

## 第六章 万有引力

---

地球上的任何生物都能感受到重力，并且进化出了各种适应重力的能力或特征，比如猫落地时知道如何减缓重力冲击，哺乳类动物都具有强壮的后肢。人类当然也不例外，在生活中会想方设法适应重力：或克服它或利用它。非常有意思的是，古人似乎从来没有把重力当作“力”而是把它看作物体本身具有的性质。中国有句古语，“人往高处走水往低处流”。往低处流是水天生就有的性质，除非碰到障碍物，水就是要往低处流。古希腊人有类似的看法，在第 1 章，我们曾经提过，亚里士多德认为每一种简单的物体都具有一个自然的天生的运动倾向，火有向上运动的倾向，石头有向下运动的倾向。伽利略虽然仔细研究了自由落体，但对重力并没有什么深刻的认识。伟大的牛顿发现重力其实是地球对万物的引力，它和天空中约束行星运动的力是同一种力。我们时刻感受到重力是因为我们生活在地球上，重力并不是物体的内在的特性。当我们远离地球，重力就会消失。牛顿的发现让人类第一次意识到天地之间并没有本质的区别，是人类的思想第一次真正超越了地球，迈向了宇宙。

### 6.1 开普勒定律和万有引力

德国数学家和天文学家开普勒是一个虔诚的基督徒，他认为太阳是上帝的象征，它向整个太阳系辐射动力 (motive power)，这个动力随距离变弱。在这个信念的驱使下，开普勒试图去理解行星的运动，并对行星的轨道进行了细致的观测。基于自己和第谷的观测数据，开普勒利用自己卓越的数学能力总结出了关于行星运动的三大定律：

- 每个行星的轨迹是一个椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点；
- 行星和太阳的连线在相同的时间内扫过相同的面积；

- 行星周期的平方与椭圆长半轴立方的比是一个常数.



图 6.1: 开普勒 (Johannes Kepler, 1571 - 1630)

基于开普勒三大定律，伟大的牛顿利用微积分思想和几何知识发现太阳和行星之间存在引力：这个引力的方向是沿太阳和行星的连线；大小则反比于太阳和行星之间距离的平方。下面我们看看牛顿是如何得到这个结果的<sup>1</sup>，直接体验一下牛顿的思考方式。

虽然行星的轨迹是一个椭圆，速度在随时改变，但如图6.2所示我们可以把椭圆轨迹切割成许多小段：每一小段所花时间  $\tau$  相等，在这一小段时间内认为速度不变。根据开普勒第二定律，这样得到的每一个三角形，比如 SAB、SBC、SCD，都具有相同的面积。考察处于 B 点的行星，在前一段  $\tau$  时间内，行星以 A 点的速度做匀速直线运动。如果行星不受引力影响，它会继续保持这个速度往前运动，经过相同的时间  $\tau$  后到达 c 点。显然线段 AB 和 Bc 一样长，所以三角形 SAB 和 SBc 具有相同的面积。事实是，行星在 B 点受到一个引力冲量，速度发生改变，在下一段时间  $\tau$  内，运动到了 C 点。由于三角形 SBC 和三角形 SAB 具有相同的面积，三角形 SBC 和 SBc 的面积相同。由于三角形 SBC 和 SBc 共有一条边 BS，所以 C 到 BS 的高

<sup>1</sup>这里的推导没有严格遵循牛顿在《原理》一书中的步骤，而是用现代数学的语言对牛顿的方法进行了精简，但最精髓的思想都是牛顿的。

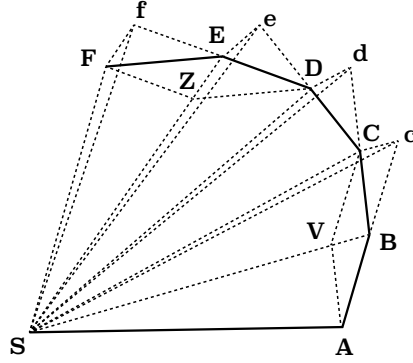


图 6.2: 牛顿推导万有引力的几何差分方法: 光滑的椭圆轨迹被分成了很多小段, 每一小段行星做匀速直线运动.

和  $c$  到  $BS$  的高相等. 由此可以知道线段  $BS$  和线段  $Cc$  平行. 物理上, 线段  $Cc$  是  $B$  点速度和  $A$  点速度的差别. 根据牛顿第二定律, 行星在  $B$  点受的引力 (更准确的说法是, 行星在  $AB$  这一段受到的引力冲量) 应该正比于  $Cc$ , 特别是力的方向应该和  $Cc$  平行. 由于  $BS$  平行  $Cc$ , 所以行星在  $B$  点受的引力是沿  $BS$  方向的. 当每一个小段趋于零, 即  $\tau \rightarrow 0$ , 我们就还原椭圆轨迹, 并且知道行星在轨迹上任何一点所受引力都是指向太阳的.

利用这个简洁的几何差分方法, 牛顿得到了一个非常重要的结论, 行星和太阳之间的引力是指向太阳的. 如果某个行星的轨迹是圆, 那么太阳的引力  $F_G$  正好提供了向心力, 即

$$F_G = m \frac{v^2}{r}. \quad (6.1)$$

圆是一种特殊的椭圆, 开普勒第三定律依然适用, 即行星的周期  $T$  和圆周的半径  $r$  满足  $T^2/r^3 = C_0$ , 这里  $C_0$  是一个常数. 于是我们有

$$F_G = m \frac{v^2}{r} = m \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 m}{C_0 r^2}. \quad (6.2)$$

牛顿就是这样, 从开普勒三大定律出发, 得到了大家熟知的结果: 太阳和行星之间引力的方向沿着它们之间的连线, 大小则反比于它们之间距离的平方. 上面公式中的  $C_0$  由于适用于太阳系中所有的行星, 行星的质量各不相同

同，所以  $C_0$  中肯定和行星质量无关，但应该含有太阳的质量  $M$ ，不然，相同的  $C_0$  会适用月亮的周期和轨道半径。牛顿当时已经知道月亮的天文观测数据，知道月亮的  $C_0$  是不同的。如果出于对称考虑，要求太阳的质量  $M$  应该和行星质量  $m$  以同等的地位出现于引力公式中，那么太阳和地球之间的引力必须具有下列形式

$$F_G = G \frac{Mm}{r^2}. \quad (6.3)$$

这里的  $G$  被称为万有引力常数。有兴趣的读者可以想想，如果  $M$  以不同的形式出现在上面那个公式里，在物理上是否会导致矛盾的结果。

虽然公式 (6.3) 是从行星轨道推导出来的，但这个公式里除了行星和太阳的质量以及它们之间的距离，并不依赖行星和太阳的其他信息，比如行星的大小、太阳的大小以及它们可能的内部结构。这个吸引力应该存在于任何两个有质量的物体之间。牛顿显然立刻就意识到了这一点，其他物理学家也很快接受了这一结论，开始利用万有引力来解释潮汐等现象。

