

第三章 牛顿定律

牛顿在 1687 年出版了《自然哲学的数学原理》(*The Mathematical Principles of Natural Philosophy*)。这本书经常被简称为《原理》(*The Principia*)，它标志着经典力学的正式建立。但是这部著作的意义远远超越了经典力学甚至物理。它阐述了人类历史上第一个完整而系统的科学理论，正式宣告了科学的诞生。我们可以旗帜鲜明地大声宣布，《原理》是人类历史上最重要的著作，它是人类文明历史上一个分水岭。从此以后，人类的科学和技术知识开始以指数模式发展和积累，科学技术成为推动社会进步最重要的力量。欧几里得的《几何原本》是人类历史上第一个系统的数学理论。它设立了五条公理，然后从这些公理出发推导出了一系列深刻的几何定理，包括勾股定理。但是它不是一个关于物质世界的理论，不是一个科学理论。或许因为这个原因，人们一下子找不到它的实际应用，《几何原本》差一点遗失在历史的长河里，直到文艺复兴时期才被重新发现并受到重视。



图 3.1: 牛顿 (1642 - 1727).

牛顿深受欧几里得的影响，他试图按照《几何原本》的模式阐述自己的“自

然哲学”理论。在书中，牛顿先定义了物质的量 (quantity of matter)、运动的量 (quantity of motion)、和力等物理量，然后直接列出了关于运动的三大公理或定律 (axioms or laws of motion)¹。

第一定律 如果没有受到力的作用，物体将保持静止或匀速直线运动；

第二定律 物体运动的改变正比于它所受的力，改变的方向和力的方向一致；

第三定律 两个物体的相互作用力总是大小相等方向相反。

这三大定律是牛顿力学的基础。在相对论和量子力学出现以前，人们认为它们适用于宇宙中所有的物体。这和伽利略的运动理论非常不一样，伽利略只研究了一些特殊的运动，比如自由落体和单摆，他的理论非常局限，没有普适性。牛顿建立的是一个完整的物理理论，而伽利略的则不是。这就是牛顿的伟大之处。虽然牛顿三大定律依然出现在各种经典力学的教科书里，但是经过上百年的发展，人们对牛顿三大运动定律的理解和牛顿当时的理解已经有了很多不同。我们下面从现代角度详细讨论这三大定律的内涵。

3.1 牛顿第一定律

考虑一个理想实验。假设宇宙中只有三个没有任何直接相互作用的大箱子，排成一行。箱子里面分别有一个观察者：小方、小李和小邓。相邻箱子之间有压缩的弹簧，弹簧释放后，三个箱子相离而去。最后当弹簧完全释放后，三个箱子不再受到任何力。根据牛顿第一定律，这三个箱子的运动状态将保持不变。对于观察者小方，他所在的左边的箱子是不动的，另外两个箱子以不同的速度向右运动。对于小李，她所在的中间的箱子是不动的，另外两个箱子分别向左和向右运动。对于小邓，他所在的右边的箱子是不动的，另外两个箱子以不同的速度向左运动。从这个具体的例子可以清楚看到，物体的运动状态是相对的，同一个物体的运动速度在不同的观察者眼中是不同的。在一个没有相互作用的宇宙里，所有的物体或者做匀速直线运动或者静止，但是每个物体的速度不是绝对的，它会随观察者而变化²。

¹在《原理》一书里，这三大定律出现在同一章中，这章的题目是 Axioms, or Laws of

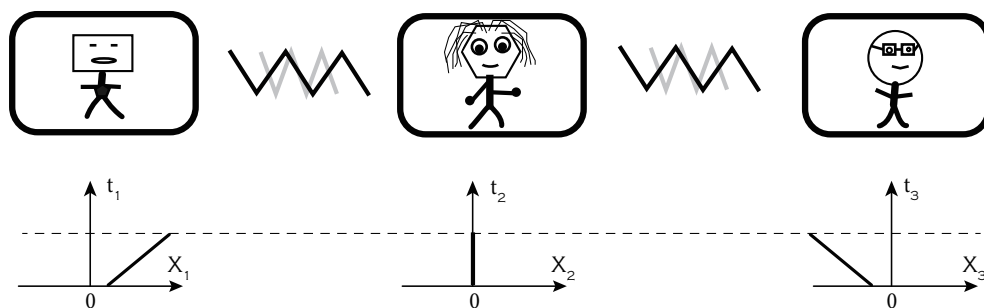


图 3.2: 三个具有不同速度的箱子. 一开始这三个箱子之间有两个压缩的弹簧 (灰色); 弹簧释放后 (黑色), 三个箱子各自具有了不同的速度. 三个箱子里各有一个观察者: 小方、小李和小邓. 他们分别建立了三个时空参照系: K_1 、 K_2 和 K_3 . 三个参照系中的粗线是描述中间盒子运动的世界线.

在日常生活中, 牛顿第一定律的成立并不是显然的. 我们找三个相同的盒子和两个相同的弹簧, 在桌面上做一个和图3.2类似的实验. 中间那个盒子的运动状态确实会保持不变, 左右两个盒子, 它们虽然一开始会向相反的方向移动, 但是最后会停下来. 表面上看起来, 它们的运动确实是由弹簧的弹力造成的, 当弹簧不作用后它们的运动就逐渐停止了. 如果这时我们用力去推其中的一个盒子, 盒子则又会开始运动. 正是基于这些观察经验, 人们很长一段时间都同意亚里士多德的观点, 认为力是运动的原因. 这个结论经不起仔细的推敲. 当弹簧完全释放不再对盒子产生作用力时, 盒子应该立刻停下来, 而实际上盒子是逐渐停下来的. 但是如果你说力不是运动的原因, 那怎么解释最后盒子不动了呢? 造成这种困惑或误解的原因是以前的人不知道摩擦力或阻力的存在. 这个桌面上的实验和图3.2中思想实验有一个重要的不同之处, 桌面上的盒子会感受到桌面的摩擦力和空气的阻力. 当盒子不再受到弹簧的作用力时, 按照牛顿第一定律, 它们本应保持自己的运动状态. 特别是左右两个盒子应该相对桌面分别向左或向右运动, 但是由于摩擦力和空气阻力, 它们会逐渐停下来. 用力来推盒子, 力足够克服摩擦力后, 盒子重新开始运动. 所以牛顿第一定律和生活常识不矛盾.

Motions, 牛顿的三大定律然后以 Law 1, Law 2, Law 3 为名依次表述.

²注意: 两个无相互作用的粒子是不会发生碰撞的.

牛顿不是普通人，他的观察更深刻更具洞察力。他注意到了阻力的存在，意识到了如果没有阻力，盒子一定会一直运动下去。牛顿甚至可能设想了一个实验：如果能让桌面越来越光滑，盒子滑行的距离肯定会越来越远；如果阻力完全消失，盒子的滑行距离就会趋于无穷。可惜牛顿那个时代的实验条件还相当简陋，他无法用气垫和真空等手段来有效降低摩擦和空气阻力，实现他的设想。但这并不重要，重要的是，牛顿注意到了阻力的存在，知道这种力不但不产生运动而且会阻止运动，所以亚里士多德的观点不可能是对的。

牛顿或许还这样思考过，如果亚里士多德是对的，那么会有什么后果呢？对于图3.2中的三个箱子，由于弹簧完全释放后它们不再受任何力，它们会停下来。但是相对于什么停下来呢？如果小方的箱子里有一只勤劳的蜜蜂，它依靠自己翅膀的动力一直在飞来飞去，那么小方的箱子和其他两个箱子相对蜜蜂都在运动，并没有停下来。因此，如果亚里士多德是对的，宇宙中一定存在一个绝对参照物：所有不受力的物体都会相对这个绝对参照物停下来。事实是，宇宙中并不存在这样一个绝对参照物。在亚里士多德生活的时代，人们一定错误地把地球当做了绝对参照物，认为在没有力的作用下所有物体最后会相对地球停下来。牛顿生活的时代，人们已经普遍接受了日心说，知道地球本身在绕太阳不停地运动。对于牛顿来说，绝对参照物是一个不可接受的观点。

牛顿第一定律告诉我们两点：(1) 宇宙中不存在绝对参照物；(2) 在描述物体运动时，必须选择一个参照物，不然我们无法确定物体的运动速度。比如在图3.2的理想实验中，中间的箱子相对小李是静止的，相对其他两位观察者则是分别朝不同的方向运动。最简单的参照物是静止或做匀速直线运动的物体，基于这类参照物建立的时空坐标系被称为惯性参照系。我们以图3.2中的思想实验为例来讨论惯性参照系，以及不同惯性参照系之间的变换。

观察者小方选择自己作为参照物，并建立相应的时空坐标系 \mathcal{K}_1 ，它包括空间轴 x 和时间轴 t （参见图3.2）。在这个参考坐标系里，左边的箱子具有固定

的空间坐标, 处于原点 $x_1 = 0$. 注意, 由于这个实验里的运动是一维的, 为了简单, 我们忽略了另外两个不相关的空间维度. 类似地, 观察者小李和小邓分别建立自己的时空坐标系 \mathcal{K}_2 和 \mathcal{K}_3 . 在 \mathcal{K}_2 中, 小李所在的箱子是静止的, 处于原点 $x_2 = 0$; 在 \mathcal{K}_3 中, 小邓所在的箱子是静止的, 处于原点 $x_3 = 0$. \mathcal{K}_1 、 \mathcal{K}_2 和 \mathcal{K}_3 这样的时空坐标系就是惯性参照系. 为了方便比较, 我们进一步设定, 当两个弹簧完全释放不再对三个箱子产生作用力的那个瞬时是三个参照系, \mathcal{K}_1 、 \mathcal{K}_2 和 \mathcal{K}_3 的共同时间零点, 即 $t_1 = t_2 = t_3 = 0$. 并且在这个时刻, 相邻箱子之间的距离是 s_0 . 另外, 我们假设相对于小李, 小方的箱子以速度 $-v$ 运动, 小邓的箱子以速度 v 运动, 正负号分别表示向右和向左运动.

