

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN



BÀI TẬP

MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ

THUẬT TOÁN

KHOA: KHOA HỌC MÁY TÍNH

BONUS: ƯỚC LƯỢNG NHANH ĐỘ PHỨC TẠP DÙNG ĐỊNH LÝ MASTER

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

- 1. Trương Thành Thắng – 20521907**

$$1. T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + \log^5(n\sqrt{n})$$

$$a = 4, b = 5, \text{ và } n^{\log_b a} = n^{\log_5 4}$$

$$\text{Ta thấy: } f(n) = \log^5(n\sqrt{n}) = \frac{3}{2} \log^5(n) = O(n^{\log_5 4 - \epsilon}), \epsilon = 0.1$$

Áp dụng trường hợp 1 của Master Theorem ta được:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_5 4})$$

$$2. T(n) = 4T(\sqrt{n}) + \log^5 n$$

$$\text{Đặt } n = 2^m$$

$$\Rightarrow T(2^m) = 4T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + m^5$$

$$\text{Đặt } S(m) = T(2^m)$$

$$\Rightarrow S(m) = 4S\left(\frac{m}{2}\right) + m^5$$

$$a = 4, b = 2, m^{\log_b a} = m^{\log_2 4} = m^2$$

$$\text{Ta thấy: } f(m) = m^5 = \Omega(m^{2+\epsilon}), \epsilon = 0.1$$

$$\text{Và a. } f\left(\frac{m}{b}\right) \leq cf(m) \quad (\text{vì } 4\left(\frac{m}{2}\right)^5 = \frac{m^5}{8} \leq cm^5, c = \frac{1}{2})$$

Áp dụng trường hợp 3 của Master Theorem ta được: $S(m) = \Theta(m^5)$

$$\text{Hay } T(2^m) = \Theta(m^5)$$

Thay lại $m = \log n$ ta được:

$$T(n) = \Theta(\log^5 n)$$

$$3. T(n) = 4T(\sqrt{n}) + \log^2 n$$

$$\text{Đặt } n = 2^m$$

$$\Rightarrow T(2^m) = 4T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + m^2$$

$$\text{Đặt } S(m) = T(2^m)$$

$$\Rightarrow S(m) = 4S\left(\frac{m}{2}\right) + m^2$$

$$a = 4, b = 2, m^{\log_b a} = m^{\log_2 4} = m^2$$

$$\text{Ta thấy: } f(m) = m^2 = \Theta(m^2 \log^0 m)$$

Áp dụng trường hợp 2 của Master Theorem ta được: $S(m) = \Theta(m^2 \log m)$

$$\text{Hay } T(2^m) = \Theta(m^2 \log m)$$

Thay lại $m = \log n$ ta được:

$$T(n) = \Theta(\log^2 n \cdot \log(\log n))$$

$$5. T(n) = T(\sqrt{n}) + 5$$

Đặt $n = 2^m$

$$\Rightarrow T(2^m) = T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + 5$$

Đặt $S(m) = T(2^m)$

$$\Rightarrow S(m) = S\left(\frac{m}{2}\right) + 5$$

$$a = 1, b = 2, m^{\log_b a} = m^{\log_2 1} = 1$$

Ta thấy: $f(m) = 5 = \Theta(1 \cdot \log^0 m)$

Áp dụng trường hợp 2 của Master Theorem ta được: $S(m) = \Theta(\log m)$

Hay $T(2^m) = \Theta(\log m)$

Thay lại $m = \log n$ ta được:

$$T(n) = \Theta(\log(\log n))$$

$$6. T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 2T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{n}{10}\right) + 4n$$

Ta thấy 3 trường hợp trong Master Theorem không thể áp dụng được.

Áp dụng Akra-Bazzi method: $T(x) = g(x) + \sum_1^k a_i T(b_i x + h_i(x))$ $x \geq x_0$

$$g(x) = 4x, k = 3, a_1 = 1, b_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 2, b_2 = \frac{1}{5}, a_3 = 1, b_3 = \frac{1}{10},$$

$$h_1(x) = h_2(x) = h_3(x) = 0$$

$$T(x) = \Theta\left(x^p \left(1 + \int_1^x \frac{g(u)}{u^{p+1}} du\right)\right) \quad (*)$$

$$\text{Tìm } p: \sum_{i=1}^k a_i b_i^p = 1 \Rightarrow \frac{1^p}{2} + 2 \frac{1^p}{5} + \frac{1^p}{10} = 1 \Rightarrow p = 1$$

Thay $p = 1$ vào (*) ta được:

$$\begin{aligned} T(x) &= \Theta\left(x \left(1 + \int_1^x \frac{4u}{(4u)^2} du\right)\right) = \Theta\left(x \left(1 + \int_1^x \frac{4u}{(4u)^2} du\right)\right) \\ &= \Theta(x(1 + \ln x)) = \Theta(x \log x) \end{aligned}$$

Hay $T(n) = \Theta(n \log n)$

Akra-Bazzi method:

https://en.wikipedia.org/wiki/Akra%E2%80%93Bazzi_method