Алматы қ. ФМБ НЗМ математика семинарі

# Линейлық алгебра мен талдау

ред. А. Қажымұрат

2018

# Кіріспе

*Мысалдар жиыны, мүмкіндігінше үлкенірек, кез келген анықтаманы түсіну үшін маңызды. Оны жаңа нәрсе үйренгенде табу --- меңін бірінші талабым.*

*П. Халмош*

Бірнеше айнымалыларды функциялардың талдауы --- математикадағы ең пайдалы инструменттердің бірі. Ол физикада, инженерияда, қаржы саласында қолданыс табады. Осы лекцияларда біз таң қалдыратын құралмен танысамыз. Оқырманға жаттығуларды жасауды ұсынамын; жалпы алғанда, математиканы нақты мысал қарастырмай түсінуге болмады.

# ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА

## 1.1 Негізгі түсініктер

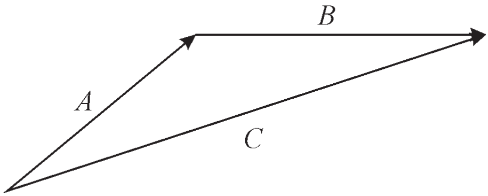
Ғылым мен техникада сандық мәнімен, яғни абсолют шамасымен ғана анықталатын шамалар жиі кездеседі. Мысалы, масса, уақыт, температура және т.б. Мұндай шамалар скалярлық деп аталады. Алайда кейбір шамалар сандық мәнімен ғана емес, сонымен қатар бағытымен де сипатталады. Мысалы: жылдамдық, үдеу, күш, импульс және т.б. Бұл шамалар – векторлық шамалар.

Жоғарыда аталған барлық векторлық шамалар механикада кездеседі. Алайда механиканың дамуы кезеңінде векторлық талдау мүлде пайдаланылмаған. Векторлық талдаудың қажеттілігі тек Максвелдің электромагниттік теориясы пайда болғаннан кейін ғана туындады. Себебі электр және магнит өрістерінің табиғаты векторлық болып табылады.

Кез келген векторлық шаманы графикалық түрде тілшікпен (стрелкамен) көрсету ыңғайлы болады. Себебі вектордың ұзындығы оның шамасына тепе-тең, ал оның бағыты – вектордың бағытын анықтайды. Әдетте осы тілшіктің бағыты оң ретінде қабылданады. Сонымен, аталған анықтамаға сәйкес векторлардың қосындысы:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \tag{1.1}$$

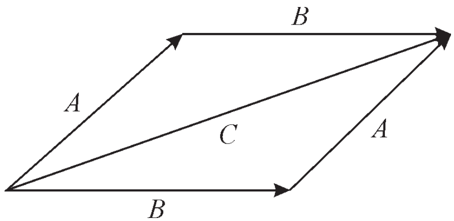
$\vec{A}$ векторының соңын $\vec{B}$ векторының басымен қосуды білдіреді. Яғни, $\vec{A}$ векторының соңы мен $\vec{B}$ векторының басын қосатын тілшік $\vec{C}$ векторын анықтайды. Векторларды қосудың осы (1.1) тәсілі үшбұрыш ережесі деп аталады (1.1-сурет).




**1.1-сурет.** Векторларды қосудың үшбұрыш ережесі

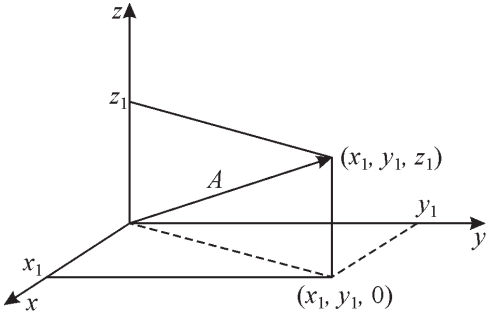
Үшбұрыш ережесін параллелограммға дейін толықтырып, параллелограмм ережесін таба аламыз (1.2-сурет).

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{1.2}$$




**1.2-сурет.** Векторларды қосудың параллелограмм ережесі.

Жалпы, векторлар координат жүйелеріне тәуелсіз геометриялық нысандар. Мысалы, $\vec{A}$ векторы (1.3-сурет) координаттар жүйесінің басынан басталып, $(x_1, y_1, z_1)$ нүктесінде аяқталады.



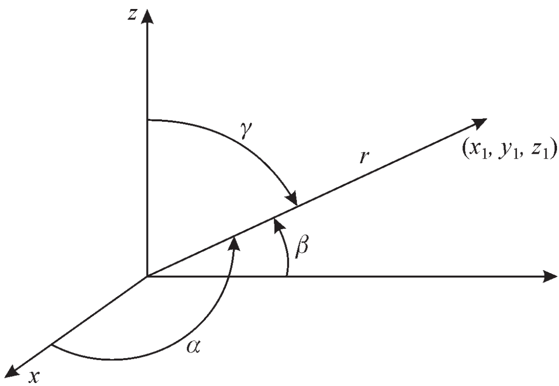

**1.3-сурет.** Декарттық координаталар жүйесіндегі вектордың құрамдас бөліктері

$\vec{A}$ таңбасымен кез келген векторлық шаманы (жылдамдық, үдеу, күш, импульс т.с.с.) белгілей аламыз. Бірақ кейбір шамаларды, мысалы, координаталар жүйесінің басынан $(x_1, y_1, z_1)$ нүктесіне дейінгі арақашықтықты арнайы $\vec{r}$ (радиус-вектор) таңбасымен белгілейді:

$$\vec{r} = (x_1, y_1, z_1), \tag{1.3}$$

$r$ – радиус-вектордың абсолют шамасы болсын. Демек,

$$x_1 = r \cdot cos\alpha, \quad y_1 = r \cdot cos\beta, \quad z_1 = r \cdot cos\gamma. \tag{1.4}$$




**1.4-сурет.** Бағыттаушы косинустар

Мұндағы: $cos\alpha$, $cos\beta$ және $cos\ \gamma$ бағыттаушы косинустар деп аталады, ал $\alpha, \beta$ және $\gamma$ сәйкесінше – $x, y$ және $z$ осьтерінің оң бағыттары мен $\vec{r}$ -векторының араларындағы бұрыштар (1.4-сурет). $x_1, y_1$ және $z_1$ шамаларын $\vec{r}$ радиус-векторының (декарттық) құрамдас бөліктері немесе кескіндері деп атайды.

Кез келген $\vec{A}$ векторын құрамдас бөліктерге жіктеуге болады:

$$A_x = A \cdot cos\alpha, \quad A_y = A \cdot cos\beta, \quad A_z = A \cdot cos\gamma. \tag{1.5}$$

Енді $\vec{i}, \vec{j}$ және $\vec{k}$ бірлік векторларын енгізейік. Олардың ұзындықтары бірге тең және бағыттары $x, y, z$ осьтерімен бағыттас болсын. Ендеше, векторларды қосу жолына сәйкес:

$$\vec{A} = \vec{i}\,A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z\,. \qquad (1.6)$$

Егер $\vec{A} = 0$ болса, онда $A_x = A_y = A_z = 0$. Пифагор теоремасына сәйкес $\vec{A}$ векторының абсолют шамасы:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Векторлардың кескіндік бейнеленуін пайдаланып, олардың қосындысы мен айырымдарын табуға болады. Мысалы, $\vec{A}$ векторы

$$\vec{A} = \vec{i}\,A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$$

және $\vec{B}$ векторы

$$\vec{B} = \vec{i}\,B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z$$

үшін келесі теңдік орынды:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = \vec{i}\left(A_x \pm B_x\right) + \vec{j}\left(A_y \pm B_y\right) + \vec{k}\left(A_z \pm B_z\right). \qquad (1.7)$$

**Жаттығулар**

1. $\vec{C}_1 = \left(\vec{A} + \vec{B}\right)$ және $\vec{C}_2 = \left(\vec{A} - \vec{B}\right)$ векторлары берілген. $\vec{A}$ және $\vec{B}$ векторларын табу керек.

2. Екі нүкте: $M_1(x_1,y_1,z_1)$ және $M_2(x_2,y_2,z_2)$ берілген. $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторын координаттық пішінде анықтаңыздар.

3. ABC үшбұрышының шыңдары берілген: A (1;1;1), B (3;0;1), C (0;3;1). BAC бұрышының биссектрисасының бойымен бағытталған векторға коллинеар (параллель) болатын бірлік векторын табыңыздар.

4. $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларынан үшбұрыш құрау үшін, векторлар қандай шарттарды қанағаттандыруы қажет?

5. $\vec{A} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ және $\vec{B} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ векторлары берілген. $\vec{A} + \vec{B}$ және $\vec{A} - \vec{B}$ табыңыздар.

6. Ұшақ $ABC$ үшбұрышының $AB$, $BC$ және $CA$ жақтарын сәйкесінше $t_1$, $t_2$, және $t_3$ уақыт аралықтарында ұшып өтеді. Ұшу

сапарында ұшақтың бағытына жел тұрақты $\vec{u}$ жылдамдықпен кедергі келтіреді. Ұшақтың $\vec{v}$ өзіндік жылдамдығы мен ұшақты ығыстыратын $\vec{u}$ жылдамдығын анықтаңыздар.

7. $\vec{\mathrm{A}}$ векторының ұзындығы 10-ға тең және координаталар осьтерімен тең бұрыштарды құрайды. Табыңыздар:$\mathrm{A}_x$, $\mathrm{A}_y$ және $\mathrm{A}_z$.

8. $xy$ жазықтығында жататын, $x$ және $y$ осьтерімен бірдей бұрыш жасайтын бірлік вектордың құрамдас бөліктерін табыңыздар.

9. Үш вектордың қосындысын табыңыздар. Олардың ұзындықтары $a$-ға тең және олардың бағыттары:

а) кубтың шыңынан басталатын үш қабырғалары;

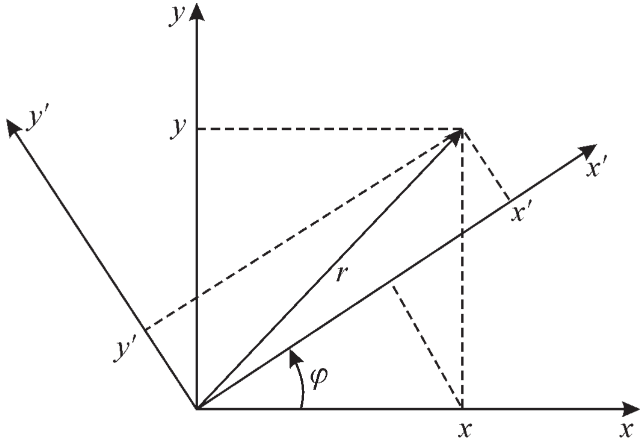
б) дұрыс үшбұрышты пирамиданың шыңынан қабырғалары бойымен бағытталған болса.

## 1.2 Координаталар жүйесінің бұрылуы

Математикалық тұрғыдан векторды оның абсолют шамасы және бағытымен анықтау тым қатал емес. Мысалы, кейбір шамалар (серпімділік коэффициенті, анизотроптық кристалдардағы сыну коэффициенті) абсолюттік шамаларымен және бағыттарымен сипатталғанмен, векторлық шама бола алмайды. Бұған қоса, вектордың аталған анықтамасы ыңғайсыздықтар туғызып қана қоймай, одан күрделірек шамалар үшін жалпыландыруға да келмейді.

Енді $\vec{r}$ радиус-векторды пайдаланып, вектордың жаңа анықтамасын берелік. Жаңа анықтаманы енгізудің физикалық маңызды себептері бар. Біз қоршаған өмірді математиканың көмегімен сипаттаймыз. Алайда физикалық сипаттау математикалық аппаратқа тәуелсіз болуы керек. Бұдан әрі кеңістікті изотропты деп қарастырамыз. Демек, зерттелетін физикалық жүйе немесе физикалық заң координаталар жүйесін таңдауға және оның бағыт-бағдарына тәуелсіз болуы қажет.

Бастапқы $\vec{r}$ радиус-векторына қайта оралайық. Енді $\vec{r}$ радиус-векторын екі әртүрлі жүйелерде қарастырамыз, яғни біріншісі екіншісімен салыстырғанда қандай да бұрышқа бұрылған болсын. Жеңілдік үшін екі өлшемді жағдаймен шектелейік (1.5-сурет).




**1.5-сурет.** Декарттық координаталар жүйесінің бұрылысы

Егер $x$ және $y$ осьтері сағат тілінің бағытына қарама-қарсы $\varphi$ бұрышына бұрылған және оған қоса $\vec{r}$ радиус-векторы бекітілген болса, келесі қатынастарды жазуға болады:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \tag{1.8}$$

Мұндағы: $(x, y)$ қозғалмаған және $(x', y')$ бұрылған жүйелердегі координаталар.

Векторды оның соңғы нүктесінің координаттары көмегімен бейнелеуге болатынын көрсеттік (1.1-бөлім). Басқаша айтқанда, осы нүктенің координаттары вектордың құрамдас бөліктеріне тепе-тең болады. Демек, координаталар осьтерінің бұрылысында вектордың құрамдас бөліктері нүктенің координаталары (немесе $\vec{r}$ радиус-векторы) тәрізді түрлендірілуі қажет. Егер $x$, $y$ декарттық координаталар жүйесіндегі кез келген $(\mathrm{A}_x, \mathrm{A}_y)$ шамалар жұбы осы координаталар жүйесінің бұрылысында $(\mathrm{A}'_x, \mathrm{A}'_y)$ жұбы төмендегідей түрлендірілсе:

$$\mathrm{A}'_x = \mathrm{A}_x \cos\varphi + \mathrm{A}_y \sin\varphi, \quad \mathrm{A}'_y = -\mathrm{A}_x \sin\varphi + \mathrm{A}_y \cos\varphi, \tag{1.9}$$

онда $\mathrm{A}_x, \mathrm{A}_y$ жұбы $\vec{A}$ векторының құрамдас бөліктері болып саналады. Сонымен, $\vec{A}$ векторы координаталар жүйесінің бұрылуы кезінде *вектор құрамдас бөліктерінің түрлендіру заңымен* анықталды. Егер координаталар жүйесінің бұрылысында $\mathrm{A}_x$ және $\mathrm{A}_y$ өзгеше түрлендірілсе, онда олардан вектор құруға болмайды.

Вектордың анықтамасы толығырақ болуы үшін (1.9) теңдеуіндегі $\mathrm{A}'_x$ және $\mathrm{A}'_y$ шамаларын айқындайық. Ол үшін $\vec{A}$ векторын координаттар және кез келген $\vec{C}$ тұрақты векторы құрамдас бөліктерінің қызметі ретінде қарастырамыз:

$$\mathrm{A}_x = \mathrm{A}_x(x, y, C_x, C_y), \ \mathrm{A}_y = \mathrm{A}_y(x, y, C_x, C_y). \tag{1.10}$$

Бұрылған координаталар жүйесінде $\vec{A}$ векторының құрамдас бөліктері:

$$\mathrm{A}'_x = \mathrm{A}'_x(x', y', C'_x, C'_y),$$

$$\mathrm{A}'_y = \mathrm{A}'_y(x', y', C'_x, C'_y). \tag{1.11}$$

(1.8) теңдеуін пайдаланып, $x', y', C'_x, C'_y$ координаттарын бұрылмаған координаталар жүйесімен $\varphi$ бұрылу бұрышы арқылы сипаттауға болады. Шындығында қандай да бір бұрылу бұрышына тәуелділік болуы қажет. Бірақ мұндай тәуелділіктің бағдарға байланыстылығы болмағаны жөн. Сол себепті бағдарға тәуелсіз функцияларды қарастырумен шектелеміз. Сондықтан дербес жағдайда $\varphi$=0 болғанда, онда

$$\mathrm{A}_x = \mathrm{A}'_x, \ \mathrm{A}_y = \mathrm{A}'_y.$$

**Мысалдар:**

1. (-*y*, *x*) шамаларының жұбы берілсін. Осы шамалар екі өлшемді вектор құратынын көрсетіңіздер.

Жүйені $\varphi$ бұрышына бұрғанда, осы шамалардың түрленуін қарастырайық.

$$V_x' = -y\cos\varphi + x\sin\varphi, \qquad V_y' = y\sin\varphi + x\cos\varphi,$$

мұндағы $V_x = -y$, $V_y = x$ (1.8) теңдеуін пайдаланып, $V_x' = -y'$ және $V_y' = x'$ екенін көреміз. Яғни, (1.9) теңдеуін қанағаттандырады. Демек, (*-y, x*) жұбы – вектордың құрамдас бөліктері болып табылады.

2. Енді $\vec{V} = \vec{i}x - \vec{j}y = (x, -y)$ қарастыралық. (1.8) теңдеуіне сәйкес:

$$V_x' = x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad V_y' = -y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi.$$

$V_x = x$ және $V_y = -y$ болғандықтан,

$$V_x' = V_x cos\varphi - V_y sin\varphi, \quad V_y' = V_x\sin\varphi + V_y\cos\varphi.$$

Бұл қатынастар вектордың анықтамасын қанағаттандырмайды. Сондықтан, $(x, -y)$ вектордың құрамдас бөліктері бола алмайды.

Үш және *n*-өлшемді кеңістіктерге өту үшін оңтайлы жазу тәсілдерін пайдаланалық:

$$\begin{aligned} &x = x_1, \quad a_{11} = \cos\varphi, \quad a_{12} = \sin\varphi, \\ &y = x_2, \quad a_{21} = -\sin\varphi, \quad a_{22} = \cos\varphi \end{aligned} \tag{1.12}$$

Онда (1.9) теңдеуін төмендегідей жазуға болады:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \qquad x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \tag{1.13}$$

$a_{ij}$ коэффициенттерін бағыттаушы косинустармен теңестіруге болады ($x_i'$ және $x_j$ араларындағы бұрыштың косинусы ретінде):

$$a_{12} = \cos(x_1', x_2) = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi,$$

$$a_{21} = \cos(x_2', x_1) = \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi.$$

Сонымен, (1.13) теңдеуін қысқаша былайша жазуға келеді:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j, \qquad i = 1,2. \tag{1.14}$$

Енді осы теңдеуді 3, 4 және одан да көп өлшемді жағдайлар үшін оңай жазуға болады. Егер $N$ – өлшемді $\vec{V}$ векторының құрамдас бөліктері $V_j$ $(j = 1,...,N)$ басқа (бұрылған) жүйеде мына теңдеумен :

$$V_i' = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} V_j, \qquad i = 1,2,...,N, \tag{1.15}$$

берілетін болса ғана, осы құрамдас бөліктер $N$ – өлшемді $\vec{V}$ векторын құрайды деп атауға болады. Мұндағы $a_{ij}$ - $x_i'$ және $x_j$ осьтері арасындағы бұрыштың косинусы.

Демек, $a_{ij}$ коэффициентінің анықтамасын декарттық координаттарда былайша жазуға болады (бұған 3-тарауда арнайы тоқталамыз):

$$a_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \ . \tag{1.16}$$

Бұл *дербес туындылар*. Осы (1.16) теңдеуін (1.15) теңдеуіне қойып, бұрылған жүйедегі мынадай теңдеуді аламыз:

$$V_i' = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} V_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} V_j \ . \tag{1.17}$$

Бағыттаушы косинустар $a_{ij}$ ортогоналдық шарттарын қанағаттандырады,

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \ , \tag{1.18}$$

немесе

$$\sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} \ . \tag{1.19}$$

Мұндағы $\delta_{jk}$ – Кронекер таңбасы деп аталады және төмендегідей анықталады:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & егер \quad j = k, \\ 0, & егер \quad j \neq k. \end{cases} \tag{1.20}$$

(1.12) теңдеуіндегі $a_{ij}$ мәндерін (1.18) және (1.19) өрнектеріне қоятын болсақ, онда белгілі теңдікті аламыз:

$$sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$$

(1.18) теңдеуінің дұрыстығына көз жеткізу үшін (1.16) өрнегін пайдаланайық:

$$\sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \tag{1.21}$$

*Қорытынды.* Вектордың құрамдас бөліктерін түрлендіру заңын енгізу нәтижесінде вектордың жаңа анықтамасынан екі маңызды қорытынды жасаймыз:

1. әртүрлі физикалық құбылыстарды сипаттауға қолайлы;
2. математиканың жаңа бөлімі – тензорлық талдауға көшуге негіз береді.