物体的运动轨迹在时空坐标系会形成一条曲线或直线, 这被称为世界线. 在图3.2中, 我们给出了中间箱子在三个不同时空坐标系中的世界线. 在 \mathcal{K}_2 中, 由于箱子处于原点始终不动, 它的世界线是一条沿时间轴的直线 ($t_2 = t, x_2 = 0$). 由于中间箱子相对于观察者小方向右以速度 v 做匀速直线运动, 在 \mathcal{K}_1 中它的世界线是一条斜直线, 由 ($t_1 = t, x_1 = s_0 + vt$) 描述. 类似地, 在 \mathcal{K}_3 中中间箱子的世界线也是一条斜直线, 不过斜率相反, 由 ($t_3 = t, x_3 = -s_0 - vt$) 描述. 这个例子说明同一个事件在不同的参照系里对应不同的世界线. 我们需要建立这些不同惯性参照系之间的变换关系, 这样我们一旦得到一个参照系里的世界线, 就能得到另外一个参照系里的世界线.

在上面的讨论中我们利用了一个结论: 如果小方相对小李以速度 $-v$ 运动, 那么小李相对于小方以速度 v 运动. 对于一个均匀各向同性的空间, 这个结论在物理上非常明显和合理. 我们现在来严格证明它³.

不失一般性只考虑一维的情况, 这种情况下速度的正负代表速度的方向. 小李相对于小方的速度是 v . 如果小方相对于小李的速度是 $\alpha(v)$, 由于空间各向同性, 那么小李相对于小方的速度应该是 $\alpha(\alpha(v)) = v$. 单纯从数学上考虑, 函数 $\alpha(v)$ 应该是单调的. 假设 $\alpha(v)$ 不是单调的, 那么存在 $v_1 \neq v_2$ 使

³这个证明来自李立捷

得 $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$. 这意味着

$$v_1 = \alpha(\alpha(v_1)) = \alpha(\alpha(v_2)) = v_2. \quad (3.1)$$

自相矛盾. 因此函数 $\alpha(v)$ 是单调的. 满足 $\alpha(\alpha(v)) = v$ 这个条件的单调函数有很多, 比如 $\alpha(v) = v_0 - v$ 和 $\alpha(v) = k/v$. 为了确定它的具体形式, 我们必须考虑更多物理.

我们考虑的是一个物理问题, 两个物体之间的相对速度. 这个问题的结论应该不依赖坐标系的选择. 我们换一个坐标系, 把 x 轴反向. 在这个新坐标系中, 小李相对于小方的速度是 $-v$, 而小方相对于小李的速度是 $-\alpha(v)$. 但是根据前面的设定, 当小李相对于小方的速度是 $-v$ 时, 小方相对于小李的速度应该是 $\alpha(-v)$. 这就要求: $\alpha(-v) = -\alpha(v)$, 即 $\alpha(v)$ 必须是奇函数. 它的一个直接推论是 $\alpha(0) = 0$, 即如果小李相对于小方静止, 那么小方相对于小李静止. 这在物理上非常合理. 另外一个合理的物理要求是, 两个相对速度应该是反号的: 如果 $v > 0$ 时, 那么 $\alpha(v) < 0$. 这进一步要求 $\alpha(v)$ 是单调递减函数.

以上讨论表明, $\alpha(v)$ 是单调递减函数. 现在用反正法证明 $\alpha(v) = -v$. 假设 $\alpha(v) = -u \neq -v$, 那么 $v = \alpha(\alpha(v)) = \alpha(-u) = -\alpha(u)$. 这样

$$(u - v)[\alpha(u) - \alpha(v)] = (u - v)^2 > 0, \quad (3.2)$$

这和 $\alpha(v)$ 单调递减的性质矛盾. 这样我们证明了

相对速度定理: 物体 A 相对于物体 B 的速度是 \vec{v} , 那么物体 B 相对于物体 A 的速度是 $-\vec{v}$.

这个结论虽然很明显, 但是通过上面的证明我们看到, 这个结论无法从纯粹的数学考虑推导出来.

虽然对于三个不同的观察者, 小方、小李和小邓, 三个箱子的运动速度各不相同, 但是所有的箱子或者静止或者在做匀速直线运动. 比如中间的箱子, 相对于小李它的运动状态一直不变; 相对于小方和小邓, 它的运动状态同样

不改变. 想象这样一个宇宙, 里面所有的粒子相对于某个惯性参照系 \mathcal{K} 都在做匀速直线运动或静止. 那么相对于另外一个惯性参照系 \mathcal{K}' , 这些粒子也应该在做匀速直线运动或静止. 为此我们提出一个定律:

惯性定律: 如果一个物体的速度在一个惯性参照系里是不随时间改变, 在另外一个惯性参照系里, 它的速度也是不变的.

惯性定律的一个等价表述是: 一个物体在一个惯性参照系中受力为零在另外一个惯性参照系中受力也为零. 这 and 第八章中的爱因斯坦的相对性原理.

在一个惯性参照系里, 如果一条世界线是直的, 那么 $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ 是常数, 它代表一个匀速直线运动. 反之, 任意匀速直线运动的世界线都是直的 (可以用反证法证明). 所以惯性定律可以等价表达为: 如果一个质点的世界线在一个惯性参照系里是直的, 那么在另外一个惯性参照系里依然是直的. 数学上, 如果一个直角坐标系里的任意直线在另外一个直角坐标系里也是直线, 那么这两个坐标系之间的变换只能是线性变换和平移变换. 考虑两个惯性参照系 \mathcal{K} 和 \mathcal{K}' , 其中 \mathcal{K}' 相对 \mathcal{K} 以速度 v 向右运动. 不失一般性, 设定两个参照系的 x 轴都是沿相对速度 \vec{v} 的方向. 为了简单, 我们进一步设定 \mathcal{K} 和 \mathcal{K}' 具有相同的空间原点和时间原点, 那么这两个参照系间的变换就只能是线性变换

$$t' = g_1(v)x + g_2(v)t, \quad (3.3)$$

$$x' = f_1(v)x + f_2(v)t, \quad (3.4)$$

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (3.5)$$

数学上这样的变换显然有无穷多种. 只有通过物理才能确定 $f_{1,2}$ 和 $g_{1,2}$ 的具体形式.

考察参照系 \mathcal{K}' 中一个静止的质点, 初始时刻它处于原点. 显然, 这个质点在 \mathcal{K}' 中的世界线是 $(t', 0, 0, 0)$. 由于 \mathcal{K}' 相对于 \mathcal{K} 的速度是 v , 这个原点在 \mathcal{K} 中世界线是 $(t, vt, 0, 0)$. 利用公式 (3.4), 我们得到

$$0 = f_1(v)vt + f_2(v)t. \quad (3.6)$$

由于 t 是任意的, 所以 $f_2(v) = -vf_1(v)$. 公式 (3.4) 成为

$$x' = f_1(v)(x - vt). \quad (3.4')$$

考察参照系 \mathcal{K} 中一个静止的质点, 它初始时刻处于原点, 那么它在 \mathcal{K} 中的世界线是 $(\tilde{t}, 0, 0, 0)$. 根据前面的相对速度定理, 这个质点在 \mathcal{K}' 中的速度是 $-v$, 因此它在 \mathcal{K}' 中的世界线是 $(\tilde{t}', -v\tilde{t}', 0, 0)$. 利用公式 (3.3, 3.4), 我们有

$$\tilde{t}' = g_2(v)\tilde{t}, \quad -v\tilde{t}' = -vf_1(v)\tilde{t}. \quad (3.7)$$

从这里我们得到 $g_2(v) = f_1(v)$. 我们不改变 \mathcal{K} 和 \mathcal{K}' 间的相对速度, 只是将它们的 x 轴反向. 这时相对速度是 $-v$, 同时 x 坐标反号, 依据公式 (3.4'), 我们有

$$-x' = f_1(-v)(-x + vt). \quad (3.4'')$$

这个公式成立的条件是 $f_1(v) = f_1(-v)$, 即 $f_1(v)$ 是 v 的偶函数. 注意: 在上面的推导中, 我们只是利用了 \mathcal{K} 和 \mathcal{K}' 间相对速度是 v 这个定义. 依据这个定义和相对速度定理, 在其中一个参照系静止的物体, 在另外一个参照系中的速度是 v 或 $-v$. 除此以外, 我们没有利用任何其他物理. 利用上面的结果, 我们可以将公式 (3.3, 3.4) 改写成

$$t' = g_1(v)x + f_1(v)t, \quad (3.8)$$

$$x' = f_1(v)(x - vt). \quad (3.9)$$

现在还有两个系数, $f_1(v)$ 和 $g_1(v)$, 没有确定. 为了确定这两个系数, 我们需要考虑更多的物理.

伽利略在他的名著《关于两个世界系统的对话》中描述了这样一个场景:

在一艘大船里, 把你自己和一些朋友关在甲板下的主船舱里. 船舱里有一些飞蛾、蝴蝶和其他会飞的小动物. 一只大碗装满了水, 里面有鱼在游动. 吊起一只瓶子, 水一滴一滴正滴入下方的一个窄口容器. 当船静止的时候, 仔细观察小动物们, 它们飞向船舱的不同角落的速度没有什么不同. 鱼儿的游动也没有任何特殊的

方向，水滴则正好滴入容器。你从不同的方位向你朋友扔东西，如果距离一样，你用力相同。你朝不同方向立定跳，跳的距离是差不多的。在你做过这些仔细观察后（如果船是静止的，毫无疑问这些现象就应该这样），你让船动起来。船速的大小不重要，只要速度是均匀的而且船体没有任何晃动。上面提到的现象不会有任何丝毫的改变，你无法从其中的任何一个现象看出船是在动还是静止的。你立定跳远的距离和以前一样；你朝船尾跳的距离不会比朝船头跳的距离更远，尽管这时船速相当快，当你在空中时，船正在朝相反的方向运动。向朋友扔东西时，你在船尾他在船头所花的力气不比你在船头他在船尾来得大。水滴依然和以前一样滴入下面的容器，它们不会偏向船尾，尽管它们在空中的时候船已经向前运动了一段距离。水中的鱼向碗前方游动所费的力气不会比向后方游动所费的力气大，无论鱼饵放在碗边的任何地方，鱼儿游过去都是同样的容易。最后，蝴蝶和飞蛾朝不同方向的飞行也将和以前一样，下面的现象绝不会发生：在空中向船头飞行时，因为要跟上船的速度，它们变得很疲劳最后集中在船尾。从点燃的香火中出来的烟，会上升形成一团静止的烟雾向各个方向均匀散开。

