

低通滤波器

理想低通滤波

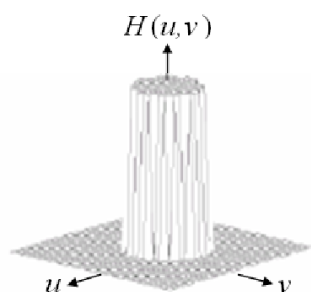
- 作用：保留频谱图中圆内低频分量，截断频谱图中圆外高频分量
- 函数表示：

$$H(u,v) = \begin{cases} 1, & D(u,v) \leq D_0 \\ 0, & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

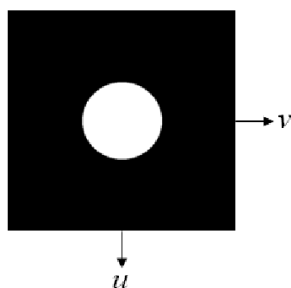
- 假设频谱中心在 $(M/2, N/2)$ 处，则任意频谱成分 (u,v) 到中心（原点）的距离 $D(u,v)$ 定义为：

$$D(u,v) = \sqrt{\left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2}$$

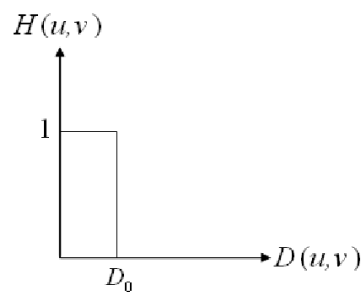
- D_0 为低通滤波器截止频率
- 图像表示：
- 从左到右分别是一个理想低通滤波器变换函数的透视图、以图像形式显示的滤波器和滤波器径向横截面。



(a) 滤波器函数



(b) 图像表示的滤波器



(c) 滤波器径向横截面

- 说明：在半径为 D_0 的圆内，所有频率没有衰减地通过滤波器，而在此半径的圆之外的所有频率完全被衰减掉
- matlab代码：

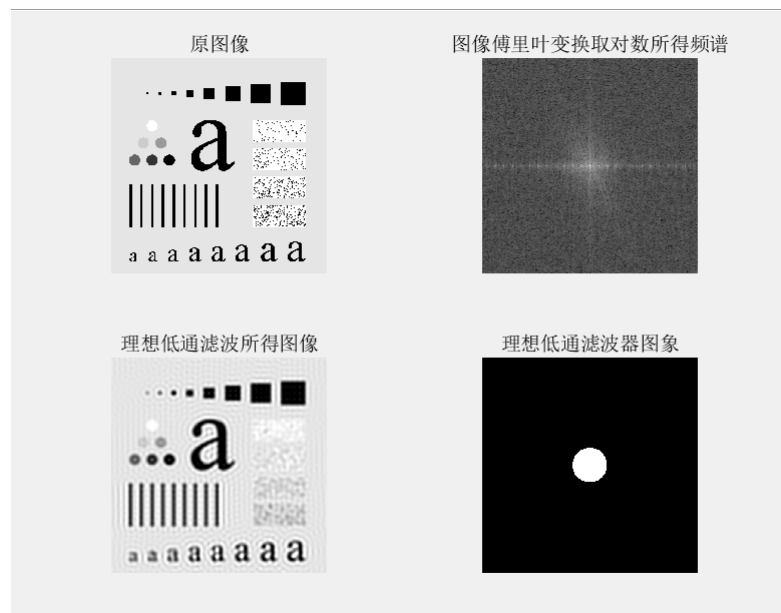
```
%理想低通
I = imread('aaa.tif');
figure(1);
subplot(221), imshow(I);
title('原图像');
I=im2double(I);
s=fftshift(fft2(I));%傅里叶变换，直流分量移到频谱中心
subplot(222), imshow(log(abs(s)+1), []);
title('图像傅里叶变换取对数所得频谱');
[a,b]=size(s);
h=zeros(a,b);%滤波器函数
res=zeros(a,b);%保存结果
a0=round(a/2);
```

```

b0=round(b/2);
d=40;
for i=1:a
    for j=1:b
        distance=sqrt((i-a0)^2+(j-b0)^2);
        if distance<=d
            h(i,j)=1;
        else
            h(i,j)=0;
        end
    end
end
res=s.*h;
res=real(ifft2(ifftshift(res)));
subplot(223),imshow(res);
title('理想低通滤波所得图像');
subplot(224),imshow(h);
title("理想低通滤波器图像");

```

- 运行结果：



高斯低通滤波

- 二维高斯低通滤波器定义如下：

$$H(u, v) = e^{-D(u, v)^2 / 2\sigma^2}$$

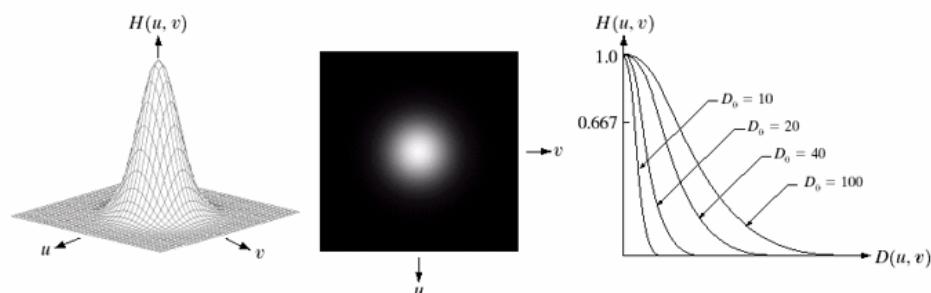
- σ 是关于频谱中心的扩展度的度量
- 令 $\sigma = D_0$ ，则二维高斯低通滤波器表示为：

$$H(u, v) = e^{-D(u, v)^2 / 2D_0^2}$$

- D_0 为截止频率距原点的距离， $D(u, v)$ 是点 (u, v) 距原点的距离

- 图像表示:

从左到右分别是一个理想低通滤波器变换函数的透视图、以图像形式显示的滤波器和滤波器径向横截面。



(a) 滤波器函数

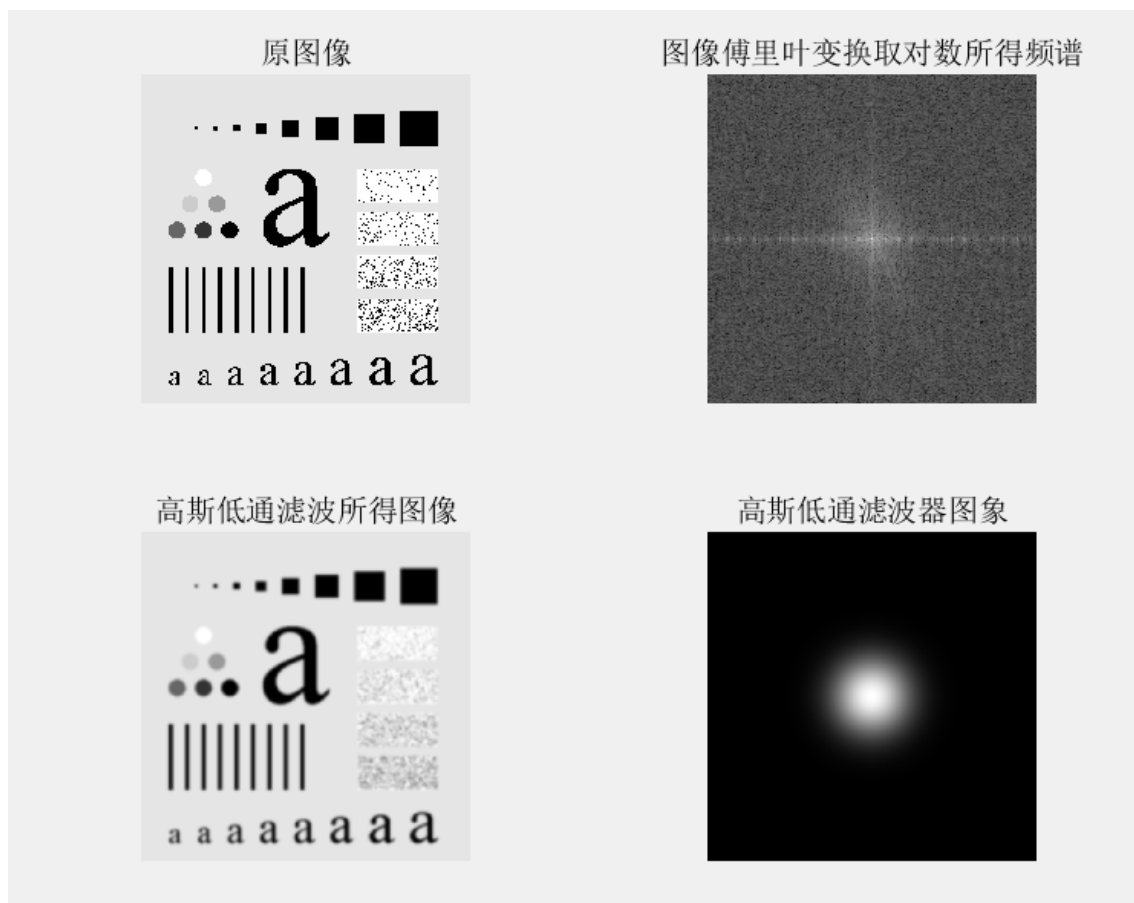
(b) 图像表示的滤波器

(c) 各种 D_0 值的滤波器径向横截面 17/37

- matlab代码:

```
%高斯低通
I=imread('aaa.tif');
subplot(221),imshow(I);
title('原图像');
Y=fft2(im2double(I));%傅里叶变换
Y=fftshift(Y);%频谱搬移,直流分量搬移到频谱中心
subplot(222), imshow(log(abs(Y)+1),[]);
title('图像傅里叶变换取对数所得频谱');
[M,N]=size(Y);%获得图像的高度和宽度
h=zeros(M,N);%滤波器函数
%图像中心点
M0=M/2;
N0=N/2;
%截至频率距离圆点的距离, delta表示高斯曲线的扩散程度
D0=40;
delta=D0;
for x=1:M
    for y=1:N
        %计算点(x,y)到中心点的距离
        d2=(x-M0)^2+(y-N0)^2;
        %计算高斯滤波器
        h(x,y)=exp(-d2/(2*delta^2));
    end
end
%滤波后结果
res=h.*Y;
res=real(ifft2(ifftshift(res)));
subplot(223),imshow(res);
title('高斯低通滤波所得图像');
subplot(224),imshow(h);
title('高斯低通滤波器图像');
```

