独立和相互对合的守恒量, 那么一定存在 n 对作用量和角变量 (I_i, θ_i) ,

$$I_i = I_i(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n), \quad (8.119)$$

$$\theta_i = \theta_i(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (8.120)$$

它们满足如下泊松括号,

$$\{\theta_i, I_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\theta_i, \theta_j\} = 0, \quad \{I_i, I_j\} = 0. \quad (8.121)$$

这些作用量和角变量可以被当作新的共轭变量，用它们表达的哈密顿量只是作用量的函数，即 $H(I_1, I_2, \dots, I_n)$ 。根据这个哈密顿量的新形式，系统的运动方程是

$$\frac{dI_i}{dt} = \{I_i, H\} = 0, \quad \frac{d\theta_i}{dt} = \{\theta_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial I_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.122)$$

所以所有的作用量 I_i 都是守恒量，而 $\omega_i = \partial H / \partial I_i$ 在运动中不变。这样角变量随时间的演化非常简单，它们是

$$\theta_i = \omega_i t + \theta_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.123)$$

其中 θ_{i0} 由初始条件决定。所有这些结果表明一个可积系统实质上是 n 个相互独立的一维弹簧振子，它的动力学行为非常规则。上面这些结论的严格证明超越了本书的范畴。在附录 D，我们用弹簧振子作为例子演示了如何得到作用量和与其共轭的角变量。

遗憾的是，现实世界中的绝大多数体系都是不可积的，它们的动力学行为非常复杂，比如天气系统。我们这里举两个简单的例子。如图 8.5(a) 所示，当一个粒子在一个稍微变形的方盒子中来回做弹性碰撞时，它只有一个守恒量，动能；但是它的自由度是 2，因此这个系统不是可积的。这类盒子只有在四个角都是方的情况下，才有两个独立守恒量，动能和水平方向动量的大小。显然这类变形的盒子更容易在实际系统中出现，这从一个很小的侧面说明，自然界中更容易出现不可积系统。

图 8.5(b) 展示的是踢转子 (kick rotor) 庞加莱截面。踢转子的哈密顿量是

$$H_{\text{kr}} = \frac{p^2}{2m} + K \cos q \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau). \quad (8.124)$$

它描述的是一个质量为 m 的运动在一个单位圆上的质点，每隔一个周期 τ 它受到一个脉冲力。这系统只有一个自由度，但是由于哈密顿量是周期变化的，它的能量不守恒因而不是可积系统。图 8.5(b) 展示的是这个系统的庞加莱截面：每隔一个周期 τ 记录运动轨迹的一个点，很多个典型轨迹的集合就构成庞加莱截面。图清晰地分为两部分：中间上下两个比较规则的区域和比

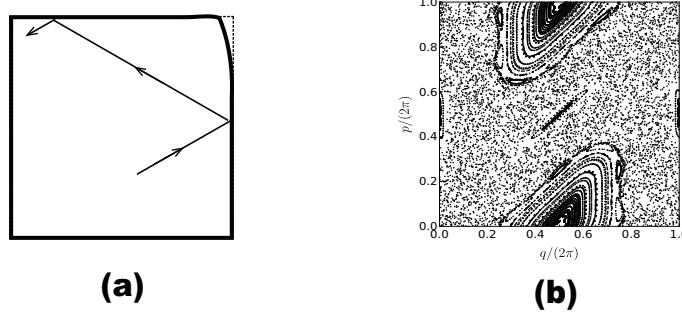


图 8.5: (a) 右上角稍微变形的方盒子; (b) 踢转子 (kicked rotor) 的庞加莱截面, $m = 1$, $K = 2$.

较乱的区域. 前者被称为可积区或可积岛, 由比较规则的运动轨迹构成; 后者被称为混沌海, 由比较杂乱的轨迹构成. 这个例子告诉我们, 一个很简单的动力学系统可以有非常复杂和混乱的运动.

8.6 哈密顿理论的普适性和应用

哈密顿在研究经典力学时建立了哈密顿理论, 但是这个理论框架的普适性肯定远远超出了哈密顿自己当时的预想. 现在我们知道, 现代物理学的所有基本理论都具有哈密顿形式, 这包括经典电动力学、量子力学、量子场论和广义相对论. 在这里我们以简单的例子来说明量子力学也可以被放入哈密顿理论框架.