这段精彩的描述有深刻的物理内涵。

伽利略是这样解释为什么你在船舱里感受不到船的速度：船舱中所有物体都共同具有船的速度。也就是说，如果某个物体相对船舱的速度是 \vec{v} ，那么它相对水面的速度其实是 $\vec{v} + \vec{u}$ ，其中 \vec{u} 是船相对水面的速度。这样船舱里所有物体之间的相对速度和船的速度没有关系，所以你在船舱里感受不到船的速度。伽利略的这个解释可以表述成下面这个速度相加定律。

速度相加定律：一个惯性参照系以速度 \vec{u} 相对另外一个惯性参照系运动，如果一个物体在后者中的速度是 \vec{v} ，那么它在前者中的速度是 $\vec{v} + \vec{u}$ 。

速度相加定律显然和我们的日常观察和体验符合。

利用速度相加定律可以帮助我们进一步确定 $f_1(v)$ 和 $g_1(v)$. 为此我们考虑另外一个惯性参照系 \mathcal{K}'' , 它相对 \mathcal{K}' 的速度 u 沿 x 轴. 参照系 \mathcal{K}' 和 \mathcal{K}'' 之间有如下变换

$$t'' = g_1(u)x' + f_1(u)t', \quad (3.10)$$

$$x'' = f_1(u)(x' - ut'). \quad (3.11)$$

结合 \mathcal{K} 和 \mathcal{K}' 之间的变换关系, 我们可以得到参照系 \mathcal{K} 和 \mathcal{K}'' 之间的变换

$$t'' = [f_1(v)g_1(u) + f_1(u)g_1(v)]x + [f_1(u)f_1(v) - vf_1(v)g_1(u)]t, \quad (3.12)$$

$$x'' = [f_1(v)f_1(u) - ug_1(v)f_1(u)]x - (v + u)f_1(v)f_1(u)t. \quad (3.13)$$

另外一方面, 根据速度相加定律, 参照系 \mathcal{K}'' 相对于参照系 \mathcal{K} 的速度是 $v + u$, 这意味着它们之间的变换应该是

$$t'' = g_1(v + u)x + f_1(v + u)t, \quad (3.14)$$

$$x'' = f_1(v + u)[x - (v + u)t]. \quad (3.15)$$

上面两套变换公式应该是等价的, 因此通过对比这两套公式, 我们可以确定 $f_1(v)f_1(u) = f_1(v + u)$ 和 $g_1(v) = 0$. 前一个式子的非零解是 $f_1(v) = e^{\alpha v}$. 由于 $f_1(v) = f_1(-v)$, 我们只能选择 $\alpha = 0$, 即 $f_1(v) = 1$. 这样我们就得到了两个惯性参照系间的变换

$$x' = x - vt, \quad t' = t. \quad (3.16)$$

如果相对速度的方向是任意的, 我们有

$$x' = x - v_x t, \quad y' = y - v_y t, \quad z' = z - v_z t, \quad t' = t. \quad (3.17)$$

这就是伽利略变换. 注意图 (3.2) 中的三个惯性参照系的空间原点在零时刻并不重合, 对它们应用伽利略变换时需要注意这点. 比如, \mathcal{K}_1 和 \mathcal{K}_2 间的伽利略变换是

$$x_1 = x_2 + s_0 + vt_2, \quad t_1 = t_2. \quad (3.18)$$

这里 s_0 是两个参照系原点在 $t_1 = t_2 = 0$ 是的距离.

伽利略变换背后的物理非常显然. 其中的关系式 $t' = t$ 表明, 时间和空间完全没有关系, 和参照系的相对速度也没有关系. 这和我们的日常经验是相符的. 如果你跑步经过一个钟楼, 日常经验告诉你, 大钟的快慢和你的跑步速度以及你和它的位置无关. 物体的长度也和参照系无关. 考虑一把长度为 l_0 的尺子, 相对于参照系 \mathcal{K} 静止. 尺子沿 x 轴放置, 一端的空间坐标是 $(0, 0, 0)$, 另一端是 $(l_0, 0, 0)$. 按照伽利略变换, 这把尺子在惯性参照系 \mathcal{K}' 中的坐标是 $(-vt, 0, 0)$ 和 $(l_0 - vt, 0, 0)$. 两个坐标相减给出尺子在 \mathcal{K}' 中的长度, 即 l_0 , 和 \mathcal{K} 中的长度一样. 这告诉我们长度或物体的大小不随惯性参照系的变化而变化. 这同样和我们的日常经验吻合: 无论你跑得多快多慢, 钟楼的大小或形状是不会改变的.

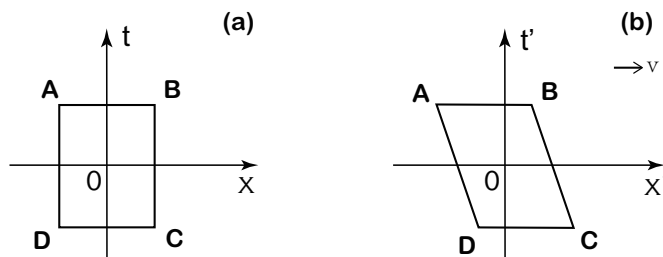


图 3.3: 伽利略变换其实是时空坐标系中的剪切变换. (b) 中的时空参照系 \mathcal{K}' 相对于 (a) 中的 \mathcal{K} 向右以速度 v 运动. \mathcal{K} 中的四个事件, A、B、C 和 D 组成一个长方形. 经过伽利略变换, 这个长方形在 \mathcal{K}' 发生剪切变化, 成为一个平行四边形.

在数学上, 伽利略变换 (3.17) 其实描述了一个沿相对速度 \mathbf{v} 方向的剪切. 图 (3.3) 演示了一个例子. 在这里, 参照系 \mathcal{K}' 相对于 \mathcal{K} 以速度 v 沿 x 轴向右运动. 四个事件 A、B、C 和 D 在参照系 \mathcal{K} 正好构成一个长方形; 在 \mathcal{K}' 中, 这个长方形会向左剪切, 变形为一个平行四边形. 和原来的长方形相比, \mathcal{K}' 中的平行四边形的高度和底边的长不变, 物理上它们分别对应时间和长度不会随惯性参照系的改变而改变.

在相对论出现以前, 人们认为时间是绝对的: 它在均匀地流逝, 和时空中

发生的任何物理事件无关. 物理学家认为这是理所当然的, 时间必须具有这个性质, 甚至都不需要明确指出. 就像在经典力学里, 我们理所当然地认为如果一个质点在时刻 t 处于地点 \vec{r} , 那么在时刻 t 它一定不会处于另外一点 $\vec{r}' \neq \vec{r}$. 这是一个天经地义的事实, 不需要明确假定和指出⁴. 物理学家曾经认为时间是绝对的是同样的天经地义. 显然, 如果时间是绝对的, 不依赖于惯性参照系的速度, 那么我们立刻可以知道公式 (3.3) 中的 $g_1(v) = 0$, $g_2(v) = 1$. 这就是伽利略变换. 在前面的讨论中, 我们发现, 在没有假定时间是绝对的情况下, 利用速度相加定律同样可以得到伽利略变换. 这说明时间绝对假设和速度相加定律是等价的. 但是速度相加定律就没有那么理所当然和显而易见了, 这等于告诉我们时间是绝对的这个假设也不是那么显而易见的. 相对论告诉我们, 事情确实没有那么简单, 时钟的快慢和物体的长度会依赖惯性参照系的速度, 惯性参照系间的变换是洛伦兹变换而不是伽利略变换. 我们在日常生活中感受不到这些效应是由于日常生活中物体的速度远小于光速.

从上面的讨论可以看出, 牛顿第一定律和惯性定律等价. 但是为了推导出不同惯性参照系之间的变换, 我们需要更多的物理. 如果这个物理是速度相加定律, 我们得到伽利略变换. 在第 4 章, 我们将放弃速度相加定律, 讨论如何从惯性定律出发推导出洛伦兹变换.

牛顿第二定律说“物体运动的改变正比于它所受的力”. 根据这个定律, 当受力为零的时候, 物体的运动将不会改变, 也就是保持静止或做匀速直线运动. 所以从表面上看牛顿第一定律是第二定律的特例, 似乎没有必要单独列出. 这个理解是不对的, 至少有两个理由. (1) 从上面的讨论可以看出, 我们完全可以在不知道牛顿第二定律的情况下, 通过思考绝对参照物独立地得到第一定律. (2) 另外, 牛顿第一定律有一个很深刻的推论, 伽利略变换. 我们现在知道, 这个变换独立于具体的运动方程, 它适用于经典力学中的牛顿运动方程, 也适用于量子力学中的薛定谔方程. 也就是说牛顿第二定律失效的时候, 牛顿第一定律依然成立.

⁴根据量子力学, 这是不对的! 一个量子粒子可以同时处于两个不同的地点.

3.2 牛顿第二定律

牛顿第二定律的数学形式是

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (3.19)$$

这里 \vec{F} 是物体所受的力, m 是物体的质量, 而 \vec{a} 是物体的加速度. 这个公式已经成为牛顿力学的标志: 如果你被要求用最简单的符号来描述牛顿力学, 你大概别无选择只能用这个公式. 但是你在牛顿的《自然哲学的数学原理》找不到这个公式. 牛顿甚至都没有说“物体运动的加速度正比于它所受的力”. 他在《原理》一书中对第二定律的原始表述是这样的

运动的改变正比于所受动力; 改变的方向和受力方向一致. (The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed; is made in the direction of the right line in which that force is impressed.)

在这个表述之前, 牛顿先定义了物质的量 (quantity of matter), 认为它等于密度乘以体积. 这大致是我们现在熟悉的质量. 然后, 牛顿定义了运动的量 (quantity of motion), 认为它等于物质的量乘以速度. 这其实是动量. 所以按照牛顿的原始表述, 牛顿第二定律的数学形式应该是这样的

$$\vec{F} = \kappa \frac{d}{dt} m\vec{v}. \quad (3.20)$$

这里 κ 是一个无量纲的比例系数, 我们总是可以通过重新定义力或质量的单位将其设为 1. 我们在后面的章节会看到, 这个公式比公式 (3.19) 更普适. 尽管如此, 我们的讨论还从公式 (3.19) 开始.