**Жаттығулар**

1. Тұрақты $\vec{V}$ $(V_x = 1, \quad V_y = 0)$ векторы берілген. Бұрылған координаталар жүйесінде осы вектордың құрамдас бөліктері $V_x' = \cos\varphi, \quad V_y' = -\sin\varphi$ болатынын көрсетіңіздер. (Тұрақты векторды енгізу арқылы, кеңістіктегі анықталған бағытты ерекшеледік).

2. Келесі шамаларды:

а) (*x-y, x+y, 0*) векторын *z* осінің бойымен;

б) (*0, 2z+y, z-2y*) векторын *x* осінің бойымен;

в) $(y^2 + z^2, -xy, -xz)$ векторын әрбір осьтердің бойымен бұрғанда, вектордың түрлендіру заңын, яғни (1.15) теңдеуін қанағаттандыратынын тексеріңіздер.

3. $(xyC_x + y^2C_y, -x^2C_x - xyC_y)$ және $(xyC_x - x^2C_y, y^2C_x - xyC_y)$ шамаларының әр қайсысы вектор құратынын дәлелдеңіздер. Мұндағы $C_x$ және $C_y$ шамалары тұрақты $\vec{C}$ векторының құрамдас бөліктері.

4. Кез келген координаталардың осьтері бойынша бұрылыстарды зерттеп, келесі сұраққа жауап беріңіздер:

$V_x = a_1(x^2 + y^2 + z^2)$,

$V_y = a_2(x^2 + y^2 + z^2)$,

$V_z = a_3(x^2 + y^2 + z^2)$, шамалары вектордың құрамдас бөліктері бола ма (мұндағы $a_i -$ тұрақтылар)?

5. Екі өлшемді $\vec{V}$ векторы ($ax+by$, $cx+dy$) түрінде берілген, мұндағы $a, b, c, d-$ тұрақты сандар. $\vec{V}$ векторы радиал $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$ және тангенциал $\vec{t} = \vec{i}y - \vec{j}x$ векторлардың сызықтық комбинациясы, яғни $\vec{V} = a\vec{r} + b\vec{t}$ болатынын дәлелдеңіздер.

*Ескерту*. Векторлық түрлендіру заңы кез келген бұрыш және кез келген нүкте ($x, y$) үшін орындалады.

## 1.3 Скалярлық көбейтінді

Векторларды көбейту заңдары бір-біріне математикалық қайшы келмеуі керек. Әзірге барлық мүмкін болатын анықтамалар арасынан физикалық және математикалық тұрғыдан қызығырақ болатын екі жағдайды қарастырайық.

$A \cdot B \cdot cos\theta$ түрінде берілген көбейтінді физикада жиі кездеседі. Мұндағы $A, B$ екі вектордың абсолют шамалары және $\theta -$ олардың арасындағы бұрыш.

Мысалы: жұмыс =күш×жол× $cos\theta$.

Енді скалярлық көбейтіндіні төмендегідей анықтайық:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \sum_i A_iB_i \quad (1.22)$$

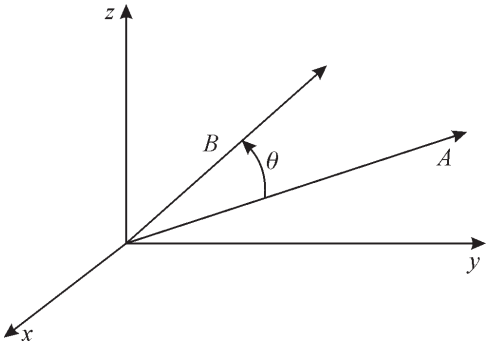
(1.22) өрнегінен $\vec{\mathrm{A}} \cdot \vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{B}} \cdot \vec{\mathrm{A}}$ теңдігі орындалатынын көреміз. Бірлік векторлар келесі қатынастарды қанағаттындырады:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \tag{1.22а}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0 . \tag{1.22б}$$

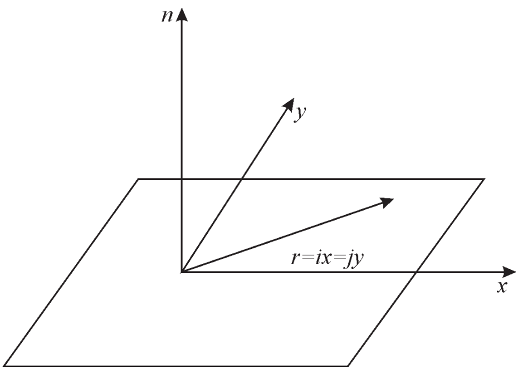
Егер осьтерді қайта бағдарлап, $x$ осін $\vec{A}$ векторы бойынша бағыттасақ (1.6-сурет), онда $\mathrm{A}_x = A$, $A_y = A_z = 0$ және $B_x = B \cdot cos\theta$ болады. Олай болса, (1.22) теңдеуінен келесі өрнекті аламыз:

$$\vec{\mathrm{A}} \cdot \vec{\mathrm{B}} = \mathrm{A} \cdot B \cdot cos\theta. \tag{1.23}$$




**1.6-сурет.** Скалярлық көбейтінді

Егер $\vec{\mathrm{A}} \cdot \vec{\mathrm{B}} = 0$ және $\vec{A} \neq 0$, $\vec{B} \neq 0$ болса, онда (1.23) теңдеуінен келесі қорытынды шығады: $\theta = 90^0, 270^0$ және т.с.с. Басқаша айтқанда, $\vec{A}$ және $\vec{\mathrm{B}}$ – өзара перпендикуляр немесе олар ортогоналды векторлар. $\vec{i}, \vec{j}$ және $\vec{k}$ векторлары да өзара ортогоналды.




**1.7-сурет.**

Ортогоналдылық түсінігін одан әрі дамыту үшін $\vec{n}-$ бірлік векторы, ал $\vec{r}=\vec{i}x+\vec{j}y$ $-x,\ y$ жазықтығында жататын нөлдік емес вектор ретінде қабылдайық. Егер $\vec{n}\cdot\vec{r}=0$ болса, мұндағы $\vec{r}$ –кез келген вектор, онда $\vec{n}$ векторы $xy$ жазықтығына перпендикуляр орналасады (1.7-сурет).

Енді скалярлық аталуын ақтайтынына көзімізді жеткізелік. Ол үшін $\vec{\mathrm{A}}\cdot\vec{\mathrm{B}}$ көбейтіндісін координаталар жүйесінің бұрылуы кезінде зерттейік. (1.15) теңдеуінің көмегімен скалярлық көбейтіндіні келесі түрде жазамыз:

$$\mathrm{A}'_x\cdot\mathrm{B}'_x+\mathrm{A}'_y\cdot\mathrm{B}'_y+\mathrm{A}'_z\cdot\mathrm{B}'_z=$$

$$=\sum_i a_{xi}A_i\sum_j a_{xj}B_j+\sum_i a_{yi}A_i\sum_j a_{yj}B_j+\sum_i a_{zi}A_i\sum_j a_{zj}B_j \tag{1.24}$$

$k$ және $l$ көрсеткіштерін пайдаланып, келесі өрнекті аламыз:

$$\sum_k A'_kB'_k=\sum_l\sum_i\sum_j a_{li}A_ia_{lj}B_j= \tag{1.25}$$

$$=\sum_i\sum_j\sum_l(a_{li}a_{lj})A_iB_j=\sum_i\sum_j\delta_{ij}A_iB_j=\sum_i A_iB_i \tag{1.26}$$

ал (1.26) өрнегі келесі теңдікке жеткізеді:

$$\sum_k A'_kB'_k=\sum_i A_iB_i \tag{1.27}$$

Сонымен, скалярлық шаманың анықтамасына сәйкес, ол (скалярлық шама) координаталар жүйесінің бұрылысына ***инвариантты***.

Аналогиялы түрде, скалярлық көбейтіндінің инварианттылығын пайдаланып, $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ векторының өз-өзіне көбейтіндісін қарастырайық:

$$\vec{C}\cdot\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}+2\vec{A}\cdot\vec{B}, \tag{1.28}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{C}=C^2, \tag{1.29}$$

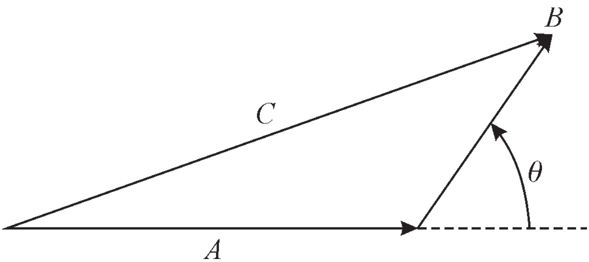
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\frac{1}{2}(C^2-A^2-B^2)\,. \qquad (1.30)$$

$\vec{A}\cdot\vec{B}$ векторының көбейтіндісі координаталар жүйесінің бұрылысына инвариантты, себебі (1.30) теңдеуінің оң жағы скалярлық шама.

(1.28) теңдеуіне (1.23) өрнегін қойып, қайта жазалық:

$$C^2=A^2+B^2+2A\cdot B\cdot cos\theta\,. \qquad (1.31)$$

Бұл – *косинустар заңы* деп аталады, осы косинустар заңы 1.8-суретте кескінделген.




**1.8-сурет.** Косинустар заңы

(1.28) және (1.31) теңдеулерін салыстырып, косинустар заңының векторлық табиғатына тағы да көзімізді жеткіземіз.

**Жаттығулар**

1. Екі вектордың бағыттаушы косинустары $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ және $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ берілген. Скалярлық көбейтіндіні пайдаланып, $cos\theta=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1 cos\beta_2+\cos\gamma_1 cos\gamma_2$ екенін көрсетіңіздер. Мұндағы $\theta$ – векторлар арасындағы бұрыш.

2. $\vec{A}=3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$ және $\vec{B}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңыздар. (Жауабы: $\theta=\dfrac{\pi}{2}$).

3. Екі бірлік векторлар $\vec{a}_i$ және $\vec{a}_j$ не параллель, немесе перпендикуляр. Бағыттаушы косинустардың ортогоналдылығы (1.18) теңдеуіне сәйкес осы векторлардың скалярлық көбейтіндісінен шығатынын көрсетіңіздер.

4. $\vec{a} = \vec{i} m \cos\varphi + \vec{j} m \sin\varphi$ және $\vec{b} = \vec{i} n \cos\varphi + \vec{j} n \sin\varphi$ векторларының арасындағы бұрышты табыңыздар.

5. Екі вектор берілген: $\vec{l}_1 = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$ және $\vec{l}_2 = 3\vec{b} - 2\vec{c} - \vec{a}$. Осы екі вектормен үшбұрыш құрайтын векторды табыңыздар.

6. $\vec{a} = \vec{i}\alpha\cos\varphi + \vec{j}\alpha\sin\varphi$ векторы берілген. $|\vec{a}|$ – векторының модулін және $\vec{a}_0$ – бірлік векторын табыңыздар.

7. ABC үшбұрышында $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ және $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ векторлары берілген. $m_1, m_2, m_3$ – үшбұрыш қабырғаларының орталары. Үшбұрыштың медианаларына сәйкес болатын $\overrightarrow{Am_1}$, $\overrightarrow{Bm_2}$ және $\overrightarrow{Cm_3}$ векторларын табыңыздар.

8. $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары үшбұрышты құрайды. Табу керек: $(\vec{a}\cdot\vec{F}) + (\vec{b}\cdot\vec{F}) + (\vec{c}\cdot\vec{F})$.

9. Үшбұрыштың шыңдары берілген: $A(-1; 1)$, $B(-5; 4)$, $C(7; 7)$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ және үшбұрыштың ауданын табыңыздар.

10. $\vec{a}\,(6;\ -8;\ 5\sqrt{2})$ және $\vec{b}\,(2;\ -4;\ \sqrt{2})$ векторлары берілген. $\vec{a} - \vec{b}$ векторы мен $Oz$ осінің арасындағы бұрышты табыңыздар.

11. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ бірлік векторлары келесі шартты қанағаттандыратынын $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 0$ пайдаланып, $(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1)$ шамасын табыңыздар.

## 1.4 Векторлық көбейтінді

Векторлық көбейтіндіде екі вектордың арасындағы бұрыштың синусын пайдаланады.

$$\vec{C} = \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}, \tag{1.32}$$

мұндағы: $C = A \cdot \mathrm{B} \cdot sin\theta$. Бірақ скалярлық көбейтіндімен салыстырғанда мұндағы $\vec{C}$ – вектор, ал оның бағыты $\vec{A}$ және $\vec{\mathrm{B}}$ векторлары жатқан жазықтыққа перпендикуляр болады. Бұған қоса, $\vec{A}$, $\vec{\mathrm{B}}$ және $\vec{C}$ векторларының жинағы оң координаталар жүйесін құрайды. Бағыттарды осылайша таңдағандықтан, антикоммутация шартын қанағаттандырады

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = -\vec{\mathrm{B}} \times \vec{\mathrm{A}}. \tag{1.32a}$$

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0, \tag{1.32б}$$

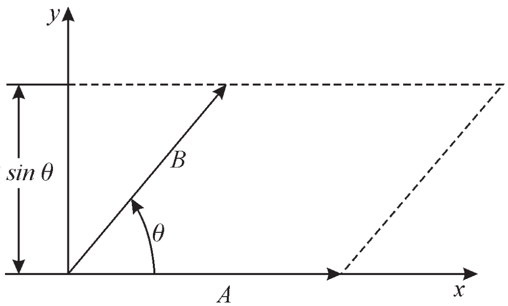
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$

(1.32в)

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Векторлық көбейтіндінің маңызды геометриялық түсініктемесі бар (1.9-сурет).

$|\vec{A}\times\vec{B}|=A\cdot B\cdot sin\theta$ – параллелограмм ауданы. Сонымен, $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ векторы параллелограмм жазықтығына перпендикуляр, ал абсолют шамасы бойынша параллелограмның ауданына тең болады.




**1.9-сурет.** Векторлық көбейтіндіні параллелограмм түрінде бейнелеу

Векторлық көбейтіндінің $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ басқа анықтамасы $\vec{C}$ векторының құрамдас бөліктерінің жазылу түрімен байланысты:

$$C_x=A_yB_z-A_zB_y,\quad C_y=-A_xB_z+A_zB_x,$$

(1.33)

$$C_z=A_xB_y-A_yB_x,$$

немесе

$$C_i=A_jB_k-A_kB_j,\qquad i,j,k-\text{ әртүрлі.} \tag{1.34}$$

$i, j, k$ – көрсеткіштерінің кезеңдік өзгерісі.

Векторлық көбейтіндіні анықтауыш  ретінде жазған ыңғайлы:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (1.35)$$

(1.32) және  (1.33) көбейтінділерінің эквивалентті болатынын көрсетейік. Ол үшін $\vec{A}\cdot\vec{C}$ және $\vec{B}\cdot\vec{C}$ скалярлық көбейтінділерін қарастырайық.

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = A_x(A_yB_z - A_zB_y) +$$
$$+A_y(A_zB_x - A_xB_z) + A_z(A_xB_y - A_yB_x) = 0, \qquad (1.36)$$

$$\vec{B}\cdot\vec{C} = \vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = 0\,, \qquad (1.37)$$

Демек, (1.36) және (1.37) теңдеулері $\vec{C}$ векторы $\vec{A}$ векторына да, $\vec{B}$ векторына да перпендикуляр, бұған қоса $\vec{A}$ және $\vec{B}$ векторлары жатқан жазықтыққа да перпендикуляр екендігін көрсетеді.

Келесі көбейтіндіні қарастырайық:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = A^2B^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2 =$$
$$= A^2B^2 - A^2B^2cos^2\theta = A^2B^2sin^2\theta, \qquad (1.38)$$

яғни,
$$C = A\cdot B\cdot sin\theta \qquad (1.39)$$

(1.38) теңдеуінде $\vec{A}\times\vec{B}$ көбейтіндісін (1.33) теңдеуі бойынша құрамдас бөліктерге жіктедік, содан кейін (1.22) скалярлық көбейтіндінің теңдеуін пайдаландық. (1.32) және (1.33) анықтамаларының эквивалентті екендігін (1.36), (1.37) және (1.39) теңдеулерінен көреміз.

Енді $\vec{C} = \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}$ векторлық шама болатынын, яғни вектордың түрлендіру заңына бағынатынын көрсетейік. Бұрылған координаталар жүйесінде:

$$C_i' = A_j' B_k' - A_k' B_j' =$$

$$= \sum_l a_{jl} A_l \cdot \sum_m a_{km} B_m - \sum_l a_{kl} A_l \sum_m a_{jm} B_m =$$

$$= \sum_{l,m} \left( a_{jl} a_{km} - a_{kl} a_{jm} \right) A_l B_m , \tag{1.40}$$

мұндағы $i, j, k$ кезеңдік (циклдік) ретте өзгереді. Ал $m = l$ болғанда (1.40) жақшаның ішіндегі өрнек нөлге тең. Сондықтан $j, k$ индекстері анықталған мәндерді ғана қабылдай алады, ол - $i$ индексінің таңдалуына және $m$, $l$ индекстерінің алты комбинациясына тәуелді.

Мысалы, $i$=3 болсын. Онда $j$=1, $k$=2 (кезеңдік рет) болғандықтан, бағыттаушы косинустар жинағы үшін:

$$\begin{gathered} a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = a_{33}, \;\; a_{13} a_{21} - a_{23} a_{11} = a_{32}, \\ a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} = a_{31}. \end{gathered} \tag{1.41}$$

(1.41) теңдіктерін (1.40) теңдеуіне қоямыз, нәтижесінде:

$$C_3' = a_{33} A_1 B_2 + a_{32} A_3 B_1 + a_{31} A_2 B_3 -$$

$$- a_{33} A_2 B_1 - a_{32} A_1 B_3 - a_{31} A_3 B_2 = \tag{1.42}$$

$$= a_{31} C_1 + a_{32} C_2 + a_{33} C_3 = \sum_n a_{3n} C_n .$$

Индекстерді алмастыра отырып, $C_1'$ және $C_2'$ үшін ұқсас өрнектерін табамыз. Олар (1.15) шартын қанағаттандырады. Яғни, $\vec{C}$ векторлық шама болып табылады.

**Жаттығулар**

1. $\vec{A}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$ және $\vec{B}=3\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ векторлары берілген. Осы векторлардың скалярлық және векторлық көбейтінділерін табыңыздар: $\vec{A}\cdot\vec{B}$ және $\vec{A}\times\vec{B}$.

2. Мына теңдіктерді дәлелдеңіздер.

$$(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})=A^2-B^2, \quad (\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B})=2\vec{A}\times\vec{B},$$
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}, \qquad \vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}.$$

3. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш $\varphi=150^0$. Ал олардың ұзындықтары сәйкесінше $m$ және $2m$ болсын. Векторлардың скалярлық және векторлық көбейтінді-лерін табыңыздар.

4. Екі вектор берілген: $\vec{a}\perp\vec{b}$ және $|\vec{b}|=2|\vec{a}|=\gamma$. $\vec{a}+\gamma\vec{b}$ және $\vec{a}-\gamma\vec{b}$ векторларының скалярлық және векторлық көбейтінділерін табыңыздар.

5. Егер $\vec{a}\perp(\vec{b}\times\vec{c})$ болса, онда $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының компланарлы болатынын көрсетіңіздер.

6. $\vec{l}_1=\vec{i}\alpha+\vec{k}\beta$ және $\vec{l}_2=\vec{i}\gamma+\vec{k}\delta$ векторларының векторлық көбейтіндісін табыңыздар.

7. Үшбұрыштың шыңдары берілген: (2, 1, 5), (5, 2, 8) және (4, 8, 2). Векторлық талдаудың көмегімен үшбұрыштың ауданын табыңыздар.

8. $\vec{P}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{Q}=-6\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ және $\vec{R}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ векторлары берілген. Қайсысы өзара перпендикуляр және өзара параллель немесе антипараллель болатынын анықтаңыздар.