从现代物理的角度看，人们需要进一步的实验来确认公式 (6.3) 是否真的适用于所有物体，特别是需要测定万有引力常数  $G$ 。利用当时的技术测定  $G$  不是一件容易的事情。但更有意思的是牛顿本人并没有引入  $G$ ，在《原理》发表以后的一百多年内，物理学家也没引入  $G$  把引力写成公式 (6.3) 这样的数学形式。那个时代的物理学家似乎总是把  $GM$  绑在一起用。大家现在都认为卡文迪许 (Henry Cavendish, 1731 - 1810) 利用扭秤最早在 1797 年和 1798 年测定了  $G$ 。事实上，卡文迪许自己在论文中并没有这样说，而是说他测定了地球的平均密度。具体地说，卡文迪许利用扭秤测定一个大球对小球的引力大小，然后和小球的重力进行比较。在比较中  $G$  自然地消去，由于地球的半径早就知道，公式中只剩下地球的密度或质量是未知的。卡文迪许就这样测定了地球平均密度，它的值是  $\rho_{\oplus} = 5.448(33)$  克 / 厘米<sup>3</sup>。由于卡文迪许已经测定了大球对小球的引力大小，而且大球和小球的质量以及它们之间的距离很容易测量，利用卡文迪许在他论文中发表的数据，可以直接推算出引力常数，它的值大约是  $G = 6.74(4) \times 10^{-11}$  米<sup>3</sup>·千克<sup>-1</sup>/秒<sup>2</sup>。

地球上的任何物体都受到来自地球的引力. 地球的最高点-珠穆朗玛-离海平面也不到 10 公里, 远远小于地球的半径, 所以地球上所有物体离地球中心的距离都可以近似认为是地球的半径, 它们受到的引力只和质量有关. 如果物体的质量是  $m$ , 我们通常把它受到地球的引力大小写成  $mg$ , 其中  $g$  被称为重力加速度, 它等于

$$g = G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} = \frac{4\pi}{3} G \rho_{\oplus} R_{\oplus}. \quad (6.4)$$

这个公式中  $M_{\oplus}$  和  $R_{\oplus}$  分别是地球质量和半径.  $g$  大约等于  $g \approx 9.8$  米/秒<sup>2</sup>.

由于力是向量, 所以公式 (6.3) 不严格. 万有引力公式的严格形式是

$$\vec{F}_G = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}. \quad (6.5)$$

这是物体  $M$  对物体  $m$  产生的引力,  $\vec{r}$  是从物体  $M$  指向物体  $m$  的向量,  $r$  是向量  $\vec{r}$  的长度. 万有引力是一个保守力因为  $\vec{F}_G = -\nabla U_G(r)$ , 其中

$$U_G(r) = -G \frac{Mm}{r}. \quad (6.6)$$

这被称为物体  $M$  和物体  $m$  之间的万有引力势.

## 6.2 有心运动

在继续讨论万有引力之前, 我们先讨论一个相关的问题, 有心运动. 第四章已经触及了这个问题, 我们在这里进一步详细讨论. 在有心运动中, 一个质量为  $m$  的质点受到的力永远指向或指离一个固定点, 而且力的大小只和质点到固定点的距离有关. 当两个物体通过万有引力相互作用, 而其中一个物体的质量远远大于另外一个的质量时, 小质量物体可以近似看成绕大质量物体做有心运动.

对于一个有心运动, 其运动方程可以写成

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F(r) \hat{r}, \quad (6.7)$$

这里  $F(r)$  是有心力的具有形式,  $\hat{r}$  是从固定点指向质点的单位向量. 这个体系的角动量  $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$  是守恒的, 即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}) &= m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= m\vec{v} \times \vec{v} + F(r)\vec{r} \times \hat{r} = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

从这个推导可以看出, 这个结果和  $F(r)$  的具体形式无关. 因此对于任何有心力, 质点的角动量都是守恒的.

由于角动量  $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$  是一个向量, 它不随时间变化意味着它的大小  $|\vec{L}|$  是一个常数, 同时它的方向一直不变. 一般情况, 质点  $m$  具有一个非零的初速度  $\vec{v}_0$ , 而且  $\vec{v}_0$  不平行于  $\vec{r}_0$ . 由于这个体系的角动量守恒,  $\vec{L} = m\vec{r}_0 \times \vec{v}_0$ , 质点将在  $\vec{r}_0$  和  $\vec{v}_0$  张成的平面里运动. 在这个平面内, 选固定点为原点, 建立如图6.3所示的极坐标系. 在此极坐标系下, 角动量大小等于

$$L = m|\vec{r} \times \vec{v}| = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = mr_0^2 \omega_0, \quad (6.9)$$

这里  $\omega_0$  是初始角速度. 对于初速度为零或  $\vec{v}_0$  平行于  $\vec{r}_0$  的特殊情况, 我们将在后面讨论.

数学上可以证明总是存在一个单值函数  $U(r)$ , 它满足

$$F(r)\hat{r} = -\nabla U(r), \quad (6.10)$$

这个函数  $U(r)$  被称为中心势能或中心势场 因为它只和离中心  $O$  的距离  $r$  有关. 根据第四章的结论, 这个系统的能量也是守恒, 它的表达式是

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r). \quad (6.11)$$

利用公式 (2.22), 我们可以得到这个能量在极坐标下的表达式

$$E = \frac{1}{2}m \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + U(r). \quad (6.12)$$

能量的大小由初始条件决定

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(r_0). \quad (6.13)$$

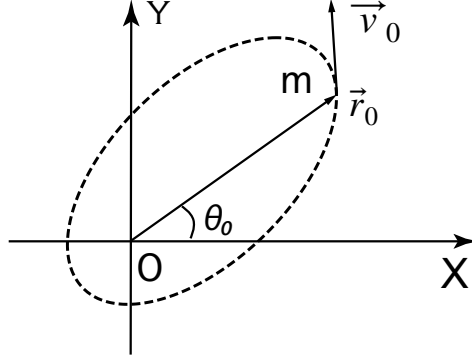


图 6.3: 有心运动: 质量为  $m$  的质点受力总是沿着自己和一个固定点  $O$  的连线, 大小只依赖于质点和  $O$  之间的距离. 质点  $m$  将在其初始位置  $\vec{r}_0$  和初始速度  $\vec{v}_0$  张成的平面里运动. 虚线是一条可能的轨迹.