- 运行结果:

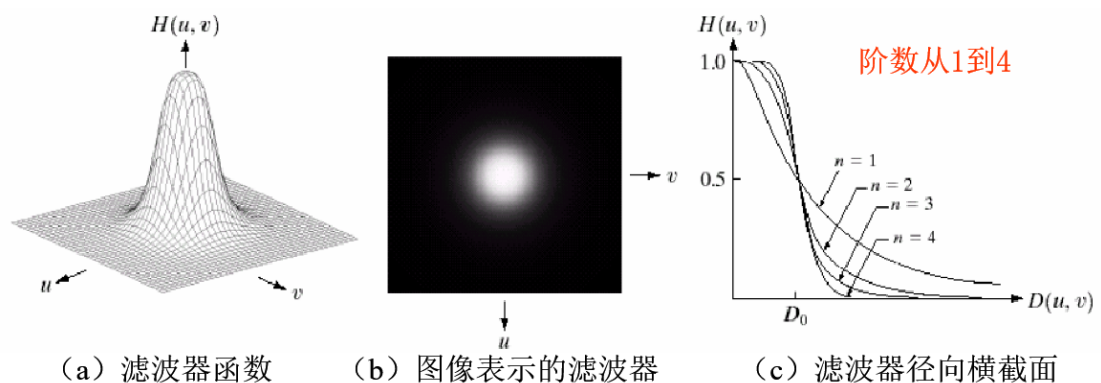


巴特沃斯低通滤波

- n阶巴特沃斯低通滤波器定义如下：

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$

- D_0 为截止频率与原点的距离， $D(u, v)$ 是点 (u, v) 与原点的距离
- 图像表示：



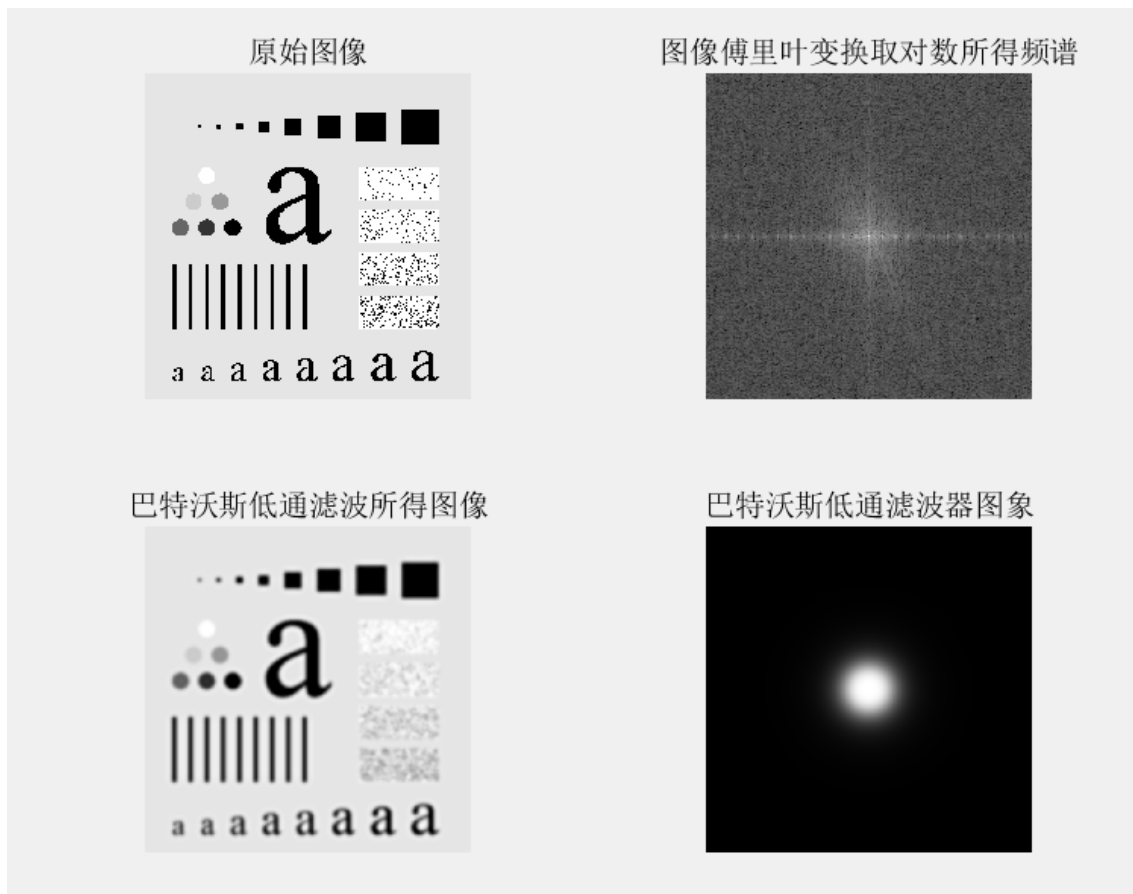
- 不同于ILPF，BLPF在通带与被滤除的频率之间没有明显的截断
- 当 $D(u, v) = D_0$ 时， $H(u, v) = 0.5$ ；当 $D(u, v) = 0$ 时，滤波器取最大值1
- 巴特沃斯滤波器阶数越高，越趋近于理想低通滤波器
- matlab代码：

```

%巴特沃斯低通
figure(3);
I=imread('aaa.tif');
subplot(221),imshow(I);
title('原始图像');
Y=fft2(im2double(I));%傅里叶变换
Y=fftshift(Y);%频谱搬移,直流分量搬移到频谱中心
subplot(222), imshow(log(abs(Y)+1),[]);
title('图像傅里叶变换取对数所得频谱');
[M,N]=size(Y);%获得图像的高度和宽度
h=zeros(M,N);%滤波器函数
%图像中心点
M0=M/2;
N0=N/2;
d0=40;
%巴特沃斯滤波器的阶数
n_0=2;
for x=1:M
    for y=1:N
        distance=sqrt((x-M0)^2+(y-N0)^2);
        h(x,y)=1/(1+(distance/d0)^(2*n_0));
    end
end
%滤波后结果
res=h.*Y;
res=real(ifft2(ifftshift(res)));
subplot(223),imshow(res);
title('巴特沃斯低通滤波所得图像');
subplot(224),imshow(h);
title("巴特沃斯低通滤波器图像");

