ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI TẬP
MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

KHOA: KHOA HỌC MÁY TÍNH

HOMEWORK #03: ĐỘ PHỨC TẠP VÀ CÁC KÝ HIỆU TIỆM CẬN

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

1. Nguyễn Đức Anh Phúc – 20520276 (trưởng nhóm)
2. Trương Thành Thắng – 20521907
3. Ngô Văn Tấn Lưu – 20521591
4. Huỳnh Viết Tuấn Kiệt – 20521494

03.01

a. Hãy cho biết ý nghĩa của “độ phức tạp” khi đề cập đến thuật toán?

“Độ phức tạp” không phải là thuật ngữ, đại lượng toán học được nghiên cứu bài bản. Khi đề cập đến thuật toán, “Độ phức tạp” được hiểu theo các ký hiệu tiệm cận, đại diện cho hệ thống các ký hiệu tiệm cận, định lượng tương đối độ lớn số phép toán của giải thuật so với kích thước của bài toán.

b. Hãy cho biết ý kiến của bạn về nhận định dưới đây và giải thích vì sao?

“Khi nghiên cứu về các thuật toán, người ta quan tâm đặc biệt đến tính hiệu quả về thời gian của chúng nhưng thường là quan tâm đến bậc tăng trưởng (order of growth) của hàm thời gian thực hiện của thuật toán, chứ không phải là bản thân thời gian thực hiện $T(n)$”

Nhận định trên là đúng. Trong thực tế, các bài toán mà con người cần giải quyết thường có kích thước rất lớn. Khi đó độ lớn về thời gian thực hiện giữa các thuật toán thường rất rõ ràng. Tuy nhiên, việc nghiên cứu thuật toán với kích thước đầu vào lớn như thực tế thì mất rất nhiều thời gian, bên cạnh đó, thời gian thực thi của thuật toán còn phụ thuộc vào điều kiện khác như tình trạng máy thực nghiệm, mà yếu tố này sẽ thay đổi theo thời gian, điều này không đảm bảo công bằng khi so sánh các thuật toán với nhau (mục tiêu của nghiên cứu). Ngoài thời gian thực hiện, Bậc tăng trưởng cũng là cách để đánh giá thời gian thực thi của thuật toán mà vẫn tránh được những vấn đề trên. Vì vậy, trong nghiên cứu về thuật toán, người ta thường quan tâm đến bậc tăng trưởng.

c. Nói về Độ phức tạp tức là đề cập tới các ký hiệu tiệm cận, mà có nhiều ký hiệu khác nhau. Vậy khi nào (trong trường hợp nào) thì nên dùng ký hiệu nào?

$O \rightarrow$ Trả về độ lớn số phép toán của giải thuật trong trường hợp xấu nhất. Là trường hợp mà khi nghiên cứu được quan tâm nhất. $\Omega \rightarrow$ Trả về độ lớn số phép toán của giải thuật trong trường hợp tốt nhất. $\Theta \rightarrow$ Trả về độ lớn số phép toán của giải thuật trong trường hợp trung bình.

03.02 Comparison of running times

For each function $f(n)$ and time t in the following table, determine the largest size n of a problem that can be solved in time t, assunming that the algorithm to solve the problem takes $f(n)$ microseconds.

Giải:

Kích thước n của bài toán được giải trong thời gian t(ms)

Suy ra: $f(n) \leq t \Rightarrow n \leq f^{-1}(t)$, $\quad f(x)$ đơn điệu tăng

Vậy n lớn nhất có thể là: $\lfloor f^{-1}(t) \rfloor$

Ví dụ:

Với $f(n) = lgn$, trong $t = 1s = 10^3 s$, kích thước lớn nhất của bài toán có thể giải được là: $n = 2^t = 2^{10^3}$

Với $f(n) = lgn$, trong $t = 1m = 6.10^4 s$, kích thước lớn nhất của bài toán có thể giải được là: $n = 2^t = 2^{6.10^4}$

	1 second	1 minute	1 hour	1 day	1 month	1 year	1 century
lgn	2^{10^3}	$2^{6.10^4}$	$2^{36.10^5}$	$2^{864.10^5}$	$2^{2592.10^6}$	$2^{94608.10^7}$	$2^{94608.10^9}$
$\sqrt{n}$	10^6	36.10^8	1926.10^{10}	$\approx 7465.10^{12}$	$\approx 6718.10^{15}$	$\approx 8951.10^{20}$	$\approx 8951.10^{24}$
n	10^3	6.10^4	36.10^5	864.10^5	2592.10^6	94608.10^7	94608.10^9
$nlgn$	140	4895	204094	3943234	97659289	$\approx 2729.10^4$	2303741.10^6
n^2	31	244	1897	9295	50911	972666	9726664
n^3	10	39	153	442	1373	9816	45566
2^n	9	15	21	26	31	39	46
$n!$	6	8	9	11	12	14	16

03.03

a. Phép suy ra bên dưới là đúng hay sai và vì sao?