9. $\vec{P}=\vec{i}cos\theta+\vec{j}sin\theta$, $\vec{Q}=\vec{i}cos\varphi-\vec{j}sin\varphi$, $\vec{R}=\vec{i}cos\varphi+\vec{j}sin\varphi$ векторларын пайдаланып, белгілі тригонометриялық өрнектерді дәлелдеңіздер:

$$sin(\theta+\varphi)=sin\theta cos\varphi+cos\theta sin\varphi,$$

$$cos(\theta+\varphi)=cos\theta cos\varphi-sin\theta sin\varphi.$$

10. $\vec{U} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ және $\vec{V} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ векторларына перпендикуляр $\vec{\mathrm{A}}$ векторын анықтаңыздар. Сонымен қатар оның абсолют шамасы бірге тең болуы үшін, $\vec{\mathrm{A}}$ векторына қандай қосымша шарттар қажет?

11. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ және $\vec{d}$ векторлары бір жазықтықта жатыр. Онда $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = 0$ болатынын көрсетіңіздер.

12. Сфералық ABC үшбұрышының $\vec{A} = (1,0,0)$, $\vec{B} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{C} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ шыңдары берілген (1.10-сурет). Векторлар координаталар басынан басталады. Осы үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштарын табыңыздар.

13. $\vec{B}$ магниттік индукция векторы $\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B})$ Лоренц теңдеуімен анықталады, мұндағы $\vec{V}$ – заряды $q$ болатын бөлшектің жылдамдығы, ал $\vec{F}$ – зарядқа әсер ететін күш.

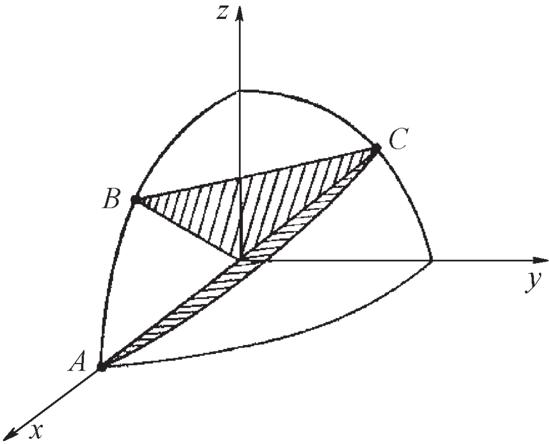
Тәжірибелер жүргізу барысында анықталғаны:

1) $\vec{V} = \vec{i}$, $\quad \dfrac{\vec{F}}{q} = 2\vec{k} - 4\vec{j}$;

2) $\vec{V} = \vec{j}$, $\quad \dfrac{\vec{F}}{q} = 4\vec{i} - \vec{k}$;

3) $\vec{V} = \vec{k}$, $\quad \dfrac{\vec{F}}{q} = \vec{j} - 2\vec{i}$.

Осы тәжірибелердің нәтижелерінен магниттік индукцияны табыңыздар. *Жауабы*: $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.




**1.10-сурет.** Сфералық үшбұрыш

14. Тепе-теңдікті дәлелдеңіздер: $[\vec{a}\times\vec{b}]+[\vec{b}\times\vec{c}]+[\vec{c}\times\vec{a}]=[(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{b}-\vec{c})]$.

15. Теңдеуді дәлелдеңіздер: $[\vec{a}\times\vec{c}]\square[\vec{d}\times\vec{b}]$ және $[\vec{b}\times\vec{c}]\square[\vec{d}\times\vec{a}]$, мұндағы $(\vec{a}+\vec{b})\square(\vec{c}+\vec{d})$ және $(\vec{a}-\vec{b})\square(\vec{c}-\vec{d})$

16. Теңдеуді дәлелдеңіздер: $(\vec{i}\times\vec{a})\times\vec{i}+(\vec{j}\times\vec{a})\times\vec{j}+(\vec{k}\times\vec{a})\times\vec{k}=\vec{a}$

17. Теңдеуді шешіңіздер: $\vec{a}=[\vec{i}\times(-\vec{j})]\times[(-\vec{i})\times\vec{k}]$; $\vec{s}=[(-\vec{j})\times(-\vec{i})]\times[\vec{k}\times(-\vec{i})]$.

## 1.5 Үш вектордың аралас және екі ретті векторлық көбейтінділері

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ және $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ – мұндай көбейтінділердің комбинациясы жиі кездеседі. Әдетте біріншісін *аралас көбейтінді* деп атайды. $\vec{B}\times\vec{C}$ – векторлық көбейтіндісінен шығатын вектор $\vec{A}$ векторына скалярлық түрде көбейтіледі. Демек скалярлық шама шығады.

Ал, $(\vec{A}\cdot\vec{B})\times\vec{C}$ көбейтіндісі белгісіз. Себебі скалярлық және векторлық шамалардың векторлық көбейтіндісі – анықталмаған операция. Сондықтан оны әзірге қарастырмаймыз.

(1.33), (1.22) теңдеулерін пайдаланып, келесі теңдіктерді табамыз:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) +$$

$$+A_z(B_xC_y - B_yC_x) = B_x(A_zC_y - A_yC_z) +$$

$$+B_y(A_xC_z - A_zC_x) + B_z(A_yC_x - A_xC_y) = \qquad (1.43)$$

$$= \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A} = \vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{A}\cdot\vec{C}\times\vec{B} =$$

$$= -\vec{C}\cdot\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{B}\cdot\vec{A}\times\vec{C},$$

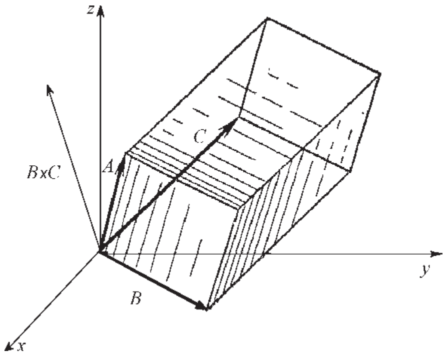
және т.с.с.

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}\,. \qquad (1.44)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (1.45)$$

Анықтауыштың қатарларын бағаналарға алмастыру ережесінен (1.43) теңдеуінің орындарын алмастыру қатынастары шығады. Бұған қоса $\vec{A}, \vec{B}$ және $\vec{C}$ векторлары симметриясының осылайша жазылуы (1.44) шартының орындалуын қамтамасыз етеді.

Үш вектордың аралас көбейтіндісінің геометриялық түсініктемесі бар: егер $\vec{A}, \vec{B}$ және $\vec{C}$ векторлары параллелепипедтің "қабырғалары" болса (1.11-сурет), онда $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ көбейтіндісінің шамасы осы параллелепипедтің көлеміне тең болады (әрине, аралас көбейтінді теріс санға да тең болуы мүмкін).




**1.11-сурет.** Үш вектордың аралас көбейтіндісінің геометриялық түсініктемесі

Себебі,

$$\left|\vec{B}\times\vec{C}\right| = \mathrm{B}\cdot\mathrm{C}\cdot\sin\theta \tag{1.46}$$

параллелограмның ауданы. Ал $(\vec{B}\times\vec{C})$ векторының бағыты, әрине, осы параллелограмм жазықтығына перпендикуляр болады. Соңғы вектордың $\vec{A}$ векторына скалярлық көбейтіндісі – параллелограмм нормалі мен $\vec{A}$ векторының арасындағы косинусына (яғни параллелограмның «биіктігіне») пропорционал. Демек, $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ аралас көбейтіндісі осы үш вектордан «құралған» параллелепипедтің көлеміне тең болады.

Мысалы: $\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{B}=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{C}=\vec{i}-\vec{j}$ векторлары берілген. Ендеше.

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=4 \tag{1.47}$$

Бұл $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ векторларымен анықталған параллелепипедтің көлеміне тең. Жоғарыда атап өткеніміздей, кейбір жағдайларда көбейтіндінің шамасы теріс болуы да мүмкін.

Енді $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ – *екі ретті векторлық көбейтіндіні* қарастырайық. Бұл жолы жақшаны сақтау керек. Оған көз жеткізу үшін мына дербес жағдайды қарастырайық:

$$\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{j})=\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\ \text{ал }(\vec{i}\times\vec{i})\times\vec{j}=0. \qquad (1.48)$$

Демек, екі ретті векторлық көбейтіндіден вектор шығады. Оның бағыты $\vec{A}$ және $(\vec{B}\times\vec{C})$ векторлары жататын жазықтыққа перпендикуляр. Қорытқы $\vec{D}=\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ – векторы $\vec{B}$ және $\vec{C}$ векторлары табылатын жазықтықта жатады. Себебі $BC$ жазықтығы $(\vec{B}\times\vec{C})$ векторына перпендикуляр. Сондықтан, $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ векторының құрамдас бөліктері $\vec{B}$ және $\vec{C}$ векторларының сызықты комбинациясына байланысты:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \qquad (1.49)$$

Аралас және екі ретті векторлық көбейтінділер арқылы векторлардың өзге күрделі көбейтінділерін жеңілдетуге болады.

**Мысал.** Векторлардың аралас көбейтіндісін кристалл торларының кері шамаларын құрауда қолайлы болады. $\vec{a},\vec{b}$ және $\vec{c}$ (өзара перпендикуляр болуы міндетті емес) – кристалл торларын анықтайтын векторлар болсын. Онда кез келген торлардағы екі нүктенің арақашықтығы

$$\vec{r}=n_a\vec{a}+n_b\vec{b}+n_c\vec{c}$$

теңдеуімен беріледі. Мұндағы, $n_a, n_b$ және $n_c$- бүтін сандар. Берілген векторлардың көмегімен келесі қатынастарды жаза аламыз:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}};\ \vec{b}'=\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}};\ \vec{c}'=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}} \qquad (1.50)$$

(1.50) теңдеуінен, $\vec{a}'$ векторы ($\vec{b}$ және $\vec{c}$) жазықтығына перпендикуляр, ал абсолют шамасы $a^{-1}$ - ге пропорционал. Шынында,

$$\vec{a}'\vec{a}=\vec{b}'\vec{b}=\vec{c}'\vec{c}=1,$$

$$\vec{a}'\vec{b}=\vec{a}'\vec{c}=\vec{b}'\vec{a}=\vec{b}'\vec{c}=\vec{c}'\vec{a}=\vec{c}'\vec{b}=0.$$

Соңғы теңдеулер торлардың кері шамаларын анықтайды. Торлардың кері шамалары толқындардың кристалдағы әртүрлі жазықтықтарындағы шашырау есептерінің шешімдерін табу үшін қажет.

**Жаттығулар**

1. $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ формуласын дәлелдеңіздер.

2. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$ болатынын көрсетіңіздер.

3. $\vec{A}$ векторы $\vec{A}_r$ радиалдық және $\vec{A}_t$ тангенциалдық векторларға жіктелген, $\vec{r}_0$- радиалдық бағыттағы бірлік вектор. $\vec{A}_r=\vec{r}_0(\vec{A}\cdot\vec{r}_0)$ және $\vec{A}_t=-\vec{r}_0\times(\vec{r}_0\times\vec{A})$ екенін көрсетіңіздер.

4. Үш (нөлдік емес) $\vec{A},\vec{B}$ және $\vec{C}$ векторларының компланарлығының қажетті және жеткілікті шарты олардың аралас көбейтінділерінің нөлге тең болатынын дәлелдеңіздер.

5. Мынадай векторлар берілген:

$$\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k},$$

$$\vec{B}=4\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k},$$

$$\vec{C}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},$$

$$\vec{D}=6\vec{i}+5\vec{j}+4\vec{k}.$$

Келесі амалдарды орындаңыздар:

а) векторлардың қосындылары мен айырымдарын:

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D};$$

$$\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}-\vec{D};$$

$$\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}-\vec{D};$$

$$-\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}+\vec{D};$$

б) $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ векторларының координата осьтерімен құрайтын бұрыштарын;

в) $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ векторларының модульдерін;

г) алғашқы және соңғы екі векторлар қосындыларының скалярлық және векторлық көбейтінділерін;

д) $\vec{A}$ векторының өзге $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ векторларымен құрайтын бұрыштарын;

е) $\vec{A}$ векторының $\vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ векторларының бағыттарына проекцияларын;

ж) $\vec{A}\times\vec{B}$, $\vec{A}\times\vec{C}$, $\vec{B}\times\vec{C}$ векторлық көбейтінділерін және олардың $\vec{D}$ векторымен құрайтын бұрыштарын;

з) $\vec{A}$ және $\vec{B}$,; $\vec{C}$, және $\vec{D}$ векторлары құрайтын параллелограмдардыңаудандарынжәнеосыпараллелограмдардың диагональдарын;

и) барлық $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ және $\vec{D}$ векторлары бір жазықтықта жататынын көрсетіңіздер;

к) келесі амалдарды орындаңыздар:

$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$ және $\vec{D}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$; $\vec{A}\cdot\vec{D}\times\vec{C}$ және $\vec{D}\cdot\vec{B}\times\vec{A}$;

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$, $\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})$ және $\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})$ ;

$\vec{D}\times(\vec{B}\times\vec{C})$, $\vec{C}\times(\vec{D}\times\vec{B})$ және $\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})$ ;

$\vec{A}\times(\vec{D}\times\vec{C})$, $\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{D})$ және $\vec{D}\times(\vec{C}\times\vec{A})$;

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{D})$, $\vec{D}\times(\vec{A}\times\vec{B})$ және $\vec{B}\times(\vec{D}\times\vec{A})$.

6. Үш вектор берілген: $\vec{A}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{B}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{C}=-3\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$. Мынадай көбейтінділерді табыңыздар: $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$ және $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$, $\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})$ және $\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})$.

7. Векторлар келесі түрде берілген

$$\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k},$$

$$\vec{B}=4\vec{i}+5\vec{j},$$

$$\vec{C}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.$$

Осы векторлар қандай (оң немесе сол) жүйені құрайды?

Келесілерді анықтаңыздар:

а) осы векторлар құрайтын параллелепипедтің көлемін;

б) параллелепипедтің ($A$ векторының соңынан басталатын) екі диагональдарын, олар құрайтын векторларды және ұзындықтарын;

в) $\vec{A}$ және $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$, $\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})$ және $\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})$ векторлары арқылы жүргізілген параллелепипедтің диагональдік қимасының ауданын;

8. $\vec{F}$ күші $\vec{r}$ нүктесінде орналасқан денеге әсер етеді. Координаталар басынан жүргізілген кез келген оське қатысты қорытынды момент $L=\vec{r}\times\vec{F}\cdot\vec{a}$-ға тең екенін көрсету керек. Мұндағы $\vec{a}$ - осы осьтің бағытындағы бірлік вектор.

9. Келесі $\vec{a}'=\dfrac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}$, $\vec{b}'=\dfrac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}$, $\vec{c}'=\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}$ векторлары

берілген және $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}\neq 0$.

Келесі шарттың орындалатынын көрсетіңіздер:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}'=\delta_{xy},\quad (\vec{x},\vec{y}=\vec{a},\vec{b},\vec{c});$$

$$\vec{a}'\cdot\vec{b}'\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c})^{-1};$$

$$\vec{a}=\frac{\vec{b}'\times\vec{c}'}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}'}.$$

10. Тік төртбұрыштың қабырғалары $a=2$ см және $b=4$ см. Эйлер теңдеуін $\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}$, пайдаланып, лездік бұрыштық жылдамдықтың шамасы $5\left[\dfrac{рад.}{с.}\right]$ және оның бағыты тік төртбұрыштың: а) кіші жақтарымен және б) үлкен жақтарымен бағытталған жағдайлардағы тік төртбұрыш орталығының сызықтық жылдамдығын есептеңіздер.

11. Куб қырларының ұзындығы *a см* болсын. Егер кубтың бір қырының бойымен 5 *Н* күші бағытталса, онда басқа барлық шыңдары және осьтерімен салыстырғандағы осы күштің моментін анықтаңыздар.

12. *O* центрімен салыстырғандағы *n* материалдық нүктелер жүйесінің импульс моменті (қозғалыс мөлшерінің моменті) деп келесі векторлардың қосындысын атайды:

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i,$$

мұндағы $\vec{r}_i$ – массасы $m_i$ және жылдамдығы $\vec{v}_i$ болатын $i$-ші нүктенің радиус-векторы. Мына шаманы анықтаңыздар:

а) массалары $m_1 = 1$ *г*, $m_2 = 2$ *г*, $(z)$ осінің айналасында $\omega = 5\frac{1}{сек}$ бұрыштық жылдамдығымен және радиустары 3 *см* және 6 *см* болатын шеңбер бойымен айналатын екі нүктенің кинетикалық энергиясын;

б) массалары $m_1 = 1$ *г*, $m_2 = 2$ *г*, кубтың барлық шыңдарымен салыстырғанда қарама-қарсы екі қабырғалары бойымен қарама-қарсы бағытта 3 *см/сек* жылдамдығымен қозғалатын нүктелердің кинетикалық энергиясын (куб қабырғаларының ұзындығы *a см*).

13. Екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары - диагональдары $\vec{a}+\vec{b}$ және $\vec{a}-\vec{b}$ болатын параллелограмның қабырғалары болсын. Осы векторларды мына жағдайларда қарастырыңыздар:

а) диагональдары квадраттарының қосындысы оның қабырғалары квадраттарының қосындысына тең екендігін;

б) осы параллелограмның тек қана ромб болған жағдайда ғана параллелограмм диагональдары өзара перпендикуляр болатынын;

в) қабырғалары $\vec{a}+\vec{b}$ және $\vec{a}-\vec{b}$ векторлары болатын $(A)$ параллелограмының ауданы бастапқы, яғни қабырғалары $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары болатын $(B)$ параллелограмының ауданынан екі есе артық болатынын.

## ВЕКТОРЛЫҚ ТАЛДАУ

### 1.6 Градиент

$\varphi(x, y, z)$ – кеңістіктің скалярлық функциясы, яғни функция тек кеңістік нүктелерінің $(x, y, z)$ мәндеріне ғана тәуелді болсын. Скаляр болғандықтан кеңістіктің бекітілген кез келген нүктесі координаталар жүйесінің бұрылысына тәуелсіз өзінің мәнін өзгертпеуі қажет, яғни:

$$\varphi'(x_1', x_2', x_3') = \varphi(x_1, x_2, x_3). \qquad (1.51)$$

(1.16) теңдеуін пайдалана отырып $x_i'$ бойынша дифференциалдап, табатынымыз:

$$\frac{\partial \varphi'(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_i'} = \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i'} =$$

$$(1.52)$$

$$= \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_i^{'}} = \left| \frac{\partial x_j}{\partial x_i^{'}} = a_{ij} \right| = \sum_j a_{ij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

(1.52) теңдеуін (1.17) векторды түрлендіру заңымен салыстырсақ, онда $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}$ құрамдас бөліктері болатын векторды құрағанымызға көз жеткіземіз. Бұл векторды $\varphi$-дің градиенті деп атаймыз. Ыңғайлы болу үшін таңбалық түрде жазалық:

$$\vec{\nabla} \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad (1.53)$$

немесе

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \qquad (1.54)$$

Мұндағы $\vec{\nabla}$ (набла) – векторлық дифференциалдық оператор. Бұл оператор векторлық қасиеттерге ие, әрі дербес дифференциалдау заңдарына бағынады.

**Мысалы:**

$f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ функциясының градиентін есептейік.

$$\vec{\nabla} f(r) = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{x}{r} .$$

Басқа құрамдас бөліктері де осыған ұқсас табылады. Сонда,

$$\vec{\nabla} f(r) = (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z)\cdot\frac{1}{r}\frac{df}{dr} = \frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{df}{dr} = \vec{r}_0\frac{df}{dr},$$

$\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{r}}{r}$ – радиус-вектордың *оң бағытындағы* бірлік вектор.