考虑一个哈密顿量

$$\mathcal{H} = \psi_1^* H_{11} \psi_1 + \psi_2^* H_{22} \psi_2 + \psi_1^* H_{12} \psi_2 + \psi_2^* H_{21} \psi_1. \quad (8.125)$$

这里 $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ 都是实常数, 且 $H_{12} = H_{21}$. ψ_1, ψ_2 是复的动力学变量, ψ_1^*, ψ_2^* 是它们的复共轭. 由于 ψ_1, ψ_2 各自都有实部和虚部, 所以这个系统共有 4 个力学变量, 对应有两对共轭变量. 我们设定这两对共轭变量分别为 ψ_1^*, ψ_1 和 ψ_2^*, ψ_2 , 并定义如下泊松括号

$$\{f_1, f_2\} = i \left[\frac{\partial f_1}{\partial \psi_1^*} \frac{\partial f_2}{\partial \psi_1} - \frac{\partial f_2}{\partial \psi_1^*} \frac{\partial f_1}{\partial \psi_1} \right] + i \left[\frac{\partial f_1}{\partial \psi_2^*} \frac{\partial f_2}{\partial \psi_2} - \frac{\partial f_2}{\partial \psi_2^*} \frac{\partial f_1}{\partial \psi_2} \right]. \quad (8.126)$$

这里 $i = \sqrt{-1}$ 是单位虚数. 系统的运动方程是

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \{\psi_1, \mathcal{H}\}, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = \{\psi_2, \mathcal{H}\}. \quad (8.127)$$

计算上式中的泊松括号我们有

$$i \frac{d\psi_1}{dt} = H_{11}\psi_1 + H_{12}\psi_2, \quad (8.128)$$

$$i \frac{d\psi_2}{dt} = H_{21}\psi_1 + H_{22}\psi_2. \quad (8.129)$$

这就是两能级或自旋-1/2 系统的薛定谔方程. 上面这个数学形式可以推广, 用来描述任意量子系统. 这里就不累述了. 在公式 (8.126) 中定义的泊松括号和公式 (8.3) 中的泊松括号相比, 多了一个 i . 这不重要. 我们可以引入 $\tilde{\psi}_1^* = -i\psi_1^*$ 和 $\tilde{\psi}_2^* = -i\psi_2^*$, 然后设定 $\tilde{\psi}_1^*, \psi_1$ 为一对共轭变量, $\tilde{\psi}_2^*, \psi_2$ 为另外一对共轭变量. 这样我们可以消除 i , 得到和公式 (8.3) 一样的泊松括号.

在上面这个例子中, 动力学变量是复数, 完全没有了位置和动量的含义, 但哈密顿理论依然适用. 这和前面提及的哈密顿系统 (8.19) 类似, 那个系统中的 q, p 也不是大家熟知的位置和动量.

哈密顿理论不但一个比牛顿力学更广泛和普适的理论框架, 对具体分析很多物理系统也是一个犀利的工具. 下面通过一个例子来说明如何通过哈密顿量对一个物理系统进行近似和化简. 考虑三个质点 m_1, m_2, m_3 , 它们之间通过万有引力相互作用. 这个系统的哈密顿量是

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + \frac{\vec{p}_3^2}{2m_3} - \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - \frac{Gm_2m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} - \frac{Gm_1m_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|}. \quad (8.130)$$

假设这三个质点分别代表两颗恒星和一颗行星, 即 $m_3 \ll m_1, m_2$. 由于三个动量 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ 差不多大, 两颗恒星的动能要远小于行星, 它们的动能可以忽略. 这等价于近似认为两颗恒星 m_1, m_2 不动. 对于这种情况, 我们可以忽略两颗恒星的动能. 它们之间的万有引力也可以忽略, 这是因为它们之间的距离不怎么变化, 引力势能 $-Gm_1m_2/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ 大约是一个常数, 而哈密顿量中的常数项对动力学没有任何影响. 基于这些考虑, 上面的哈密顿量可

以近似为

$$H \approx \frac{\vec{p}_3^2}{2m_3} - \frac{Gm_2m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} - \frac{Gm_1m_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|}. \quad (8.131)$$

在这里两颗恒星的位置 \vec{r}_1, \vec{r}_2 已经成为系统参数，不再是动力学变量。根据这个哈密顿量写出的动力学方程要比根据哈密顿量 (8.130) 写出的简单很多。