$\frac{1}{2}n^2 = O(n^2)$ (1) và $n^2 + 1 = O(n^2)$ (2)

$\Rightarrow \frac{1}{2}n^2 = n^2 + 1$???

Phép suy ra bên trên là chưa đúng, bởi dấu " $=$ " ở (1) và (2) có thể hiểu là dấu " $\in$ "
Có nghĩa là $\frac{1}{2}n^2$, $n^2 + 1$ là 2 hàm bất kì thuộc cùng một tập hợp $\{t(n) : \exists c \in R^+, \exists n_0 \in N, \forall n \geq n_0, t(n) \leq c.n^2\}$
Nên chưa đủ cơ sở để kết luận 2 hàm là bằng nhau.

b. Xét $f(n) = 7n^2$ $g(n) = n^2 - 80n$ $h(n) = n^3$

Chứng minh:

$f(n) = O(g(n))$ $g(n) = O(f(n))$

$f(n) = O(h(n))$ $h(n) \neq O(f(n))$

$\boldsymbol{f(n) = O(g(n))}$

Chứng minh: $7n^2 \leq c(n^2 - 80n)$ $\forall n \geq n_0$

Giả sử chọn $c = 8$ ta được:

$$n^2 - 640n \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n \leq \quad 0 \\ n \geq 640 \end{array}\right.$$

Vậy chọn $c = 8, n_0 = 640$

Theo định nghĩa của Big-O, ta được $f(n) = O(g(n))$ (đccm)

$\boldsymbol{g(n) = O(f(n))}$

Ta thấy: $n^2 - 80n \leq n^2 \leq 7n^2$ $\forall n \geq 1$

Chọn $c = 7, n_0 = 1$

Theo định nghĩa của Big-O, ta được $g(n) = O(f(n))$ (đccm)

$\boldsymbol{f(n) = O(h(n))}$

Ta thấy: $7n^2 \leq 7n^3$ $\forall n \geq 1$

Chọn $c = 7, n_0 = 1$

Theo định nghĩa của Big-O, ta được $f(n) = O(h(n))$ (đccm)

$\boldsymbol{h(n) \neq O(f(n))}$

Giả sử: $h(n) = O(f(n))$

$\Rightarrow \exists c \in R^+, \exists n_0 \in N$ sao cho $n^3 \leq c(7n^2), \forall n \geq n_o$

Suy ra: $n^2(n - 7c) \leq 0$

Xét: $n^2(n - 7c)$

n		0		$7c$	
$n^2(n-7c)$	$-$		$-$		$+$

$\Rightarrow \nexists n_0 \rightarrow n^2(n - 7c) \leq 0 \quad \forall n > n_0$

$\Rightarrow h(n) \neq O(f(n))$ (đccm)

c. Chứng minh:

$$n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$$

$$O(n^2) \neq O(n)$$

$$n \notin O(\log_2 n)$$

$\boldsymbol{n^4 + n + 1 \notin O(n^2)}$

Ta thấy: $n^4 + n + 1 \geq n^3\ \forall n \geq 1$

Chọn: $c = 1, n_0 = 1$

Theo định nghĩa Big-Ω, ta được $n^4 + n + 1 \in \Omega(n^3)$ (*)

Mà $n^3 > n^2\ \forall n \geq 1 \Rightarrow O(n^2) \cap \Omega(n^3) = \emptyset$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$ (đccm)

$\boldsymbol{O(n^2) \neq O(n)}$

Giả sử: $O(n^2) = O(n)$

Suy ra: $\forall f(n) \in O(n^2) \Rightarrow f(n) \in O(n)$ (*)

Chọn: $f(n) = n^2$

Ta thấy: $n^2 \leq 2n^2\quad \forall n \geq 1$

Chọn: $c_1 = 2, n_{01} = 1$

Theo định nghĩa Big-O, ta được $f(n) \in O(n^2)$

Từ (*) suy ra $f(n) = n^2 \in O(n) \Rightarrow n^2 \leq c_2 n\quad \forall n \geq n_{02}$

Xét $n^2 \leq c_2 n \Leftrightarrow n(n - c_2) \leq 0$

n	0		c_2
$n(n-c)$	$+$	$-$	$+$

Theo bảng, ta thấy: $\forall c_2 > 0 \Rightarrow \nexists n_{02} \in N$ mà $\forall n \geq n_{02}$ để $n(n - c_2) \leq 0$

Vậy giả thuyết là sai.