Әдетте $\vec{\nabla}\varphi$ ұзындық өсімшесін есептеуде қолданылады:

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz \tag{1.55}$$

Осы жазуды пайдаланып, келесі теңдікті аламыз

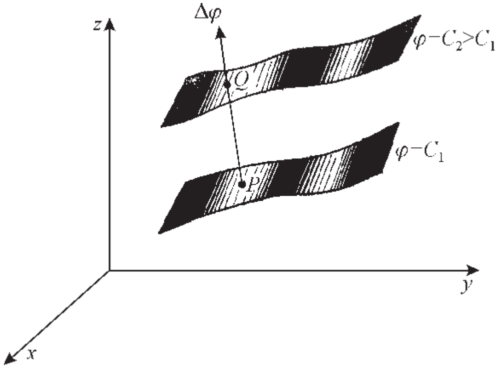
$$(\vec{\nabla}\varphi)d\vec{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi, \tag{1.56}$$

яғни $\varphi$– скаляр функциясының өзгерісі $d\vec{r}$ -дің өзгерісіне (орын ауыстыруына) сәйкес келеді.

$\varphi(x, y, z) = C$ бетінде $P$ және $Q$ нүктелерін қарастырайық. Екі нүкте арақашықтығы $dr$ болсын. Онда $P$ нүктесінен $Q$ нүктесіне орнын ауыстырғанда $\varphi(x, y, z) = C$ функциясының беттегі өзгерісі:

$$d\varphi = (\vec{\nabla}\varphi)d\vec{r} = 0 \tag{1.57}$$

нөлге тең болады, себебі орын ауыстыру $\varphi(x, y, z) = C$ бетінде өтеді. Осыдан $(\vec{\nabla}\varphi)\perp d\vec{r}$ . $P$ –дан $Q$-ге бағыты тиесілі жазықтықтың бойынан $d\vec{r}$ -дің кез келген бағытын таңдау мүмкіндігі болғандықтан, $d\vec{r}$ әрқашан сол бетте жатады. Демек, $\vec{\nabla}\varphi$ -дің бағыты $\varphi = const$ бетінің кез келген нүктесінде $d\vec{r}$ -ге перпендикуляр.




**1.12-сурет.** Градиент

Енді $d\vec{r}$ -дің бағыты $\varphi = c_1$ бетінен $\varphi = c_2$ бетіне бағытталады деп жорамалдайық (1.12-сурет). Онда:

$$d\varphi = c_2 - c_1 = \Delta c = (\vec{\nabla}\varphi)\cdot d\vec{r}. \tag{1.58}$$

Егер $d\vec{r} \,||\, \vec{\nabla}\varphi$ $(\cos\theta = 1)$ болса, онда берілген $d\varphi$ үшін $|d\vec{r}|$-дің абсолют шамасы минималды; керісінше, берілген $|d\vec{r}|$ үшін $\varphi$ скаляр функциясының өзгерісі максималды, егер $d\vec{r} \,||\, \vec{\nabla}\varphi$ болса. Демек, $\vec{\nabla}\varphi$ векторы – функцияның ең жылдам өзгеру бағытын көрсететін вектор.

Скалярлық шаманың градиенті физикада күш өрісі мен потенциалдық өріс арасындағы байланысты табуда үлкен рөл атқарады:

$$\text{Күш} = -\vec{\nabla}\ \ (\text{потенциал}). \tag{1.59}$$

Бұл гравитациялық және электрлік өрістер үшін орынды.

**Жаттығулар**

1. $u = u(x, y, z)$ және $v = v(x, y, z)$ дифференциалданатын скалярлық функциялар үшін $\vec{\nabla}(uv) = v\vec{\nabla}u + u\vec{\nabla}v$ орындалатынын дәлелдеңіздер.

2. $u = x - 2y + 3z$ скалярлық өрісінің градиентін табыңыздар.

3. M (2, 2, 4) нүктесіндегі $u = x^y$ беті көтерілуінің ең тіктігін (жылдамдығын) табыңыздар.

4. $u = x^2 + y^2 + z^2$ скалярлық өрісі деңгейінің бетіне тұрғызылған нормальдің бірлік векторын табыңыздар.

5. $u = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{r})$, өрісінің градиентін табыңыздар, мұндағы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ -тұрақты векторлар, $\vec{r}$ – нүктенің радиус-векторы.

6. $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ арақашықтық градиентін табыңыздар, мұндағы $P(x, y, z)$ – өрістің зерттелуші нүктесі, ал $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – қандай да бекітілген нүкте.

7. $M_0$ (1, 1) нүктесінде $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ және $v = x + y + 2\sqrt{xy}$ функциялары градиенттерінің арасындағы $\Theta$ бұрышты табыңыздар.

8. $\vec{r}$ радиус-векторы бағытындағы $u = \sin r$ функциясының туындысын табыңыздар, мұндағы $r = |\vec{r}|$.

9. $u = xy + yz + xz$ скалярлық өрісінің $M_0$ (1,1,1) нүктесіндегі ең көп өзгеретін бағытын және осы нүктеде ең көп өзгерісінің шамасын табыңыздар.

10. $S(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ функциясы берілген. (1, 2, 3) нүктесіндегі функцияның градиентін $\vec{\nabla} S$, оның абсолют шамасын және $\vec{\nabla} S$ -тің бағыттаушы косинустарын табыңыздар.

11. $\vec{r}_{12} = \vec{i}(x_1 - x_2) + \vec{j}(y_1 - y_2) + \vec{k}(z_1 - z_2)$ векторы берілген. $\vec{\nabla}_1 r_{12}$ ($x_1, y_1, z_1$ айнымалылары бойынша $\vec{r}_{12}$ векторының абсолют шамасының градиенті) – $\vec{r}_{12}$ бойымен бағытталған бірлік векторы екендігін көрсетіңіздер.

12. *grad r* табыңыздар, мұндағы $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

13. *grad* $(\vec{r}\vec{c})$ табыңыздар, мұндағы $\vec{c} = const$.

14. *u*(*x, y, z)*және *v*(*x, y, z)* функцияларының *f*(*u, v*)=0 қатынасымен байланыста болуының қажетті және жеткілікті шарты $(\vec{\nabla} u) \times (\vec{\nabla} v) = 0$ екендігін дәлелдеңіздер. *u*=(*x,y*) және *v*=*v*(*x,y*) жағдайында $(\vec{\nabla} u) \times (\vec{\nabla} v) = 0$ шарты екі өлшемді якобианға әкелетінін дәлелдеңіздер:

$$I\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

u және v  функциялары дифференциалданады деп жорамалданады.

15. $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ және $\omega(x, y, z)$ функцияларының қандай да $F(u, v, \omega)$ функциясымен қатынасы болуының қажетті және жеткілікті шарты $(\vec{\nabla} u)\cdot(\vec{\nabla} v)\times(\vec{\nabla}\omega)=0$ екенін дәлелдеңіздер. Градиенттерінің аралас көбейтінділері үш өлшемді якобианға эквивалент екенін көрсетіңіздер:

$$I\left(\frac{u,v,\omega}{x,y,z}\right)=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{vmatrix}=0.$$

Функцияның қажетті ретті туындыларының бар болуы жорамалданады.

16. Егер векторлық функция $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z,t)$ кеңістік координаталары мен уақытқа тәуелді болса, онда $d\vec{F}=(d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}dt$ екенін дәлелдеңіздер.

17. $M_0$ (1, 1, -1) нүктесіндегі $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ скалярлық өрісінің градиентін табыңыздар.

18. $v=v(x, y, z)$, $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ функциялары $M_0$ (x, y, z) нүктесінде дифференциалданатын болсын. Онда

а) $grad\ \lambda u=\lambda\ grad\ u,\quad \lambda=const;$

б) $grad\ (u\pm v)=grad\ u\pm grad\ v;$

в) $grad\ (uv)=v\ grad\ u+u\ grad\ v;$

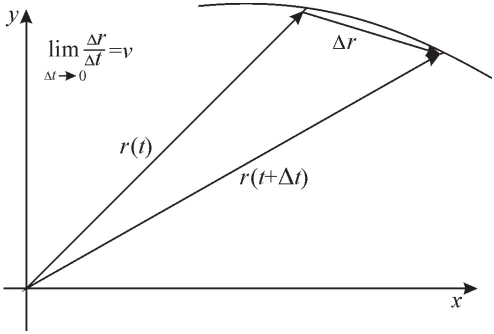
г) $grad\ \frac{u}{v}=\frac{v\ grad\ u-u\ grad\ v}{v^2},\ v\neq 0$

екенін көрсетіңіздер.

19. Есептеп табыңыздар: $grad\ (x^m y^n)$.

## 1.7. Дивергенция

Векторлық функцияларды дифференциалдау скалярлық функцияларды дифференциалдаудың жалпы түрі болып табылады. Мысалы: $\vec{r}(t)$ дененің кеңістіктегі t уақытындағы орнын анықтасын.




**1.13-сурет.** Сызықтық жылдамдық

Онда уақыт бойынша дифференциалдап, табатынымыз (1.13-сурет):

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\vec{v},$$

мұндағы $\vec{v}$ - сызықтық жылдамдық, ал $\vec{\nabla}$ операторын 1.6 - бөлімінде векторлық оператор ретінде қарастырдық.

Енді оның векторлық және дифференциалдық қасиеттерін пайдаланып, $\vec{\nabla}$ операторының векторлық шамаларға әсерін қарастырайық.

$\vec{\nabla}$ операторының өзге вектормен скалярлық көбейтіндісі:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}, \qquad (1.60)$$

$\vec{V}$ векторының дивергенциясы деп аталады. 1.3 - бөліміндегі анықтамаға сәйкес, бұл скалярлық шама. Мысалы:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z\right)=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3;$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}f(r)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xf(r)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(yf(r)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(zf(r)\right)=3f(r)+r\frac{\partial f}{\partial r}\ .$$

Дербес жағдайда, яғни $f(r)=r^{n-1}$ болса, онда

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}r^{n-1}=\vec{\nabla}\cdot\vec{r}_0r^{n}=3r^{n-1}+(n-1)r^{n-1}$$

Демек, n=–2 жағдайы үшін осы шаманың дивергенциясы нөлге тең болады.

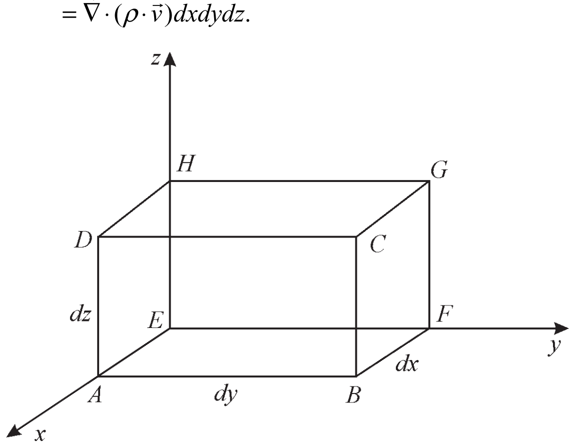
Дивергенцияның физикалық мағынасы түсінікті болу үшін $\vec{\nabla}\cdot(\rho\cdot\vec{v})$ қарастырайық, мұндағы $\vec{v}(x,y,z)$ сығылатын сұйықтық ағысының жылдамдығы, $\rho(x,y,z)$ – $(x, y, z)$ нүктесіндегі тығыздығы. Енді *dxdydz* – көлем элементін қарастырамыз (1.14-сурет). Онда *EFGH* бетінен бірлік уақытта ағатын сұйықтықтың мөлшері: (кіріс) $_{EFGH}=\rho\cdot v_x dydz$, ал *ABCD* бетінен шығатын сұйықтықтың мөлшері: (шығыс) $_{ABCD}=\left[\rho\cdot v_x+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\cdot v_x)dx\right]dydz$. Туынды біртекті емес тығыздық пен жылдамдықтың, немесе екі шаманың да бір мезгілде *x* координатасына тәуелді болуы мүмкіндігін ескереді. Осы екі беттер арқылы ағып өткен сұйықтықтың толық шығыны – екі ағындардың айырымына тең немесе х осі бойынша шығыны:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\cdot v_x)dxdydz.$$

Сұйықтықтың қосымша шығындары осы көлем элементінің қалған төрт бетінен де ағатынын ескерсек, онда уақыт бірлігінде толық ағып өткен сұйықтықтың мөлшері:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho\cdot v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\cdot v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\cdot v_z)\right]dxdydz= \qquad (1.61)$$

$$=\vec{\nabla}\cdot(\rho\cdot\vec{v})dxdydz.$$




**1.14-сурет.** Дифференциалдық тікбұрышты параллелепипед

Яғни, бірлік көлемнен бірлік уақытта ағып өтетін сығылатын сұйықтықтың толық мөлшері $\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})$ -ға тең. Дивергенция немесе шашыраңқылық (расходимость) деген атауы да осыдан шыққан.

Дивергенцияны пайдаланудың көптеген мысалдарының бірі үздіксіздік теңдеуін пайдалану болып табылады:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\cdot\vec{v})=0. \tag{1.62}$$

Сонымен қатар:

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{v})=\frac{\partial}{\partial x}(fv_x)+\frac{\partial}{\partial y}(fv_y)+\frac{\partial}{\partial z}(fv_z)=$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot v_x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot v_y+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot v_z+f\frac{\partial v_x}{\partial x}+f\frac{\partial v_y}{\partial y}+f\frac{\partial v_z}{\partial z}=$$

$$=\left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{v}+f\vec{\nabla}\cdot\vec{v}, \tag{1.63}$$

мұндағы $f$ – скалярлық шама, ал $\vec{v}$ – векторлық функция.

Дербес жағдай. Егер $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, онда $\vec{B}$ векторы соленоидты деп аталады.

**Жаттығулар**

1. $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{b}$ теңдеуін дәлелдеңіздер. *Ескерту.* Теңдеудің сол жағын аралас көбейтінді ретінде қарастырыңыздар.

2. Координаталар жүйесінің бұрылысында, $\vec{\nabla}'\cdot\vec{v}'=\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ теңдігі орындалатынын және анықтамаға сәйкес вектордың дивергенциясы скалярлық шама екендігін көрсетіңіздер (екі өлшемді қарастыру жеткілікті).

3. $div\,\vec{r}$ есептеңіздер.

4. $div\,(\varphi\vec{a})$ есептеңіздер, мұндағы $\varphi$ – скалярлық функция, $\vec{a}$ – өрістің векторлық функциясы.

5. $div\,(r\vec{c})$, $div(r^2\vec{c})$ есептеңіздер, мұндағы $\vec{c}$ – тұрақты вектор.

6. $div\,(\alpha\vec{r})$ есептеңіздер, мұндағы $\alpha$ – тұрақты скаляр.

7. $div\,\dfrac{\vec{r}}{r}$ есептеңіздер.

8. $div\,\vec{b}(\vec{r}\cdot\vec{a})$, $div\,\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{a})$ есептеңіздер, мұндағы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ – тұрақты векторлар.

9. $div\,(r^4\vec{r})$ табыңыздар, мұндағы $\left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

10. $div\,(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$ табыңыздар, мұндағы $\vec{\omega}$– тұрақты вектор.

11. $div\,(\vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{b}))$ табыңыздар, мұндағы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ – тұрақты векторлар.

12. Қатты дене $\vec{\omega}$ тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айналады. Сызықтық $\vec{v}$ жылдамдықтың соленоидты екендігін көрсетіңіздер.

13. Нүктелік $q$ зарядтың электростатикалық өрісі $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_0}{r^2}$. Келесі шаманы $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ есептеңіздер.

14. Мына теңдеулерді шешіңіздер:

а) $div\,(r^n\vec{c}) = nr^{n-2}(\vec{r}\vec{c}),\ (n \neq 2)$;

б) $div(\vec{c} \times \vec{r}) = 0$;

в) $div\ r^n\vec{r} = (n+3)r^n$ .

15. Сфераның беті арқылы өтетін $\vec{r}$ радиус-вектордың ағынын табыңыздар.

16. $\vec{a} = \frac{\varphi(r)}{r}\vec{r}$ векторының дивергенциясын табыңыздар, мұндағы $r = \left|\vec{r}\right|$ координаттар басынан $M(x, y, z)$ айнымалы нүктесіне дейінгі қашықтық.

17. $div\left(grad\ \varphi(r)\right)$.табыңыздар.

18. $div\ \frac{x+y+z}{xyz} \cdot \vec{r}$ табыңыздар

## 1.8. Ротор

Кез келген векторға векторлық көбейтіндісінің операциясын келесі теңдеумен анықтауға болады

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}v_z - \frac{\partial}{\partial z}v_y\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}v_x - \frac{\partial}{\partial x}v_z\right) +$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}v_y - \frac{\partial}{\partial y}v_x\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \qquad (1.64)$$

Пайда болған өрнекті $\vec{v}$ векторының *роторы* деп атайды.

Анықтауышты есептегенде немесе кез келген басқа $\vec{\nabla}$ операторымен жұмыс істегенде оның дифференциалдық табиғатын ескеру қажет. Арнайы ескерту: $\vec{v}\times\vec{\nabla}$ көбейтіндісі жаңа векторлық диффренциалдық оператор ретінде анықталады. Жалпы жағдайда, әрине $\vec{v}\times\vec{\nabla}\neq\vec{\nabla}\times\vec{v}$. Егер $\vec{\nabla}$ векторын скаляр мен векторға векторлық түрде көбейтсек, онда

$$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{v}\right)\Big|_x=\vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(fv_z)-\frac{\partial}{\partial z}(fv_y)\right]=$$

$$=\vec{i}\left[f\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}v_z-f\frac{\partial v_y}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}v_y\right]= \qquad (1.65)$$

$$=f\cdot\vec{\nabla}\times\vec{v}\Big|_x+\left(\vec{\nabla}f\right)\times\vec{v}\Big|_x;$$

Циклдік алмастырулар арқылы $y$ және $z$ құрамдас бөліктері үшін табу жеңіл болады. Сонда:

$$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{v}\right)=f\cdot\vec{\nabla}\times\vec{v}+\left(\vec{\nabla}f\right)\times\vec{v}. \qquad (1.66)$$

(1.66) теңдеуі (1.63) теңдеуінің аналогы.

**Мысалы:** $\vec{\nabla}\times\vec{r}f(r)=f(r)\vec{\nabla}\times\vec{r}+(\vec{\nabla}f(r))\times\vec{r}$

А)

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0.$$

Б) $\vec{\nabla}f(r)=\vec{r}_0\cdot\dfrac{df}{dr}$ екендігін пайдаланып,

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}f(r)=\frac{df}{dr}\cdot\vec{r}_0\times\vec{r}=0,$$

себебі $\vec{r}=\vec{r}_0\cdot r$, $\vec{r}_0\times\vec{r}_0=0$. Жалпы, $\vec{\nabla}\times\vec{v}$ шамасы $\vec{v}$ векторлық өрістің роторы есептелетін нүктедегі айналуын сипаттағандықтан, оны *ротор* деп атауы да сондықтан.

Қатты дене *xy* жазықтығында *z* осі бойынша $\vec{\omega}$ бұрыштық жылдамдықпен айналады делік. Онда қатты дене нүктесінің $\vec{V}$ сызықтық жылдамдығы ( $\vec{r}$ – радиус-вектор) болады:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}\ . \tag{1.67}$$

Мұны $\vec{\nabla} \times \vec{r}$ көбейтіндісін табу үшін қарастырайық:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \tag{1.68}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{r} \cdot \vec{\omega} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{r} \tag{1.69}$$

Мұнда $\vec{\nabla}$ бірінші векторға скалярлық көбейтілгенін көреміз, алайда ол дифференциалдық оператор болғандықтан *екі векторға да* әсер ететінін ұмытпағанымыз жөн:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}\right) + \left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{\omega} - \vec{r}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}\right) - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{r}. \tag{1.70}$$

болған жағдайда, (1.70) теңдеуінің 2-ші және 3-ші мүшелері нөлге тең.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 \tag{1.71}$$

болғандықтан және

$$\left(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{r} = \omega_x \frac{\partial}{\partial x}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) + \omega_y \frac{\partial}{\partial y}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) + \tag{1.72}$$

$$+\omega_z \frac{\partial}{\partial z}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i}\,\omega_x + \vec{j}\,\omega_y + \vec{k}\,\omega_z = \vec{\omega}.$$

(1.71), (1.72) теңдеулерін (1.70) апарып қойсақ, онда

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2\vec{\omega} \tag{1.73}$$

болады. Яғни, қатты дененің сызықтық жылдамдығының роторы екі еселенген бұрыштық жылдамдыққа тең.

Егер

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \tag{1.74}$$

болса, онда $\vec{v}$ векторын *құйынсыз* деп атайды.