8.7 非哈密顿动力学系统

自然界最基本的物理体系都是哈密顿体系，但是由这些基本的哈密顿体系构建出来的世界中却存在很多非哈密顿体系。现实世界里，任何一个物理体系都和环境等其它物理体系有相互作用。当这些相互作用被近似处理成摩擦力或其它耗散效应的时候，这个系统便可能不再是哈密顿系统。有时候，与环境相互作用即使做了近似处理，体系仍然是哈密顿体系，比如前面讨论过的含时弹簧振子。生物和化学中的很多体系也不是哈密顿系统。在实践中出于不同的目的，人类还构造了很多非哈密顿动力学体系。下面就介绍两个人为构造的非哈密顿体系。

在实际生活中，我们经常需要随机数进行加密或公平的抽样调查。在这个计算机时代，随机数更是应用广泛，从计算机游戏到高级科学计算随处可见随机数的身影。但是计算机上的随机数不是“随机”产生的。计算机里每一步运算都是按照预先设定的程序或控制指令进行的，没有任何随机性可言。但是利用确定的运算规则，计算机确实可以产生看起来非常“随机”的数列。下面就是一个最简单的随机数产生器，它的生成规则是

$$X_{n+1} = (aX_n + b) \bmod m, \quad (8.132)$$

这里 X_n 是非负的整数， a, b 是大的正整数， m 通常是一个大的质数。 \bmod 代表模运算： $x \bmod m$ 是实数 x 除以整数 m 的余数。作为一个简单的演示，令 $a = 376$, $b = 58$ 和 $m = 289$ 。如果设随机数种子为 $X_0 = 5$ ，由此产生的前 40 个数字是

5	204	177	140	100	88	200	118	209	34
126	38	185	258	251	220	124	153	75	225
270	139	13	33	39	272	24	123	66	20
64	135	243	102	262	21	151	190	115	237

如果我们只公布这些数字，其他人很难发现隐藏在它们后面的公式 (8.132). 这类随机数产生器告诉我们，一个确定的而简单演化规则可以产生看起来非常“随机”的结果，这和前面哈密顿系统中的混沌行为非常类似。有人为了强调这一点，把这类运动或行为成为确定性混沌(deterministic chaos).

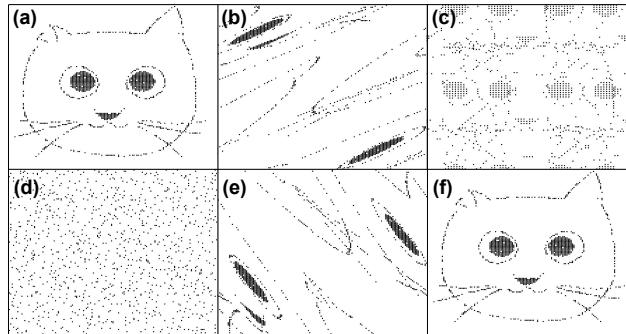


图 8.6: 猫映射. (a) 150×150 格点上的猫; (b) 一次映射; (c) 100 次映射; (d) 142 次映射; (e) 299 次映射; (f) 300 次映射后猫重新出现.

现在介绍另外一个非哈密顿体系。这是前苏联数学家阿诺德 (Vladimir Arnold, 1937 - 2010) 构造的一个简单但能展示混沌现象的映射。为了形象地展示这个映射的性质，阿诺德用空间格点构造了一张猫的图像。如图8.6所示，虽然映射在开始的时候会把猫的图像扭曲，但经过多次映射之后，猫的图像会复原。这个映射因此被称为猫映射，它具体定义是

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \bmod 1. \quad (8.133)$$

这里 (x_n, y_n) 是一个单位正方形上的点，如图8.7所示。由于定义中的模 1 运算，0 和 1 是等价的。几何上，这等价于图8.7中正方形的相对两条边是同

一条边. 所以这个映射实质上是一个从二维环面到二维环面的映射. 猫映射 (8.17) 和前面的随机数产生器可以被看作是离散的时间演化, 它们变量的下标 n 代表时间. 哈密顿系统中的时间演化虽然是连续的, 但是在做差分后也可以被等效成离散演化.

