ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI TẬP
MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

KHOA: KHOA HỌC MÁY TÍNH

HOMEWORK #02: PHÂN TÍCH GIẢI THUẬT ĐỆ QUY

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

1. Nguyễn Đức Anh Phúc – 20520276 (trưởng nhóm)
2. Trương Thành Thắng – 20521907
3. Ngô Văn Tấn Lưu – 20521591
4. Huỳnh Viết Tuấn Kiệt – 20521494

02.01 Thành lập phương trình đệ quy

a. Gửi ngân hàng 1000 USD, lãi suất 12%/năm. Số tiền có được sau 30 năm là bao nhiêu?

Gọi $T(n)$ là số tiền có được sau n năm

$$T(n) = \begin{cases} 1000 & nếu\ n = 0 \\ 1{,}12T(n-1) & nếu\ n > 0 \end{cases}$$

$$T(n) = 1{,}12[1{,}12T(n-2)] = 1{,}12^2T(n-2)$$

……

$$T(n) = 1{,}12^iT(n-i)$$

$$T(n) = \begin{cases} 1000 & nếu\ n = 0 \\ 1{,}12^iT(n-1) & nếu\ n > 0 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $n - i = 0 \rightarrow i = n$

Khi đó:

$$T(n) = 1{,}12^nT(0) = 1{,}12^n.1000$$

Số tiền có được sau 30 năm là:

$$T(30) = 1{,}12^{30}.1000 = 29959{,}92212\ (USD)$$

b.

```
long Fibo(int n)
{
        if(n==0 || n==1)
                return 1;
        return Fibo(n-1) + Fibo(n-2);
}
```

Gọi $T(n)$ là số tác vụ cơ bản được thực thi trong thuật toán trên

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & nếu\ n = 0 \\ c_2 & nếu\ n = 1 \\ T(n-1) + T(n-2) & nếu\ n > 1 \end{cases}$$

c.

```
public int g(int n) {
		if(n==1)
				return 2;
		else
				return 3*g(n/2) + g(n/2) + 5;
}
```

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{nếu } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + c_2 & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + c_2\right] + c_2 = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + (1+2)c_2$$

$$T(n) = 4\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + c_2\right] + (1+2)c_2 = 8T\left(\frac{n}{8}\right) + (1+2+4)c_2$$

$\dots\dots$

$$T(n) = 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + \left(2^i - 1\right)c_2$$

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{nếu } n = 1 \\ 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + \left(2^i - 1\right)c_2 & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thức khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$

Khi đó:

$$T(n) = 2^{\log_2 n}T(1) + \left(2^{\log_2 n} - 1\right)c_2$$

$$T(n) = nc_1 + (n-1)c_2$$

d.

```
long xn(int n)
{
		if (n==0) return 1;
		long s=0;
		for (int i=1; i<=n; i++)
				s=s+i*i*xn(n-i);
		return s;
}
```

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & n = 0 \\ T(n-1) + T(n-2) + \cdots + T(0) + c_2 & n > 0 \end{cases}$$

Mà $T(n-1) = T(n-2) + T(n-3) + \cdots + T(0) + c_2$

$T(n) = 2T(n-1)$

$T(n) = 2[2T(n-2)] = 4T(n-2)$

$T(n) = 4[2T(n-3)] = 8T(n-3)$

……

$T(n) = 2^i T(n-i)$

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & nếu\ n = 0 \\ 2^i T(n-i) & nếu\ n > 0 \end{cases}$$

Quá trình này dừng khi: $n - i = 0 \rightarrow i = n$

Khi đó:

$T(n) = 2^n T(0) = 2^n c_1$

e.

```
waste(n) {
        if (n==0) return 0;
        for (i=1 to n)
                for (j=1 to i)
                        print i, j, n;
        for (i=1 to 3)
                waste(n/2);
}
```

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & n = 0 \\ 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n(n+1)}{2} + c_2 & n \geq 1 \end{cases}$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n(n+1)}{2} + c_2$$

$$T(n) = 3\left[3T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} + c_2\right] + \frac{n(n+1)}{2} + c_2$$

$$= 9T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\right)n^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\right)n + (1+3)c_2$$

$$T(n) = 9\left[3T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{\frac{n}{4}\left(\frac{n}{4}+1\right)}{2} + c_2\right] + \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\right)n^2 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\right)n + (1+3)c_2$$

$$= 27T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}\right)n^2 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)n + (1+3+9)c_2$$