Құйынсыз векторларға, мысал ретінде, гравитациялық және электростатикалық күштерді жатқызуға болады.

$$\vec{V} = C \cdot \frac{\vec{r}_0}{r^2} = C\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (1.75)$$

мұндағы, С – тұрақты, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор бағытындағы бірлік векторы.

**Жаттығулар**

1. Егер $\vec{U}$ және $\vec{V}$ құйынсыз векторлар болса, онда $\vec{U}\times\vec{V}$ векторлары соленоидты екенін көрсетіңіздер.

2. Егер A құйынсыз вектор болса, онда $\vec{A} \times \vec{r}$ соленоидты екенін көрсетіңіздер.

3. $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x^2+z)\vec{k}$ векторының роторын табыңыздар.

4. $\vec{F} = y^2 z\vec{i} + z^2 x\vec{j} + x^2 y\vec{k}$ өрісінің құйынын табыңыздар.

5. Бұрылысты пайдаланып, ротордың құрамдас бөліктері векторлық түрлендіру заңына бағынатынын көрсетіңіздер. *Ескерту.* (1.41) теңдеуіндегі бағыттаушы косинустарды пайдалану керек.

6. $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ векторы $\vec{V}$ векторына перпендикуляр болатынын дәлелдеңіз, егер $\vec{V} = \vec{i}V_x(x,y) + \vec{j}V_y(x,y)$ және $\vec{\nabla}\times\vec{V} \neq 0$ болса.

7. Кванттық механикада қозғалыс мөлшерінің моменттері келесі қатынастармен анықталады:

$$L_x = -i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}),$$

$$L_y = -i\hbar(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}), \qquad L_z = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}).$$

$L_y = -i\hbar(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}), \qquad L_z = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}).$ екендігін, оған қоса болатынын көрсетіңіздер.

8. Векторлық теңдіктерді тексеріңіздер:

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}),$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}).$$

9. Көрсетіңіздер:

а) $rot\,\vec{r} = 0;$

б) $rot\,(\vec{c} \times \vec{r}) = 2\vec{c};$

в) $rot\left[\vec{c}(\vec{a}\vec{r})\right] = \vec{a} \times \vec{c}.$

10. Табыңыздар:

а) $rot[(\vec{c} \times \vec{r}) \times \vec{a}],$

б) $rot[(\vec{c} \times \vec{r}) \times \vec{r}],$

мұндағы $\vec{a},\ \vec{c}$ – тұрақты векторлар.

11. Қатты дене қозғалмайтын нүкте маңында айналсын. Онда $\vec{V}$ жылдамдық өрісінің және $\vec{W}$ үдеу өрісінің дивергенциясы мен құйынын табыңыздар. Мұндағы $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r};\quad W = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$ оған қоса $\vec{\omega},\ \vec{\varepsilon}$ – үдеулер өрісінің тұрақты векторлары екендігін ескеріңіздер.

12. Келесі векторлардың роторларын табыңыздар:

а) $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k};$

б) $\vec{a} = z^3\vec{i} + y^3\vec{j} + x^3\vec{k};$

в) $\vec{a} = \dfrac{1}{2}(-y^2\vec{i} + x^2\vec{j}).$

13. $\vec{a} \times grad\,\varphi$ векторы қандай да вектордың құйыны болсын, мұндағы $\vec{a}$ – тұрақты вектор. Ізделінді векторды анықтаңыздар.

14. $r(\vec{\omega} \times \vec{r})$ векторы соленоидты, мұндағы $\vec{\omega}$ – тұрақты вектор. Көрсетілген векторды қандай да вектордың құйыны болатынын көрсетіңіздер.

## 1.9. $\vec{\nabla}$ операторын біртіндеп қолдану

Градиент, дивергенция және ротор түсініктерін енгізу арқылы вектор, скалярлық шамалар және олардың комбинациясын алуға болады. Жаңадан пайда болған шамаларға $\vec{\nabla}$ операторымен әсер ете отырып, $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi,\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi,\quad \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{V},\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V},\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$ өрнектерін таба аламыз.

Бұл өрнектер математикалық физиканың екінші реттік дифференциалдық теңдеулерінде жиі пайдаланады.

Өрнектердің біріншісін, яғни градиенттің дивергенциясын ***лапласиан*** деп атайды:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi=(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z})(\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z})=$$

$$=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})\varphi=\Delta\varphi=\vec{\nabla}^2\varphi.$$

Екіншісін төмендегідей жазуға болады:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}, \tag{1.76}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi=\vec{i}\,(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y})+$$
$$+\vec{j}\,(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z})+\vec{k}\,(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x})=0. \tag{1.77}$$

Мұнда біз дифференциалдау ретін өзгертуге болады деп жорамалдадық. Ал ол, өз кезегінде тек $\varphi$-дің бірінші ретті дербес туындылары үздіксіз болғанда ғана орынды болады.

(1.77) теңдеуінен $rot\ \ grad\equiv 0$ екендігін көрдік. Яғни, градиент - құйынсыз вектор.

Төртінші өрнекті аралас көбейтінді ретінде қарастырамыз:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\partial^2 V_z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 V_x}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 V_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 V_z}{\partial y\partial x}=0, \tag{1.78}$$

яғни,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{V}=0 \tag{1.79}$$

Сонымен, ротордың дивергенциясы $div\,(rot)=0$ болғандықтан, ротор әрқашан соленоидты вектор.

Соңғы өрнекті қарастырайық:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{V}-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{V} \tag{1.80}$$

Егер $\vec{V}$ векторын декарттық координаталар жүйесінде компоненттерге жіктесек, онда $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}$ – векторлық лапласиан – қарапайым скалярлық лапласиандардың векторлық қосындысына тең болады:

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V}=\vec{i}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}V_x+\vec{j}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}V_y+\vec{k}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}V_z.$$

(1.80) өрнегінің маңызды қосымшасы электромагниттік теорияның толқындық теңдеуімен байланысты. Вакуум үшін Максвелл теңдеулерін жазайық:

$$\begin{aligned} &а)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, &&в)\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}}{\partial t},\\ &б)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{E}}=0, &&г)\quad \vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}}=-\frac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1.81}$$

мұндағы, $\vec{\mathrm{E}}$ – электр өрісі, $\vec{B}$ – магнит индукциясы, $\varepsilon_0,\mu_0$ – электрлік және магниттік тұрақтылар. $\vec{\mathrm{B}}$ векторын (1.81в) және (1.81 г) теңдеулерінен анықтауға болады делік. Ол үшін (1.81 г) теңдеуінің екі бөлігінің роторын есептелік:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}})=-\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathrm{B}}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}} \tag{1.82}$$

(1.81в) теңдеуінің екі бөліктерінен де уақыт бойынша туынды алайық:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}})=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{E}}}{\partial t^2}=-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}}),$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}})=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{E}}}{\partial t^2}, \tag{1.83}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}}) = -\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\mathrm{E}} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{E}}}{\partial t^2},$$

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\mathrm{E}} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{E}}}{\partial t^2}. \qquad (1.84)$$

Егер $\vec{E}$ векторын декарттық координаталарда жазатын болсақ, онда (1.84) теңдеуі скалярлық лапласиандардан құралған үш скалярлық толқындық теңдеуге жіктеледі.

**Жаттығулар**

1. $\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{\nabla}\varphi) = 0$ екендігін дәлелдеңіздер.

2. Егер $U$ және $V$ – дифференциалданатын скалярлық функциялар болса, онда $(\vec{\nabla}U)\times(\vec{\nabla}V)$ соленоидты вектор екенін дәлелдеңіздер.

3. $\varphi$ скаляры Лаплас теңдеуін қанағаттандырады $\vec{\nabla}^2\varphi = 0$. $\vec{\nabla}\varphi$ векторы соленоидты және құйынсыз екенін көрсетіңіздер.

4. $\vec{C}_1 = \vec{\nabla}\psi$, $\vec{C}_2 = \vec{\nabla}\times\vec{a}\,\psi$ және $\vec{C}_3 = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}\psi)$ векторлары төмендегі векторлық теңдеудің шешімі болатынына көз жеткізіңіздер

$$\vec{\nabla}^2\vec{C} + k^2\vec{C} = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{C} - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{C} + k^2\vec{C} = 0.$$

Мұндағы: $\psi$ – скаляр толқындық теңдеудің шешімі $\vec{\nabla}^2\psi + k^2\psi = 0$, $\vec{a}$ – тұрақты вектор. Оған қоса, $\vec{C}_1$ және $\vec{C}_2$ ортогоналды, $\vec{C}_1$ – құйынсыз, ал $\vec{C}_2$ және $\vec{C}_3$ – соленоидты векторлар екенін дәлелдеңіздер.

5. $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{V} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}$ өрнегі $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ екі ретті векторлық көбейтінді ережесінен туындайтынын дәлелдеңіздер. $\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})$, $\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ мүшелеріндегі көбейтінділердің еркін орналасуын түсіндіріңіздер.

6. $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{A}} - k^2\vec{\mathrm{A}} = 0$ теңдеуінің кез келген шешімі Гельмгольцтің векторлық теңдеуін $\vec{\nabla}^2\vec{\mathrm{A}} + k^2\vec{\mathrm{A}} = 0$ автоматты түрде қанағаттандыратынын және $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{A}} = 0$ соленоидтылық шартын қанағаттандыратынын көрсетіңіздер.

7. Келесі скалярлық өрістер гармоникалық болатынын тексеріңіздер:

а) $u = x^2 + 2xy - y^2$;

б) $u = x^2 y + y^2 z + z^2 x$;

в) $u = x^2 - y^2$.

8. $u = \ln\dfrac{1}{r}$ скалярлық өрісі гармоникалық болатынын көрсетіңіздер, мұндағы $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(r \neq 0)$.

9. $U_{LM} = j_L(ka) Y_{LM}(\theta, \phi)$ скалярлық потенциалы Гельмгольцтің скалярлық теңдеуін $\vec{\nabla}^2 U_{LM} + k^2 U_{LM} = 0$ қанағаттандырады. Қозғалыс мөлшері моментінің операторын $\vec{L} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$ пайдаланып, келесі векторлық потенциалдарды құрастыруға болады:

$$\vec{A}_{LM}^{E} = -\frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{L} U_{LM}, \quad \vec{A}_{LM}^{M} = l\, \vec{L} U_{LM}$$

Осы екі потенциалдардың мына теңдеуді қанағаттандыратынын көрсетіңіздер:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{A}} - k^2 \vec{\mathrm{A}} = 0 .$$

10. Уақытқа тәуелді Шредингер теңдеуінің түрін жазалық:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} + V(r) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Теңдеудің шешімін $\Psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) \cdot e^{iS(\vec{r}, t)/\hbar}$ түрінде іздейтін болсақ, онда Шредингер теңдеуі екі теңдеуге бөлінеді (нақты және жорамал бөліктерге):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + V = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\vec{\nabla}^2 A}{A},$$
$$m\frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{\nabla} A)(\vec{\nabla} S) + \frac{A}{2} \vec{\nabla}^2 S = 0.$$

Кванттық механикада бөлшектің кеңістікте табылу ықтималдығының тығыздығы $\rho = \mathrm{A}^2$ шамасымен, ал тоқтың тығыздығы $\vec{J} = \left( \dfrac{A^2}{m} \vec{\nabla} S \right)$ шамасымен анықталады. Жоғарыда жазылған екінші теңдеу үздіксіздік теңдеуіне эквивалент екенін көрсетіңіздер: $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$.

11. $\Psi$– скалярлық функция болсын. Онда осы функция мына теңдеуді қанағаттандыратынын көрсетіңіздер:

$$(\vec{r}\times\vec{\nabla})\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla})\Psi=r^2\vec{\nabla}^2\Psi-2r\frac{\partial\Psi}{\partial r}-r^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}.$$

## 1.10 Векторларды интегралдау

Векторларды дифференциалдаудан соң оларды интегралдауды қарастырайық. Сызықтық интегралдаудан бастап, одан соң беттік және көлемдік интегралдауға көшеміз. Бірақ әрдайым векторларды интегралдау скалярлық функцияларды интегралдауға әкеліп тірейтін болады. Ұзындық өсімшесі $d\vec{r}$ – ді пайдаланып, келесі сызықты интегралдарды анықтауға болады:

$$\text{а)}\ \int_C \varphi d\vec{r}, \qquad \text{б)}\ \int_C \vec{V}\cdot d\vec{r}, \qquad \text{в)}\ \int_C \vec{V}\times d\vec{r}. \tag{1.85}$$

Интегралдау тұйық не тұйық емес $C$ контуры бойынша жүргізіледі. Бірінші интегралды декарт координаталар жүйесінде есептейік:

$$a)\quad \int_C \varphi d\vec{r}=\vec{i}\int_C \varphi(x,y,z)dx+$$

$$+\vec{j}\int_C \varphi(x,y,z)dy+\vec{k}\int_C \varphi(x,y,z)dz. \tag{1.86}$$

Мұнда $\vec{i}$, $\vec{j}$, және $\vec{k}$ бірлік векторларының бағыты мен шамалары тұрақты және

$$\int \vec{i}\,\varphi dx=\vec{i}\int \varphi dx \tag{1.87}$$

теңдігі орынды болатынын пайдаландық.

(1.86) теңдеуінің оң жағындағы үш интеграл қарапайым скалярлық интегралдар болғандықтан, дәлелдеусіз *Риман инте-*

*гралдары* деп қабылдайық. Алайда $y$ және $z$ айнымалылардың $x$-ке тәуелділігін білмей тұрып $x$ бойынша интегралдауға болмайды (осы айтылғандар басқа айнымалыларға да қатысты). Демек, $C$ контурын анық білу қажеттігі туындайды. Егер интеграл астындағы функция арнайы қасиеттерге ие (нәтижесінде интеграл тек контурдың соңғы нүктелерінің орналасуына ғана байланысты) болмаса, онда интеграл шамасы $C$ контурын таңдаудың ерекшеліктеріне байланысты болады.

**Мысалы:** $\varphi = 1$ болсын. Онда (1.85 а) интегралы $C$ контурының бастапқы нүктесінен соңғы нүктесіне дейінгі вектор қашықтығына тең болады. Бұл жағдайда интегралдың мәні оның бекітілген бастапқы және соңғы нүктелерінің арасындағы интегралдау жолына тәуелсіз болады. $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ жағдайында жоғарыда қарастырылғандай, яғни екінші және үшінші интегралдар да (1.85 а) интегралы сияқты скалярлық шамаларды интегралдаумен алмасады.

(1.85 б) интегралы белгілі жол қашықтығында жұмсалған күштің мөлшерін, яғни жұмысты анықтайды:

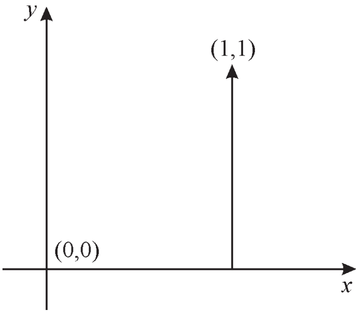
$$W = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{1.88}$$

**Мысалы:** Ұзындықтың өсімшесі $d\vec{r}$-ді пайдаланып, $r^2 = x^2 + y^2$ скалярлық функцияны координаттар басынан (1,1) нүктесіне дейін интегралдайық (1.15-сурет).

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2)(\vec{i}dx + \vec{j}dy) = \vec{i}\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2)dx + \vec{j}\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2)dy =$$

(1.15-суретте көрсетілген контур бойынша интегралдайық)

$$= \vec{i}\int_{(0,y=0)}^{x=1} (x^2 + y^2)dx + \vec{j}\int_{(x=1,0)}^{y=1} (x^2 + y^2)dy = \frac{1}{3}\vec{i} + \vec{j}\frac{4}{3};$$




**1.15-сурет.** Интегралдау контуры

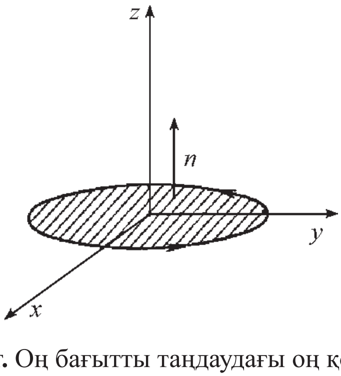
екінші контур бойынша интегралдасақ $((0,0)\rightarrow(0,1)\rightarrow(1,1))$,

$$\vec{i}\int_{(x=0,0)}^{1}\left(x^2+y^2\right)dx+\vec{j}\int_{(0,y=1)}^{1}(x^2+y^2)dy=\frac{4}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}\,;$$

үшінші контур $x=y$ түзуі бойынша

$$\vec{i}\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2+y^2)dx+\vec{j}\int(x^2+y^2)dy=\frac{4}{3}\vec{i}+\frac{4}{3}\vec{j}.$$

Демек, интегралдың мәні интегралдау $C$ контурын таңдауына тәуелді.




**1.16-сурет.** Оң бағытты таңдаудағы оң қол ережесі

Беттік интегралдар да сызықты интегралдар сияқты жазылады, бірақ $d\vec{r}$ орнына $d\vec{\sigma}$ алмастыру керек. Беттік элементтің орнына $\vec{n}dA$ жиі пайдаланылады (мұндағы, $\vec{n}$ – бірлік нормаль вектор, 1.16-сурет).

Оң бағытты анықтаудың екі жолы бар. Егер бет тұйық болса, онда оң бағыт ретінде көлемнің ішінен сыртына қарай бағытты қабылдалық. Ал ашық беттер үшін оң бағыт периметрі бойынша жүріп өту бағытына байланысты деп есептейік. Сонда, оң қолымыздың саусақтарын контурды жүріп өту бағытында ұстасақ, онда бас бармақ оң бағытпен сәйкес болады.

$\int \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}$ беттік интегралын осы бет бойынша ағыны ретінде интерпретациялауға болады.

Көлемдік интегралдарды есептеу жеңілдеу, себебі көлем элементі $d\tau$ – скалярлық шама.

$$\int_V \vec{V} d\tau = \vec{i} \int_V V_x d\tau + \vec{j} \int_V V_y d\tau + \vec{k} \int_V V_z d\tau. \tag{1.89}$$

Беттік және көлемдік интегралдарды пайдаланып, дифференциалдық қатынастарды қайта анықтауға болады:

$$\vec{\nabla}\varphi = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \varphi d\vec{\sigma}}{\int d\tau}, \tag{1.90}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}}{\int d\tau}, \tag{1.91}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int d\vec{\sigma} \times \vec{V}}{\int d\tau}. \tag{1.92}$$

Мұндағы $\int d\tau$ – кеңістіктің кіші көлемі, $d\vec{\sigma}$ – осы көлемнің беттік векторлық элементі. Енді (1.90) өрнегі (1.53) теңдеуімен анықталған $\vec{\nabla}\varphi$ шамасына сәйкес келетінін көрсетелік. Жеңіл болу үшін $\int d\tau$-ды *dxdydz* дифференциалдық көлемге алмастырайық және координаттар басы параллелепипедтің геометриялық ортасынан басталсын (1.17-сурет).

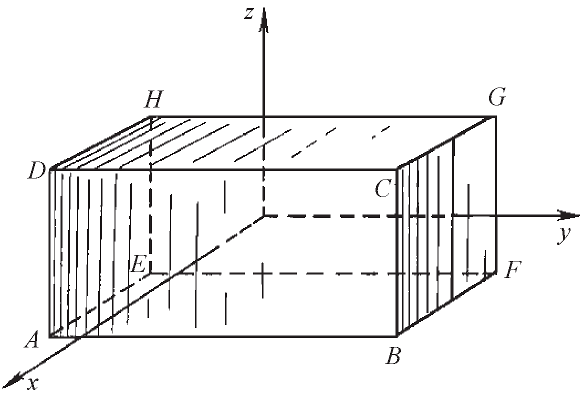
Беттік интеграл параллелепипедтің алты беті бойынша интегралға әкеледі. $d\vec{\sigma}$ векторы сыртқа бағытталғандықтан, $d\vec{\sigma} \cdot \vec{i} = -|d\vec{\sigma}|$ *EFGH* беті үшін, ал *ABCD* үшін ол $|d\vec{\sigma}|$ тең екенін ескеріп, табамыз:

$$\int \varphi d\vec{\sigma} = -\vec{i} \int\limits_{EFGH} (\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2})dydz + \vec{i} \int\limits_{ABCD} (\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2})dydz -$$

$$-\vec{j} \int\limits_{AEHD} (\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2})dxdz + \vec{j} \int\limits_{\mathrm{BFGC}} (\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2})dxdz -$$

$$-\vec{k} \int\limits_{AEFB} (\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{2})dxdy + \vec{k} \int\limits_{DCGH} (\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{2})dxdy =$$

$$= (\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z})dxdydz \qquad (1.93)$$




**1.17-сурет.** Дифференциалдық тікбұрышты параллелепипед

Осы өрнекті $\int d\tau = dxdydz$ шамасына бөлсек, (1.90)-ның дұрыстығына көз жеткіземіз.