$\Rightarrow O(n^2) \neq O(n)$ (đccm)

$\boldsymbol{n \notin O(\log_2 n)}$

Ta thấy: $n \geq \frac{1}{2}n\ \forall n \geq 1$

Chọn: $c = \frac{1}{2}, n_0 = 1$

Theo định nghĩa Big-Ω, ta được $n \in \Omega(n)$ (*)

Mà $n > \log_2 n\ \forall n \geq 1 \Rightarrow O(\log_2 n) \cap \Omega(n) = \emptyset$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow n \notin O(\log_2 n)$ (đccm)

03.04 Với mỗi nhóm hàm bên dưới, hãy sắp xếp tăng dần theo bậc tăng trưởng Big-O

Group 1

$f_1(n) = \binom{n}{100}$ $\quad f_2(n) = n^{100}$ $\quad f_3(n) = \frac{1}{n}$ $\quad f_4(n) = 10^{1000}n$

$f_5(n) = nlogn$

$f_1(n) = C_n^{100} = \frac{n!}{100!(n-100)!} = \frac{(n-99)(n-98)\ldots n}{100!} = O(n^{100})$
$f_2(n) = n^{100} = O(n^{100})$
$f_3(n) = \frac{1}{n} = n^{-1} = O(n^{-1})$
$f_4(n) = 10^{1000}n = O(n)$
$f_5(n) = nlogn = O(n^1.n^c) = O(n^{1+c})$ $\quad (c \approx 10^{-5})$
Vậy: $f_3(n) < f_4(n) < f_5(n) < f_2(n) \approx f_1(n)$

Group 2

$f_1(n) = 2^{2^{1000000}}$ $\quad f_2(n) = 2^{1000000n}$ $\quad f_3(n) = \binom{n}{2}$ $\quad f_4(n) = n\sqrt{n}$

$f_1(n) = O(c)$
$f_2(n) = O(c^n)$
$f_3(n) = C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)n}{2!} = O(n^2)$
$f_4(n) = O\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$
Vậy: $f_1(n) < f_4(n) < f_3(n) < f_2(n)$

Group 3

$f_1(n) = n^{\sqrt{n}}$ $\quad f_2(n) = 2^n$ $\quad f_3(n) = n^{10}.2^{\frac{n}{2}}$ $\quad f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i+1)$

$f_1(n) = 2^{\sqrt{n}logn} = 2^{O\left(n^{\frac{1}{2}+c}\right)}$ $\quad (c \approx 10^{-5})$
$f_2(n) = 2^n = 2^{O(n)}$
$f_3(n) = n^{10}.2^{\frac{n}{2}} = 2^{10logn+\frac{n}{2}} = 2^{O(n)}$
$f_4(n) = 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+2)(n-1)}{2} = \frac{n^2+n-2}{2} = 2^{\log(n^2+n-2)-1} = 2^{O(n^c)}$
Vậy: $f_4(n) < f_1(n) < f_2(n) \approx f_3(n)$

Group 4

$f_1(n) = (n-2)!$ $f_2(n) = 5\lg(n+100)^{10}$ $f_3(n) = 2^{2n}$

$f_4(n) = 0.001n^4 + 3n^3 + 1$ $f_5(n) = \ln^2 n$ $f_6(n) = \sqrt[3]{n}$

$f_7(n) = 3^n$

$f_1(n) = (n-2)! = O(n!)$
$f_2(n) = 5\log(n+100)^{10} = 50\log(n+100) = O(n^c)\quad (c \approx 10^{-5})$
$f_3(n) = 2^{2n} = O(c^n)$
$f_4(n) = 0.001n^4 + 3n^3 + 1 = O(n^4)$
$f_5(n) = \ln^2 n = \ln^2 2\,.\log^2 n = O(n^{2c})$
$f_6(n) = O\left(n^{\frac{1}{3}}\right)$
$f_7(n) = O(c^n)$
Vậy: $f_2(n) < f_5(n) < f_6(n) < f_4(n) < f_7(n) \approx f_3(n) < f_1(n)$