利用上面的能量表达式, 并结合角动量守恒, 我们得到

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{m} - \frac{2U(r)}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2}. \quad (6.14)$$

因为

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{mr^2}, \quad (6.15)$$

我们进一步有

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{2mU(r)}{L^2} - \frac{1}{r^2}. \quad (6.16)$$

做变量代换, 令  $u = 1/r$ , 上式变成

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{2mU(1/u)}{L^2} - u^2. \quad (6.17)$$

继续整理, 我们最后得到

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2m} u^2 + \frac{U(1/u)}{L^2} = \frac{E}{L^2}. \quad (6.18)$$

如果把  $\theta$  看作时间, 上式可以被看作一个在一维空间运动质点的能量: 它的质量为  $1/m$ , 它的势能是

$$\tilde{U}(u) = \frac{1}{2m} u^2 + \frac{U(1/u)}{L^2}. \quad (6.19)$$

考虑一个特殊的例子  $U(r) = k/r^2 (k > 0)$ . 这种情况下, 公式 (6.18) 成为

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2m} u^2 + \frac{k}{L^2} u^2 = \frac{E}{L^2}. \quad (6.20)$$

这可以看作是一个简谐振子的能量, 它的通解是

$$u = \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{2mk + L^2}} \cos[\omega_k(\theta - \theta_0)], \quad (6.21)$$

这里

$$\omega_k = \sqrt{1 + \frac{2mk}{L^2}}. \quad (6.22)$$

遗憾的是, 对于一般形式的  $U(r)$ , 方程 (6.18) 没有解析结果.

当质点的初始速度为零或  $\vec{v}_0$  平行于  $\vec{r}_0$  时, 质点的角动量为零, 将不会绕原点转东而是做一维直线运动, 这时可以  $L = 0$  然后直接利用公式 (6.14) 求解.

### 6.3 两体运动

万有引力问题中最典型的是两体问题: 一个质点的质量是  $m_1$ , 另一个的质量是  $m_2$ , 二者之间通过万有引力相互作用. 根据牛顿第二定律, 这个系统的运动方程为

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = F_G(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \hat{r}, \quad (6.23)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -F_G(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \hat{r}. \quad (6.24)$$

其中  $\vec{r}_1$  是质点  $m_1$  的位置,  $\vec{r}_2$  是质点  $m_2$  的位置,  $\hat{r}$  是从质点  $m_1$  指向质点  $m_2$  的单位向量. 根据第四章的讨论, 由于这个系统中唯一的力—万有引力—是保守力, 它只和两个质点之间的距离  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  有关, 这个系统的能量、动量和角动量都守恒. 我们将尽量利用这些守恒量来简化这个体系的运动方程. 我们先利用动量守恒, 引入质心坐标,

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (6.25)$$



和相对坐标  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . 利用质心坐标和相对坐标, 运动方程 (6.23, 6.24) 可以被改写成

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0, \quad (6.26)$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -F_G(r) \hat{r}. \quad (6.27)$$

这里  $M = m_1 + m_2$  是总质量, 而

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (6.28)$$

是相对质量. 上面的运动方程 (6.26) 等价于系统的总动量守恒,

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0. \quad (6.29)$$

运动方程 (6.27) 可以被看作在描述一个质量为  $m$  的质点在保守力  $-F_G(r) \hat{r}$  作用下做有心运动, 相应的中心势能是  $U_G(r) = -Gm_1 m_2 / r$ . 当  $m_1 \gg m_2$  时,  $m \approx m_2$ . 这时质点  $m_1$  可以近似被看作不动, 质点  $m_2$  绕其在万有引力下运动. 在太阳系中, 太阳的质量大约是  $1.989 \times 10^{30}$  千克, 而最大行星木星的质量大约是  $1.898 \times 10^{27}$  千克, 远小于太阳的质量. 因此在太阳系中, 可以把太阳当作不动的原点, 行星和彗星等绕其运动. 数学上, 这等价于相对质量  $m = m_2$ . 对于木星,  $m_2 \approx 1.898 \times 10^{27}$  千克, 相应的相对质量  $m \approx 1.896 \times 10^{27}$  千克, 两者相差大约 0.1%.

从上面的分析可以看出, 在两体问题中, 质心在做平庸的匀速直线运动, 我们可以把注意力集中在相对运动方程 (6.27) 上. 先考虑一个特殊的情况, 质点  $m$  的初始速度为零, 离原点的距离是  $r_0$ . 这种情况下, 这个体系关于连接原点和  $m$  的直线是对称的: 力和初始速度都没有偏离这条轴的分量. 因此只有一个可能: 质点  $m$  将沿这条直线做一维运动. 这点也可以从角动量守恒看出: 初始时刻角动量为零, 为了保持角动量为零, 质点只能沿连接原点的直线运动. 因此在极坐标系下, 角度  $\theta$  不会变化, 保持为常数, 只有  $r$  随时间变化. 这时根据能量公式 6.12, 我们有

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} = -G \frac{m_1 m_2}{r_0}. \quad (6.30)$$

利用  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , 上式可以进一步改写成

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (6.31)$$

两边开方后再积分 (注意开方后取负号, 因为  $dr/dt$  小于零),

$$\int_0^\eta \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} d\eta = \sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}} t. \quad (6.32)$$

这里  $\eta = 1 - r/r_0$ . 先考虑一个特殊情况,  $\eta \ll 1$ . 这种情况下,  $\sqrt{(1-\eta)/\eta} \approx \sqrt{1/\eta}$ . 于是从上式我们可以得到质点  $m$  在时间  $t$  内走过的距离

$$r_0 - r \approx \frac{1}{2} \frac{GM}{r_0^2} t^2. \quad (6.33)$$

这是一个加速度为常数的匀加速直线运动. 如果  $M$  是地球的质量,  $r_0$  是地球的半径, 那么这就是我们熟悉的自由落体运动.

这个问题在条件  $\eta \ll 1$  不满足的情况下也可解析求解. 因为  $1 \geq \eta \geq 0$ , 我们将其换成角度变量  $\eta = \sin^2 \alpha$ . 公式 (6.32) 中的积分成为

$$\int_0^\alpha 2 \cos^2 \alpha d\alpha = \sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}} t. \quad (6.34)$$

积分整理以后我们有

$$\sqrt{(r_0 - r)r} + r_0 \arcsin(\sqrt{1 - r/r_0}) = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} t. \quad (6.35)$$

当质点  $m_2$  和质点  $m_1$  相撞时,  $r = 0$ , 质点  $m_1$  的运动时间是

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r_0^3}{2GM}}. \quad (6.36)$$

显然  $T^2/r_0^3$  是一个独立于物体  $m_2$  的常数, 和开普勒第三定律符合. 如果质点  $m$  的初始速度  $\vec{v}_0$  平行于  $\vec{r}_0$ , 质点  $m$  依然会沿  $\vec{r}_0$  方向做一个直线运动.