……

$$T(n) = 3^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k n^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k n + \sum_{k=0}^{i-1} 3^k c_2$$

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & n = 0 \\ T(n) = 3^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k n^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k n + \sum_{k=0}^{i-1} 3^k c_2 & n > 0 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $i = \log_2 n + 1$

Khi đó:

$$T(n) = 3^{\log_2 n+1} T(0) + \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n}}{1-\frac{3}{4}} n^2 + \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n}}{1-\frac{3}{2}} n + \frac{1-3^{\log_2 n}}{1-3} c_2$$

$$T(n) = 3n^{\log_2 3} c_1 + 2\left(1 - n^{\log_2 3-2}\right)n^2 - \left(1 - n^{\log_2 3-1}\right)n - \frac{1-n^{\log_2 3}}{2} c_2$$

$$T(n) = 3c_1 n^{\log_2 3} + 2n^2 - 2n^{\log_2 3} - n + n^{\log_2 3} - \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_2 n^{\log_2 3}$$

$$T(n) = 2n^2 + \left(3c_1 + \frac{1}{2}c_2 - 1\right)n^{\log_2 3} - n - \frac{1}{2}c_2$$

f.

```
Draw(n) {
        if (n<1) return 0;
        for (i=1; i<=n; i++)
                for (j=1; j<=n; j++)
                        print (“*”);
        Draw(n-3);
}
```

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & n < 1 \\ T(n-3) + n^2 + c_2 & n \geq 1 \end{cases}$$

$$T(n) = T(n-3) + n^2 + c_2$$

$$T(n) = [T(n-6) + (n-3)^2 + c_2] + n^2 + c_2$$

$$T(n) = T(n-6) + 2n^2 - 6n + 9 + 2c_2$$

$$T(n) = [T(n-9) + (n-6)^2 + c_2] + 2n^2 - 6n + 9 + 2c_2$$

$$T(n) = T(n-9) + 3n^2 - (6-12)n + (3^2 + 6^2) + 3c_2$$

……

$$T(n) = T(n-3i) + in^2 - n\sum_{k=0}^{i-1} 6k + \sum_{k=0}^{i-1}(3k)^2 + ic_2$$

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{nếu } n < 1 \\ T(n-3i) + in^2 - n\sum_{k=0}^{i-1} 6k + \sum_{k=0}^{i-1}(3k)^2 + ic_2 & \text{nếu } n \geq 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $n - 3i = 0 \rightarrow i = \frac{n}{3}$

Khi đó:

$$T(n) = T(0) + \frac{1}{2}n^3 - 6n.\frac{\left(\frac{n}{3}-1\right)\frac{n}{3}}{2} + 9\frac{\left(\frac{n}{3}-1\right)\frac{n}{3}\left(\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}\right)}{6} + \frac{n}{3}c_2$$

$$T(n) = c_1 + \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{1}{9}n^3 - \frac{5}{18}n^2 - \frac{1}{6}n + \frac{1}{3}c_2 n$$

$$T(n) = \frac{5}{18}n^3 + \frac{13}{18}n^2 + \left(\frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{6}\right)n + c_1$$

g. Gọi $T(n)$ là số phép cộng cần thực hiện khi gọi $Zeta(k)$. Hãy thiết lập công thức truy hồi cho $T(n)$

```
Zeta(n) {
        if (n==0) Zeta=6;
        else {
                k=0;
                Ret=0;
                while (k<=n-1) {
                        Ret=Ret+Zeta(k)
                        k=k+1;
                }
                Zeta=Ret;
        }
}
```

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & n = 0 \\ T(0) + T(1) + T(2) + \cdots + T(n-1) + c_2 & n \geq 0 \end{cases}$$

Mà $T(n-1) = T(0) + T(1) + \cdots + T(n-2) + c_2$

$T(n) = 2T(n-1)$

$T(n) = 2[2T(n-2)] = 4T(n-2)$

……

$T(n) = 2^i T(n-i)$

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{nếu } n = 0 \\ 2^i T(n-i) & \text{nếu } n > 0 \end{cases}$$

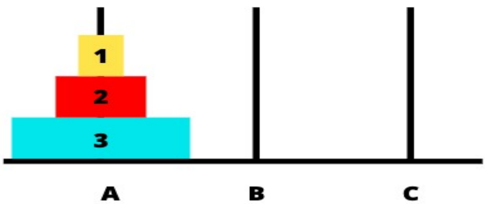
Quá trình kết thúc khi: $n - i = 0 \rightarrow i = n$