03.05 Chứng minh

$O(C) = O(1)$ với C là hằng số

Chứng minh: $\mathbf{O(C) \subset O(1)}$:
Giả sử: $\forall f(n) \in O(C)$
Suy ra: $\exists c_1 \in R^+, \exists n_{01} \in N \to \forall n \geq n_{01}, 0 \leq f(n) \leq c_1.C$
Hay: $\forall n \geq n_{01}, 0 \leq f(n) \leq c_1 C.1$
Chọn: $c = c_1 C, n = n_{01}$
Theo định nghĩa Big-O ta được $f(n) \in O(1)$
Vậy $\forall f(n) \in O(C), f(n) \in O(1)$
$\Rightarrow O(C) \subset O(1)$ (*)
Chứng minh: $\mathbf{O(1) \subset O(C)}$:
Giả sử: $\forall g(n) \in O(1)$
Suy ra: $\exists c_2 \in R^+, \exists n_{02} \in N \to \forall n \geq n_{02}, 0 \leq g(n) \leq c_2.1$
Hay: $\forall n \geq n_{02}, 0 \leq g(n) \leq c_2.C$
Chọn: $c = c_2, n = n_{02}$
Theo định nghĩa Big-O ta được $g(n) \in O(C)$
Vậy $\forall g(n) \in O(1), g(n) \in O(C)$
$\Rightarrow O(1) \subset O(C)$ (**)
Từ (*) và (**) $\Rightarrow O(C) = O(1)$ (đccm)

$O(Cf(n)) = O(f(n))$ với C là hằng số

Chứng minh: $O(Cf(n)) \subset O(f(n))$:

Giả sử: $\forall a(n) \in O(Cf(n))$

Suy ra: $\exists c_1 \in R^+, \exists n_{01} \in N \to \forall n \geq n_{01}, 0 \leq a(n) \leq c_1.Cf(n)$

Hay: $\forall n \geq n_{01}, 0 \leq a(n) \leq c_1C.f(n)$

Chọn: $c = c_1C, n = n_{01}$

Theo định nghĩa Big-O ta được $a(n) \in O(f(n))$

Vậy $\forall a(n) \in O(Cf(n)), a(n) \in O(f(n))$

$\Rightarrow O(Cf(n)) \subset O(f(n))$ (*)

Chứng minh: $O(f(n)) \subset O(Cf(n))$:

Giả sử: $\forall b(n) \in O(f(n))$

Suy ra: $\exists c_2 \in R^+, \exists n_{02} \in N \to \forall n \geq n_{02}, 0 \leq b(n) \leq c_2.f(n)$

Hay: $\forall n \geq n_{02}, 0 \leq b(n) \leq c_2.Cf(n)$

Chọn: $c = c_2, n = n_{02}$

Theo định nghĩa Big-O ta được $b(n) \in O(Cf(n))$

Vậy $\forall b(n) \in O(f(n)), b(n) \in O(Cf(n))$

$\Rightarrow O(f(n)) \subset O(Cf(n))$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow O(Cf(n)) = O(f(n))$ (đccm)

Nếu $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \in O(h(n))$ thì $f(n) \in O(h(n))$

$f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \exists c_1 \in R^+, \exists n_{01} \in N$ sao cho $\forall n \geq n_{01}, f(n) \leq c_1 g(n)$

$g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow \exists c_2 \in R^+, \exists n_{02} \in N$ sao cho $\forall n \geq n_{02}, g(n) \leq c_2 h(n)$

Suy ra: $\forall n \geq n_0 = \max\{n_{01}, n_{02}\}, \quad f(n) \leq c_1 c_2 h(n)$

Chọn: $c = c_1 c_2, n_0 = \max\{n_{01}, n_{02}\}$

Theo định nghĩa Big-O ta được $f(n) \in O(h(n))$ (đccm)

Nếu $t_1(n) \in O(f(n))$ và $t_2(n) \in O(g(n))$

thì $t_1(n) + t_2(n) \in O(\max\{f(n), g(n)\})$

$t_1(n) \in O(f(n)) \Rightarrow \exists c_1 \in R^+, \exists n_{01} \in N$ sao cho $\forall n \geq n_{01}, t_1(n) \leq c_1 f(n)$

$t_2(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \exists c_2 \in R^+, \exists n_{02} \in N$ sao cho $\forall n \geq n_{02}, t_2(n) \leq c_2 g(n)$

Suy ra: $\forall n \geq n_0 = \max\{n_{01}, n_{02}\}$,

$t_1(n) + t_2(n) \leq c_1 f(n) + c_2 g(n)$

$\Rightarrow t_1(n) + t_2(n) \leq c_1 \max\{f(n), g(n)\} + c_2 \max\{f(n), g(n)\}$