```

- 运行结果：

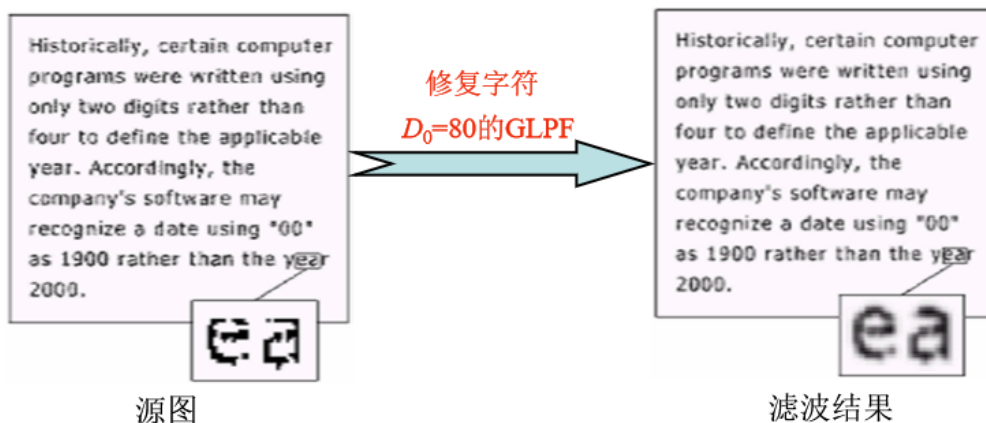


低通滤波器用途

- 低通滤波器的应用实例：模糊、平滑等
 - 字符识别：通过模糊图像，桥接断裂字符的裂缝

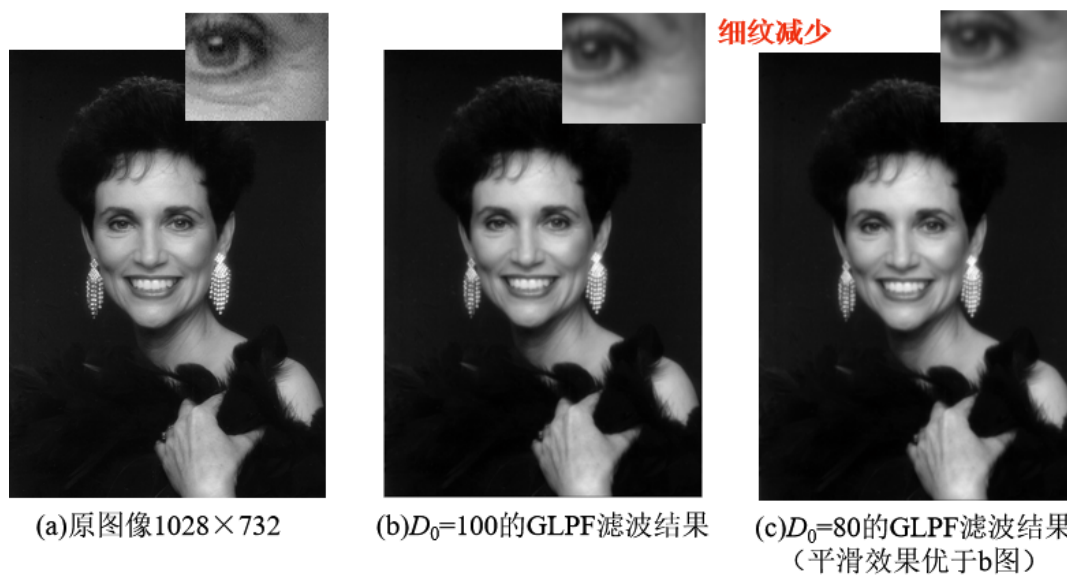
✦ 实例1：用于机器识别系统识别字符的预处理

如打印、传真、复印文本等的字符失真、字符断裂



- 印刷和出版业：从一幅尖锐的原始图像产生平滑、柔和的外观，如人脸，减少皮肤细纹的锐化程度和小斑点

✦ 实例2：减少人脸图像的皮肤细纹和小斑点



- 处理卫星和航空图像：尽可能模糊细节，从而保留大的可识别特征（低通滤波通过消除不重要的特征来简化感兴趣特征的分析）

✦ 实例3：消除卫星、航空图像中的不重要特征

目的：尽可能模糊细节，从而保留大的可识别特征

存在明显的扫描线（水平方向） 一定程度消除了扫描线

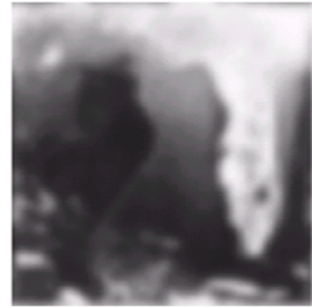
进一步消除了扫描线



(a)墨西哥海湾和佛罗里达的遥感图像



(b) $D_0=50$ 的GLPF滤波结果



(c) $D_0=20$ 的GLPF滤波结果

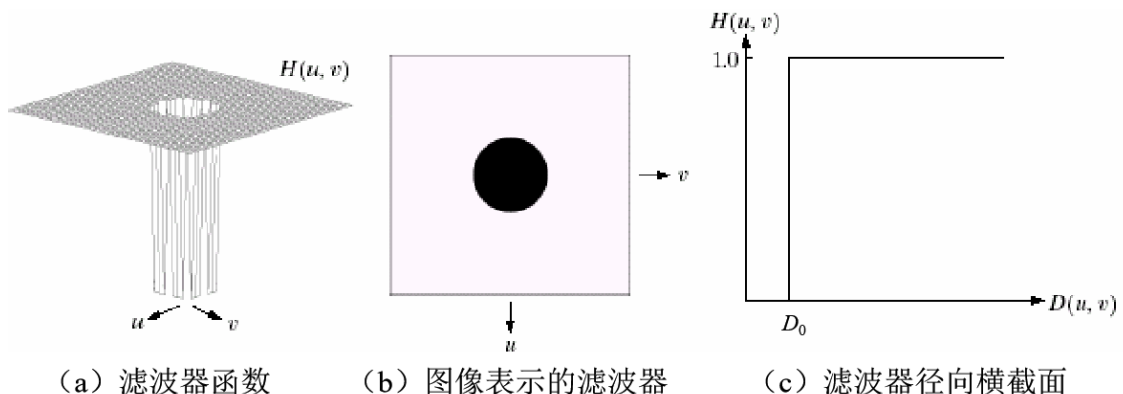
高通滤波

理想高通滤波

- 作用：保留频谱图中圆外高频分量，截断频谱图中圆内低频分量
- 截止频率距原点的距离为 D_0 的 IHPF 定义为：

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- D_0 为截止频率距原点的距离， $D(u, v)$ 是点 (u, v) 距原点的距离