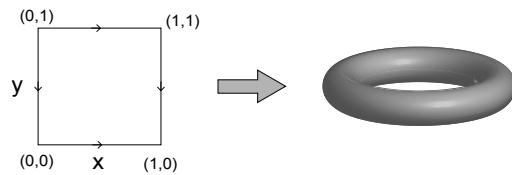


图 8.7: 猫映射的状态空间.

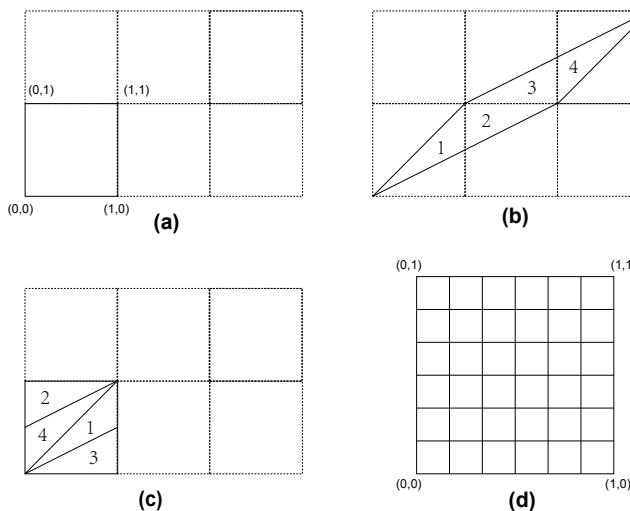


图 8.8: 猫映射. (a) 单位正方形; (b) 在公式 (8.17) 中的矩阵作用后, 正方形发生了变形; (c) 模 1 运算将扩展到外面的部分平移回单位正方形; (d) 单位正方形被均分成 6×6 的小正方格.

图 8.8 演示了猫映射的作用效果. 单位正方形经过公式 (8.17) 中矩阵的作用后, 形变为一个斜的细长平行四边形. 这个平行四边形的大部分超越了单位正方形的范围. 模 1 运算的效果是将这些超出部分平移回单位正方形. 从

图8.8的演示中很容易看到，这个映射是保面积的，是可逆的。而且在斜对角方向，长度会拉伸，这预示着这个映射会产生混沌：初始两个非常接近的点，它们之间的距离随着映射的次数 n 指数增长。

猫映射还有一个非常有趣的性质：把单位正方形均匀分成 $N \times N$ 的小方格（见图8.8(d)）。可以很容易看出，如果 (x_n, y_n) 选在这些格点上，在经过猫映射后，它们依然会落在这些格点上。而且人们发现，这些格点的猫映射是周期的：经过多次映射后，体系会回到初始的位置。图8.6中的单位正方形被均分成 150×150 的小方格，初始时刻是像素为 150×150 的猫，经过 300 次映射后系统重新回到猫。

迄今为止我们介绍的这些系统都是动力学系统，它们都有一个态空间，由系统所有的状态组成；另外还有一个或一套状态演化规则，告诉系统如何从一个状态演化到另外一个状态。在哈密顿系统中，态空间是相空间；演化规则是从哈密顿动力学方程，这包括我们熟悉的牛顿第二定律也包括薛定谔方程。在随机数产生器中，态空间是一组离散的整数，演化规则是一个递推关系。对于猫映射，态空间是一个二维环面，演化规则是公式 (8.17) 定义的递推映射。在这些系统中，状态演化都是确定的和可逆的：从一个状态出发，经过一步演化后只可能成为另外一个状态，不会分叉为两个状态。也就是图8.9(b) 的演化情况是不可能的。在这类动力学体系中，未来是确定的。

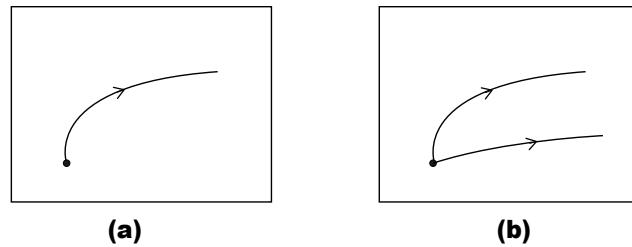


图 8.9: (a) 确定性动力学演化；(b) 分叉演化。

自然界基本的物理系统都是哈密顿系统，它们具有确定和可逆的演化规则：

从一个确定的初始条件出发，系统只会沿一条确定的轨迹演化；从某一个时刻的状态可以反推确切知道前一个时刻的状态。但是我们在现实中会经常碰到不确定的和不可逆的动力学体系，这些动力学体系中的不确定性和不可逆性是由于存在一些不可控因素或者我们有意忽略了一些因素造成的。我们用布朗运动和通常的计算机为例来分别阐述这些不确定和不可逆的运动。