上面讨论的质点落向引力中心的问题虽然简单, 但是在历史上曾经引起很多著名科学家的注意. 这些科学家想知道, 当质点不可避免落向引力中心, 即

原点，并最后到达这个点时，它会穿过中心继续往前走还是会回头返回出发点？达朗贝尔 (Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717 - 1783) 认为，质点在引力中心速度达到无穷，不可能改变方向，因此会穿过中心继续向前。欧拉 (Leonhard Euler, 1707 - 1783) 则认为质点会在引力中心折回。欧拉这个运动应该被看作是角动量  $L$  趋于无穷小时的极限情况：当角动量不为零而总能量为负时，质点的运动是椭圆运动（见下面的讨论），它总是在引力中心附近折回。遗憾的是，这个问题无法通过直接求解运动方程 6.27 回答，因为在引力中心，力是无穷大的，这导致运动方程 6.27 出现奇点无法正常求解。有趣的是这个奇点问题在量子力学并不存在，如果先在量子力学中求解这个问题，然后考虑经典近似，我们会发现欧拉是对的。

现在考虑一般情况，质点  $m$  具有一个非零的初速度  $\vec{v}_0$ ，而且  $\vec{v}_0$  不平行于  $\vec{r}_0$ 。这时利用上一节有心运动的结果。将公式 (6.17) 中的  $U$  换成  $U_G$ ，我们有

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{2Gmm_1m_2}{L^2}u - u^2. \quad (6.37)$$

进一步整理，我们得到

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{G^2M^2m^4}{L^4} - \left(u - \frac{GMm^2}{L^2}\right)^2. \quad (6.38)$$

引入两个参数

$$p = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}. \quad (6.39)$$

注意这里  $p$  只是一个常数，不是动量。从公式 (6.38) 可以看出，上面根号中的常数一定是非负的。利用这些新定义的常数，公式 (6.38) 可以进一步简化

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(u - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{\epsilon^2}{p^2}. \quad (6.40)$$

如果把  $\theta$  看作时间，上面这个式子可以被看作一个简谐振子的能量，换句话说，经过上面的一系列变换，我们已经将一个质点在万有引力作用下的运动问题转化为了一个弹簧振子问题。它的解是显而易见的， $u = 1/p + (\epsilon/p) \cos(\theta + \varphi)$ 。利用  $u = 1/r$ ，我们有

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\theta + \varphi)}. \quad (6.41)$$

参数  $\varphi$  由初始时刻的位置通过下式确定

$$r_0 = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\theta_0 + \varphi)}. \quad (6.42)$$

这里  $r_0$  和  $\theta_0$  分别是初始时刻质点的径向距离和偏角.

公式 (6.41) 只是给出了径向距离  $r$  和转角  $\theta$  的关系. 如果想知道  $r$  和  $\theta$  如何随时间变化, 我们可以将关系式 (6.41) 代入下面转角  $\theta$  满足的方程 (来自角动量守恒)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}, \quad (6.43)$$

先求出  $\theta(t)$ , 然后再利用 (6.41) 得到  $r(t)$ . 大多数情况下, 人们对  $r(t)$  和  $\theta(t)$  的具体形式并不感兴趣, 只关心质点在空间运动轨迹的形状. 这时候  $\varphi$  也不再重要, 人们经常让  $\varphi = 0$ , 将公式 (6.41) 简化为

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (6.44)$$

图 6.4 描绘了这个公式给出的三种可能轨迹: 椭圆、双曲线和抛物线. 它们数学上分别对应  $E < 0 (\epsilon < 1)$ 、 $E > 0 (\epsilon > 1)$  和  $E = 0 (\epsilon = 1)$ . 为了能明显地看出轨迹的形状, 我们在图 6.4 中建立一个二维直角坐标系, 其原点是质心的位置 (这也是相对运动中引力指向的固定点). 下面是详细的分析.

**椭圆轨迹** 当系统能量小于零时,  $E < 0$ , 我们有  $\epsilon < 1$ . 这时公式 (6.44) 右边的分母永远是正的. 质点离原点的距离  $r$  总是有限的; 当  $\theta$  从 0 变到  $2\pi$  时, 质点的轨迹会回到出发点, 因此轨迹是闭合的. 对于特殊情况  $\epsilon = 0$ ,  $r = p$  是一个常数, 质点的轨道是圆的. 当  $\epsilon \neq 0$  但  $\epsilon < 1$  时, 轨道应该是椭圆的. 让我们来验证这个结论.

利用公式 (6.44), 我们有

$$r = p - \epsilon r \cos \theta = p - x\epsilon. \quad (6.45)$$

两边平方后稍微整理

$$(1 - \epsilon^2)x^2 + 2\epsilon p x + y^2 = p^2. \quad (6.46)$$

进一步整理后得到一个椭圆方程

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6.47)$$

这里

$$a = \frac{p}{1-\epsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}, \quad c = \frac{p\epsilon}{1-\epsilon^2}. \quad (6.48)$$

因此当  $E < 0$  时, 公式 (6.44) 描述了一个椭圆轨迹, 椭圆的长轴长度是  $a$ , 短轴长度是  $b$ , 偏心率是  $\epsilon = c/a$ . 注意常数  $a, b, c$  满足  $a^2 = b^2 + c^2$ .

在一个二维直角坐标系中, 在选定质心为原点后, 我们依然需要四个参数确定一条具体的椭圆轨迹. 它们是长轴的长度、偏心率、长轴和  $x$  轴的夹角以及初始的偏角  $\theta_0$  (参见图 6.3). 它们由初始位置  $\vec{r}_0$  和初始速度  $\vec{v}_0$  在运动平面内的四个分量决定. 大多数情况下, 我们只关心长轴的长度  $a$  和偏心率  $\epsilon$ , 即椭圆轨迹的形状. 从公式 (6.39) 可以看出, 角动量的大小  $L$  和质心能量  $E$  完全决定了  $p$  和偏心率  $\epsilon$ , 从而决定了长轴的长度  $a$ , 因此它们也完全决定了椭圆的形状. 类似的讨论适用于下面要介绍的抛物线轨迹和双曲线轨迹, 我们将不再累述, 感兴趣的读者可以自己讨论.

椭圆轨迹是周期的, 它的周期可以通过联解方程 (6.43) 和 (6.44) 求得. 这里介绍一个更简洁的方法. 当质点在  $dt$  时间内转过  $d\theta$  角时, 质点和原点连线扫过的面积是  $dS = (r^2 d\theta)/2$ . 所以质点的面积速度

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}. \quad (6.49)$$

由于角动量守恒,  $L$  是常数, 所以这个面积速度是常数. 椭圆的面积是  $\pi ab$ , 因此椭圆轨迹的周期

$$T = \frac{2\pi abm}{L}. \quad (6.50)$$

考察  $\theta = 0$  和  $\theta = \pi$  这两个点<sup>2</sup>, 这两个点的速度  $\vec{v}_1$  和  $\vec{v}_2$  都和  $\vec{r}$  垂

<sup>2</sup>对于绕太阳转的行星, 这分别对应近日点和远日点

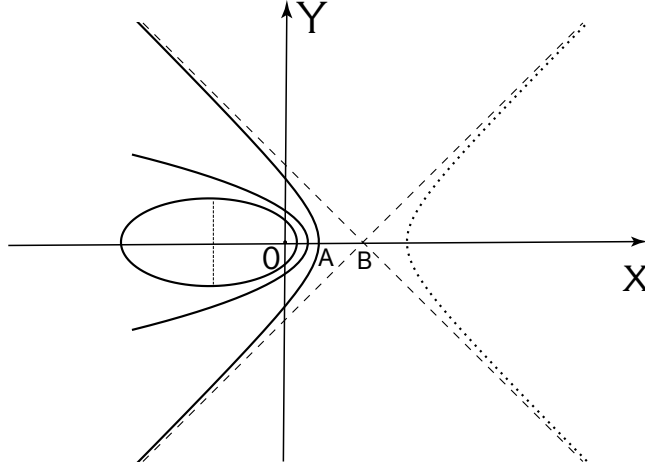


图 6.4: 万有引力两体问题中相对运动可能的三种轨道: 椭圆、双曲线和抛物线.