公式 (3.19) 涉及了两个我们既熟悉又陌生的概念, 力和质量. 一方面, 人们在日常生活中可以直觉地感觉到力; 不需要任何正规物理训练, 他们就能粗略地比较它的大小和认清它的方向, 并在工作中熟练应用, 比如建筑工地的工人. 同样, 在日常生活中, 人们不但能直接感受到质量的存在还能利用天

平等工具来精确地比较质量的大小. 另外一方面, 我们这是在物理上第一次接触力和质量. 亚里士多德的教训提醒我们直觉经验时常是错的, 对这两个概念我们必须细心分析反复揣摩. 历史也确实就是这样, 自牛顿以来, 物理学家对力和质量的理解已经发生了深刻的变化.

3.2.1 质量

物理学中有些概念有简单明晰的定义, 很容易理解, 比如速度和加速度. 同时物理学中也有很多概念, 它们没有简单明晰的定义, 对它们的理解需要在实际研究过程中仔细揣摩和推敲, 比如在第^三章里讨论过的空间和时间. 力和质量属于后一类概念. 由于下面的讨论中力的方向不重要, 我们将公式 (3.19) 改写成 $F = ma$. 这个公式的意义很清晰: 如果力的大小是一定的, 那么质量 m 越大, 加速度 a 越小; 反之, 质量 m 越小, 加速度 a 越大. 所以质量可以被看作惯性的度量: 质量越大, 惯性越大, 一个物体越不愿意改变自己的运动状态. 这和我们的直觉吻合: 一个巨石很难被移动, 因为它具有很大的质量. 由于这个原因, 人们把 $F = ma$ 中 m 称为惯性质量.

现在考虑一个特例, 自由落体. 伽利略通过理论分析和实验告诉我们, 自由落体的加速度和质量无关. 通过公式 $F = ma$, 数学上这意味着 $a = F_g/m$ 和 m 无关, 这里 F_g 是物体所受的重力. 所以一个物体受到的重力一定正比于它的质量 m , 即 $F_g = mg$, 其中比例系数 g 和质量无关. 这个 g 就是我们熟悉的重力加速度. 对于地球上的物体, 它是一个普适的常数⁵. 伽利略知道自由落体的加速度和质量无关, 但他不知道为什么. 牛顿给出了完美的解答, 他发现任何两个物体之间都存在一种相互吸引力, 它的大小等于

$$F = G \frac{M_g m_g}{r^2}. \quad (3.21)$$

这就是万有引力, 其中的 M_g 和 m_g 分别是两个物体的质量而 G 是万有引力常数. 我们时时刻刻都能感受到的重力就是地球的万有引力. 出现在上式

⁵严格意义上, g 不是一个常数. 原因是地球不是一个完美的球体, 它的密度也不是完全的均匀, 地球各个地点的 g 会有微小的差别. 如果某一个地方的 g 偏离平均值太大, 那可能预示这个地方可能有矿产.

中的质量 M_g 和 m_g 和 $F = ma$ 中的质量是一样的吗？原则上似乎没有任何理由认为它们应该一样。从上面的讨论，我们知道 $F = ma$ 中的 m 是惯性的度量，而公式 (3.21) 中的质量 M_g 和 m_g 是一种物质“荷”。如果物体携带电荷，这些物体之间会有库仑相互作用力。更现代的物理告诉我们，两个携带色荷的粒子之间会有强或/和弱相互作用力。万有引力公式 (3.21) 告诉我们：任何物质都有一种普适的“荷”，相互之间因此存在万有引力。因为这个原因，公式 (3.21) 中质量 M_g 和 m_g 被称为引力质量。原则上，引力质量和惯性质量应该是不同的。但自由落体这样的实例告诉我们，引力质量和惯性质量应该是一样的。假设一个物体的惯性质量是 m ，引力质量是 m_g 。根据万有引力公式 (3.21) 和 $F = ma$ ，我们有

$$G \frac{M_{\oplus} m_g}{R^2} = ma, \quad (3.22)$$

这里 M_{\oplus} 和 R_{\oplus} 分别是地球的引力质量和半径。从上式我们可以得到物体的加速度

$$a = G \frac{M_{\oplus} m_g}{R_{\oplus}^2 m}. \quad (3.23)$$

自由落体告诉我们这个加速度应该是一个常数。由于对于地球上的物体 M_{\oplus} 和 R_{\oplus} 都是常数，所以 m_g/m 必须是一个常数。也就是说引力质量和惯性质量的比是一个常数。物理学家曾经在很长一段时间里没有意识到需要区分引力质量和惯性质量。爱因斯坦在建立广义相对论的过程中，意识到需要在概念上区分引力质量和惯性质量，但是为了得到和实际相符的理论，在物理上又必须假定引力质量和惯性质量是完全等价的，即 $m_g = m$ 。这就是著名的等效原理。

结合这些讨论，我们看到质量有两种定义方式：(1) 质量是所有物质都具有的一种内禀的“荷”，物质因此通过万有引力相互作用；(2) 同时质量是物体惯性的度量。根据更现代的哈密顿力学和量子力学，力不再是一个基本概念，是衍生的。因此，质量是物体惯性的度量其实是一种不符合现代物理的理解。根据现代物理，物体因为运动而具有能量，大家把这种能量称为动能。由于速度和能量的量纲不一样，在用速度表达动能时必须引入一个参数，它就是质量。神奇的是，按照这两种完全不同方式定义的质量是等价的，这是否蕴

含更深刻的物理依然是一个值得深入思考和探讨的问题.

由于物体受的重力总是正比质量, 我们可以设计天平或类似的工具来比较不同物体的质量, 以及设定质量的标准单位 (见图3.4). 在现代国际标准计量系统中, 先利用原子钟定义时间的单位, 秒, 然后利用光速定义长度的单位, 米, 最后利用普朗克常数定义质量单位, 千克. 之所以可以通过普朗克常数来定义千克, 就是因为质量的第二种定义: 它是表达动能必须参数.

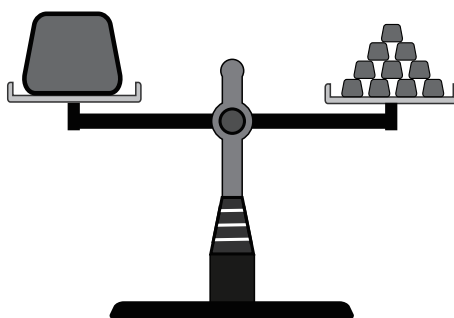


图 3.4: 设定标准质量后, 利用天平原则上标定所有物体的质量. 比如, 如果设定左边物体质量是 1 千克, 那么右边每个小物体的质量就是 100 克.

3.2.2 力

力在日常生活中无处不在. 跳跃时, 你既能感受大腿肌肉伸缩产生的弹力, 又能感受到如影随形的重力; 靠在椅子上你会感到椅背的支撑力; 游泳时你能感受水的浮力; 草坪上逐渐停止滚动的足球让我们确信摩擦力的存在. 日常生活中力的形式实在太多了, 如果不利用现代物理的成果, 我们很难给它一个简单明了的定义. 牛顿一定曾经为此伤透了脑筋. 在《原理》中, 为了给他的第二定律做铺垫, 牛顿先定义了三种力. 他把第一种力称为惰性力(vis inertiae). 牛顿认为任何物体都具有一个内在的惰性力来抗拒外力对它运动状态的改变, 惰性力只有在物体受到其他力时才会起作用. 牛顿把第二种力定义为可以改变物体运动状态的力, 称之为压迫力(impressed force). 牛顿认为作用力有很多不同的来源, 比如敲击和压强. 牛顿把第三种力称为向心力, 他认为向心力是一种将物体拉向或推向某个中心的力. 牛顿认为重力和

磁铁的吸引力都是向心力；一端绑着石头的绳子抡圆了以后，牛顿认为石头感受到的力也是向心力。

牛顿对力的理解在他那个时代肯定是最好的，但是和现代物理对力的理解相比，他的理解显然还很初级并且不够准确。他定义的三种力都存在问题。我们现在知道，自然界并没有惰性力，牛顿似乎在讨论静摩擦力，但我们知道静摩擦力并不是物体内在的属性，它取决和这个物体接触的其他物体以及接触方式。牛顿定义的第二种力和他的第二定律其实形成了循环解释，并没有让我们增加对力的理解。牛顿当然不会没有意识到这一点。只是面对自然界无处不在而又形式多样的力，牛顿实在不知道怎样给它们一个统一的描述，他只能把力当作一个不需要解释的最基本的物理量，作为其他物理现象的起点。根据现在的理解，向心力并不是一种特殊的力。任何力只要改变了物体的运动方向，它或它的某个分量就是向心力。引力在行星绕日运动中扮演了向心力的角色，但是在自由落体中它并不改变物体的运动方向，这种情况下引力就不是向心力。

根据现代物理，自然界存在四种基本相互作用：引力相互作用、电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用。它们主宰了宇宙中所有物体或粒子的运动和变化。其中弱相互作用和强相互作用涉及夸克、缪子、中微子等基本粒子，它们对理解原子核的稳定等物理性质至关重要，但是和我们平常感受到的力没有关系。日常生活中能感受到的力，除了重力来自引力相互作用，其他的力都来自电磁相互作用。有些力很显然是电磁相互作用，比如磁铁的吸力、摩擦后的玻璃棒对纸片的吸引力。更多的力则需要比较深入的分析才能理解它们为什么源于电磁相互作用，比如肌肉收缩、椅背的支撑力、浮力和摩擦力。

众所周知，所有的物体都是由原子构成的。原子则由带正电的原子核和带负电的电子组成，它们之间的库仑相互作用在量子力学的帮助下使原子能稳定存在。原子虽然是电中性的，但是电荷在原子中的分布通常不是均匀的从而具有电偶极矩，中性原子之间会通过偶极相互作用而产生力。另外，原子之间还可以通过共享电子形成共价键、离子键和金属键，进一步形成分子、

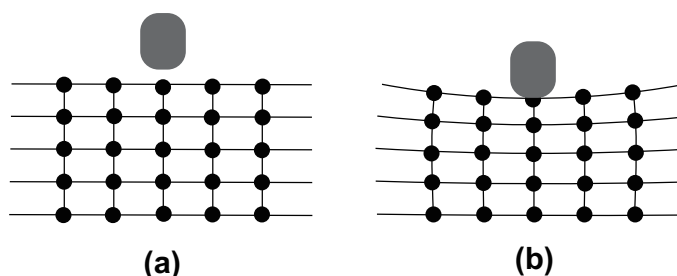


图 3.5: (a) 固体材料具有非常规则的晶格结构. 相邻原子之间通过电磁相互作用在量子力学的帮助下建立了类似弹簧的‘链接’: 被拉伸时, 原子之间相互吸引; 被压缩时, 原子之间相互排斥. (b) 当一个重物压在固体材料上, 固体材料会稍微变形, 形成一个反作用力, 支撑起重物. 日常生活中感受到的很多力就是来自固体材料的形变 (b).