- 图像表示：



- matlab代码：

```
%理想高通
I = imread('aaa.tif');
figure(1);
subplot(221), imshow(I);
title('原图像');
I=im2double(I);
s=fftshift(fft2(I));%傅里叶变换，直流分量移到频谱中心
subplot(222), imshow(log(abs(s)+1), []);
```

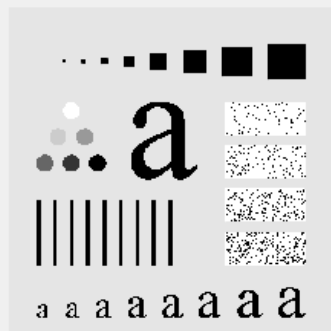


```

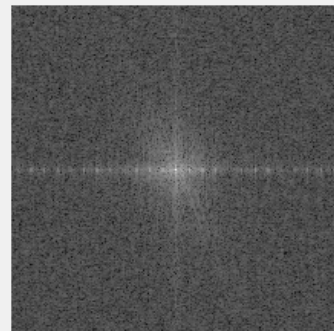
title('图像傅里叶变换取对数所得频谱');
[a,b]=size(s);
h=zeros(a,b);%滤波器函数
res=zeros(a,b);%保存结果
a0=round(a/2);
b0=round(b/2);
d=40;
for i=1:a
    for j=1:b
        distance=sqrt((i-a0)^2+(j-b0)^2);
        if distance<d
            h(i,j)=0;
        else
            h(i,j)=1;
        end
    end
end
res=s.*h;
res=real(ifft2(ifftshift(res)));
subplot(223),imshow(res);
title('理想高通滤波所得图像');
subplot(224),imshow(h);
title('理想高通滤波器图像');