直. 因此  $L = mv_1(a - c) = mv_2(a + c)$ . 另外, 利用能量守恒我们有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{m_1m_2}{a - c} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{m_1m_2}{a + c}. \quad (6.51)$$

由此可以求出

$$v_1 = \frac{a + c}{b} \sqrt{\frac{GM}{a}}, \quad v_2 = \frac{a - c}{b} \sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (6.52)$$

将其中任意一个代入  $L$  的表达式, 利用公式 (6.50) 我们得到

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}. \quad (6.53)$$

这正是开普勒第三定律.

它和方程 (6.41) 一起求解可以给出了相对运动方程 (6.27) 的解. 由于角动量守恒, 运动方程 (6.27) 描述的实质上是一个二维运动, 它有四个初始条件:  $r_0$ 、 $\theta_0$ 、 $\omega_0$  和初始的径向速度. 这四个初始条件以  $\theta_0$ 、 $\varphi$ 、 $L$  和  $E$  的形式出现在解中. 但是如果我们只关心, 那么参数  $\theta_0$  和  $\varphi$  不重要, 质点空间轨迹的形状完全由角动量  $L$  和能量  $E$  决定.

**抛物线轨迹** 当  $E = 0$  时,  $\epsilon = 1$ , 公式 (6.44) 右边的分母在  $\theta = \pi$  时为零, 因此质点离原点的距离  $r$  会趋于无穷大, 质点的轨迹不再是闭合的. 当  $\epsilon = 1$  时, 公式 (6.46) 成为

$$2px + y^2 = p^2. \quad (6.54)$$

这显然是一条抛物线, 而且  $p$  也就是角动量  $L$  完全决定了抛物线的形状.

**双曲线轨迹** 最后考虑  $E > 0$  的情况. 这种情况下,  $\epsilon > 1$ , 这样公式 (6.44) 右边的分母在  $\cos \theta_0 = -1/\epsilon$  时为零. 因此和抛物线类似, 这种情况下质点离原点的距离  $r$  会趋于无穷大, 它的轨迹不是闭合的. 下面我们具体分析它的形状. 由于  $\epsilon > 1$ , 我们将公式 (6.46) 改写成

$$(\epsilon^2 - 1)x^2 - 2\epsilon px - y^2 = -p^2. \quad (6.55)$$

同时重新定义  $a, b, c$

$$a = \frac{p}{\epsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}, \quad c = \frac{p\epsilon}{\epsilon^2 - 1}. \quad (6.56)$$

进一步整理 (6.55), 我们有

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6.57)$$

这是一个双曲线函数. 而且从这个公式可以看出, 这条双曲线的形状完全由  $p$  和  $\epsilon$ , 也就是  $L$  和  $E$  决定.

在  $\theta \rightarrow \theta_0$  的极限下,  $x, y \rightarrow \infty$ . 利用上面的双曲线公式, 我们有

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1 \approx \frac{y^2}{b^2}. \quad (6.58)$$

两边开方我们有

$$y = \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1}(x - c). \quad (6.59)$$

这说明在很远的地方质点的轨迹近似为一条斜率不为零的直线, 质点在无穷远处做匀速直线运动. 这和  $E = 0$  的情况非常不一样.  $E = 0$

时, 质点即使在无穷远处也没有做匀速直线运动, 表明质点的运动仍然受到引力的显著影响. 上式中的  $\mp$  表示斜率有两种可能, 分别对应质点在很远的地方正飞向或飞离原点. 图6.4中通过 B 点的两条虚线就是这两条渐近直线. 另外, 在这个图中, 线段 OB 的长度是  $c$ , 线段 AB 的长度是  $a$ .

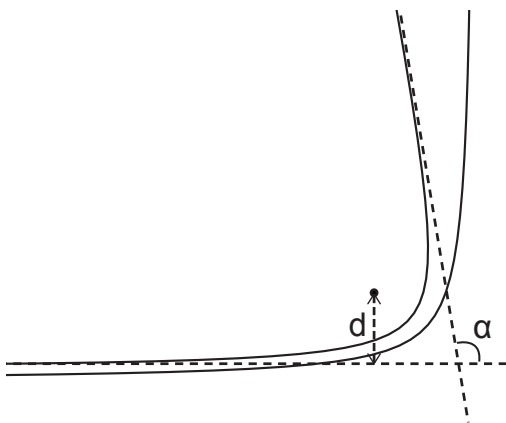


图 6.5: 彗星 (质量远小于太阳) 从远处飞近太阳然后又远去.

考虑一个具体的问题. 如图6.5所示, 一颗质量为  $m_0 \ll M_\odot$  的彗星以速度  $\vec{v}_0$  从很远的地方飞近太阳. 太阳中心到彗星速度  $\vec{v}_0$  方向的垂直距离是  $d$ . 由于在很远的地方引力势能可以忽略, 这颗彗星的能量是  $E = m_0 v_0^2 / 2 > 0$ , 因此它将按双曲线轨迹运动. 在临近太阳时, 它的轨迹在太阳的引力下会发生弯曲, 随后又摆脱太阳引力飞向远处, 在远处重新开始做匀速直线运动, 但是方向发生了改变. 按图6.5所示, 我们设定这个偏折角是  $\alpha$ . 按照前面的理论, 我们有  $\alpha = 2\theta_0 - \pi$ , 因此

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sin \theta_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon^2}}. \quad (6.60)$$

或者等价地

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\epsilon^2 - 1}. \quad (6.61)$$



由于这个彗星的角动量是  $L = m_0 v_0 d$ ,

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2MEL^2}{G^2 m_1^3 m_2^3}} = \sqrt{1 + \frac{(m_0 + M_\odot) v_0^4 d^2}{G^2 M_\odot^3}} \approx \sqrt{1 + \frac{v_0^4 d^2}{G^2 M_\odot^2}}. \quad (6.62)$$

最后我们得到

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{v_0^2 d}{GM_\odot}. \quad (6.63)$$

从这里可以清晰地看到, 如果我们能保持彗星的初始速度  $v_0$  但是改变  $b$ , 即角动量, 那么通过测量偏折的角度  $\alpha$  我们就能推算太阳的质量. 我们很难在天上用彗星做这种实验, 但是在地球上的实验室里我们可以做类似的实验. 在这类实验中, 彗星被带电的粒子代替, 太阳则被一些重元素原子代替, 万有引力被库仑相互作用代替. 在这类实验中, 这些双曲线运动被称为散射, 偏折角  $\alpha$  被称为散射角. 通过测量散射角  $\alpha$  和  $d$  的关系, 物理学家可以了解重元素的信息.