大分子和晶体等. 当我们收缩肌肉和靠在椅背上时, 肌肉或椅背的形状会发生改变. 在微观上, 这对应改变物体中原子或分子之间的距离, 和它们之间的相互作用. 这些相互作用的改变最后产生了我们直接感受到的力 (参见图3.5). 当一个物体处于液体或气体中时, 液体或气体分子会撞向物体, 但分子和物体里的原子或分子距离很近时, 分子会感受到排斥力被散射开. 大量液体或气体分子对物体的冲击在总体上形成了浮力和压力.

利用电磁相互作用和量子力学, 我们原则上可以计算微观原子或分子之间的相互作用, 以及它们对相互之间距离的依赖关系, 最后算出我们在宏观尺度上感受到的力. 但这种计算非常复杂, 即使利用现代最先进的超级计算机, 我们也只能对一些较简单的系统进行这样的计算. 历史的现实更残酷, 在牛顿的《原理》发表后的两百多年时间里, 物理学家根本就不知道原子分子的存在, 不可能开展这样的计算. 有趣的是, 这完全没有阻碍牛顿力学的发展和应用: 在理论上, 物理学家发展了牛顿力学的哈密顿和拉格朗日形式; 在应用上, 工程师们成功地将牛顿力学应用于各类实际问题. 最主要的原因是力的很多性质和微观的细节无关, 物理学家可以在不知道力的微观机制的情况下对力进行定量的描述和测量. 下面我们就以弹簧为例来说明.

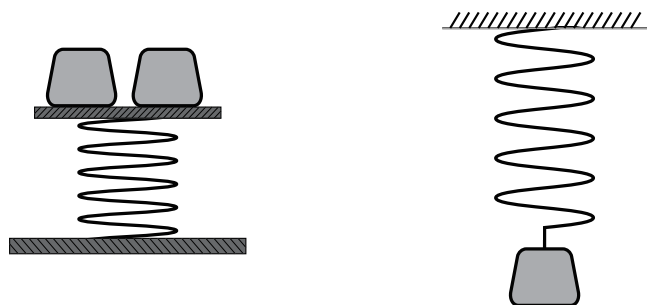


图 3.6: 弹簧. 利用标准重物, 我们可以拉伸或压缩弹簧, 标定弹簧的张力和弹簧被拉伸或压缩长度之间的关系.

我们可以选一些标准重物, 设定每一个标准重物受到的重力是 1 牛顿⁶. 对于某种材料做成的弹簧, 我们可以用这些标准重物来标定该弹簧的伸缩张力. 如果用一个重物, 弹簧被压缩或拉伸了 1 厘米; 用两个重物, 弹簧被压缩或拉伸了 2 厘米; 用三个重物, 弹簧被压缩或拉伸了 3 厘米; 如此等等. 这些结果表明弹簧的劲度系数 $k = 1$ 牛顿/厘米. 这时候, 如果有人用力把弹簧拉伸了 1.7 厘米, 那我们知道这个人用的力是 1.7 牛顿. 类似地可以用这些标准重物去标定其他弹簧或材料. 比如对于一根绳索, 通过测量绳索会被这些标准重物拉伸多长, 我们可以测定它的弹性模量. 另外, 我们也可以用已经标定好的弹簧去标定其他弹簧或材料. 实际使用的弹簧都是由很多不同种类原子和/或分子构成的, 其微观的结构也相当复杂, 以至于我们没有能力从微观出发来了解这些弹簧的力学性质. 图3.6这样简单的演示告诉我们两点: (1) 虽然弹簧的微观结构很复杂, 但其力学性质只需要一个参数就可以描述; (2) 这个参数可以通过简单的实验测定.

⁶这单位-牛顿-不一定是国际单位里的牛顿.

3.2.3 静摩擦力

在日常生活中，一个静止的物体，如果没有受到一个足够大的外力推动，它是不会动的。正是由于这个原因，亚里士多德和他的很多追随者错误地认为力是运动的原因。我们现在知道，这些物体之所以不会轻易移动是因为静摩擦力的存在。

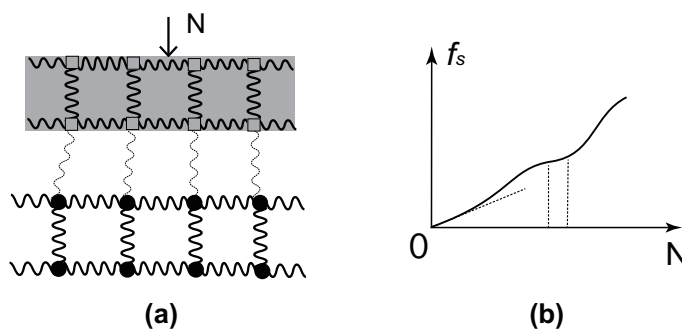


图 3.7: (a) 静摩擦力的微观起源. (b) 物体之间静摩擦力大小和所受压力 N 的关系示意图. 在一个小的区间，这个关系总是可以近似为线性， $f_s = \mu_s N$ ，其中摩擦系数 μ_s 就是这个区间的切线斜率。

在牛顿的时代和以后的两百多年，物理学家不知道世界是由原子和分子构成的，他们对摩擦力的理解和认识完全是基于宏观的经验。通过这些经验，人们发现静摩擦力有一个最大值，只有当作用在一个物体上的外力大于这个静摩擦力时，物体才可能开始运动。现代物理利用原子或分子之间的相互作用力可以从微观上理解静摩擦力的来源，理解它为什么具有这些性质。如图3.7(a)所示。一个物体里面的原子或分子之间通过电磁相互作用在量子力学的帮助下会形成离子键或共价键，紧密地排列在一起形成一个固体。当两个物体接触时，不同物体中原子或分子之间会形成相互吸引的范德瓦尔斯力，这种力没有离子键或共价键强，它来自原子或分子的偶极相互作用。当一个力作用在其中的一个物体上想让物体之间发生相对平移时，这个外力必须克服两个物体之间的范德瓦尔斯力。当它小于范德瓦尔斯力时，平移不会发生。经验告诉我们，物体之间的压力越大，它们之间的静摩擦力也越大。

这也可以用范德瓦尔斯力来理解. 一般情况下, 不同物体原子或分子之间的距离远大于同一物体原子或分子之间的距离. 这种情况下, 距离越近范德瓦尔斯力越大, 所以静摩擦力也越大.

关于最大静摩擦力的大小和物体之间压力有如下的经验公式

$$f_s = \mu_s N. \quad (3.24)$$

这里 μ_s 被称为静摩擦系数. 这个系数会依赖于接触面的光滑程度以及材料的性质. 如果压力不是很大, 这个公式总是近似正确的. 假设小李细致测量了物体甲和物体乙之间最大静摩擦力大小和它们之间压力的关系, 得到了如3.7(b) 所示一条曲线 $f_s(N)$. 当 N 不大时, 这条曲线总是可以用一条直线来近似, 这条直线就是曲线 $f_s(N)$ 在 $N = 0$ 处的切线. 当 N 很大时, 这个线性关系不再成立. 但是在一个小的压力区间内, 我们可以近似认为 $f_s = f_0 + \mu'_s N$.

动摩擦力和静摩擦系数都有阻止运动状态改变的特点, 因此都叫摩擦力, 但是它们之间的区别其实更大. 在下一章, 我们会看到动摩擦力实质上是对物体机械能损耗的一个粗略描述, 它和物体中原子或分子的振动密切相关. 相比之下, 静摩擦力只是范德瓦尔斯力的宏观表现, 不带来能量的损耗, 和物体中原子或分子的振动无关. 由于这个原因, 我们下一章再介绍动摩擦力.

3.2.4 合力

一个物体经常受到多个力的作用, 这几个力联合作用的效果是怎样的? 牛顿在《原理》中列出他的三大定律后, 马上讲解了应该如何处理这种情况. 他的结论用现代物理的语言翻译后大致是这样: 把这些力做向量加法得到合力, 然后将这个合力作为 F 应用到公式 $\vec{F} = m\vec{a}$. 我们来看看牛顿的原始说法⁷.

⁷下面两段讨论中用的符号和牛顿在《原理》中用的符号完全一致.

如图3.8(a)所示, 牛顿考虑了一个物体在空间 A 点受到两个不同的力 \vec{M} 和 \vec{N} . 为了知道这两个力联合作用的效果, 牛顿先分别考虑两个力单独作用的效果. 如果物体只受一个力 \vec{M} , 在一段时间内, 它会从 A 点移动到了 B 点; 如果物体只受一个力 \vec{N} , 在同样一段时间内, 它会从 A 点移动到了 C 点. 牛顿认为, 如果两个力同时作用, 那么物体在这段时间内将会沿着平行四边形 $ABCD$ 的对角线, A 点移动到了 D 点 (见图3.8(b)).