```

原图像



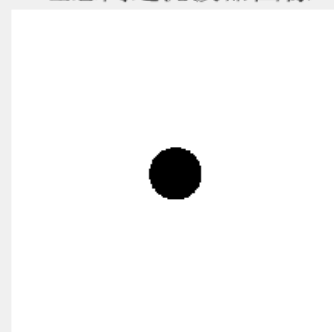
图像傅里叶变换取对数所得频谱



理想高通滤波所得图像



理想高通滤波器图像

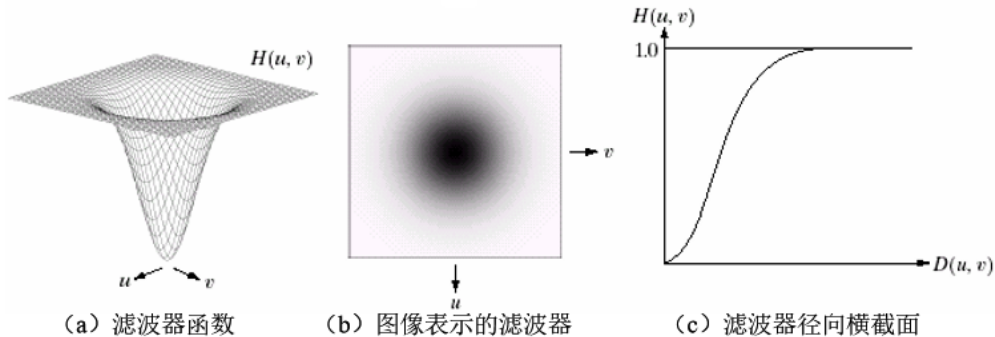


高斯高通滤波

- 截止频率距原点的距离原点为 D_0 的 GHPF 定义为：

$$H(u, v) = 1 - e^{-D(u, v)^2 / 2D_0^2}$$

- D_0 为截止频率距原点的距离， $D(u, v)$ 是点 (u, v) 距原点的距离
- 图象表示：

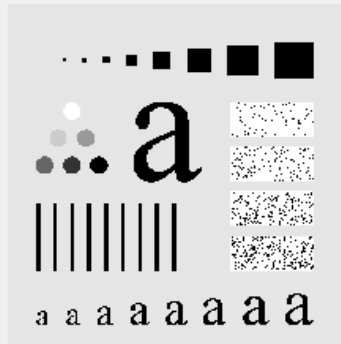


- matlab代码：

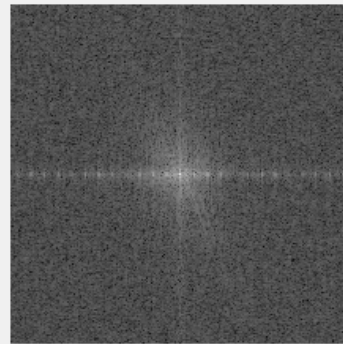
```
%高斯高通
I=imread('aaa.tif');
subplot(221),imshow(I);
title('原图像');
Y=fft2(im2double(I));%傅里叶变换
Y=fftshift(Y);%频谱搬移,直流分量搬移到频谱中心
subplot(222), imshow(log(abs(Y)+1), []);
title('图像傅里叶变换取对数所得频谱');
[M,N]=size(Y);%获得图像的高度和宽度
h=zeros(M,N);%滤波器函数
%图像中心点
M0=M/2;
N0=N/2;
%截至频率距离圆点的距离, delta表示高斯曲线的扩散程度
D0=40;
delta=D0;
for x=1:M
    for y=1:N
        %计算点 (x,y) 到中心点的距离
        d2=(x-M0)^2+(y-N0)^2;
        %计算高斯滤波器
        h(x,y)=1-exp(-d2/(2*delta^2));
    end
end
%滤波后结果
res=h.*Y;
res=real(ifft2(ifftshift(res)));
subplot(223),imshow(res);
title('高斯高通滤波所得图像');
subplot(224),imshow(h);
title('高斯高通滤波器图像');
```