Дәлелдеу кезінде одан жоғарғы реттік туындыларды құрайтын түзетулер енгізетін мүшелерін ескергеніміз жоқ. Тейлор қатарына жіктегенде қосымша мүшелер $\int d\tau \to 0$ $(dx \to 0, \quad dy \to 0, \quad dz \to 0)$ шегінде жойылады.

Әрине, (1.90)–(1.92) өрнектерін қатаң түрде тексеру үшін көрсетілген шектік жағдайды орындау қажет.

## Жаттығулар

1. $\vec{a}(t) = \vec{i}\cos t + \vec{j}e^{-t} + \vec{k}.$ вектор-функциясының анықталмаған интегралын табыңыздар.

2.Келесі вектор-функциялардың интегралдарын табыңыздар:

а) $\vec{a}(t)=te^t\vec{i}+\sin^2 t\,\vec{j}-\dfrac{1}{1+t^2}\vec{k};$

б) $\vec{a}(t)=\dfrac{t}{1+t^2}\vec{i}+te^{t^2}\vec{j}+\cos t\,\vec{k};$

в) $\vec{a}(t)=\cos t\,e^{\sin t}\,\vec{i}-t\cos t^2\,\vec{j}+\vec{k};$

г) $\vec{a}(t)=\dfrac{1}{2}t^2\vec{i}-t\sin t\,\vec{j}+2^t\vec{k}.$

3. Келесі интегралдарды есептеңіздер:

а) $\int\limits_0^{\pi}\vec{a}(t)\,dt,$ мұндағы $\vec{a}=\sin^2 t\cos t\,\vec{i}+\cos^2 t\sin t\,\vec{j}+\vec{k};$

б) $\int\limits_0^{1}\vec{a}(t)\,dt,$ мұндағы $\vec{a}=\dfrac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}\vec{i}+\dfrac{e^{\frac{t}{2}}}{2}\vec{j}+e^t\vec{k};$

в) $\int\limits_0^{1}\vec{a}(t)\,dt,$ мұндағы $\vec{a}=3\pi\cos\pi t\,\vec{i}-\dfrac{1}{1+t}\vec{j}+2t\,\vec{k};$

г) $\int\limits_0^{1}\vec{a}(t)\,dt,$ мұндағы $\vec{a}=(2t+\pi)\vec{i}+t\sin t\,\vec{j}+\pi\vec{k}.$

4. Екі өлшемді сызықтық осцилляторға әсер ететін күш өрісін $\vec{F}=-\vec{i}kx-\vec{j}ky$ түрінде жазуға болады. (1, 1) нүктесінен (4, 4) нүктесіне әртүрлі жолдармен қозғалғандағы жұмсалған жұмысты есептеп, салыстырыңыздар:

а) (1, 1)→(4, 1)→(4, 4);
б) (1, 1)→(1, 4) →(4, 4);
в) $x=y$ түзуі бойымен.

Ол үшін $-\int\limits_{(1,1)}^{(4,4)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ интегралын бағалау керек.

5. $\vec{F}=-\dfrac{\vec{i}y}{x^2+y^2}+\dfrac{\vec{j}x}{x^2+y^2}$ күш өрісі берілген. Жасалатын

жұмысты анықтау қажет, егер бірлік радиусы келесі бағыттарда қозғалатын болса:

а) 0-ден $\pi$-ге дейін сағат тіліне қарама-қарсы бағытта,

б) 0-ден $-\pi$-ге дейін сағат тілімен бағыттас.

6. (0, 0, 0) нүктесінен басталып, *x, y* және *z* осьтерінің оң бағыттарындағы бірлік қашықтықтағы бірлік кубтың беті бойынша $\frac{1}{3}\int_S \vec{r}\cdot d\vec{\sigma}$ интегралын есептеу керек. Кубтың үш беттері үшін $\vec{r}\cdot d\vec{\sigma}=0$, ал қалғандары интегралға бірдей үлес қосады.

7. $\lim\limits_{\int d\tau\to 0}\dfrac{\int_S d\vec{\sigma}\times\vec{V}}{\int_S d\tau}=\vec{\nabla}\times\vec{V}$ екенін дәлелдеңіздер.

*Ескерту: dxdydz* – элементар көлемді пайдалану керек.

8. (1, 1) нүктесінен (3, 3) нүктесіне қозғалғандағы жасалған жұмысты табыңыздар. Мұндағы түсірілген күш $\vec{F}=\vec{i}\,(x-y)+\vec{j}\,(x+y)$. Қозғалыс жолын нақты анықтаңыздар. Күштің консервативті емес екендігін ескеріңіздер.

## 1.11 Гаусс теоремасы

$\vec{V}$ және $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ шамалары берілсін және олар қарастырылатын аумақ бойынша үздіксіз болсын. Онда Гаусс теоремасына сәйкес:

$$\int_S \vec{V}\cdot d\vec{\sigma}=\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{V}d\tau \tag{1.94}$$

Яғни, бірлік көлемнен аққан сұйықтықтың көлемі $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$-ге тең болады. Сондықтан (1.94) теңдеуінің оң бөлігі интегралдау жүргізілген *V* көлем бойынша аққан сұйықтықтың толық көлеміне тең. Ал теңдеудің сол жақ бөлігі (аталған *V* көлемді шектейтін) *S* беті бойынша сұйық ағынын сипаттағандықтан, Гаусс теоремасының дәлелдемесі ретінде қабылдаймыз. Гаусс теоремасының нақтыланған және математикалық қатаң дәлелдеуін оқулықтың соңында ұсынылған ғылыми әдебиеттерден табуға болады.

Гаусс теоремасының өте маңызды салдары – *Грин теоремасы* шығады. Егер $u$ және $v$ екі скалярлық функция болса, онда:

$$\vec{\nabla}\cdot(u\vec{\nabla}v)\equiv u\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}v+(\vec{\nabla}u)\cdot(\vec{\nabla}v), \tag{1.95}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(v\vec{\nabla}u)\equiv v\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u+(\vec{\nabla}v)\cdot(\vec{\nabla}u). \tag{1.96}$$

(1.96) теңдеуден (1.95) теңдеуін алып, одан соң көлем бойынша интегралдасақ ($u$, $v$ және олардың туындылары үздіксіз деп жорамалдап) және (1.94) формуласын (Гаусс теоремасын) пайдаланған соң Грин теоремасын аламыз:

$$\int\limits_V(u\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u)d\tau=\int\limits_S(u\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}u)\cdot d\vec{\sigma}. \tag{1.97}$$

(1.95) теңдеуінің өзгеше жазылуын келтірелік:

$$\int\limits_S u\vec{\nabla}v\cdot d\vec{\sigma}=\int\limits_V u\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}v d\tau+\int\limits_V\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v d\tau. \tag{1.98}$$

(1.94) теңдеуінде дивергенцияның табылуына және Гаусс теоремасының маңызды түрі болғанына қарамастан, көлемдік интегралдың құрамында градиент пен ротор болатын теореманың басқа да түрлері кездесуі мүмкін. Мысал қарастырайық:

$$\vec{V}(x,y,z)=V(x,y,z)\cdot\vec{a}, \tag{1.99}$$

мұндағы $\vec{a}$ бағыты бойынша және абсолюттік шамасы тұрақты вектор (бағыт әртүрлі болуы мүмкін, бірақ бағыт таңдалған соң ол бекітіледі).

Осы жағдайда (1.63) қатынасының көмегімен (1.94) теңдеуі төмендегідей жазылады:

$$\vec{a}\int\limits_S Vd\vec{\sigma}=\int\limits_V\vec{\nabla}\cdot\vec{a}Vd\tau=\vec{a}\int\limits_V\vec{\nabla}Vd\tau, \tag{1.100}$$

$$\vec{a}\cdot\left[\int\limits_S Vd\vec{\sigma}-\int\limits_V\vec{\nabla}Vd\tau\right]=0. \tag{1.101}$$

$$|\vec{a}|\neq 0,\quad\Rightarrow\quad\int\limits_S Vd\vec{\sigma}=\int\limits_V\vec{\nabla}Vd\tau. \tag{1.102}$$

Аналогиялық түрде $\vec{V}=\vec{a}\times\vec{P}$ ($\vec{a}$ – тұрақты вектор) деп қабылдап, келесі теңдік жеңіл дәлелденеді:

$$\int_S d\vec{\sigma}\times\vec{P}=\int_V \vec{\nabla}\times\vec{P}d\tau \qquad (1.103)$$

**Жаттығулар**

1. Гаусс теоремасын (1.103) түрінде дәлелдеңіздер.

2. Егер $S$ тұйық бет болса, онда төмендегі теңдікті дәлелдеңіздер:

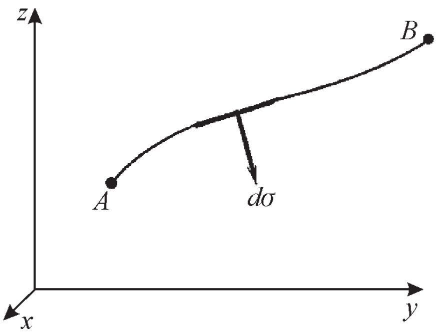
$$\int_S d\vec{\sigma}=0.$$

3. Көрсетіңіздер $\frac{1}{3}\int_S \vec{r}d\vec{\sigma}=V$. Мұндағы $S$ беті $V$ көлемін шекаралайды.

4. Егер $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ орындалса, онда кез келген $S$ тұйық беті үшін $\int_S \vec{B}\cdot d\vec{\sigma}=0$ болатынын көрсетіңіздер.

## 1.12 Стокс теоремасы

Гаусс теоремасы функция дивергенциясының көлем бойынша интегралы мен осы функцияның көлемді қоршап тұрған бет бойынша интегралын байланыстырады.




**1.18-сурет.** $S$ бетінің $x = c$ жазықтығымен қиылысы.

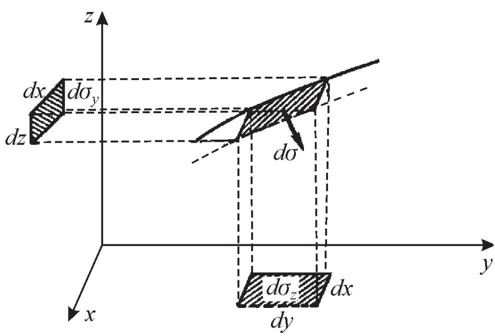
Енді кез келген функция роторының бет бойынша интегралы мен осы функцияның берілген бетінің ауданы (яғни, сызықтық интеграл) бойынша интегралының байланысын қарастырайық. Ол үшін аралас көбейтіндінің формуласын интеграл астындағы функция үшін пайдаланып, ротордың беттік интегралын түрлендірелік:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{V} d\vec{\sigma} = \int_S \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial z} d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y} d\sigma_z + \frac{\partial V_y}{\partial x} d\sigma_z - \\ -\frac{\partial V_y}{\partial z} d\sigma_x + \frac{\partial V_z}{\partial y} d\sigma_x - \frac{\partial V_z}{\partial x} d\sigma_y \end{pmatrix}. \qquad (1.104)$$

Бұл беттік интеграл қандай да бір берілген $S$ беті бойынша интегралданады. Түсінікті болу үшін беттің $x=c$ жазықтығымен қиғандағы $S$ бетінің «қимасы» – $AB$ қисығы болсын (1.18-сурет). Сонымен, енді $A$ нүктесінен $B$ нүктесіне қарай бағытты оң ретінде анықтасақ, онда 1.19-суретте көрсетілгендей $d\vec{\sigma}$ бағытының құрамдас бөліктері төмендегідей жазылады:

$$d\sigma_y = dxdz, \qquad (1.105)$$
$$d\sigma_z = -dxdy$$

Дербес жағдайда (1.19-суреттегідей) $dx$ өсімшесі $x=c$ және $x=c+dx$ жазықтарының арасына сәйкес келеді. $V_x$ –тің туындыларын осы өсімше бойынша интегралдап табамыз:




**1.19-сурет.** $d\vec{\sigma}-$ ның $xy$ және $xz$ жазықтықтарына кескіндері.

$$\int_S \left( \frac{dV_x}{\partial z} d\sigma_y - \frac{dV_x}{\partial y} d\sigma_z \right) = \int_S \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz \right) dx . \qquad (1.106)$$

$A$ нүктесінен $B$ нүктесіне дейінгі интегралда $x$ – тұрақты болғандықтан

$$\frac{\partial V_x}{\partial y}dy + \frac{\partial V_x}{\partial z}dz = dV_x \qquad (1.107)$$

немесе,

$$\int dx \int_A^B dV_x = \int V_x(x, y_B, z_B)dx - \int V_x(x, y_A, z_A)dx. \qquad (1.107а)$$

Аймақ шекарасын айналуының бағытын таңдауда ескеретін шарттарды жазайық: егер *B* нүктесі бағытында болса, онда $dx = d\lambda_x$; егер А нүктесінің бағытында болса, онда $dx = -d\lambda_x$, мұндағы $d\vec{\lambda}$ – аудан бойындағы вектордың өсімшесі. Онда:

$$\int_S \left(\frac{\partial V_x}{\partial z}d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y}d\sigma_z\right) = \oint V_x \cdot d\vec{\lambda}_x, \qquad (1.108)$$

мұндағы $\oint$ – белгісі тұйық контур бойынша интегралдауды білдіреді. Біздің қарастырып жатқан жағдайымызда – интегралдау берілген беттің ауданы бойынша жүргізіледі. Басқа координаталар үшін де ұқсас болғандықтан, нәтижесін бірден жазайық.

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \oint (V_x d\lambda_x + V_y d\lambda_y + V_z d\lambda_z) = \oint \vec{V} \cdot d\vec{\lambda}. \qquad (1.109)$$

Бұл – *Стокс теоремасы*.

Стокс теоремасын пайдаланып, беттік және сызықтық интегралдар арасындағы қосымша қатынастарды табуға болады:

$$\int_S d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}\varphi = \oint \varphi d\vec{\lambda}, \qquad (1.110)$$

$$\int_S (d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}) \times \vec{\mathrm{P}} = \oint d\vec{\lambda} \times \vec{\mathrm{P}}. \qquad (1.111)$$

(1.110) теңдеуін дәлелдейік. Ол үшін $\vec{V} = \vec{a} \cdot \varphi$ деп қабылдап ( $\vec{a}$ – бағыты және шамасы тұрақты вектор), (1.109) теңдеуіне апарып қоямыз.

Теңдіктің сол жағы:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{a}\varphi) \cdot d\vec{\sigma} = -\int_S (\vec{a} \times \vec{\nabla}\varphi) d\vec{\sigma} = -\vec{a} \int_S \vec{\nabla}\varphi \times d\vec{\sigma}. \qquad (1.112)$$

Теңдіктің оң жағы:

$$\oint \vec{a}\varphi \cdot d\vec{\lambda} = \vec{a} \cdot \oint \varphi d\vec{\lambda}. \qquad (1.113)$$

Теңдіктің сол жағын оң жағына көшірсек, онда

$$\vec{a}\left( \int_S \vec{\nabla}\varphi \times d\vec{\sigma} + \oint \varphi d\vec{\lambda} \right) = 0. \qquad (1.114)$$

$\vec{a}$ – тұрақты вектор болғандықтан, жақшаның ішіндегі шама нөлге тең. (1.111) теңдеуін де осылайша дәлелдеуге болады, мұндағы $\vec{V} = \vec{a} \times \vec{\mathrm{P}}$.

(1.109) теңдеуіне қайта оралайық. $\oint \vec{V} \cdot d\vec{\lambda}$ мүшесін тұйық контур ішіндегі циркуляциялайтын сұйық ретінде қарастырайық. Егер бет ретінде ауданы $\vec{k}d\sigma$ болатын дөңгелекті қабылдасақ, онда $\left|\vec{\nabla} \times \vec{V}\right| d\sigma -$ $xy$ жазықтығындағы ауданы $d\vec{\sigma}$ болатын тұйық контур бойындағы $\vec{V}$ векторының циркуляциясына (ағын қозғалысына) тең болады. Бұл ескек винтінің айналуы арқасында $\vec{V}$ векторының роторын өлшеуге мүмкіндік береді. Ал егер винт айналмаса, онда Стокс теоремасының негізінде $\vec{V}$ векторы құйынсыз деген қорытынды жасаймыз.

## Жаттығулар

1. $\vec{F}(M) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ вектор өрісінің $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сфера беті арқылы ағынын есептеңіздер.

2. $q$ нүктелік зарядтың $\vec{E} = \dfrac{q \cdot \vec{r}}{r^3}$ кернеулік өрісіндегі $S$ тұйық беті арқылы ағынын есептеп табыңыздар. $q$ заряды беттің сыртында орналасқан.

3. $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ координаталық жазықтықтары мен $4 - z = x^2 + y^2$ параболоидының бірінші октантта орналасқан бөлігі арасында жататын тұйық бет арқылы өтетін $\vec{F}(M) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z\vec{k}$ вектор өрісінің ағынын есептеңіздер.

4. $A(1;0;0),\ B(0;2;0),\ C(0;0;3)$ нүктелері мен $\vec{F} = (x + y^2)\vec{i} + (y + z^2)\vec{j} + (z + x^2)\vec{k}$ өрісі берілген. $OBC$, $OAC$ және $OAB$ үшбұрыштары арқылы өтетін $\vec{F}$ өрісінің ағынын

есептеңіздер. *OABC* пирамидасының толық бетінен өтетін $\vec{F}$ өрісінің ағынын табыңыздар.

5. Стокс теоремасын (1.111) түрінде дәлелдеңіздер.

6. $\vec{t} = -\vec{i}\,y + \vec{j}x$ векторы берілсін. Стокс теоремасын пайдаланып, *xy* жазықтығындағы үздіксіз тұйық қисық бойымен интегралдың $\frac{1}{2}\oint \vec{t} \cdot d\vec{\lambda} = \frac{1}{2}\oint (xdy - ydx) = A$-ға тең болатынын көрсетіңіздер. Мұндағы $A$ – қисықпен шектелген беттің ауданы.

7. $\oint \vec{r} \times d\vec{r}$ интегралының абсолюттік шамасы *xy* жазықтығында орналасқан беттің ауданы бойынша интегралдың шамасынан екі есе артық болатынын көрсетіңіздер.

8. Егер *S*–тұйық бет болса, онда $\int\limits_S \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = 0$ екендігін көрсетіңіздер.

9. Келесі қатынастарды дәлелдеңіздер:

$$\oint U\vec{\nabla} V \cdot d\vec{\lambda} = -\oint V\vec{\nabla} U \cdot d\vec{\lambda},$$

$$\oint U \cdot \vec{\nabla} V \cdot d\vec{\lambda} = \int\limits_S (\vec{\nabla} U) \times (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{\sigma}.$$

## 1.13 Потенциал теориясы

**Скалярлық потенциал.** Егер берілген *S* кеңістігінің аймағындағы қандай да күшті әлдеқандай $\varphi$ скалярлық функцияның градиенті түрінде, дәлірек айтқанда теріс таңбасымен өрнектей алсақ:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi, \tag{1.115}$$

онда $\varphi$-ді *скалярлық функция* деп атайтын боламыз. Ал, бір мәнді анықталатын скалярлық функция градиентінің теріс мәніне тең $\vec{F}$ күші *консервативті* деп аталады.