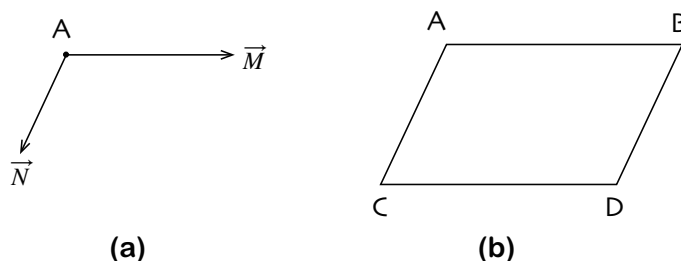


图 3.8: (a) 一个物体受到两个力 \vec{M} 和 \vec{N} . (b) 牛顿的平行四边形: 如果只有 \vec{M} 作用, 在一段时间内, 物体从 A 移到 B ; 如果只有 \vec{N} 作用, 在同一段时间内, 物体从 A 移到 C . 那么两个力同时作用时, 在这段时间内, 物体将沿对角线从 A 移到 D .

牛顿在这段讨论中隐藏了一个假设, 不同的力不互相影响. 从现代物理的角度看, 这个假设和能量相加原理有关. 能量相加原理说的是一个物体如果同时具有动能、引力势能、弹性势能和其他能量 (比如电磁能), 那么它的总能量就是这些能量之和. 我们将在下一章仔细讨论. 有了这个假设, 两个力联合作用的效果也不是一目了然的. 牛顿通过图3.8(b) 巧妙地将这个力的问题转化为大家熟知的空间运动问题. 一个物体即使不受任何外力做匀速直线运动, 它从 A 运动到 D 也可以分解为两个独立的运动: A 到 B 和 A 到 C .

我们来看一个例子, 依然是伽利略的斜板滚球实验. 如图3.9(a)所示, 如果忽视摩擦力等阻力, 球受到了两个力, 重力 \vec{G} 和斜板的支撑力 \vec{N} . 重力 \vec{G} 的情况非常清楚: 它来自地球的万有引力, 它的方向垂直向下, 它的大小等于 mg (m 是滚球质量). 相比之下, 支撑力 \vec{N} 的情况就相当不明晰: 我们

只知道它来自斜板的变形，不知道它的大小和方向。可能很多人根据经验，认为它的方向应该垂直于斜板，大小是 $mg \cos \theta$ 。从微观上看，事情没有这么简单。如图 3.9(b) 所示，由于滚球的重量，它对斜板会形成一个压力，导致接触点附近的斜板发生变形。形变后斜板中原子或分子偏离它们的平衡位置，最后形成一个对滚球的作用力。这个力就是滚球感受到的支撑力。为了准确知道这个力的大小和方向，原则上我们必须知道斜板是由什么原子或分子构成的，它们之间是如何相互作用的，滚球的压力造成了什么样的形变，最后根据这些信息来计算支撑力。这是非常复杂的计算。如果完全不做任何近似，这个计算需要求解一个涉及上千原子的薛定谔方程，几乎超越了现代超级计算机的能力。如果木板是平放在地面，球的压力这时候垂直于木板，对于这种情况，我们可以利用对称性来确定支撑力的方向，简化支撑力大小的计算。严酷的事实是，木板是斜的，没有对称性可以利用，球的压力因此不一定垂直于斜面。

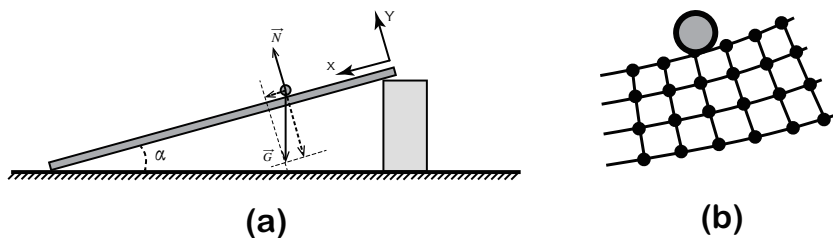


图 3.9: (a) 伽利略斜板滚球实验的受力分析。滚球受两个力，重力和斜板的支撑力。直角坐标系的 x 轴沿斜板向下，原点是斜板的最高点，即滚球的起点。(b) 球和斜板接触点微观结构示意图。

上面说的困难是一个普遍现象。日常生活中碰到的力，除了重力，都有一个很复杂的微观起源，同时我们很难从这个微观起源出发来计算这些力的大小和方向。在牛顿的时代和以后的二百多年，情况更糟糕，物理学家甚至都不知道力有这个微观起源。但事实是，这并没有阻止 $\vec{F} = m\vec{a}$ 的应用。因为很多情况下，我们可以通过经验和实际测量来确定力的大小和方向。这个斜板对滚球的支撑力 \vec{N} ，也可以通过经验来确定。首先， \vec{N} 肯定是大致向上的，它有两个分量：垂直于斜面的分量和平行于斜面的分量。如果忽略任何和能

量损耗有关的效应，可以认为平行于斜面的分量是为了让球滚动。由于我们不考虑球的滚动，只考虑它的质心运动，我们可以完全忽略这个分量，认为 \vec{N} 是垂直于斜面向上的。

为了将多个力做向量加法得到合力，需要根据具体问题选择恰当的坐标系，把每一个力按照坐标系分解，然后再把各个分量求和。对于 3.9(a) 中的实验，一个方便的坐标系是 x 轴沿斜板向下， y 轴垂直斜板向上。在这个坐标系下， \vec{N} 只有 y 分量， \vec{G} 有 x, y 两个分量。由于 y 方向没有任何运动，根据牛顿第二定律，我们有

$$N - G \cos \alpha = 0, \quad (3.25)$$

$$G \sin \alpha = ma. \quad (3.26)$$

这里 a 是滚球的加速度， $G = mg$ 是滚球受的重力大小。利用上面的第一个方程，我们有 $N = mg \cos \alpha$ 。于是我们在没有做任何复杂计算的情况下，得到了支撑力 \vec{N} 的大小。这是一个经验结果，并不普适。我们可以很容易设想一些这个公式不适用的情况。比如斜板是铁的，滚球是一块磁铁。

让我们先把这些复杂的考虑放在一边，继续前进。利用 $a = d^2x/dt^2$ ，上面的第二个公式可以写成

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \sin \alpha. \quad (3.27)$$

求解这个微分方程，我们有 $x(t) = g \sin \alpha t^2 / 2 + v_0 t + x_0$ 。其中 x_0 和 v_0 是两个积分常数。因为初始时刻 $t = 0$ 时，滚球在原点，所以 $x_0 = 0$ 。对 $x(t)$ 求导，我们有 $v(t) = gt + v_0$ ，由于初始时刻 $t = 0$ 时滚球是静止的，所以 $v_0 = 0$ 。最后我们有 $x(t) = g \sin \alpha t^2 / 2$ ，这正是伽利略的结果。

3.3 牛顿第三定律

根据牛顿第三定律，两个物体的相互作用力总是大小相等方向相反。这个定律在早期牛顿力学的发展中起了重要作用，是逻辑上不可或缺的一环，现在这个定律依然是一个简洁的分析问题的工具。但是从现代物理的角度，这

个定律的基本物理意义远逊于其他两个定律, 我们会在本章的最后详细讨论.

考虑一个简单的体系, 如图3.10所示, 有两个紧挨着的物体, 质量分别为 m_1 和 m_2 . 它们被放置在一个光滑的桌面上, 由于物体 m_1 受到一个向右的推力 \vec{F} , 它们一起向右运动. 如果物体 m_1 感受到的来自物体 m_2 的力是 \vec{F}_{21} , 物体 m_2 感受到的来自物体 m_1 的力是 \vec{F}_{12} , 那么根据牛顿第二定律

$$\vec{F} + \vec{F}_{21} = m_1 \vec{a}, \quad (3.28)$$

$$\vec{F}_{12} = m_2 \vec{a}. \quad (3.29)$$

因为两个物体一起运动, 所以上面式子中它们的加速度都是 \vec{a} . 另外, 由于这两个物体一起运动, 我们可以把它们看作一个质量为 $m_1 + m_2$ 单个物体. 这样根据牛顿第二定律, 我们有

$$\vec{F} = (m_1 + m_2) \vec{a}. \quad (3.30)$$

显然, 这个公式要和前面的两个公式一致, 我们必须有

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}, \quad (3.31)$$

即物体 m_1 和物体 m_2 之间的相互作用力大小相等方向相反. 在《原理》这本书中, 牛顿试图提出一个普适的物理理论. 从上面的讨论可以看出, 为了让这个理论体系自洽, 牛顿第三定律是逻辑上不可缺少的一环. 在后面章节的讨论中, 我们会看到当牛顿的这个理论被提升到哈密顿理论后, 牛顿第三定律不再这么重要, 可以被看成一个简单的推论.

在普通的力学中, 牛顿第三定律总是成立的. 但一旦涉及电磁相互作用, 牛顿第三定律经常失效, 根本的原因是电磁场本身也可以携带动量, 它动量的改变不能等效成牛顿第二定律. 这里给两个例子说明一下, 不做深入讨论. 如图3.11(a)所示, 有两个带正电的粒子: 左边的粒子向左运动; 右边的粒子向上运动. 这个体系中, 两个粒子之间由于带正电, 存在库仑排斥相互作用力, 这个力满足牛顿第三定律. 在此之外, 运动电荷还会产生磁场, 因此各自还有可能感受到洛伦兹力. 但是当两个粒子处于图3.11(a)所示的位置时,

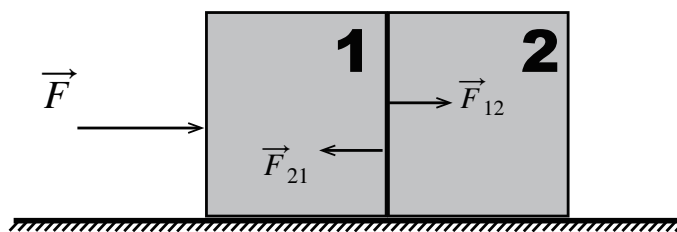


图 3.10: 作用力和反作用力.