从上面的分析可以看到, 能量  $E$  是最重要的参数, 它决定了质点轨迹的类型. 角动量  $L$  和能量  $E$  决定了轨迹的形状, 比如椭圆轨迹的长轴和短轴的长度. 而质点的初始位置则决定了运动是从轨迹上的哪个点开始的. 在太阳系中, 行星的轨道都是椭圆的; 彗星的轨道则可能是椭圆、双曲线或抛物线.

## 6.4 地球的引力

在上面两体问题的讨论中, 我们都隐含着假设了两个物体的大小和它们之间的距离相比是很小的, 因此两个物体都可以被看作质点. 这个假设对于太阳-行星系统显然是成立的, 因为行星和太阳之间的距离远远大于太阳和行星的半径. 但是这个假设显然不适用于地球表面的物体, 它们离地球中心的距离和地球半径几乎是一样的. 但是下面我们会看到, 由于地球非常接近球形, 对于地球外面的物体, 它产生的引力还是可以被看作是一个位于地球中心的一个质点产生的, 质点的质量为地球质量  $M_\oplus$ .

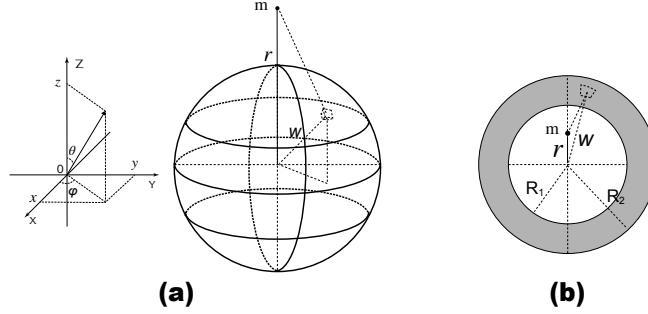


图 6.6: (a) 地球外的一个质点  $m$ , 质点离地球球心的距离是  $r$ ; (b) 空心球, 质量均匀分布在一个球壳内.

作为一个很好的近似, 我们认为地球具有完美的球形并且密度均匀. 这种情况下, 用图 6.6(a) 中的球坐标系更方便. 对于地球外的一个质点  $m$ , 由于对称性, 我们不失一般性把它放在  $z$  轴上, 考察它的受力如何随它和地球中心之间的距离  $r$  变化. 由于引力是保守力, 力的计算可以转换为计算质点  $m$  感受到的引力势能  $U_G$ . 把地球分割成很多小的体积元  $dV$ , 其质量是  $\rho_{\oplus} dV$  ( $\rho_{\oplus}$  是地球密度). 这个体积元和质点  $m$  之间的引力势能在球坐标下可以写成

$$-\frac{G\rho_{\oplus}mw^2\sin\theta dw d\theta d\varphi}{\sqrt{(r-w\cos\theta)^2+w^2\sin^2\theta}} = -\frac{G\rho_{\oplus}mw^2\sin\theta dw d\theta d\varphi}{\sqrt{r^2+w^2-2rw\cos\theta}}. \quad (6.64)$$

如图 6.6(a) 所示, 这里的  $w$  是体积元离球心的距离,  $\theta$  和  $\varphi$  是标准的球坐标中的两个角度.

将所有这些势能加起来就是质点  $m$  感受到的总引力势能. 数学上就是对上式积分

$$\begin{aligned} U_G(r) &= -\int_0^{R_{\oplus}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} G\rho_{\oplus}m \frac{w^2\sin\theta dw d\theta d\varphi}{\sqrt{r^2+w^2-2rw\cos\theta}} \\ &= -\int_0^{R_{\oplus}} 2\pi G\rho_{\oplus}m \frac{wdw}{r} (\sqrt{r^2+w^2+2rw} - \sqrt{r^2+w^2-2rw}) \\ &= -\int_0^{R_{\oplus}} 4\pi G\rho_{\oplus}m \frac{w^2 dw}{r} \\ &= -\frac{Gm}{r} \frac{4\pi}{3} \rho_{\oplus} R_{\oplus}^3 = -\frac{GM_{\oplus}m}{r}. \end{aligned} \quad (6.65)$$

这和两个质点之间的引力势能公式完全一致. 因此对于地球以外的任何物体, 完全可以把地球看作是一个处于球心质量为  $M_{\oplus}$  的质点.

再考虑一个情况. 如图6.6(b), 一个空心球, 它的质量  $M$  均匀分布在一个球壳里, 球壳的内半径是  $R_1$  外半径是  $R_2$ . 如果质点  $m$  离球心的距离大于  $R_2$ , 那么它受到的引力势和上面的结果一样, 可以把整个球的质量  $M$  看作是处于球心. 当质点  $m$  离球心的距离小于  $R_1$  时, 我们有

$$\begin{aligned}
 U_G(r) &= - \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} G\rho m \frac{w^2 \sin\theta dw d\theta d\varphi}{\sqrt{r^2 + w^2 - 2rw \cos\theta}} \\
 &= - \int_{R_1}^{R_2} 2\pi G\rho m \frac{w dw}{r} (\sqrt{r^2 + w^2 + 2rw} - \sqrt{r^2 + w^2 - 2rw}) \\
 &= - \int_{R_1}^{R_2} 4\pi G\rho m w dw = -2\pi Gm\rho(R_2^2 - R_1^2). \quad (6.66)
 \end{aligned}$$

这是一个常数. 也就是说在球的空心部分, 引力势能处处相等. 力是势能的梯度, 所以在球的空心部分, 质点  $m$  感受不到任何引力.

牛顿的《原理》有三部分, 其中第三部分有两个版本, 一个更通俗易懂、另一个更数学更严格. 正式出版时, 他选择了后者. 但是第一个版本的手稿也留下来, 在牛顿逝世后单独出版了, 书名是《论世界的系统》(*A Treatise of the System of the World*). 这本书里有一个非常著名的插图 (见图6.7), 被称为牛顿之山, 它描述了一个非常有趣的思想实验: 在地球最高的山上沿水平方向扔石头. 牛顿在图中画出了石头的轨迹会如何随着扔出的速度变化: 扔出的速度越大, 石头会在越远的地方落到地球表面, 最后当扔出速度足够大时, 石头会不再落地而一直围绕地球运动. 如果山特别高, 石头特别大, 那么石头在高速扔出后就会成为一颗地球的卫星. 在现代, 人类不需要高山, 利用强大的火箭已经发射了成千上万颗人造地球卫星.