Скалярлық потенциалдың табылуының шарттарын анықтайық. Ол үшін төмендегі екі қатынастың (1.115) теңдеуіне эквивалент болатынын көрсету қажет:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \tag{1.116}$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad (1.117)$$

Ал, (1.117) өрнегі $S$ аймғындағы кез келген тұйық контур үшін орындалады. Енді жоғарыда жазылған үш теңдеудің (1.115 - 1.117) әрбіреуі қалған екеуімен эквивалент екенін дәлелделік.

Алдымен

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi, \qquad (1.118)$$

теңдігінен бастайық. Ол үшін (1.56) теңдеуін пайдаланып (1.117) интегралдық шартын қайта жазалық:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\oint \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = -\oint d\varphi \qquad (1.119)$$

$d\varphi$ бойынша интеграл $\varphi$-ге тең болады. Бірақ қарастырып отырған контурымыз тұйық болғандықтан, (1.116) теңдеуі орындалатын $S$ аймағындағы кез келген тұйық контур үшін осы интегралдың мәні нөлге тең болады. Енді қойылған шектеулерімізге мұқият көңіл аударайық:

1) потенциалдың бір мәнді анықталу қажеттілігі;

2) $S$ аймағында барлық нүктелердегі (1.115) шартының орындалуы.

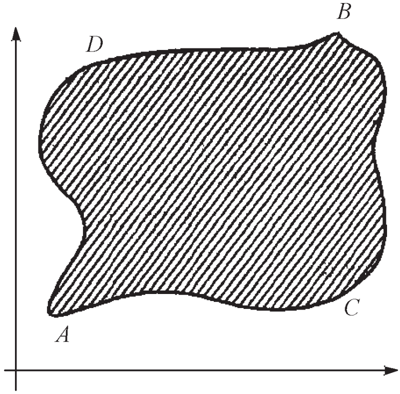
Айналмалы токтың магниттік скалярлық потенциалының теориясы үшін бұл елеулі ескерту. Егер ток сызықтарын қоршайтын кеңістіктегі контурды таңдайтын болсақ, онда скалярлық магниттік потенциал бір мәнді болудан қалады да, аталған талдауды қолдануға келмейді.

Дәлелдеменің эквиваленттілігін жалғастыра отырып, (1.117) шарты орындалады деп жорамалдаймыз. Егер $S$ облысындағы кез келген тұйық контур үшін $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ болса, онда $A$ және $B$ нүктелері арасындағы интегралдың мәні интегралдау жолына тәуелсіз болады (1.20 сурет). Шындығында

$$\int_{ACB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{BDA} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{ADB} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad (1.120)$$

мұнда BDA бойынша алынған интеграл таңбасының алмасуы – бағыттың өзгеруін білдіреді. Ал оның физикалық мағынасы: $A$

нүктесінен $B$ нүктесіне ығысқандағы жасалатын жұмыс жолға тәуелсіз. Сондықтан, тұйық контур бойынша жасалған жұмыс нөлге тең. Соның салдарынан күш консервативті деп аталады және энергия сақталады.




**1.20-сурет.** Жұмыстың жасалуы кезінде айналып өтудің мүмкін болатын жолдары

(1.120) теңдеуінен жұмыстың тек бастапқы және соңғы нүктелеріне тәуелді болатыны көрінеді, яғни

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A). \qquad (1.121)$$

Контурды оң бағытта айналу кезінде таңбаны еркін таңдауға болады. Біздің жағдайымызда (1.115) теңдеуіне сәйкес таңдалды. $d\vec{r}$ қашықтықтағы $A$ және $B$ нүктелері үшін (1.121) теңдеуі төмендегідей өзгереді:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -d\varphi = -\vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r}, \qquad (1.122)$$

бұдан

$$(\vec{F} + \vec{\nabla}\varphi) \cdot d\vec{r} = 0 \qquad (1.123)$$

$d\vec{r}$-ді еркін таңдағандықтан, (1.123) теңдігінен (1.115) теңдеуін аламыз. Егер

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

болса, онда Стокс теоремасын қолданып, келесі теңдеуді табамыз:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{\sigma} \tag{1.124}$$

Егер контур ретінде $d\sigma$ беттік элементінің ауданын алар болсақ, онда интеграл асты функциямыз беттік интегралда нөлге айналады. Демек, (1.117) теңдеуінен (1.116) қатынасын аламыз.

$\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ жағдайында (1.117) теңдеуін алу үшін Стокс теоремасы [(1.124) түрінде] дәлелдемесінің кері ретін пайдалану қажет. Онда (1.121) және (1.123) өрнектерін пайдаланып, (1.115) теңдеуін аламыз. Сонымен, үш қатынастың: (1.115), (1.116) және (1.117) эквивалентті болатынын көрсеттік.

Осы бөлімді қорытындылайық: егер $\vec{F}$ векторы құйынсыз болса (тек осы шарт орындалғанда) ғана $\varphi$ скалярлық потенциалы табылады немесе кез келген тұйық контурдың бойымен ығысқандағы жұмыс нөлге тең болады. Құйынсыз векторлардың мысалы ретінде гравитациялық және электростатикалық күштерін атауға болады. Демек, осы күштер консервативті, сондықтан гравитациялық және электростатикалық потенциалдары бар.

**1-мысал.** Массасы $m_1$ денеге әсер ететін гравитациялық күштің скалярлық потенциалын табайық:

$$\vec{F}_G=-\frac{Gm_1m_2\vec{r}_0}{r^2}=-\frac{k\vec{r}_0}{r^2}.$$

(1.115) қатынасты шексіздіктен $\vec{r}$ -ге дейін интегралдап, аламыз:

$$\varphi_G(r)-\varphi_G(\infty)=-\int_\infty^r \vec{F}_G\cdot d\vec{r}=+\int_r^\infty \vec{F}_G\cdot d\vec{r}\,. \tag{1.125}$$

Мұнда $\vec{F}_G=-\vec{F}$ (яғни массаға түсірілген $\vec{F}$ күші) ретінде қабылдап, (1.88) теңдігін ескере отырып табатынымыз: бірлік массалы денені шексіздіктен $\vec{r}$ нүктесіне дейін тасымалдауға жұмсалған күшке тең. (Тек потенциалдар айырымын анықтауға болады. Осы жағдай үшін шексіздіктегі потенциал нөлге тең деп қабылдайық.) (1.125) теңдеуінің оң бөлігі нөлден кіші шама болғандықтан, $\varphi_G(r)$-де теріс мәнге ие болады. Ал $\vec{F}_G$ радиалды болғандықтан

$$\varphi_G(r)=\int_r^\infty -\frac{k\vec{r}_0\,d\vec{r}}{r^2}=-\frac{k}{r}=-\frac{Gm_1m_2}{r}.$$

Минус таңбасы гравитациялық күштің табиғаты тартылыс болатынын білдіреді.

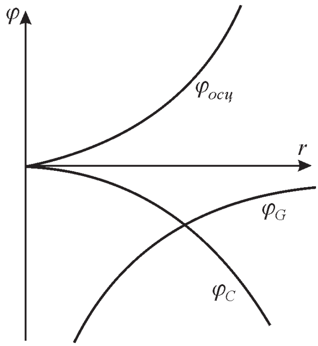
**2-мысал.** Бірлік массалы денеге әсер ететін орталық тебілу күшінің скалярлық потенциалын есептеңіздер. Күш орталықтан радиалды бағытталған және оның шамасы $\vec{F}_C = \omega^2 r\vec{r}_0$. Алдыңғы мысалдан айырмашылығы интегралдау координаталар басынан басталады, мұндағы $\varphi_C(0)=0$.

Орталық тебілу күшінің түрі

$$\varphi_C(r) = -\int_0^r \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = -\frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Егер таңбасын алмастырып, күшті $\vec{F}_{OCЦ} = -k\vec{r}$ етіп өзгертсек, онда сызықтық гармоникалық осцилляторды $\varphi_{OCЦ}(r) = kr^2/2$ аламыз.

1.21-суретте гравитациялық және орталықтан тебілу күштерінің, оған қоса сызықтық гармоникалық осциллятордың потенциалдары көрсетілген. Соңғысы орнықты күйді сипаттайды және кері қайтару күшін өрнектейді.




**1.21-сурет.** Потенциалдық энергияның қашықтыққа тәуелділігі: $\varphi_G(r)$ - гравитациялық, $\varphi_C$ – орталықтан тебілу, $\varphi_{осц}$ – сызықтық гармоникалық осциллятордың энергиялары.

Заманында толық дифференциалдар жөніндегі ғылым атанған термодинамикада теңдеулердің келесі түрлері кездеседі:

$$df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (1.126)$$

Әдетте $\oint [P(x,y)dx + Q(x,y)dy]$ интегралының интегралдау контурының тек соңғы нүктелеріне тәуелділігін, яғни $df$ -тің толық дифференциал болатынын анықтау қажет болатын. Оның қажетті және жеткілікті шарттары келесі теңдеумен өрнектеледі

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (1.126а)$$

немесе

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (1.126б)$$

Ал (1.126б) өрнегін қанағаттандыратын $P$ және $Q$ функциялары келесі қатынаспен байланысқан:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \qquad (1.126в)$$

Осы шарт $\vec{F}$-тің құйынсыз болуын талап ететін (1.116) өрнегінің ұқсастығы. Шындығында да (1.116) өрнегінің $z$ - компоненті

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad (1.126г)$$

**Векторлық потенциал.** Физиканың кейбір аймақтарында, әсіресе, электромагниттік теорияда $\vec{B}$ өрісі мен $\vec{A}$ векторлық потенциалы арасындағы келесі байланыс жиі енгізіледі

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \qquad (1.127)$$

Әрине, егер (1.127) орындалса, онда (1.79) теңдеуінің нәтижесінде $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ болады, демек $\vec{B}$ – соленоидтық вектор. Сондықтан керісін дәлелделік: яғни, егер $\vec{B}$ – соленоидтық вектор болса, онда $\vec{A}$– векторлық потенциал табылады. Ол үшін $\vec{A}$–ны тікелей есептеумен дәлелдейміз. Енді $\vec{B} = \vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3$, ал векторлық потенциал $\vec{A} = \vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3$ болсын. Онда (1.127) теңдеуінен

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = b_1, \qquad (1.128а)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} = b_2\,, \tag{1.128б}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = b_3\,. \tag{1.128в}$$

Координаталар жүйесі $\vec{A}$-ны $yz$ жазықтығына параллель, яғни $a_1$=0 етіп таңдалған деп жорамалдайық. Онда

$$b_2 = -\frac{\partial a_3}{\partial x}, \quad b_3 = \frac{\partial a_2}{\partial x}. \tag{1.129}$$

Енді интегралдаймыз:

$$a_2 = \int_{x_0}^{x} b_3 dx + f_2(y,z), \qquad a_3 = -\int_{x_0}^{x} b_2 dx + f_3(y,z), \tag{1.130}$$

мұндағы кез келген $f_2$ және $f_3$ функциялары $x$-ке тәуелсіз. Енді (1.128а, б, в) өрнектеріне апарып қоямыз, мұнда $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ болатынын ескеру қажет, сонда

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = -\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z}\right)dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} = -\int_{x_0}^{x}\frac{\partial b_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \tag{1.131}$$

$x$ – айнымалысы бойынша интегралдап, табатынымыз

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = b_1(x,y,z) - b_1(x_0,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \tag{1.132}$$

Мұндағы $f_2$ және $f_3$ кез келген функциялары $y$ және $z$ айнымалыларына тәуелді болғандықтан, келесі түрде қабылдайық

$$f_2 = 0, \quad f_3 = \int_{y_0}^{y} b_1(x_0,y,z)dy \tag{1.133}$$

Осы жағдайда (1.128а) теңдігіне сәйкес (1.132) өрнегінің оң бөлігінде бір ғана $\boldsymbol{b_1(x,y,z)}$ функциясына тәуелділігі сақталады. Ендеше (1.133) теңдіктерін пайдаланып $\vec{A}$-ны құрастыруға болады:

$$\vec{A} = \vec{j}\int_{x_0}^{x} b_3(x,y,z)dx + \vec{k}\left[\int_{y_0}^{y} b_1(x_0,y,z)dy - \int_{x_0}^{x} b_2(x,y,z)dx\right] \tag{1.134}$$

Бұл анықтама мүлде толық деуге келмейді. Себебі $\vec{B}$ векторы $\vec{A}$-ның туындысы арқылы жазылғандықтан, кез келген тұрақтыны қосуға болады.

Енді одан да маңызды жайтты ескереміз: Кез келген $\vec{\nabla}\varphi$-ді, яғни скалярлық функцияның градиентін қосқанда да $\vec{B}$ векторы өзгермейді. Сонымен қатар, $f_2$ және $f_3$ функцияларының еркіндігін ескере отырып, оларды өзгеше етіп таңдауға да болады. Келесі бөлімде $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ шамасын қосымша анықтайтын боламыз.

**3-мысал.** Магниттік векторлық потенциалды құрастырайық. Ол үшін магниттік индукцияның дербес, бірақ аса маңызды жағдайын қарастыралық:

$$\vec{B} = \vec{k}B_z\,, \tag{1.135}$$

мұндағы $B_z$ - тұрақты. Осы жағдай үшін (1.128) теңдеуінің түрлері төмендегідей болады:

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = B_z \tag{1.136}$$

Жоғарыдағыдай $a_1$=0 етіп қабылдап, (1.134)–тен табатынымыз

$$\vec{A} = \vec{j}\int_{x_0}^{x} B_z dx = \vec{j}xB_z\,. \tag{1.137}$$

Мұнда интегралдау тұрақтысын нөлге теңестірдік. Табылған өрнек $\vec{A}$ векторлық потенциалды қанағаттандыратынын байқау қиын емес.

Енді $a_1$=0 шарты тым қатаң еместігін көрсетейік. Ол үшін қосымша келесі: $a_3$=0 шартын орнаталық. Онда (1.136) теңдіктерінен табамыз

$$-\frac{\partial a_2}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial a_1}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = B_z \tag{1.138}$$

Бұдан $a_1$ және $a_2$ құрамдас бөліктері $z$-ке тәуелсіз, яғни

$$a_1 = a_1(x,y),\quad a_2 = a_2(x,y) \tag{1.139}$$

болатынын көреміз. (1.138) шарттарының соңғысы орындалуы үшін $a_1$ және $a_2$

$$a_2 = p\int_0^x B_z dx = pxB_z \qquad (1.140)$$

$$a_1 = (p-1)\int_0^y B_z dy = (p-1)yB_z \qquad (1.141)$$

осылайша таңдалуы қажет, мұндағы $p$- кез келген тұрақты. Онда

$$\vec{A} = \vec{i}\,(p-1)yB_z + \vec{j}pxB_z \qquad (1.142)$$

Бұған қоса (1.127), (1.135) және (1.142) теңдеулері біріне-бірі қарама-қайшы болмайтынын көрсетуіміз қажет. Ал (1.137) және (1.142) салыстырсақ, онда $\vec{A}$ -ны таңдау бір мәнді болмайтынына көз жеткіземіз. (1.142) теңдеуіндегі $p$ параметрінің болуы, оған қоса (1.137) және (1.142) теңдеулерінің айырмашылығын ескеру үшін $\vec{A}$ -ны төмендегідей қайта жазу қажет:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= -\frac{1}{2}\left(\vec{i}y - \vec{j}x\right)B_z + (p-\frac{1}{2})\left(\vec{i}y + \vec{j}x\right)B_z = \\ &= -\frac{1}{2}\left(\vec{i}y - \vec{j}x\right)B_z + (p-\frac{1}{2})B_z\vec{\nabla}\varphi,\end{aligned} \qquad (1.143)$$

мұндағы[1]

$$\varphi = xy. \qquad (1.144)$$

$\vec{A}$–дағы бірінші мүше $\vec{B}$ тұрақты үшін қарапайым пішінде жазылады:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{B}\times\vec{r}\right) \qquad (1.145)$$

[1] Әрине, 1.3 - бөліміндегі анықтамаға сәйкес $\varphi$ = ху функциясы скалярлық емес, яғни ху көбейтіндісі z осімен бұрылысына инвариантты емес. Инварианттылықты талап ету үшін p=½ -ге тең етіп қабылдау қажет.

Көптеген жағдайларда магниттік векторлық потенциалды магнит өрісі $\vec{B}$ туғызатын токтың таралуынан табады. Ол үшін Пуассонның векторлық теңдеуінің шешіміне қол жеткізу қажет. (1.14-бөлімінің 1-жаттығуын қараңыз).

**Жаттығулар**

1. Төменде келтірілген күштердің қайсылары потенциалдық сипатқа ие болатынын анықтаңыздар:

$$\vec{F} = \vec{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2} + \vec{j}\,\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\vec{F} = \vec{i}\,\frac{y}{r} - \vec{j}\,\frac{x}{r},$$

$$\vec{F} = \vec{i}xf(r) + \vec{j}yf(r) + \vec{k}zf(r),$$

$$\vec{F} = \vec{i}f_1(x) + \vec{j}f_2(y) + \vec{k}f_3(z),$$

Мұндағы $f(r)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$ – кез келген функциялар. Күштердің физикалық табиғатын көрсетіңіздер. Мүмкін болатын жағдайлар үшін потенциалдарды табыңыздар.

*Сілтеме.* Әсіресе, $\vec{F}$-тің координаттар басындағы сипаттамасына көңіл аударыңыздар.

2. $\vec{B} = \dfrac{\vec{r}_0}{r^2} = \left(\dfrac{x}{r^3}, \dfrac{y}{r^3}, \dfrac{z}{r^3}\right)$ болсын. Онда $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ болатындай етіп, $\vec{A}$ -ны таңдаңыздар. Мүмкін болатын шешімдердің бірі төменде көрсетілген:

$$\vec{A} = \frac{\vec{i}yz}{r\left(x^2+y^2\right)} - \frac{\vec{j}xz}{r\left(x^2+y^2\right)}$$

3. Радиусы $a$ болатын бір қалыпты (көлемі бойынша) зарядталған сфера берілген. Оның $0 \le r \prec \infty$ аралығындағы $\varphi(r)$ электростатикалық потенциалын анықтаңыздар.

*Ескерту.* 1.14-бөлімінде көрсеткеніміздей, $r=r_0$ нүктесінде орналасқан зарядқа әсер ететін кулондық күш $r_0$-ден кіші қашықтықтағы зарядқа ғана тәуелді; ал $r_0$-ден үлкен қашықтықтағы зарядқа тәуелсіз. Бұл зарядтың тек сфералық симметриялы таралуы үшін ғана орынды екендігін баса айтамыз.

4. $\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{B} \times \vec{r}\right)$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ теңдеулері кез келген $\vec{B}$ тұрақты векторын өрнектейтінін көрсетіңіздер.

## 1.14 Гаусс заңы. Пуассон теңдеуі

**Гаусс заңы.** Нүктелік электр заряды координаталар басында орналассын. Ол $\vec{E}$ электр өрісін тудырады

$$\vec{E} = -\frac{q\vec{r}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1.146}$$

Енді (1.146) теңдеуінің көмегімен *Гаусс заңын* жазамыз; осы заңға сәйкес беттік интеграл

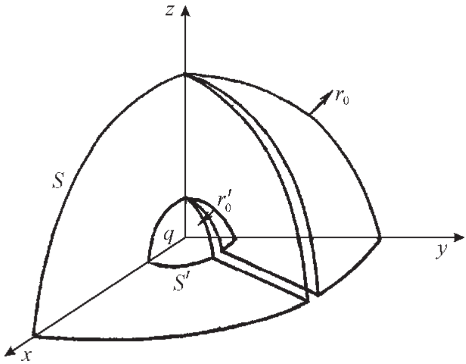
$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0}, & \text{егер заряд V-да болса,} \\ 0, & \text{егер заряд V-дан тыс болса.} \end{cases} \tag{1.147}$$

Мұндағы $S$ – тұйық бет; ол $V$ көлемін шектейді.

Гаусс теоремасының (1.94) түрін пайдаланып ($q/4\pi\varepsilon_0$ көбейткішін әзірше қалдырамыз), оған қоса $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}_0 r^{-2} = 0$ болатынын ескеріп, табамыз:

$$\int_S \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{\sigma}}{r^2} = \int_V \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}_0}{r^2}\right) d\tau = 0. \tag{1.148}$$

Мұнда интеграл асты функциясы координаттар басында анықталмағандықтан, $S$ беті оны қамтымайды. Гаусс заңының осы дәлелдемесі зарядтың $V$ көлемінен тыс жағдай үшін сәйкес келеді.