左边的粒子会感受到一个向上的洛伦兹力，右边的粒子则感受不到任何洛伦兹力。牛顿第三定律因此失效。

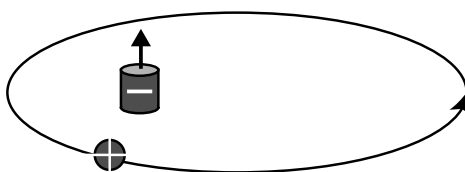


图 3.11: 违反牛顿第三定律的例子。带负电的粒子被固定在空间，并具有一个向上的磁矩；正电荷绕这个负电粒子做椭圆运动。

第二个例子如图3.11(b)所示。带负电的粒子被固定在空间，正电荷绕这个负电粒子做椭圆运动。这两个粒子之间库仑相互吸引满足牛顿第三定律。但是带负电的粒子具有一个向上的磁矩，而正电粒子不带磁矩。正电粒子由于做椭圆运动，会产生一个空间分布不均匀的磁场，负电粒子由于携带磁矩会感受到一个力，而正电粒子只感受到了库仑力。牛顿第三定律在此失效。

3.4 讨论

我们已经介绍完牛顿的三个力学定律（或公理），让我们从历史的角度来探讨一下它们的意义。牛顿第一定律看起来最简单但实质上最深刻。它完全推翻亚里士多德的理论，彻底否定了绝对参照系的存在。由这个定律推演出来的相对性原理和伽利略变换具有非常高的普适性。相对性原理在相对论中依然

成立，而量子力学中的薛定谔方程仍然满足伽利略变换。

牛顿第二定律是牛顿力学的核心，通过求解著名的 $\vec{F} = m\vec{a}$ ，我们可以知道一个物体在空间如何运动。随着物理的发展，这个定律的形式逐渐发生了变化，数学上 $\vec{F} = m\vec{a}$ 被哈密顿运动方程或拉格朗日运动方程取代，物理上力被相互作用势取代。进一步的发展发现，这个定律适用范围有限。当物体运动速度很快，或物体很小时，我们必须用新的理论来描述物体的运动。但非常有趣的是，哈密顿和拉格朗日的理论框架依然适用新理论。

在牛顿力学发展的早期，牛顿第三定律是理论体系中不可或缺的一环。另外，在那个时代，物理学家还不知道原子或分子的存在，不了解引力以外其它力的起源。这种情况下，牛顿第三定律是人们手中一个简洁和有效的工具，用来建立不同力之间的关系。但随着物理的发展，这个定律变得越来越不重要。当牛顿力学具有哈密顿或拉格朗日形式后，牛顿第三定律只是一个简单的推论，并不需要单独列出。

3.5 抛物运动和单摆运动

伽利略曾经仔细研究过两个简单而典型的运动，抛物运动和单摆运动。我们用它们来演示如何利用牛顿第二定律获得物体运动的轨迹。利用 $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$ ，我们将牛顿第二定律写成

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}). \quad (3.32)$$

在一个直角坐标系里，上面的方程等价于三个方程

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x(x, y, z), \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y(x, y, z), \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z(x, y, z). \quad (3.33)$$

这里 F_x 、 F_y 和 F_z 分别是力 \vec{F} 的三个分量。由于这些方程左边是时间的二阶导数，它们被称为二阶微分方程。物体的运动轨迹 $\vec{r}(t)$ 就是这些微分方程的解。

3.5.1 抛物运动

日常生活中我们经常碰到抛物运动, 比如运动员投出的篮球和小孩扔出的小石块. 在这些抛物运动中, 物体的形状可以被忽略被简化为一个质量为 m 的质点, 它有一个初速度 \vec{v}_0 . 在整个运动过程中, 我们忽略空气阻力, 物体只受到重力的作用. 针对这些特点, 我们建立如图3.12(a) 所示的直角坐标系: z 轴的正方向和重力方向相反, x 轴沿水平方向, y 轴垂直纸面向里. 另外, 坐标系的原点是物体的初始位置. 在这个坐标系下, 按照牛顿第二定律我们有

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad (3.34)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad (3.35)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg. \quad (3.36)$$

物体的初始位置是 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, 初始速度没有 y 分量, 即 $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0z}\vec{k}$.

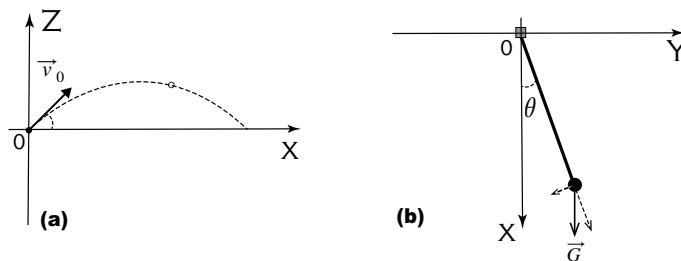


图 3.12: (a) 抛物运动, 物体的初速度是 \vec{v} ; (b) 单摆, 摆体和支点之间是一根非常轻的不会变形的杆子.

上面三个微分方程的解分别是

$$x(t) = a_1 t + b_1, \quad y(t) = a_2 t + b_2, \quad (3.37)$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + a_3 t + b_3. \quad (3.38)$$

其中的参数 $a_{1,2,3}$, $b_{1,2,3}$ 在数学上被称为积分常数. 通过直接计算可以验证, 无论这些参数取什么值, 上面的三个函数都满足各自的微分方程. 为了确定这些参数, 我们必须利用物体的初始位置和速度. 对于初始时刻 $t = 0$, 我们从公式 (3.38) 可以得到 $z(t = 0) = b_3$. 因为物体初始时刻 $z_0 = 0$, 我们确定 $b_3 = 0$. 对时间求导, 我们有 $v_z = dz/dt = -gt + a_3$. 因为物体 z 方向的初速度是 v_{0z} , 我们确定 $a_3 = v_{0z}$. 类似地, 我们可以确定 $a_1 = v_{0x}$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$ 和 $b_2 = 0$. 所以方程的解是

$$x(t) = v_{0x}t, \quad y(t) = 0, \quad (3.39)$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t. \quad (3.40)$$

这个解告诉我们物体在 y 方向没有运动, 一直在 xz 平面内运动. 也就是说, 抛物运动实质是一个二维运动. 另外从上面的公式我们可以消去时间 t 得到

$$z = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x. \quad (3.41)$$

这是物体在空间的运动轨迹, 大家熟悉的抛物线. 这应该就是抛物线这个名词的来源.

3.5.2 单摆运动

单摆运动中, 在非常严格的意义上摆长会随时间变化, 因为摆杆的张力会随时间变化. 但是这个变化非常微小, 完全可以忽略. 另外, 如果摆动时间不是很长, 空气的阻力也可以忽略. 由于摆长不变, 单摆离支点的距离是常数, 这种情况下, 极坐标系用起来非常方便. 如图 3.12(b) 所示, 极坐标系的原点是支点, 垂直向下的方向是参考方向, 偏角向右为正向左为负.

单摆受到两个力, 重力和杆子的张力. 杆子的张力沿径向, $\vec{T} = -T\vec{e}_r$. 重力既有径向分量又有切向分量, $\vec{G} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$. 利用公式 (2.25), 我们有如下微分方程

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = mg \cos \theta - T, \quad (3.42)$$

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = -mg \sin \theta. \quad (3.43)$$

因为摆长不变 $r = l_0$, 所以 $d^2r/dt^2 = dr/dt = 0$, 上面的微分方程可以进一步简化为

$$ml_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = T - mg \cos \theta, \quad (3.44)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l_0} \sin \theta. \quad (3.45)$$

显然第二方程可以独立于第一个方程求解.

方程 (3.45) 有两个特殊解. 让方程的两边都等于零, 我们有两个解 $\theta_1 = 0$ 和 $\theta_2 = \pi$. 物理上, 它们分别对应单摆停在最低点和最高点完全不动, 这时单摆所受合力等于零. 这种解被称为不动点, 有时候也被称为平衡点. 不动点有两类, 稳定和不稳定. 对于稳定的不动点, 当系统受到小的扰动后, 系统会一直在不动点附近振动; 对于不稳定的不动点, 当系统受到小的扰动后, 系统会偏离不动点越来越远. 我们先分析不动点 $\theta_1 = 0$. 令

$$\theta = \theta_1 + \delta\theta = \delta\theta, \quad (3.46)$$

其中 $\delta\theta \ll 1$, 代表单摆相对不动点 $\theta_1 = 0$ 的微小偏离. 代入方程 (3.45) 并对方程右边进行泰勒展开

$$\frac{d^2\delta\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l_0} \sin \delta\theta = -\frac{g}{l_0} \left[\delta\theta + \frac{1}{6}(\delta\theta)^3 + \dots \right] \quad (3.47)$$

忽略高阶小量我们有

$$\frac{d^2\delta\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{l_0} \delta\theta. \quad (3.48)$$

这个方程的解是

$$\delta\theta = a \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l_0}}t + \phi\right). \quad (3.49)$$

其中的两个参数 a 和 ϕ 由初始位置和速度决定. 无论这两个参数如何, 因为正弦函数是有界的, 这个解表示质点会在不动点附近振动. 所以这个不动点是稳定的.

对于另外一个不动点 $\theta_2 = \pi$, 我们令

$$\theta = \theta_2 + \delta\theta = \pi + \delta\theta, \quad (3.50)$$

代入方程 (3.45) 并对方程右边进行泰勒展开

$$\frac{d^2\delta\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l_0} \sin(\pi + \delta\theta) = \frac{g}{l_0} \left[\delta\theta + \frac{1}{6}(\delta\theta)^3 + \dots \right] \quad (3.51)$$

忽略高阶小量我们有

$$\frac{d^2\delta\theta}{dt^2} \approx \frac{g}{l_0} \delta\theta. \quad (3.52)$$

这个方程的解是

$$\delta\theta = a_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l_0}}t} + a_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l_0}}t}. \quad (3.53)$$

假设我们让单摆偏离不动点 $\theta_2 = \pi$ 一个很小的角度 $\delta\theta_0$, 然后释放. 这对应着初始位置为 $\delta\theta_0$, 初始角速度为 0. 由此我们可以确定 $a_1 = a_2 = \delta\theta_0/2$. 最后的解是

$$\delta\theta = \frac{\delta\theta_0}{2} (e^{\sqrt{\frac{g}{l_0}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{l_0}}t}). \quad (3.54)$$

由于第一项会随着时间指数增长, 单摆会很快远离不动点 $\theta_2 = \pi$, 因此这个不动点是不稳定的.