- 运行结果

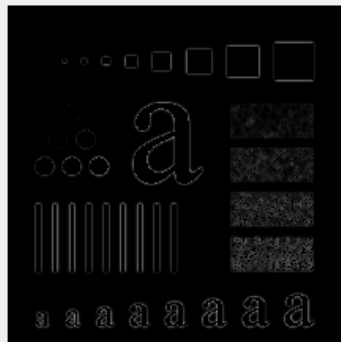
原图像



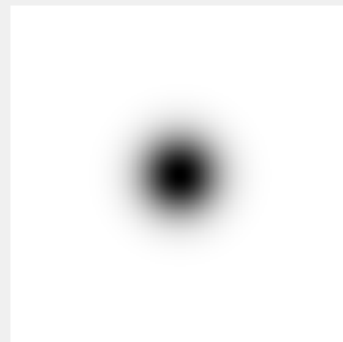
图像傅里叶变换取对数所得频谱



高斯高通滤波所得图像



高斯高通滤波器图像

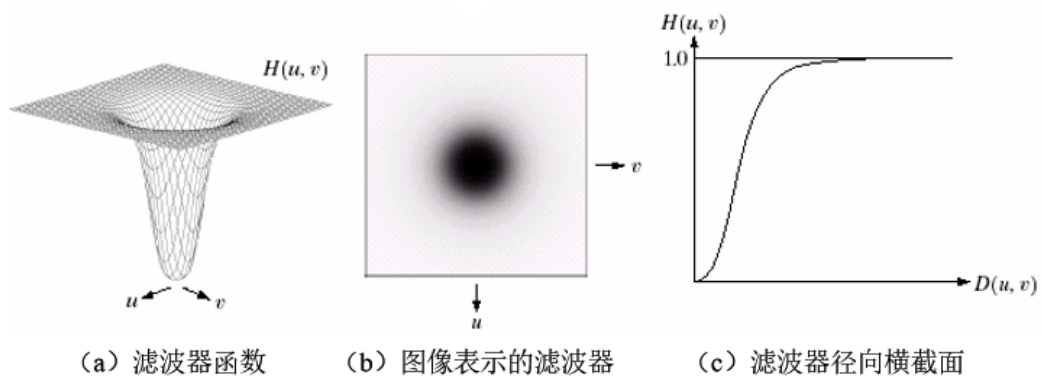


巴特沃斯高通滤波

- n 阶且截止频率距原点的距离为 D_0 的 BHPF 定义为:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$

- D_0 为截止频率距原点的距离, $D(u, v)$ 是点 (u, v) 距原点的距离
- 函数图像表示:



- matlab代码:

```
%巴特沃斯高通
figure(3);
```

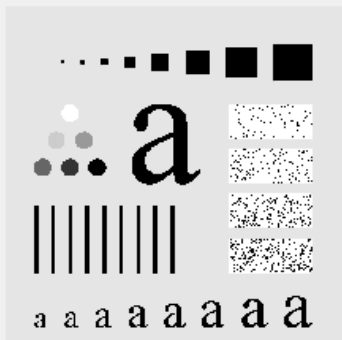
```

I=imread('aaa.tif');
subplot(221),imshow(I);
title('原始图像');
Y=fft2(im2double(I));%傅里叶变换
Y=fftshift(Y);%频谱搬移,直流分量搬移到频谱中心
subplot(222), imshow(log(abs(Y)+1),[]);
title('图像傅里叶变换取对数所得频谱');
[M,N]=size(Y);%获得图像的高度和宽度
h=zeros(M,N);%滤波器函数
%图像中心点
M0=M/2;
N0=N/2;
d0=40;
%巴特沃斯滤波器的阶数
n_0=2;
for x=1:M
    for y=1:N
        distance=sqrt((x-M0)^2+(y-N0)^2);
        h(x,y)=1/(1+(d0/distance)^(2*n_0));
    end
end
%滤波后结果
res=h.*Y;
res=real(ifft2(ifftshift(res)));
subplot(223),imshow(res);
title('巴特沃斯高通滤波所得图像');
subplot(224),imshow(h);
title("巴特沃斯高通滤波器图象");

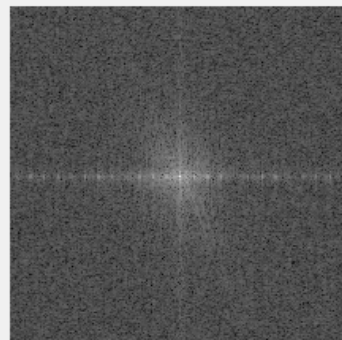
```

- 运行结果：

原始图像



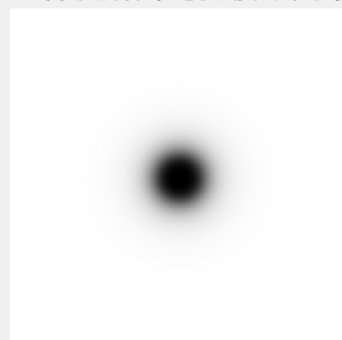
图像傅里叶变换取对数所得频谱



巴特沃斯高通滤波所得图像



巴特沃斯高通滤波器图象



高通滤波器与低通滤波器之间的关系

- 高通滤波器与低通滤波器的关系

$$H_{HP}(u,v) = 1 - H_{LP}(u,v)$$

- HLP(u,v)：低通滤波器函数
- HHP(u,v)：高通滤波器函数
-

$$\begin{aligned} H_{HP}(u,v) &= 1 - H_{LP}(u,v) = 1 - \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}} \\ &= \frac{[D(u,v)/D_0]^{2n}}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}} = \frac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}} \end{aligned}$$

- 结论：被低通滤波器衰减的频率成分能通过高通滤波器，反之亦然

高通滤波器与低通滤波器总结比较

低通滤波器

低通滤波器	性能比较
理想低通滤波器	理想低通滤波器产生模糊和振铃现象，且模糊和振铃现象反比于截断频率（即半径D0）
巴特沃斯低通滤波器	随着滤波器半径（截止频率）的增大，模糊越来越减弱；低阶滤波器没有明显振铃现象（滤波器在低频和高频之间平滑过渡）
高斯低通滤波器	随着截止频率的增大，模糊越来越减弱；平滑效果稍差于相同截止频率的二阶BLPF；没有出现振铃现象，优于BLPF

理想低通滤波器

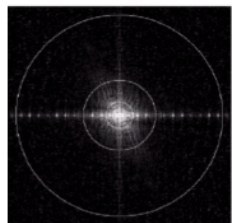
理想低通滤波器 (ILPF) (3/4)