一个布朗粒子的未来是不确定的：如果 t_0 时刻，这个布朗粒子的位置是 \vec{r}_0 动量是 \vec{p}_0 ，那么下一个时刻它可能出现在 \vec{r}_1 并具有动量 \vec{p}_1 ，也可能在 \vec{r}'_1 并具有动量 \vec{p}'_1 。从原则上讲，如果我们能跟踪每一个撞击布朗粒子的分子，我们可以消除这种随机性。但是一方面这在技术上无法实现，另外一方面这也没有必要，因为我们关注的布朗粒子统计行为，而不是布朗粒子每一个时刻的运动状态。以布朗粒子为代表的这类体系被称为随机动力学体系。

日常所用的计算机也是一种动力学体系，它的状态空间由内存的所有可能状态构成，演化的规则是正在执行的程序。它是一种不可逆动力学体系。这体现在两个方面：首先，计算过程伴随有热耗散等能量损耗；其次，计算过程本身利用了与门或门等不可逆逻辑门。

量子力学的动力学演化从原则上将是确定和可逆的，但是由于量子测量，它表现得即不确定也不可逆。对于量子力学中的这种不确定和不可逆，学术界还有很多争论。

习题

题 8.1 — 考虑一个由三个一维粒子构成的哈密顿系统，它的哈密顿量是

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} + V_0 [e^{(x_1-x_2)/r_0} + e^{(x_2-x_3)/r_0} + e^{(x_3-x_1)/r_0}].$$

它的三对共轭变量是 $(x_1, p_1), (x_2, p_2)$ 和 (x_3, p_3) 。根据哈密顿理论，写出这个系统的动力学方程。

题 8.2 — 考虑一个只有一对共轭变量 q, p 哈密顿系统。对于它的任意三个

力学量 $f_1(q, p)$, $f_2(q, p)$ 和 $f_3(q, p)$, 证明恒等式 (8.22, 8.23, 8.24, 8.25).

题 8.3 — 考虑一个哈密顿体系, 它有两对共轭变量 (q_1, p_1) 和 (q_2, p_2) . 定义三个力学量

$$\begin{aligned} f_1(q_1, q_2; p_1, p_2) &= q_1^3 p_2^2, \\ f_2(q_1, q_2; p_1, p_2) &= p_1^4 e^{q_2}, \\ f_3(q_1, q_2; p_1, p_2) &= \sin(p_1) q_2^2 + p_2^3 \cos(q_2). \end{aligned}$$

计算它们之间的泊松括号 $\{f_1, f_2\}$, $\{f_2, f_3\}$, $\{f_1, f_3\}$. 注意这些共轭变量 q_1, p_1, q_2, p_2 都已经被无量纲化.

题 8.4 — 考虑哈密顿量 (8.19). 假设 $\alpha > 0$, 找出它所有的不动点, 讨论不动点的个数如何随系统参数 α 和 β 变化, 并指出每一个不动点的类型 (稳定与否, 能量极大值、极小值或鞍点) .

题 8.5 — 考虑一个哈密顿系统

$$H = -E_1 \cos q - E_2 \cos p$$

其中 $E_{1,2} > 0$ 是两个具有能量量纲的常数, $q \in [-\pi, \pi]$ 和 $p \in [-\pi, \pi]$ 是一对无量纲的共轭变量, 满足 $\{q, p\} = 1$.

- (1) 写下这个系统的哈密顿运动方程;
- (2) 求这个系统的不动点, 并判断不动点的稳定性和类型 (能量极大值、极小值或鞍点);
- (3) 在这个系统的相空间中标出这些不动点, 并且画出不动点附近的典型运动轨迹 (轨迹不需要很准确但需要具备最主要的特征.)

题 8.6 — 考虑两个质量不一样的一维自由粒子, 它们的哈密顿量是

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}.$$

推导它的四个运动常数并利用这些运动常数构建三个相互独立的守恒量.