Khi đó:

$T(n) = 2^n T(0) = 2^n c_1$

h. Cho bài toán Tháp Hà Nội như sau:

Mô tả bài toán: Có 3 cột được đặt tên là A, B, C. Cột A hiện đang gắn n đĩa có kích thước khác nhau, đĩa nhỏ ở trên đĩa lớn hơn ở dưới. Hãy chuyển chồng đĩa từ cột A sang cột C (xem cột B là cột trung gian) với điều kiện mỗi lần chỉ dời 1 đĩa, đĩa đặt trên bao giờ cũng nhỏ hơn đĩa đặt dưới.



Giả sử ta chỉ quan tâm đến thao tác chuyển đĩa (transfer) vì đây là tác vụ căn bản của thuật toán. Khi đó, thời gian thực hiện của thuật toán $T(n)$ được xác định bởi số lần chuyển n đĩa từ cột này sang cột kia và hiển nhiên $T(0) = 0$.

Yêu cầu:

- Viết mã giả thuật toán giải bài toán Tháp Hà Nội

- Thành lập phương trình đệ quy về số lần tác vụ căn bản được thực thi trong thuật toán.

Đếm chính xác số thao tác chuyển đĩa (không dùng tham số C_1, C_2).

Ý tưởng:

Giả sử như ta đã biết được cách chuyển $N-1$ đĩa đầu tiên từ cột A sang cột B thì ta xem như $N-1$ đĩa đó là MỘT đĩa nhỏ nhất. Bài toán rút gọn lại còn 2 đĩa (đĩa lớn nhất và {chồng $N-1$ đĩa}).

Ta chuyển đĩa nhỏ nhất ($N-1$ đĩa) sang cột B rồi chuyển đĩa lớn nhất (đĩa thứ N) sang cột C rồi chuyển đĩa nhỏ nhất ($N-1$ đĩa) từ cột B sang cột C.

Bài toán rút gọn lại khi ta muốn chuyển 1 chồng N đĩa từ cột này sang cột khác thì ta sẽ quan tâm đến việc chuyển chồng $N-1$ đĩa từ cột này sang cột khác. Cấu trúc bài toán con gối nhau (overlapping subproblem).

Mã giả:

```
def Move(n, A, B, C)
{
        if(n==1) Move that 1 disk from A->C
        else
                Move N-1 disks from A->B
                Move that 1 disk from A->C
                Move those N-1 disks form B->C

}
```

Phương trình đệ quy:

Gọi $T(n)$ là số thao tác chuyển đĩa

$$T(n) = \begin{cases} 0 & khi\ n = 0 \\ 1 & khi\ n = 1 \\ T(n-1) + 1 + T(n-1) & khi\ n > 1 \end{cases}$$

Số thao tác cơ bản:

$T(n) = 2T(n-1) + 1$

$T(n) = 2[2T(n-2) + 1] + 1 = 4T(n-2) + 3$

$T(n) = 4[2T(n-3) + 1] + 3 = 8T(n-3) + 7$

$T(n) = 8[2T(n-4) + 1] + 7 = 16T(n-4) + 15$

……

$T(n) = 2^i T(n-i) + 2^i - 1$

$$T(n) = \begin{cases} 0 & khi\ n = 0 \\ 1 & khi\ n = 1 \\ 2^i T(n-i) + 2^i - 1 & khi\ n > 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi $n - i = 0 \rightarrow i = n$

Khi đó:

$$T(n) = 2^n T(0) + 2^n - 1 = 2^n - 1$$

02.02 Giải các phương trình đệ quy sau bằng phương pháp truy hồi

1. $T(n) = T(n-1) + 5$ $\qquad T(1) = 0$

$T(n) = T(n-1) + 5$

$T(n) = [T(n-2) + 5] + 5 = T(n-2) + 10$

$T(n) = [T(n-3) + 5] + 10 = T(n-3) + 15$

$\ldots\ldots$

$T(n) = T(n-i) + 5i$

$$T(n) = \begin{cases} 0 \quad nếu & n = 1 \\ T(n-i) + 5i & nếu\ n > 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $n - i = 1 \rightarrow i = n - 1$

Khi đó:

$T(n) = T(1) + 5(n-1)$

$T(n) = 5n - 5$

Vậy: $T(n) = 5n - 5$

2. $T(n) = T(n-1) + n$ $\qquad T(1) = 1$

$T(n) = T(n-1) + n$

$T(n) = [T(n-2) + n - 1] + n = T(n-2) + 2n - 1$

$T(n) = [T(n-3) + n - 2] + 2n - 1 = T(n-3) + 3n - (1+2)$

$\ldots\ldots$

$T(n) = T(n-i) + in - \sum_{k=0}^{i-1} k$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & nếu\ n = 1 \\ T(n-i) + in - \sum_{k=0}^{i-1} k & nếu\ n > 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $n - i = 1 \rightarrow i = n - 1$

Khi đó:

$T(n) = T(1) + (n-1)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

$T(n) = 1 + n^2 - n - \frac{n^2-3n+2}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

Vậy: $T(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

3. $T(n) = 3T(n-1) + 1$ $\quad\quad\quad T(1) = 4$

$T(n) = 3T(n-1) + 1$

$T(n) = 3[3T(n-2) + 1] + 1 = 9T(n-2) + (1+3)$

$T(n) = 9[3T(n-3) + 1] + 4 = 27T(n-3) + (1+3+9)$

……

$T(n) = 3^i T(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1} 3^i$

$T(n) = \begin{cases} 4 & \text{nếu } n = 1 \\ 3^i T(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1} 3^k & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$

Quá trình kết thúc khi: $n - i = 1 \rightarrow i = n-1$

Khi đó:

$T(n) = 3^{n-1}T(1) + \sum_{k=0}^{n-2} 3^k$

$T(n) = \frac{4}{3}3^n + \frac{1-3^{n-1}}{1-3} = \frac{4}{3}3^n + \frac{1}{6}3^n - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}3^n - \frac{1}{2}$

Vậy: $T(n) = \frac{3}{2}3^n - \frac{1}{2}$

4. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ $\quad\quad\quad T(1) = 1$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$

$T(n) = 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + 1\right] + 1 = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + (1+2)$

$T(n) = 4\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + 1\right] + (1+2) = 8T\left(\frac{n}{8}\right) + (1+2+4)$

……

$T(n) = 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k$

$T(n) = \begin{cases} 1 & nếu\ n = 1 \\ 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k & nếu\ n > 1 \end{cases}$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$

Khi đó:

$T(n) = 2^{\log_2 n} T(1) + \sum_{k=0}^{\log_2 n - 1} 2^k$

$T(n) = n + \frac{1 - 2^{\log_2 n}}{1-2} = 2n - 1$

Vậy: $T(n) = 2n - 1$

5. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \qquad T(1) = 1$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$T(n) = 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right] + n = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 2n$

$T(n) = 4\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}\right] + 2n = 8T\left(\frac{n}{8}\right) + 3n$

……

$T(n) = 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + in$

$T(n) = \begin{cases} 1 & nếu\ n = 1 \\ 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + in & nếu\ n > 1 \end{cases}$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$

Khi đó:

$T(n) = 2^{\log_2 n} T(1) + \log_2(n)\, n = nlog_2 n + n$

Vậy: $T(n) = nlog_2 n + n$

6. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \qquad T(1) = 1$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$T(n) = 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + n^2 = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(n^2 + \frac{n^2}{2}\right)$$

$$T(n) = 4\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2\right] + \left(n^2 + \frac{n^2}{2}\right) = 8T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(n^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{4}\right)$$

……

$$T(n) = 2^i\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 2^i\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$

Khi đó:

$$T(n) = 2^{\log_2 n}T(1) + n^2\sum_{k=0}^{\log_2 n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$T(n) = n + n^2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 n}}{1-\frac{1}{2}} = 2n^2 - n$$

Vậy: $T(n) = 2n^2 - n$

7. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \log(n)$ $\qquad T(1) = 1$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \log(n)$$

$$T(n) = 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + \log\left(\frac{n}{2}\right)\right] + \log(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + \log(n) + 2\log\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{8}\right) + \log(n) + 2\log\left(\frac{n}{2}\right) + 4\log\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$T(n) = 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + \sum_{k=0}^{i-1}\left(2^k\log\left(\frac{n}{2^k}\right)\right)$$

$$T(n) = 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + logn\sum_{k=0}^{i-1}2^k - log2.\sum_{k=0}^{i-1}k2^k$$

$$T(n) = 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + logn\left(2^i - 1\right) - log2.\left[(i-2)2^i + 2\right]$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + logn\left(2^i - 1\right) - log2.\left[(i-2)2^i + 2\right] & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$