牛顿之山的意义非常深刻. 首先, 它清楚地展示了地球上常见的自由落体和抛物运动与月亮绕地的运动属于同一类运动, 打破了人类长期持有的错误观点: 天地有别. 其次, 它告诉我们物体运动的轨迹和初始条件紧密相关: 同样的石头、同样的高山和同样的地球, 石头却可以因为不同的初始条件按非

常不同的轨迹运动. 在后面章节我们会看到, 这其实是所有动力学系统的特征: 相同的运动方程可以有非常不同的运动轨迹. 最后, 它演示了地球的第一宇宙速度. 下面我们就来讨论地球的宇宙速度.

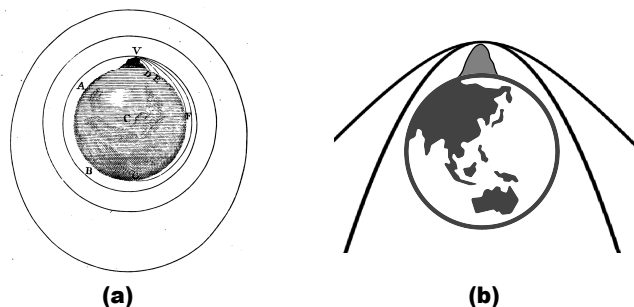


图 6.7: 牛顿之山. 牛顿想象在地球最高的山上有一个人在扔石头, 石头的速度不同, 它的轨迹也不同. (a) 是牛顿的原图; (b) 是对原图的补充, 增加了可能的抛物线和双曲线轨迹.

从牛顿之山可以看到, 当石头的速度足够大时, 它会绕地球运动不再掉落在地面 (这里忽略空气阻力). 地球的第一宇宙速度就是石头为了绕地运动需要具有的最小速度. 忽略高山的高度, 石头感受到的引力是通常的重力  $mg$ , 这个力让石头做匀速圆周运动, 所以第一宇宙速度等于  $v_1 = \sqrt{gR_{\oplus}} = 7.9$  公里/秒. 在牛顿之山的原图中只有椭圆轨道, 但是我们知道当石头的速度特别大, 以至于石头的总能量等于或大于零时, 石头会按抛物线或双曲线运动, 永远离开地球不再回来. 图6.7(b) 画出了可能的抛物线和双曲线轨迹. 让石头永远逃离地球的最小速度  $v_2$  被称为地球的第二宇宙速度, 它显然应该满足

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{M_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = 0. \quad (6.67)$$

所以

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = \sqrt{2gR_{\oplus}} = \sqrt{2}v_1. \quad (6.68)$$

它的具体大小是 11.2 公里/秒. 地球的第三宇宙速度是指一个物体逃离太阳的引力束缚需要的最小速度. 但是这个逃逸速度的估算有些复杂, 并且实际

意义不大，所以这里就不讨论了。

## 6.5 引力讨论

牛顿虽然发现了万有引力，并且利用万有引力很好地解释了很多现象。面对巨大的成功，牛顿却表现出了出奇的清醒，他深刻地认识到了万有引力的一个致命弱点：万有引力是超距相互作用。在一封私人信件中牛顿这样写道，

在没有任何媒介的真空状态下一个物体可以作用于远处的另一个物体，通过真空就可以将作用力从一个物体传递到另一个物体，这在我看来太荒谬了。我相信，任何有哲学思考能力的人都不会接受它。(That one body may act upon another at a distance through a vacuum without the mediation of anything else, by and through which their action and force may be conveyed from one to another, is to me so great an absurdity that, I believe, no man who has in philosophic matters a competent faculty of thinking could ever fall into it.)

我们来解读一下为什么牛顿对他的万有引力会有这个疑虑。

在牛顿的时代，人们已经知道声音的传递是需要媒介的，很多力也是通过媒介传递的。作为一个例子，考虑在一维空间的两个物体  $m_1$  和  $m_2$ ，它们之间连着一根弹簧 (参见图6.8)。一开始，弹簧处于平衡态，两个物体之间没有相互作用力。稍微改变一下  $m_2$  的位置，这时靠近  $m_2$  的那部分弹簧会发生形变，这个形变又会影响到稍微远一些的弹簧，最后一直传递到另外一端，这时  $m_1$  才感受到力的作用。这个传递速度是弹簧中的声速。因此在弹簧中，力的传递不是瞬时的。但是由于声速很大 (固体材料的声速大约是 1000 米/秒)，对于一根 1 厘米长的弹簧，传递的时间大概是 10 微秒，人类不通过仪器无法察觉这么短的时间。但是牛顿的万有引力显然不需要任何媒介，两个物体  $m_1$  和  $m_2$  往那里一放，它们之间就有万有引力，它的大小是

$$F_{12} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}. \quad (6.69)$$

万有引力的传递不需要花费时间，是瞬时的。这可以直接从上面的表达式看出，在公式里我们看不到任何时间的影子。更具体地，我们稍微移动一下  $m_2$ ，让它的位置从  $\vec{r}_2$  变成  $\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 + \delta\vec{r}_2$ 。物体  $m_1$  感受到的力随之发生改变，它的大小变成

$$F'_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \delta\vec{r}_2|}. \quad (6.70)$$

也就是说，当  $m_2$  的位置从  $\vec{r}_2$  变成  $\vec{r}'_2$  时，物体  $m_1$  感受到的力在同一个时刻从  $\vec{F}_{12}$  变为  $\vec{F}'_{12}$ 。从物体  $m_2$  发生位移  $\delta\vec{r}_2$  到物体  $m_1$  感受到力的变化，这里没有传递时间，是瞬时发生的。这类不需要花费时间传递的相互作用被称为超距相互作用。如果自然界存在超距相互作用，那么我们就一定可以利用它将信息在瞬间传到宇宙的任何角落。利用万有引力，我们可以这样做：让物体  $m_2$  的水平移动代表 0，垂直移动代表 1。由于水平移动和垂直移动带来的引力变化是不一样的，所以物体  $m_1$  能接受到这些信息。又由于万有引力是超距的，这些信息是在瞬间从  $m_2$  传递到  $m_1$  的。1861 年和 1862 年，麦克斯韦 (James Clerk Maxwell, 1831 - 1879) 写下了著名的描述电磁相互作用的麦克斯韦方程组。在这里，带电粒子之间是通过电磁场传递相互作用的，不再是瞬时的，而是以一个有限速度—光速—传递。在 1915 年，爱因斯坦建立广义相对论。按照这个理论，引力相互作用同样是通过场来传递，传递速度也是光速。