题 8.7 — 证明公式 (8.92, 8.93, 8.94) 中定义的变量 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ 和公式 (8.95, 8.96, 8.97) 中定义的变量 $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ 满足如下泊松括号

$$\{\tilde{x}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}, \{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0.$$

题 8.8 — 对于哈密顿系统 (8.91), 利用泊松括号

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0,$$

证明 $E_2 = \frac{\tilde{p}_2^2}{2m} + \frac{3}{2}k\tilde{x}_2^2$ 是守恒量, 即 $\{E_2, \mathcal{H}_1\} = 0$.

题 8.9 — 考虑三个粒子的户田模型 (8.100), 证明 $\{I_3, \mathcal{H}_2\} = 0$. I_3 的定义参见公式 (8.101).

题 8.10 — 考虑一个感受有心力的粒子, 它的哈密顿量是

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + U(r),$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 定义角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, 证明 L_z, L^2, H 三个力学量相互对合.

题 8.11 — 考虑一个质量为 m 的粒子, 受到有心力作用. 它的哈密顿量是

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{k}{r}.$$

这里 $k > 0$ 是一个常数, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 是粒子和力心之间的距离. 拉普拉斯-隆格-楞次 (LPL) 向量被定义为

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r}.$$

这里 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ 是粒子的角动量.

- (1) 证明 \vec{A} 是守恒量;
- (2) $A = |\vec{A}|$ 不是独立于角动量 \vec{L} 和能量的守恒量.

题 8.12 — 证明 $\{L_z, L_x\} = L_y$.

题 8.13 — 考虑一个弹簧振子

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2.$$

引入作用量 I

$$I = \frac{S}{2\pi} = \frac{E}{\omega} = \frac{p^2}{2\sqrt{mk}} + \sqrt{mk}\frac{x^2}{2}.$$

和令

$$p = (4I^2mk)^{1/4} \cos \theta, \quad x = \left(\frac{4I^2}{mk}\right)^{1/4} \sin \theta.$$

- (1) 证明 $\{\theta, I\} = 1$.
- (2) 对于任意两个力学量 $f_1(\theta(q, p), I(q, p))$ 和 $f_2(\theta(q, p), I(q, p))$, 定义新泊松括号

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \frac{\partial f_2}{\partial I} - \frac{\partial f_1}{\partial I} \frac{\partial f_2}{\partial \theta}.$$

证明 $[f_1, f_2] = \{f_1, f_2\}$.

题 8.14 — 证明在哈密顿系统 (8.125) 中 $C = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ 是守恒量.

题 8.15 — 对于猫映射

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \bmod 1.$$

考虑它的两组解 $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ 和 (\bar{x}_n, \bar{y}_n) , 这两组解的初始条件分别是

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix} = 10^{-10} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix},$$

定义距离 $r_n = \sqrt{(\tilde{x}_n - \bar{x}_n)^2 + (\tilde{y}_n - \bar{y}_n)^2}$. 证明或用数值结果说明当 $n < 20$ 时, r_n 成指数增长.

题 8.16 — 考虑一个三维哈密顿系统

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}).$$

其中 $U(\vec{r})$ 是 \vec{r} 的光滑单值函数. 证明图8.10中的轨迹交叉现象不会发生. (不考虑轨迹的交点正好是鞍点的情况).

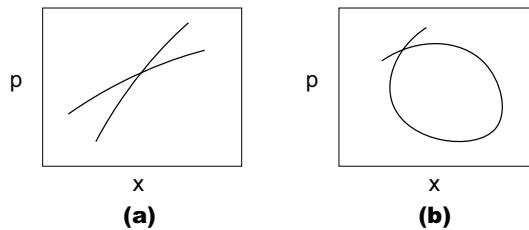


图 8.10: 不可能的相空间运动轨迹. (a) 两条对应不同能量的轨迹相交; (b) 自相交轨迹. 这里 x, p 是示意地分别表示三个空间维度和动量维度.

题 8.17 — 考虑如下单粒子哈密顿量

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \delta(t - i). \quad (8.134)$$

这里所有变量已经无量纲化. 这个哈密顿量描述了一个粒子每隔一个单位时间受到一个冲力, 冲力的大小和当时粒子所处位置有关. 如果 q_n, p_n 是第 $(n+1)$ 次冲力前一瞬间的位置和动量, 证明

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix}.$$

这正好是没有模运算的猫映射.