Khi đó:

$$T(n) = 2^{\log_2 n}T(1) + logn\left(2^{\log_2 n} - 1\right) - log2.\left[(\log_2 n - 2)2^{\log_2 n} + 2\right]$$

$$T(n) = n + (n-1)logn - log2(nlog_2 n - 2n + 2)$$

$$T(n) = n + nlogn - logn - nlogn + 2nlog2 - 2log2$$

$$T(n) = (2log2 + 1)n - logn - 2log2$$

Vậy: $T(n) = (2log2 + 1)n - logn - 2log2$

8. $T(n) = T(n-1) + T(n-2) \quad T(0) = 1, T(1) = 1$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$$

$$T(n) = 2T(n-2) + T(n-3)$$

$$T(n) = 2[T(n-3) + T(n-4)] + T(n-3) = 3T(n-3) + 2T(n-4)$$

$$T(n) = 3[T(n-4) + T(n-5)] + 2T(n-4) = 5T(n-4) + 3T(n-5)$$

……

$T(n) = F_{i+1}T(n-i) + F_iT(n-i-1)$ (Với F_a là số Fibo thứ a)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 0 \\ 1 & \text{nếu } n = 1 \\ F_{i+1}T(n-i) + F_iT(n-i-1) & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $n - i = 1 \rightarrow i = n - 1$

Khi đó:

$$T(n) = F_nT(1) + F_{n-1}T(0) = F_n + F_{n-1}$$

$$T(n) = F_{n+1} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

Vậy: $T(n) = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$

02.03 Giải phương trình đệ quy sau bằng phương pháp truy hồi: với $T(1) = 1$

1. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$T(n) = 3\left[3T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + n^2 = 9T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(1 + \frac{3}{4}\right)n^2$$

$$T(n) = 9\left[3T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2\right] + \left(1 + \frac{3}{4}\right)n^2 = 27T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16}\right)n^2$$

…

$$T(n) = 3^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2 \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 3^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2 \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$

Khi đó:

$$T(n) = 3^{\log_2 n} T(1) + n^2 \sum_{k=0}^{\log_2 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$T(n) = 3^{\log_2 n} + n^2 \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n}}{1 - \frac{3}{4}} = n^{\log_2 3} + 4n^2 - 4n^{\log_2 3} = 4n^2 - 3n^{\log_2 3}$$

Vậy: $T(n) = 4n^2 - 3n^{\log_2 3}$

2. $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$$

$$T(n) = 8\left[8T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^3\right] + n^3 = 8^2 T\left(\frac{n}{4}\right) + 2n^3$$

$$T(n) = 8^2\left[8T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^3\right] + 2n^3 = 8^3 T\left(\frac{n}{8}\right) + 3n^3$$

……

$$T(n) = 8^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + in^3$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 8^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + in^3 & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \to i = \log_2 n$

Khi đó:

$$T(n) = 8^{\log_2 n} T(1) + \log_2 n \,.\, n^3 = \log_2 n \,.\, n^3 + n^3$$

Vậy: $T(n) = \log_2 n \,.\, n^3 + n^3$

3. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$T(n) = 4\left[4T\left(\frac{n}{9}\right) + \frac{n}{3}\right] + n = 16T\left(\frac{n}{9}\right) + \left(1 + \frac{4}{3}\right)n$$

$$T(n) = 16\left[4T\left(\frac{n}{27}\right) + \frac{n}{9}\right] + \left(1 + \frac{4}{3}\right)n = 64T\left(\frac{n}{27}\right) + \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9}\right)n$$

……

$$T(n) = 4^i T\left(\frac{n}{3^i}\right) + n\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{4}{3}\right)^k = 4^i T\left(\frac{n}{3^i}\right) + n\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^i}{1-\frac{4}{3}}$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 4^i T\left(\frac{n}{3^i}\right) + \frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^i}{1-\frac{4}{3}} n & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{3^i} = 1 \to i = \log_3 n$

Khi đó:

$$T(n) = 4^{\log_3 n} T(1) - 3n\left(1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n}\right) = n^{\log_3 4} - 3n + 3n^{\log_3 4}$$

$$T(n) = 4n^{\log_3 4} - 3n$$

Vậy: $T(n) = 4n^{\log_3 4} - 3n$

4. $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

$T(n) = 9\left[9T\left(\frac{n}{9}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)^2\right] + n^2 = 9^2T\left(\frac{n}{9}\right) + 2n^2$