$\Rightarrow t_1(n) + t_2(n) \leq (c_1 + c_2)\max\{f(n), g(n)\}$

Chọn: $c = c_1 + c_2, n = \max\{n_{01}, n_{02}\}$

Theo định nghĩa Big-O ta được $t_1(n) + t_2(n) \in O(\max\{f(n), g(n)\})$ (đccm)

03.06 Chứng minh

If $t(n) \in O(g(n))$, then $g(n) \in \Omega(t(n))$
$t(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \exists c_1 \in R^+, \exists n_{01} \in N$ sao cho $\forall n \geq n_{01}, t(n) \leq c_1 g(n)$ Suy ra: $\forall n \geq n_{01},\ g(n) \geq \frac{1}{c_1} t(n)$ Chọn: $c = \frac{1}{c_1}, n_0 = n_{01}$ Theo định nghĩa Big-Ω ta được $g(n) \in \Omega(t(n))$ (đccm)

$\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$, where $\alpha > 0$
Chứng minh: $\boldsymbol{\Theta(\alpha g(n)) \subset \Theta(g(n))}$ Giả sử: $\forall a(n) \in \Theta(\alpha g(n))$ Suy ra: $\exists c_{01}, c_{02} \in R^+, \exists n_{01} \in N$ $\rightarrow \forall n \geq n_{01}, c_{01}.\alpha g(n) \leq a(n) \leq c_{02}.\alpha g(n)$ Hay: $\forall n \geq n_{01},\ c_{01}\alpha.g(n) \leq a(n) \leq c_{02}\alpha.g(n)$ Chọn: $c_1 = c_{01}\alpha, c_2 = c_{02}\alpha, n_0 = n_{01}$ Theo định nghĩa Big-Θ ta được $a(n) \in \Theta(g(n))$ Vậy: $\forall a(n) \in \Theta(\alpha g(n)), a(n) \in \Theta(\mathrm{g(n)})$ $\Rightarrow \Theta(\alpha g(n)) \subset \Theta(g(n))$ (*) **Chứng minh: $\boldsymbol{\Theta(g(n)) \subset \Theta(\alpha g(n))}$** Giả sử: $\forall b(n) \in \Theta(g(n))$ Suy ra: $\exists c_{01}, c_{02} \in R^+, \exists n_{02} \in N$ $\rightarrow \forall n \geq n_{02}, c_{01}.g(n) \leq b(n) \leq c_{02}.g(n)$ Hay: $\forall n \geq n_{02},\ c_{01}.\alpha g(n) \leq b(n) \leq c_{02}.\alpha g(n)$ Chọn: $c_1 = c_{01}, c_2 = c_{02}, n_0 = n_{02}$ Theo định nghĩa Big-Θ ta được $\mathrm{b}(n) \in \Theta(\alpha g(n))$ Vậy: $\forall b(n) \in \Theta(g(n)), b(n) \in \Theta(\mathrm{\alpha g(n)})$ $\Rightarrow \Theta(g(n)) \subset \Theta(\alpha g(n))$ (**) Từ (*) và (**) $\Rightarrow \Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$ (đccm)

$\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
Chứng minh: $\boldsymbol{\Theta(g(n)) \subset O(g(n)) \cap \Omega(g(n))}$ Giả sử: $\forall f(n) \in \Theta(g(n))$ Suy ra: $\exists c_1, c_2 \in R^+, \exists n_0 \in N \rightarrow c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \quad \forall n \geq n_0$ Ta thấy: $\forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$ $\forall n \geq n_0, f(n) \leq c_2 g(n) \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ $\Rightarrow f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ Vậy: $\forall f(n) \in \Theta(g(n)),\ f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ $\Rightarrow \Theta(g(n)) \subset O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ (*) **Chứng minh: $\boldsymbol{O(g(n)) \cap \Omega(g(n)) \subset \Theta(g(n))}$** Giả sử: $\forall f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ Suy ra: $\exists c_1 \in R^+, \exists n_{01} \in N \rightarrow f(n) \leq c_1 g(n) \quad \forall n \geq n_{01}$ $\exists c_2 \in R^+, \exists n_{02} \in N \rightarrow c_2 g(n) \leq f(n) \quad \forall n \geq n_{02}$ $\Rightarrow \forall n \geq \max\{n_{01}, n_{02}\}, c_2 g(n) \leq f(n) \leq c_1 g(n)$ $\Rightarrow f(n) \in \Theta(\mathrm{g(n)})$ Vậy: $\forall f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n)),\ f(n) \in \Theta(\mathrm{g(n)})$ $\Rightarrow O(g(n)) \cap \Omega(g(n)) \subset \Theta(\mathrm{g(n)})$ (**) Từ (*) và (**) $\Rightarrow \Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ (đccm)