图 6.8: 两个物体通过弹簧相互作用。当  $m_2$  的位置改变时，它会给弹簧带来形变，只有在这个形变在弹簧中以声速传播到另外一端时， $m_1$  才感受到力的作用。

当被研究物体的速度远小于光速，物体之间的距离又不是很远的时候，引力的传递时间很短，我们可以忽略它，近似认为引力是超距作用。对于弹簧，我们也经常做类似的近似。在上面的讨论中，我们看到对于一根 1 米左右的弹簧，力的传递时间是 1 毫秒左右。这个时间对于很多物理过程是很短的，可以忽略，近似认为弹簧产生的力是超距的。在第四章，我们用

$U(x_1 - x_2) = -k|x_1 - x_2 - l_0|$  描述弹簧的作用势，这个公式里没有时间，表达的是一种超距相互作用。这其实是一个近似。

自然界不存在任何超距相互作用，现在已知的四大基本相互作用都不是超距相互作用。但是自然界存在超距关联。考虑两个物体进行一维碰撞。物体 1 的质量是  $m_1$ ，具有初速度  $v_1$ ；物体 2 的质量是  $m_2$ ，初速度是  $v_2$ 。两个物体相向运动，最后发生碰撞。碰撞后，两个物体具有不同的速度，随着时间会越离越远。当我们测量物体 1 的速度的时候，无论物体 2 已经离我们有多远，我们立刻可以利用动量守恒推算出它的速度。通过碰撞，物体 1 和物体 2 建立了超距关联，如果没有其他事情发生，无论这两个物体相互离得有多远，这种超距关联将永远存在。这种超距关联是相互作用的结果，但是本身不是相互作用，它不能被用来传递信息。

当广义相对论提出后，人们立刻研究了光在重力场作用下的行为，发现了很多有趣的现象，比如光线无法逃脱的黑洞。其实根据牛顿的万有引力也可以预言黑洞的存在。考虑一个球形天体，它的半径是  $R$ ，质量是  $M$ ，那么类似于第二宇宙速度的计算，这个天体的逃逸速度是

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (6.71)$$

如果天体发生塌缩，质量不变但是半径越来越小，这时逃逸速度会越来越大。当半径足够小的时候，逃逸速度会成为光速  $c$ ，这时这个天体就成为了黑洞。这个半径是  $R_c = 2GM/c^2$ 。非常巧，这个结果和广义相对论的结果一致。如果这个天体是太阳， $R_c \approx 3$  公里。

## 习题

**题 6.1** — 牛顿利用微积分的思想和平面几何推导出来了万有引力. 利用现代微积分和角动量概念, 从开普勒三大定律出发推导出万有引力公式.

**题 6.2** — 考虑一个有心力  $F(r) = r^2 e^{-r/r_0}$ , 根据公式 (6.10) 求相应的有心势能  $U(r)$ .

**题 6.3** — 对于太阳-木星这个两体问题, 计算其质心离太阳中心的距离.

**题 6.4** — 将轨迹公式 (6.44) 带入公式 (6.43), 我们得到

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L(1 + \epsilon \cos \theta)^2}{mp^2}.$$

通过对这个方程积分, 求椭圆运动的周期  $T$ , 证明开普勒第三定律.

**题 6.5** — 人在地球上抛出一个物体, 在忽略空气阻力的情况下, 这个物体的运动轨迹是一个抛物线. 由于人抛出的物体的初速度不可能很大, 它的总能量一定是负的, 即  $E < 0$ , 所以它的轨迹应该是一个椭圆. 为什么这两个结果是不矛盾?

**题 6.6** — 考虑一个质量为  $m$  的质点在有心力作用下运动, 有心力是排斥力, 它的具体形式是

$$F(r) = \frac{k}{r^2},$$

这里  $k$  是大于零的常数,  $r$  是质点到固定点的距离.

(1) 推导它的轨迹方程  $r(\theta)$ ; (2) 分析它可能的轨迹形状; (3) 如果有双曲线轨迹, 比较它和万有引力下的双曲线轨迹, 指出它们的重要区别.

**题 6.7** — 如图 6.9(a) 所示, 一个密度均匀的球, 中间有一个球状的空洞. 非空洞区球的质量密度是  $\rho$ , 大球半径是  $R$ , 小球半径是  $r$ . 两个球心之间的距离是  $d$  并且  $r + d < R$ . 考虑一个质量为  $m$  的质点.

(1) 如果质点在大球外, 写出它的受力表达式; (2) 如果质点在小球内, 写出它的受力表达式.



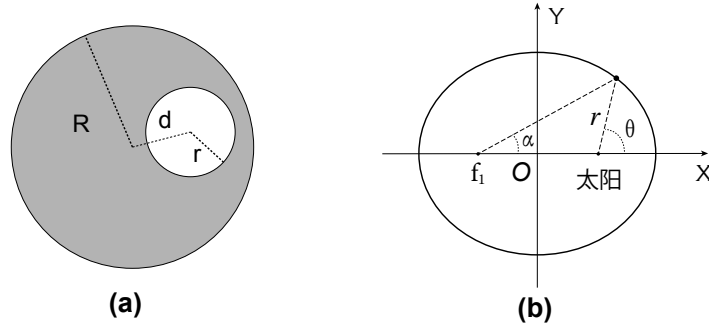


图 6.9: (a) 一个密度均匀的球, 中间有一个球状的空洞; (b) 行星绕日椭圆轨道.

**题 6.8** — 如图6.9(b) 所示是一个行星绕太阳转的椭圆轨道, 太阳处于椭圆右边的焦点. 行星轨道方程是

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

其中  $r$  是行星到太阳的距离,  $\theta$  是行星轨道相对于太阳的夹角.  $\alpha$  是行星相对于另外一个焦点  $f_1$  的夹角. 从角速度的角度看, 椭圆轨道和圆形轨道的区别在于, 行星的角速度  $d\theta/dt$  在近日点大于远日点. 这两处的角速度差别越小, 轨道越接近圆形轨道. 从直觉观察可以看出, 在近日点的附近, 行星相对焦点  $f_1$  的角速度  $d\alpha/dt$  比  $d\theta/dt$  小; 相反, 在远日点的附近, 角速度  $d\alpha/dt$  比  $d\theta/dt$  大. 因此如果站在焦点  $f_1$  处观察行星的运动, 行星的运动看起来更接近匀速圆周运动. 地球绕日的轨道偏心率很小, 即  $\epsilon \ll 1$ . 对于这类偏心率很小的行星轨道, 在二阶近似下, 即忽略所有阶数高于  $\epsilon^2$  的小量, 严格证明站在焦点  $f_1$  处观察行星的运动角速度, 行星的运动看起来更接近匀速圆周运动. 注意: 在计算中, 请将椭圆轨道的参数, 长半轴  $a$ , 短半轴  $b$ , 偏心率  $\epsilon = c/a$ , 以及  $p$  都用  $a$  和  $\epsilon$  表示.