在上面的讨论中我们没有考虑可能的阻力, 阻力对稳定不动点和不稳定不动点的影响是不一样的. 对于稳定不动点, 由于阻力, 围绕稳定不动点的振动不会一直持续下去, 系统最后会停在稳定不动点. 对于不稳定不动点, 除非阻力很大, 不然它不会阻止系统偏离不动点. 建筑师设计建筑时, 他们不但需要让各个部分的受力平衡 (即合力为零), 让建筑处于不动点, 而且需要让这些不动点稳定.

单摆运动的一般解可以这样求得. 在方程 (3.45) 两边乘以 $d\theta/dt$

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l_0} \sin\theta \frac{d\theta}{dt}. \quad (3.55)$$

积分后有

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{g}{l_0} \cos\theta = C. \quad (3.56)$$

右边的常数 C 由初始条件决定. 如果一开始把单摆拉到偏角 $|\theta_0| < \pi/2$ 然后释放, 那么 $C = -g \cos\theta_0/l_0 < 0$. 从上式可以解得

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l_0}} t. \quad (3.57)$$

将左边的积分分为两部分,

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} + \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (3.58)$$

右边的第一个积分是 $-\sqrt{2}\text{sn}^{-1}(1, k)$, 第二个积分是 $\sqrt{2}\text{sn}^{-1}(\sin \xi, k)$, 其中 $k^2 = (1 - \cos \theta_0)/2$,

$$\xi = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \theta_0}}. \quad (3.59)$$

最后我们得到

$$\cos \theta = 1 - (1 - \cos \theta_0) \text{sn}^2 \left[\sqrt{\frac{g}{l_0}} t + \text{sn}^{-1}(1, k), k \right]. \quad (3.60)$$

其中 sn 是椭圆正弦函数, 它是一个周期函数. 如果 $C > 0$, 单摆会转到最高点, 这种情况下的解依然是一个周期函数.

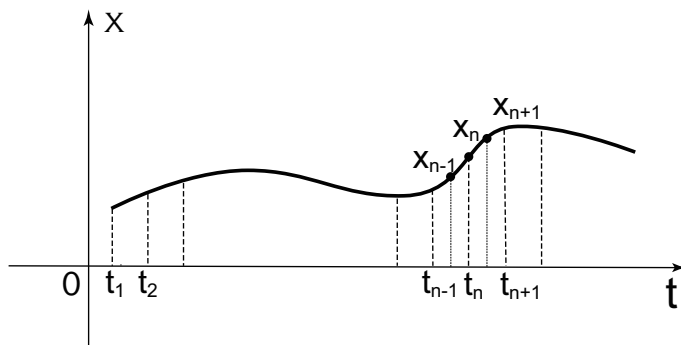


图 3.13: 一维运动的离散化.

上面两个例子演示了牛顿力学描述一个物体或体系运动的基本步骤: 首先确定它的受力情况 $\vec{F}(\vec{r})$, 根据牛顿第二定律写下它的运动方程 (3.32), 然后求解这个方程. 在上面的两个例子, 我们看到方程 (3.32) 的解中有两个未定的常数, 需要通过物体的初始位置和速度来确定. 这是一个普遍的特征. 在数学上, 任何一个关于时间的二阶微分方程, 它的解一定有两个未定常数, 而运动方程 (3.32) 正是一个时间的二阶微分方程.

我们以一维运动为例来解释为什么一个关于时间的二阶微分方程的解一定有两个未定常数. 将运动时间均分为很多小段, 每段长 δt (见图3.13) 根据导数的定义, 时刻 $t_{n-1} + \delta t/2$ 处的一阶导数近似等于

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_{n-1} + \delta t/2} \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{\delta t}. \quad (3.61)$$

这里 $x_n = x(t_n)$. 类似地, 在时刻 $t_n + \delta t/2$ 处的一阶导数近似等于

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n + \delta t/2} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{\delta t}. \quad (3.62)$$

这样时刻 t_n 处的二阶导数近似等于

$$\left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_n} \approx \frac{\frac{x_{n+1} - x_n}{\delta t} - \frac{x_n - x_{n-1}}{\delta t}}{\delta t} = \frac{x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n}{\delta t^2}. \quad (3.63)$$

所以运动方程 (3.32) 的一维形式可以近似为

$$m \frac{x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n}{\delta t^2} = F(x_n). \quad (3.64)$$

这是关于数列 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 的递推关系. 为了确定这个数列 $\{x_n\}$, 我们必须知道数列中的两个数, 比如 x_1, x_2 . 这就是前面讨论的两个初始条件.

对于抛物和单摆, 它们的初始条件是人设定的: 人或某一个机器在一个确定的空间位置, 以一个确定的速度抛出物体; 人或某一个机器把单摆拉离平衡位置然后释放. 这些初始条件和运动方程决定了物体的运动轨迹. 牛顿利用自己发现的万有引力解释了行星的轨迹为什么是椭圆的并满足开普勒的三大定律. 但是问题是, 是谁设定了这些行星的初始位置和速度, 使得它们具有现在的运行轨道? 非常遗憾的是, 牛顿最后认为是上帝设置了这些初始条件. 现在天文学家已经大致知道行星初始条件的来源: 某些宇宙尘埃. 它们经过长期演化和聚集, 最终形成这些行星, 并让每一个行星获一个特定的位置和速度. 但问题是, 我们可以继续问下去, 这些宇宙尘埃最初的状态是谁定的, 最后我们不得不问, 宇宙的初始条件是谁设定的呢? 现在没有人知道这个答案. 一个可能的答案是, 所有的初始条件都存在, 每一个初始条件对应一个不同的世界, 这些不同的世界平行存在, 我们人类只是生活在其中的

一个世界里. 在经典物理中, 这些平行的世界必须存在于不同的时空中; 但是在量子力学中, 由于态叠加原理, 所有这些不同的平行世界可以存在于同一个时空中.

习题

题 3.1 — 在推导伽利略变换 (3.17) 的过程中, 我们得到了一个数学关系, $f_1(u)f_1(v) = f_1(u+v)$. 证明: 如果 $f_1(u)$ 是一个非零的连续函数, 那么 $f_1(u) = e^{\alpha u}$, 其中 α 是任意实数.

题 3.2 — 有三个惯性参照系 \mathcal{K}_1 、 \mathcal{K}_2 、和 \mathcal{K}_3 : \mathcal{K}_2 相对于 \mathcal{K}_1 向右以速度 v 运动, \mathcal{K}_3 相对于 \mathcal{K}_2 向右以速度 u 运动. 假设有一个新的速度相加定律, 根据这个新定律, \mathcal{K}_3 相对于 \mathcal{K}_1 的速度 w 是

$$w = v + u + \frac{u^2 v^2 (u + v)}{c^4}$$

其中 c 是一个很大常数, 具有速度的量纲. 证明这个速度相加定律和牛顿第一定律相互矛盾. (提示: 有两种途径得到 \mathcal{K}_1 和 \mathcal{K}_3 之间的变换, 比较这两种途径得到的变换.)

题 3.3 — 假设一个宇宙是按照亚里士多德力学运行的, 也就是说这个宇宙中亚里士多德第二定律

$$\vec{F} = m\vec{v}$$

成立. 注意这里的 m 不具有质量的量纲. 为了得到一个逻辑自洽的亚里士多德力学, 亚里士多德第一定律和第三定律该如何表述? 如果你觉得为了使整个理论自洽需要更多的定律, 请列出这些定律, 并说明理由. 当然也有可能只需要两个定律, 比如亚里士多德第一定律和第二定律, 第三定律是不需要的, 如果是这样, 请说明理由.

题 3.4 — 在一个垂直放置的光滑圆环上有两个质点 m_1 和 m_2 , 它们之间有一条不可伸长的绳子连接. 如图 3.14 所示, 系统处于平衡, 即两个质点相对于圆环静止. 这时, 绳子所对的圆心角是 α , 绳子和垂直线夹角为 β . 请给出 m_1 , m_2 , α 和 β 之间满足的关系.

题 3.5 — 考虑一个质点的抛物运动 (忽略空气阻力). 建立和图 3.12 中一样的直角坐标系: 垂直方向是 z 轴, 水平方向是 x 轴. 如果它时刻 t_1 的坐标

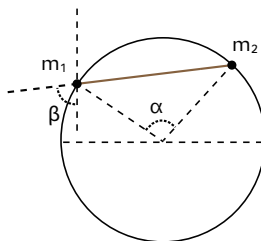


图 3.14: 在一个光滑的圆环上的两个质点.

是 (x_1, z_1) , 时刻 t_2 的坐标是 (x_2, z_2) , 求它的运动轨迹方程, 以及它在时刻 t_1 和时刻 t_2 垂直方向的速度.

题 3.6 — 考虑一个弹簧振子, 它满足下面的运动方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx,$$

其中 x 是偏离平衡位置的位移, m 是振子质量, k 是弹簧系数. 如果它在时刻 t_1 的速度是 v_1 , 在时刻 t_2 的速度是 v_2 , 求它的运动轨迹方程.

题 3.7 — 有一个质量为 m 的质点, 它感受到的势能是 $U(r) = -u_0 e^{-r/r_0}$, 其中 r 是质点离原点的距离, $u_0 > 0$ 和 $r_0 > 0$ 是常数. 质点不受任何其他力. (1) 如果质点在三维空间运动, 在直角坐标系下写下质点的微分运动方程; (2) 如果质点在二维空间运动, 在极坐标系下写下质点的微分运动方程.

题 3.8 — 考虑一个单摆在不稳定不动点 $\theta_2 = \pi$ 附近的运动. 它的运动方程近似为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{g}{l_0} \theta,$$

这里 θ 是单摆偏离不动点的角度. 它的通解是

$$\theta = a_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l_0}} t} + a_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l_0}} t}.$$

假设在 $t = 0$ 时刻, 单摆的偏角是 θ_0 , 单摆的角速度是 ω_0 . 问 θ_0 和 ω_0 取什么值的时候, 通解中的 $a_1 = 0$.

题 3.9 — 在一维空间中有一个质量为 m 的质点，它的势能是

$$U(x) = \alpha x^4 - \beta x^2.$$

其中 α 和 β 都是正的常数. 求这个质点的不动点解并分析它们的稳定性.