$\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$
Giả sử: $\forall n \geq n_0, f(n) \geq 0$ và $g(n) \geq 0$ Ta thấy: $f(n) \leq \max\{f(n), g(n)\}$ và $g(n) \leq \max\{f(n), g(n)\} \quad \forall n \geq n_0$ Suy ra: $f(n) + g(n) \leq 2\max\{f(n), g(n)\}$ Hay: $\frac{1}{2}(f(n) + g(n)) \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \quad \forall n \geq n_0$ Chọn: $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1, n_0$ Theo định nghĩa Big-Θ ta được $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$ (đccm)

$\log_3(n^2) = \Theta(\log_2(n^3))$
$\log_3(n^2) = 2\log_3 2 . \log_2 n$ Ta thấy: $\frac{1}{2}.\log_3 2 . 3\log_2(n) \leq 2.\log_3 2 . \log_2(n) \leq \log_3 2 . 3 . \log_2(n) \quad \forall n \geq 1$ Chọn: $c_1 = \frac{1}{2}\log_3 2, c_2 = \log_3 2, n_0 = 1$ Theo định nghĩa Big-Θ ta được $2\log_3 2 . \log_2(n) \in \Theta(3\log_2(n))$ Hay $\log_3(n^2) \in \Theta(\log_2(n^3))$ (đccm)

03.07 Các khẳng định bên dưới là đúng hay sai? Vì sao?

Nếu $f(n) = \Theta(g(n))$ và $g(n) = \Theta(h(n))$, thì $h(n) = \Theta(f(n))$
$f(n) = \theta(g(n))$ $\Rightarrow \exists c_{1f}, c_{2f} \in R^+, \exists n_{0f} \in N \rightarrow c_{1f}g(n) \le f(n) \le c_{2f}g(n)\ \forall n \ge n_{0f}$ (1) $g(n) = \theta(h(n))$ $\Rightarrow \exists c_{1g}, c_{2g} \in R^+, \exists n_{0g} \in N \rightarrow c_{1g}h(n) \le g(n) \le c_{2g}h(n)\ \forall n \ge n_{0g}$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow c_{1f}c_{1g}h(n) \le f(n) \le c_{2f}c_{2g}h(n) \quad \forall n \ge \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$ $\Rightarrow \frac{1}{c_{2f}c_{2g}} f(n) \le h(n) \le \frac{1}{c_{1f}c_{1g}} f(n) \quad \forall n \ge \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$ Chọn: $c_1 = \frac{1}{c_{2f}c_{2g}}, c_2 = \frac{1}{c_{1g}c_{1g}}, n_0 = \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$ Theo định nghĩa Big-Θ ta được $h(n) \in \Theta(fa(n))$ Vậy khẳng định trên là đúng.

Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O(h(n))$, thì $h(n) = \Omega(f(n))$
Với $f(n) = O(g(n))$ $\Rightarrow \exists c_f \in R^+, \exists n_{0f} \in N \rightarrow f(n) \le c_f g(n)\ \ \forall n \ge n_{0f}$ (1) Với $g(n) = O(h(n))$ $\Rightarrow \exists c_g \in R^+, \exists n_{0g} \in N \rightarrow g(n) \le c_g h(n)\ \ \forall n \ge n_{0g}$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(n) \le c_f c_g h(n) \Rightarrow h(n) \ge \frac{1}{c_f c_g} f(n)\ \ \forall n \ge \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$ Chọn: $c = \frac{1}{c_f c_g}, n_0 = \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$ Theo định nghĩa Big-Ω ta được $h(n) = \Omega(f(n))$ Vậy khẳng định trên là đúng.

Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O(f(n))$, thì $f(n) = g(n)$
Với $f(n) = O(g(n))$ $\Rightarrow \exists c_f \in R^+, \exists n_{0f} \in N \rightarrow f(n) \le c_f g(n)\ \ \forall n \ge n_{0f}$ (1) Với $g(n) = O(f(n))$ $\Rightarrow \exists c_g \in R^+, \exists n_{0g} \in N \rightarrow g(n) \le c_g f(n)\ \ \forall n \ge n_{0g}$ (2) Từ (1) và (2) ta thấy $f(n), g(n)$ lần lượt là một hàm trong tập các hàm thỏa mãn điều kiện (1), (2). Vì vậy vẫn chưa đủ cơ sở để khẳng định $f(n) = g(n)$ Vậy khẳng định trên là chưa đúng.