$T(n) = 9^2\left[9T\left(\frac{n}{27}\right) + \left(\frac{n}{9}\right)^2\right] + 2n^2 = 9^3T\left(\frac{n}{27}\right) + 3n^2$

……

$T(n) = 9^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + in^2$

$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 9^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + in^2 & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{3^i} = 1 \rightarrow i = \log_3 n$

Khi đó:

$T(n) = 9^{\log_3 n}T(1) + \log_3 n \,.\, n^2 = \log_3 n \,.\, n^2 + n^2$

Vậy: $T(n) = \log_3 n \,.\, n^2 + n^2$

5. $T(2) = 0$ $\qquad$ $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$

$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$

$T(n) = 2\left[2T\left(\sqrt{\sqrt{n}}\right) + 1\right] + 1 = 4T\left(n^{\frac{1}{4}}\right) + (1 + 2)$

$T(n) = 4\left[2T\left(n^{\frac{1}{8}}\right) + 1\right] + (1 + 2) = 8T\left(n^{\frac{1}{8}}\right) + (1 + 2 + 4)$

…….

$T(n) = 2^iT\left(n^{\frac{1}{2^i}}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k$

$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 2 \\ 2^iT\left(n^{\frac{1}{2^i}}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k & \text{nếu } n > 2 \end{cases}$

Quá trình kết thúc khi: $n^{\frac{1}{2^i}} = 2 \rightarrow i = \log_2(\log_2 n)$

Khi đó

$T(n) = \log_2 n\, T(2) + \sum_{k=0}^{\log_2(\log_2 n)-1} 2^k$

$T(n) = (\log_2 n - 1)$

Vậy: $T(n) = \log_2 n - 1$

02.04 Giải phương trình đệ quy sau dùng phương trình đặc trưng (đổi câu b)

a. $\begin{cases} T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2) \\ T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \end{cases}$

Xét phương trình: $T(n) - 4T(n-1) + 3T(n-2) = 0$

Đặt $T(n) = X^n$

$X^n - 4X^{n-1} + 3X^{n-2} = 0 =$

Phương trình đặc trưng: $X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-3) = 0$

Phương trình có 2 nghiệm đơn là: $X_1 = 1, X_2 = 3$

$T(n) = c_1 + c_2 3^n$

$\begin{cases} T(0) = c_1 + \ \ c_2 = 1 \\ T(1) = c_1 + 3c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy: $T(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} 3^n$

b. $\begin{cases} T(n) = 10T(n-1) - 33T(n-2) + 36T(n-3) \\ T(0) = 0 \\ T(1) = 1 \\ T(2) = 7 \end{cases}$

Xét phương trình: $T(n) - 10T(n-1) + 33T(n-2) - 36T(n-3) = 0$

Đặt $T(n) = X^n$

$X^n - 10X^{n-1} + 33X^{n-2} - 36X^{n-3} = 0$

Phương trình đặc trưng: $X^3 - 10X^2 + 33X - 36 = 0$

$$\Leftrightarrow (X-3)^2(X-4) = 0$$

Phương trình có:

1 nghiệm đơn: $X_1 = 4$

1 nghiệm kép: $X_2 = 3$

$T(n) = c_1 3^n + c_2 n 3^n + c_3 4^n$

$$\begin{cases} T(0) = c_1 + c_3 & = 0 \\ T(1) = 3c_1 + 3c_2 + 4c_3 & = 1 \\ T(2) = 9c_1 + 18c_2 + 16c_3 & = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = \ \ 0 \\ c_3 = \ \ 1 \end{cases}$$

Vậy: $T(n) = -3^n + 4^n$

c. $\begin{cases} T(n) = T(n-1) + T(n-2) \\ T(0) = 1 \\ T(1) = 1 \end{cases}$

Xét phương trình: $T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$

Đặt $T(n) = X^n$

$X^n - X^{n-1} - X^{n-2} = 0$

Phương trình đặc trưng: $X^2 - X - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $X_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $X_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$T(n) = c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$\begin{cases} T(0) = c_1 + c_2 & = 1 \\ T(1) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) c_1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) c_2 & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ c_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

Vậy: $T(n) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$