**1.22-сурет.** Координаттар басын «алып тастау»

Ал егер $S$ беті координаттар басын қамтитын болса, онда ортасы координаттар басында орналасқан, радиусы $\delta$ болатын $S'$ кіші сфера құруға болады (1.22-сурет). $S$ және $S'$ сфераларымен шектелетін беттердің қайсысы сыртқы және қайсысы ішкі болатынын ажырату мақсатында «ойық» жасаймыз. Ол $S$ және $S'$ сфераларын байланыстыратын болғандықтан, бір мәнді анықталған тұйық бет пайда болады. Ойықты қажетті шамада кішірек етіп жасауға болатындықтан, ойықтың беттік интегралға беретін үлесі нөлге ұмтылады. Енді Гаусс теоремасын $S$ және $S'$ беттердің арасындағы көлемге де пайдалануға болады:

$$\int_S \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{\sigma}}{r^2} + \int_{S'} \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{\sigma}'}{\delta^2} = 0 \qquad (1.149)$$

Екінші интегралды бағалау мақсатында $d\vec{\sigma}' = -\vec{r}_0 \delta^2 d\Omega$ етіп жорамалдадық, мұндағы $d\Omega$ – денелік бұрыш элементі. Минус таңбасы (1.10-бөліміне сәйкес) $\vec{r}_0'$ нормальдің оң бағытын білдіреді. Біздің жағдайымызда ол радиус-вектордың бағытына қарама-қарсы $\vec{r}_0' = -\vec{r}_0$. Бұрыштар бойынша интегралдаймыз, сонда:

$$\int_{S'} \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{\sigma}'}{\delta^2} = -\int_{S'} \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 \delta^2 d\Omega}{\delta^2} = -4\pi\,. \qquad (1.150)$$

(1.149) теңдеуіндегі көбейткішті ескеруіміз қажет, сондықтан

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (1.151)$$

Сонымен Гаусс теоремасы толығымен дәлелденді. Мұндағы $S$ беті міндетті түрде сфералық болуы шарт емес екендігін атап өтеміз.

Зарядтың таралуын қарастыралық:

$$q = \int_V \rho d\tau \tag{1.152}$$

(1.151) теңдеуі орынды, алайда толық $q$ зарядты $S$ бетінің ішіндегі орналасқан барлық зарядтардың қосындысы ретінде қабылдау қажет:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau \tag{1.153}$$

Оны Гаусс теоремасының негізінде табамыз

$$\int_S \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau \tag{1.154}$$

Көлемді таңдау еркін болғандықтан, интеграл асты өрнектер өзара тең болуы қажет

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \tag{1.155}$$

Осы қатынас – Максвелл теңдеулерінің бірі.

Керісінше, яғни Максвелл теңдеуін пайдаланып Гаусс заңын дәлелдеуге де болады.

**Пуассон теңдеуі.** Егер (1.155) теңдеуіндегі $\vec{E}$-нің орнына $-\vec{\nabla}\varphi$- ді қоятын болсақ, онда Пуассон теңдеуін аламыз

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = -\rho / \varepsilon_0 \tag{1.156}$$

Егер $c$ = 0 шарты орындалса, онда әйгілі Лапласс теңдеуін аламыз:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = 0 \tag{1.157}$$

**Жаттығулар**

1. Максвелл теңдеулерін пайдаланып, статикалық жүйе (тұрақты ток) үшін $\vec{A}$ магниттік векторлық потенциалы

Пуассонның векторлық теңдеуін $\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{A} = -\mu \vec{j}$ тек $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ болғанда ғана қанағаттандыратынын көрсетіңіздер.

2. Екі өлшемді жағдай үшін $\varphi = -q\dfrac{\ln\ r}{2\pi\varepsilon_0}$, $\vec{E} = \vec{\nabla}\varphi = q\dfrac{\vec{r}_0}{2\pi\varepsilon_0 r}$

болатынын ескеріп, Гаусс заңын жазыңыздар. Мұндағы $q$ – бірлік ұзындықтағы заряд; ал бірлік жұқалықты цилиндрлік қабат екі өлшемді жүйені құрайды, $r$ – радиус бойынша өлшенетін нүктеден осьтік сызыққа дейінгі қашықтық.

3. Максвелл теңдеуін (1.155) пайдаланып, Гаусс заңын алыңыздар.

4. Нүктелік $q$ – зарядтың электр өрісі сфералық симметриялық деп жорамалдап, Кулон заңы Гаусс заңынан шығатынын көрсетіңіздер:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}_0}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot$$

## 1.15 Гельмгольц теоремасы

Жоғарыда 1.13-бөлімде айтылғандай, $\vec{A}$ магниттік векторлық потенциалын таңдау бір мәнді емес. $\vec{A}$-ның дивергенициясы анықталмаған күйінде қалды. Осы бөлімде вектордың дивергенциясы және роторы жөніндегі екі теореманы дәлелдейміз.

Кез келген облыс ішіндегі вектор дивергенциясының, роторының және нормалінің берілуі арқылы оны осы аймақтың шектерінде бір мәнді анықтауға болады. Айтылғанды дәлелдеу мақсатында келесі белгілеулер енгізейік:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1 = s, \ \ \vec{\nabla} \times \vec{V}_1 = \vec{c}, \tag{1.158}$$

мұндағы, s – (заряд) көзінің тығыздығы; $\vec{c}$ – (тоқ) циркуляциясының тығыздығы. Қосымша аймақ шегінде вектордың нормальдік құрамдас бөліктері $V_n$ берілсін. Жасалған жорамалдарымызға сәйкес $\vec{V}_1$ векторының бірмәнді анықталатынын дәлелдейміз.

(1.158) теңдеуін қанағаттандыратын және аймақ шегіндегі нормальдік құрамдас бөліктері де тура сондай болатын $\vec{V}_2$ векторы табылсын. Онда $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 0$ болатынын көрсетуіміз қажет. Ол үшін $\vec{W} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ белгілеуін енгіземіз. Онда:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = 0, \tag{1.159}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{W} = 0. \tag{1.160}$$

Ендеше (1.13-бөлімінде көрсетілгендей)

$$\vec{W} = -\vec{\nabla} \cdot \varphi \tag{1.161}$$

етіп таңдауымызға болады. Оны (1.159) теңдеуіне қойып, Лаплас теңдеуін аламыз:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = 0. \tag{1.162}$$

Алдын ала $u$ және $v$ функцияларын $\varphi$-ге теңестіріп, Грин теоремасын (1.98) пайдаланамыз. Шекарада

$$W_n = V_{1n} - V_{2n} = 0 \tag{1.163}$$

болатынын ескерсек, онда Грин теоремасын келесі түрде жазуға тура келеді:

$$\int_V \left(\vec{\nabla} \varphi\right)\left(\vec{\nabla} \varphi\right) d\tau = \int_V \vec{W} \cdot \vec{W} d\tau = 0 \tag{1.164}$$

$\vec{W} \cdot \vec{W} = W^2$ шамасы оң болғандықтан,

$$\vec{W} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 0 \tag{1.165}$$

берілген аймақтың аумағында орынды болады. Демек, $\vec{V}_1$ жалғыз. Теорема дәлелденді.

Ендігі кезекте екінші теорема – Гельмгольц теоремасын дәлелдейік.

(1.158) шарттарын қанағаттандыратын $\vec{V}$ векторын екі (бірі құйынсыз, екіншісі – соленоидты) вектордың қосындысы түрінде жазуға болады; мұнда $s$ және $c$ – шексіздікте нөлге тең болады. Сонымен $\vec{V}$ векторын келесі түрде жазуға болатынын дәлелдейік

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{1.166}$$

мұндағы, $\vec{\nabla}\varphi$ – құйынсыз, $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ – соленоидты бөліктері.

Дербес жағдайда $\varphi(r)$ функциясы скалярлық потенциалына сәйкес болатын жағдайда келесі түрде жазылады:

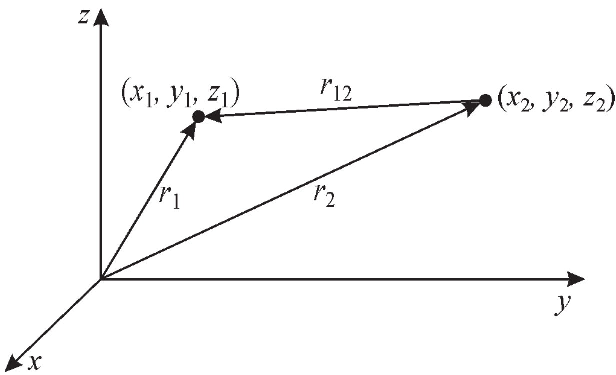
$$\varphi(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{s(\vec{r}_2)}{r_{12}}d\tau_2, \tag{1.167}$$

ал $\vec{A}$ – векторлық потенциалға сәйкес болғанда, төмендегідей жазылады:

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{c}(\vec{r}_2)}{r_{12}}d\tau_2 \tag{1.168}$$

Мұндағы $\vec{r}_1$ – өріс нүктесінің $(x_1, y_1, z_1)$ координаталарын, $\vec{r}_2$ - өріс көзінің $(x_2, y_2, z_2)$ координаталарын көрсетеді, ал

$$r_{12} = \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right]^{1/2} \tag{1.169}$$




**1.23-сурет.** Өріс көзінің координаттары $(x_2, y_2, z_2)$ және бақылаушы нүктесі $(x_1, y_1, z_1)$

$\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ және $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ векторларының бағыттары 1.23-суретте көрсетілген. Ал $\vec{r}_{12}$ векторының оң бағыты ретінде – өріс көзінен бақылаушы нүктесіне дейінгі бағыты қабылданды. Интегралдарды табу үшін $s$ және $\vec{c}$ үлкен қашықтықтарда жылдам нөлге ұмтылуы қажет.

(1.166) теңдеуіне сәйкес $\vec{V}$ векторы құйынсыз және соленоидты бөліктерінің қосындысына тең. Мұндағы скалярлық және векторлық потенциалдар сәйкесінше (1.167) және (1.168) теңдеулері түрінде анықталған. Енді $\vec{V}$ векторы (1.158) шартын қанағаттандыратынын көрсетейік. Сонда алдыңғы теореманың негізінде $\vec{V}$ бір мәнді анықталғандықтан, Гельмгольц теоремасы дәлелденеді.

Біріншіден, ротордың дивергенциясы нөлге тең болғандықтан, $\vec{V}$-ның дивергенциясы (1.166) теңдеуінің оң бөлігіндегі бірінші мүшесімен анықталады:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi=-\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\int\frac{s\left(\vec{r}_2\right)}{r_{12}}d\tau_2 \qquad (1.170)$$

Интегралдау ($x_2$, $y_2$, $z_2$) айнымалылары бойынша жүргізіледі, ал Лаплас операторы $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ (немесе $\vec{\nabla}^2$) ($x_1$, $y_1$, $z_1$) координаталарына әсер етеді; сондықтан оны интеграл астына енгізуге болады

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=-\frac{1}{4\pi}\int s\left(\vec{r}_2\right)\vec{\nabla}_1^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)d\tau_2 \qquad (1.171)$$

Гаусс заңының негізінде (1.14-бөлімін қараңыз) келесі өрнек орынды:

$$\int\vec{\nabla}\left(\frac{r_0}{r^2}\right)d\tau=\int\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right)d\tau=\begin{cases}-4\pi,\\ 0.\end{cases} \qquad (1.172)$$

Нәтиже интегралдау тұйық бетінің координаталар басын $r$=0 қамтитынына немесе қамтымайтынына байланысты. Сондықтан нәтижені Дирактың $\delta$ – функциясымен өрнектеген ыңғайлы:

$$\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta\left(\vec{r}\right) \qquad (1.173)$$

Дирактың дельта-функциясы келесі түрде анықталады:

$$\delta\left(\vec{r}\right)=0\text{, егер } \vec{r}\neq 0, \qquad (1.174а)$$

$$\int f(r)\delta(r)d\tau=f(0). \qquad (1.174б)$$

Мұндағы $f(r)$ – кеңістікте анықталған кез келген функция, ал координаталар басы интегралдау шегіне енеді.

Дербес жағдайда (1.174 б) теңдеуі

$$\int \delta(\vec{r})d\tau = 1. \qquad (1.175)$$

Талдауды одан әрі жалғастырмастан бұрын (1.173) теңдеуінің екі түрін қарастырайық. Біріншіден, берілген өріс көзі координаталар басымен сәйкес келмейтін $\vec{r}_2$ нүктесінде орналассын. Бұдан келесі салдар шығады: егер тұйық бет $\vec{r} = \vec{r}_2$ нүктесін қамтыған жағдайда ғана Гаусс заңындағы $4\pi$ көбейткіші пайда болады. Көз жеткізу үшін (1.173) теңдеуін қайта жазамыз:

$$\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = -4\pi\delta\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \qquad (1.176)$$

Көзді $\vec{r}_2$ нүктесіне тасымалдау (1.174 а және 1.174 б) шарттарын өзгертеді

$$\delta\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = 0\,,\ \vec{r}_1 \neq \vec{r}_2 \qquad (1.177а)$$

$$\int f(\vec{r}_1)\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)d\vec{r}_1 = f(\vec{r}_2) \qquad (1.177б)$$

Екіншіден, $r_{12}^{\ -1}$-ді $x_2$, $y_2$, $z_2$ айнымалылары бойынша екі ретті дифференциалдау $x_1$, $y_1$, $z_1$ бойынша екі ретті дифференциалдағанмен пара-пар:

$$\vec{\nabla}_1^{\ 2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = \vec{\nabla}_2^{\ 2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = -4\pi\delta\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = -4\pi\delta\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \qquad (1.178)$$

$\delta$ – функциясының анықтамасынан келесі қорытынды жасауға болатынын байқаймыз:

$$\delta\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \delta\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \qquad (1.179)$$

(1.176) теңдігін (1.171) теңдеуіне апарып қойып, $\delta$– функциясының көмегімен интегралдап, табатынымыз:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = -\frac{1}{4\pi}\int s\left(\vec{r}_2\right)\vec{\nabla}_{21}{}^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)d\vec{r}_2 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int s\left(\vec{r}_2\right)\left(-4\pi\right)\delta\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = s\left(\vec{r}_1\right) \qquad (1.180)$$

Соңғы теңдік (1.177 б) теңдеуінің салдары, онда 1 және 2 индекстерінің орны алмастырылған. (1.180) теңдеуінен көргеніміздей, $\vec{V}$ векторының қабылданған пішіні мен *ц* скалярлық потенциалы (1.158) шарттарының біріншісімен келісімде болады.

Гельмгольц теоремасының толық дәлелдемесі үшін айтылған жорамалдарымыз (1.158) шарттарының екіншісімен де келісімде болатынын көрсетуіміз қажет. (1.166) теңдеуінің негізінде келесі өрнекті жазайық:

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \vec{\nabla}^2\vec{A} \qquad (1.181)$$

(1.168) ескере отырып бірінші мүшені төмендегідей жазамыз:

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \int\vec{c}(\vec{r}_2)\cdot\vec{\nabla}_1\vec{\nabla}_2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)d\tau_2 \qquad (1.182)$$

*$(x_1, y_1, z_1)$* бойынша алынған екінші ретті туындыларын $(x_2, y_2, z_2)$ айнымалылары бойынша екінші ретті туындыларымен алмастырып, (1.182) теңдеуінің әрбір құрамдас бөліктерін бөлшектеп интегралдаймыз:

$$\left.\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right|_x = \int\vec{c}(\vec{r}_2)\cdot\vec{\nabla}_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)d\tau_2 =$$

$$= \int\vec{\nabla}_2\cdot\left[\vec{c}(\vec{r}_2)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)\right]d\tau_2 - \int\left[\vec{\nabla}_2\cdot\vec{c}(\vec{r}_2)\right]\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)d\tau_2. \qquad (1.183)$$

Алайда, екінші интегралдың мәні нөлге тең, себебі $\vec{c}$ - соленоидты, ал бірінші интегралды Гаусс теоремасының негізінде беттік интегралға алмастыруға болады. Егер $\vec{c}$ кеңістікте шектеулі немесе $r$-дің үлкен мәндерінде ${}^{1}\!/_{r}$-ден жылдам нөлге ұмтылатын болса, онда (1.168) интегралы табылады. Онда қажетті мөлшердегі алыс қашықтықтағы бет бойынша алынған (1.183) теңдеуінің оң бөлігіндегі бірінші интеграл да нөлге тең болады.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ шарты орындалған жағдайда, (1.181) теңдеуі (1.171) теңдеуіне әкеледі, мұндағы $s(\vec{r}_2)$ скаляры $\vec{c}(\vec{r}_2)$ векторымен алмастырылған:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{c}(\vec{r}_2) \cdot \vec{\nabla}_2{}^2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\vec{r} \tag{1.184}$$

$\delta$ – функциясының қасиеттерін пайдаланып, (1.184) теңдеуі (1.158) шарттарының екіншісімен келісімде болатынын көреміз. Сонымен, $\vec{V}$ векторының (1.166) түрінде, ал $\vec{A}$ векторлық потенциалының (1.168) түрінде жазылуы $\vec{V}$-ның роторын анықтайтын (1.158) шарттарының екіншісін қанағаттандырады.

Осымен Гельмгольц теоремасының дәлелдемесін аяқтаймыз. Электромагниттік өріске қатысты жазатын болсақ, онда өрістің $\vec{V}$ векторын екі құрамдас бөлігі бойынша: $\varphi$ скалярлық потенциалымен анықталатын электр өрісінің құйынсыз векторы мен $\vec{A}$ векторлық потенциалымен берілетін магнит өрісінің соленоидты $\vec{B}$ векторын құрайды. Өріс көзінің тығыздығы $s(\vec{r}_2)$-ды электр зарядының тығыздығы ($\varepsilon$ диэлектрлік өтімділік тұрақтысына бөлінген) ретінде, ал циркуляцияның тығыздығы $\vec{c}(\vec{r}_2)$-ды – электр тоғының тығыздығы ($\mu$ магнит тұрақтысына көбейтілген) ретінде қарастыруға болады.

**Жаттығулар**

1. Пуассонның $\vec{\nabla}_1^2 \vec{P}(\vec{r}_1) = -\vec{V}(\vec{r}_1)$ векторлық теңдеуінің шешімі $\vec{P}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_V \frac{\vec{V}(\vec{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2$ деп жорамалдап, Гельмгольц теоремасын (1.166) дәлелдеңіздер. Мұндағы $\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{P}$, $\varphi = \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$.

2. $\varphi$- дің және $\vec{A}$-ның орындарына $\vec{P}(\vec{r}_1)$ шешімін қойғанда, 1.15-бөлімдегі осы шамалардың өрнектеріне сәйкес болатынына көз жеткізіңіздер.

1. Вектордың түрлендіру заңын және оның салдарларын жазыңыздар.

2. Скалярлық көбейтінді және оның қасиеттерін жазыңыздар.

3. Векторлық көбейтінің геометриялық түсініктемесін беріңіздер.

4. Үш вектордың аралас көбейтіндісінің геометриялық түсініктемесін көрсетіңіздер.

5. Екі ретті векторлық көбейтіндінің қасиеттерін пайдаланып, физикалық есептерді шешудің мысалдарын келтіріңіздер.

6. Скалярлық функцияның градиенті және оның қасиеттерін көрсетіңіздер.

7. Дивергенция амалы және оның физикалық мағынасын түсіндіріңіздер.

8. Ротордың физикалық мағынасын түсіндіріңіздер. Құйынсыз векторларға мысалдар келтіріңіздер.

9. Гаусс теоремасының физикалық мағынасын жазып көрсетіңіздер.

10. Грин теоремасын дәлелдеңіздер, оның физикалық есептерінің шешімдеріне мысал келтіріңіздер.

11. Стокс теоремасының физикалық мағынасын жазып көрсетіңіздер.

12. Гаусс заңын пайдаланып, Пуассон теңдеуін қорытып шығарыңыздар.