$\frac{n}{100} = \Omega(n)$
Ta thấy: $\frac{n}{100} \geq \frac{n}{1000} \quad \forall n \geq 1$ Chọn: $c = \frac{1}{1000}, n_0 = 1$ Theo định nghĩa Big-Ω ta được $\frac{n}{100} = \Omega(n)$ Vậy khẳng định trên là đúng.

$f(n) + O\big(f(n)\big) = \Theta\big(f(n)\big)$
$\forall g(n) \in O\big(f(n)\big) \Rightarrow \exists c_g \in R^+, \exists n_{0g} \in N \rightarrow g(n) \leq c_g f(n) \quad \forall n \geq n_{0g}$ Ta thấy: $f(n) + O\big(f(n)\big) = f(n) + g(n)$ $\Rightarrow f(n) \leq f(n) + O\big(f(n)\big) \leq \big(1 + c_g\big) f(n) \quad \forall n \geq n_{0g}$ Chọn: $c_1 = 1, c_2 = 1 + c_g, n_0 = n_{0g}$ Theo định nghĩa Big-Θ ta được $f(n) + O\big(f(n)\big) = \Theta\big(f(n)\big)$ Vậy khẳng định trên là đúng.

$2^{10n} = O(2^n)$
Giả sử: $2^{10n} = O(2^n)$ $\Rightarrow \exists c \in R^+, \exists n_0 \in N \rightarrow 2^{10n} \leq c2^n \quad \forall n \geq n_0$ Lấy log cơ số 2 cho hai vế ta được: $10n \leq logc + n$ $\Rightarrow n \leq \frac{logc}{2}$ $\Rightarrow$ không tồn tại n_0 thỏa $n \geq n_0$ Vậy khẳng định trên là sai.

$\log_{10} n = \Theta(\log_2 n)$
$\log_{10} n = \log_{10} 2 \log_2 n$ Ta thấy: $0{,}1 . \log_2 n \leq \log_{10} 2 . \log_2 n \leq 0{,}4 \log_2 n \quad \forall n \geq 1 \quad (\log_{10} 2 \approx 0.301)$ Chọn: $c_1 = 0.1, c_2 = 0.4, n_0 = 1$ Theo định nghĩa Big-Θ ta được $\log_{10} n = \Theta(\log_2 n)$ Vậy khẳng định trên là đúng.

03.08 Chứng minh các tính chất sau:

I) $n + n^2 O(lnn) = O(n^2 lnn)$

$\forall f(n) \in O(lnn) \Rightarrow \exists c_f \in R^+, \exists n_{0f} \in N \to f(n) \leq c_f lnn \quad \forall n \geq n_{0f}$
$\Rightarrow n + n^2 O(lnn) = n + n^2 f(n) \leq n + n^2 c_f lnn \leq (1 + c_f) n^2 lnn \quad \forall n \geq n_{0f}$
Chọn: $c = 1 + c_f, n_0 = n_{0f}$
Theo định nghĩa Big-O ta được: $n + n^2 O(lnn) = O(n^2 lnn)$ (đccm)

II) $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))$

$\forall f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \exists c_f \in R^+, \exists n_{0f} \in N \to f(n) \leq c_f g(n) \quad \forall n \geq n_{0f}$
$g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow \exists c_g \in R^+, \exists n_{0g} \in N \to g(n) \leq c_g h(n) \quad \forall n \geq n_{0g}$
$\Rightarrow f(n) \leq c_f c_g h(n) \quad \forall n \geq \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$
Chọn: $c = c_f c_g, n_0 = \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$
Theo định nghĩa Big-O ta được $f(n) \in O(h(n))$
Vậy $\forall f(n) \in O(g(n))$ thì $f(n) \in O(h(n))$
$\Rightarrow O(g(n)) \subset O(h(n))$ (*)

Mặc khác: **giả sử** $\boldsymbol{h(n) \in O(g(n))}$
$\Rightarrow \exists c_h \in R^+, \exists n_{0h} \in N \to h(n) \leq c_h g(n) \quad \forall n \geq n_{0h}$
$\forall t(n) \in O(h(n)) \Rightarrow \exists c_t \in R^+, \exists n_{0t} \in N \to t(n) \leq c_t h(n) \quad \forall n \geq n_{0f}$
$\Rightarrow t(n) \leq c_t c_h g(n) \quad \forall n \geq \max\{n_{0t}, n_{0h}\}$
Chọn: $c = c_t c_h, n_0 = \max\{n_{0t}, n_{0h}\}$
Theo định nghĩa Big-O ta được $t(n) \in O(g(n))$
Vậy $\forall t(n) \in O(h(n))$ thì $t(n) \in O(g(n))$
$\Rightarrow O(h(n)) \subset O(g(n))$ (**)
Từ (*) và (**) $\Rightarrow O(h(n)) = O(g(n))$ nếu $h(n) \in O(g(n))$

Kết luận: $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))$ (đccm)
Dấu " = " xảy ra khi $h(n) \in O(g(n))$

III) $O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$

Chứng minh $\boldsymbol{g(n) \in O(f(n))}$ **và** $\boldsymbol{f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) = O(g(n))}$

Từ tính chất (II) được chứng minh ở trên:

Với $g(n) \in O(f(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(f(n))$ (1)

Với $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) \subseteq O(g(n))$ (2)

Từ (1) và (2) kết luận:

Nếu $g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) = O(g(n))$ (*)

Chứng minh $\boldsymbol{O(f(n)) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))}$ **và** $\boldsymbol{f(n) \in O(g(n))}$

Giả sử: $f(n) > 0$ và đơn điệu tăng $\forall n \geq n_{0f}$

$g(n) > 0$ và đơn điệu tăng $\forall n \geq n_{0g}$

Ta thấy: $f(n) \leq 2f(n) \quad \forall n \geq n_{0f}$

Chọn: $c = 2, n_0 = n_{0f}$

Theo định nghĩa Big-O ta được $f(n) \in O(f(n))$

Mà $O(f(n)) = O(g(n))$ nên $\Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ (3)

Bên cạnh đó, ta thấy: $g(n) \leq 2g(n) \quad \forall n \geq n_{0g}$

Chọn: $c = 2, n_0 = n_{0g}$

Theo định nghĩa Big-O ta được $g(n) \in O(g(n))$

Mà $O(f(n)) = O(g(n))$ nên $\Rightarrow g(n) \in O(f(n))$ (4)

Từ (3) và (4) kết luận:

Nếu $O(f(n)) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$ (**)

Từ (*) và (**) ta được:

$O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$ (đccm)

IV) $O(f(n)) \subset O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$

Được chứng minh trong tính chất (II) ở trên:

$f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) \subseteq O(g(n))$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $g(n) \in O(f(n))$

Tuy nhiên theo giả thuyết: $g(n) \notin O(f(n))$, vì vậy dấu " $=$ " sẽ không xảy ra.

Suy ra: nếu $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n)) \Rightarrow O(f(n)) \in O(g(n))$ (*)

Chứng minh chiều ngược lại:

Giả sử: $f(n) > 0$ và đơn điệu tăng $\forall n \geq n_{0f}$

$g(n) > 0$ và đơn điệu tăng $\forall n \geq n_{0g}$

Ta thấy: $f(n) \leq 2f(n) \quad \forall n \geq n_{0f}$

Chọn: $c = 2, n_0 = n_{0f}$

Theo định nghĩa Big-O ta được $f(n) \in O(f(n))$

Mà $O(f(n)) \subset O(g(n))$ nên $\Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ (1)

Áp dụng tính chất (III) được chứng minh ở câu trước:

$O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n)) \wedge f(n) \in O(g(n))$

$\Rightarrow O(f(n)) \neq O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \notin O(f(n)) \vee f(n) \notin O(g(n))$ (2)

Từ (1) và (2) ta được:

Nếu $O(f(n)) \subset O(g(n)) \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$ (**)

Từ (*) và (**) ta kết luận được:

$O(f(n)) \subset O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$ (đccm)

V) $f(n) \in O(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$

$f(n) \in O(n) \Rightarrow \exists c_f \in R^+, \exists n_{0f} \in N \rightarrow f(n) \leq c_f n \quad \forall n \geq n_{0f}$

$\Rightarrow 2^{f(n)} \leq 2^{c_f}.2^n \ \forall n \geq n_{0f}$

Chọn: $c = 2^{c_f}, n_0 = n_{0f}$

Theo định nghĩa Big-O ta được $2^{f(n)} \in O(2^n)$ (đccm)

$f(n) = n^3 + O(n^2)$

means

$f(n) = n^3 + h(n)$

for some $h(n) \in O(n^2)$

$n^2 + O(n) = O(n^2)$

means

for any $f(n) \in O(n)$:

$n^2 + f(n) = h(n)$

for some $h(n) \in O(n^2)$