实例

500×500
的源图

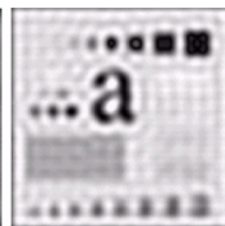


源图像的
傅里叶谱



圆环具有半径5、15、30、80和230；分别占图像总功率的92.0%、94.6%、96.4%、98.0%和99.5%

半径是5的理想低通滤波，滤除8%的总功率，模糊说明多数尖锐细节在这8%的功率之内



半径是15的理想低通滤波，滤除5.4%的总功率



半径是30的理想低通滤波，滤除3.6%的总功率



半径是80的理想低通滤波，滤除2%的总功率



半径是230的理想低通滤波，滤除0.5%的总功率，与原图接近说明边缘信息集中于保留下来的99.5%的功率中

12/37

巴特沃斯低通

巴特沃斯低通滤波器 (BLPF) (3/3)

实例 (2阶BLPF)

2阶BLPF各种截止频率的滤波结果



500×500
的源图

D_0 为5



D_0 为15



D_0 为30



D_0 为80



D_0 为230

- ❖ 随着滤波器半径（截止频率）的增大，模糊越来越减弱
- ❖ 低阶滤波器没有明显振铃现象（滤波器在低频和高频之间平滑过渡）

16/37

高斯低通

高斯低通滤波器（GLPF）(2/2)

实例



各种截止频率GLPF的滤波结果



- ❖ 随着截止频率的增大，模糊越来越减弱
- ❖ 平滑效果稍差于相同截止频率的二阶BLPF
- ❖ 没有出现振铃现象，优于BLPF

18/37

高通滤波器

高通滤波器	性能比较
理想高通滤波器	振铃现象明显
巴特沃斯高通滤波器	BHPF 的结果比 IHPF 的结果尖锐得多，边缘失真也小得多
高斯高通滤波器	GHPF 的结果比 BHPF 和 IHPF 的结果更尖锐，即使是对微小物体；和细线条的滤波也是较清晰的

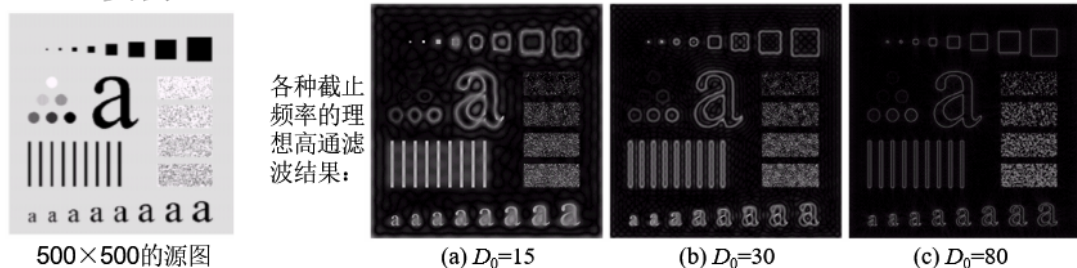
理想高通滤波器

理想高通滤波器（IHPF）(2/2)

IHPF 的空域表示 $h(u,v)$:



实例:



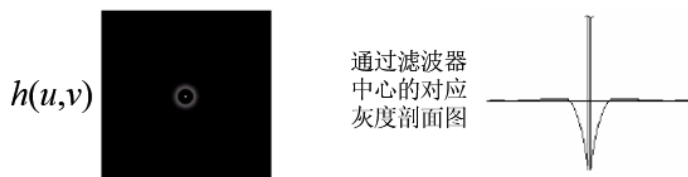
结论: 振铃现象明显（a图比b图严重，产生了失真，物体的边界被加粗）

26/37

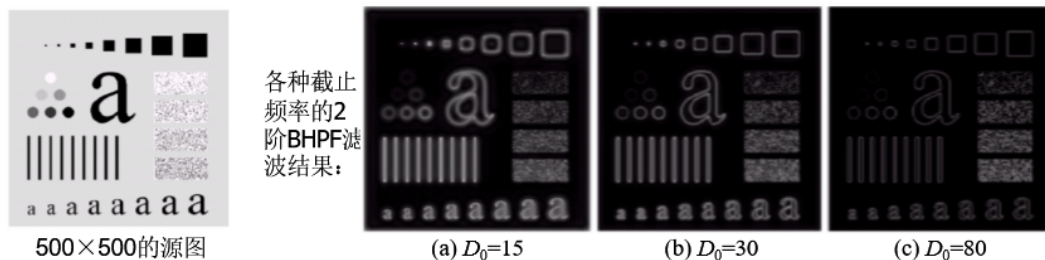
巴特沃斯高通滤波器

巴特沃斯高通滤波器（BHPF）(2/2)

⊕ BHPF 的空域表示 $h(u,v)$:



⊕ 实例:



500×500的源图

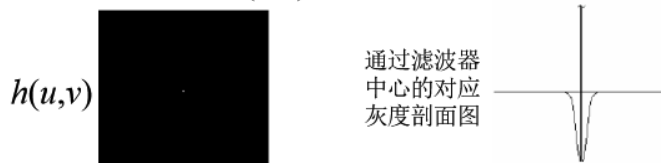
结论: BHPF 的结果比 IHPF 的结果尖锐得多, 边缘失真也小得多

28/37

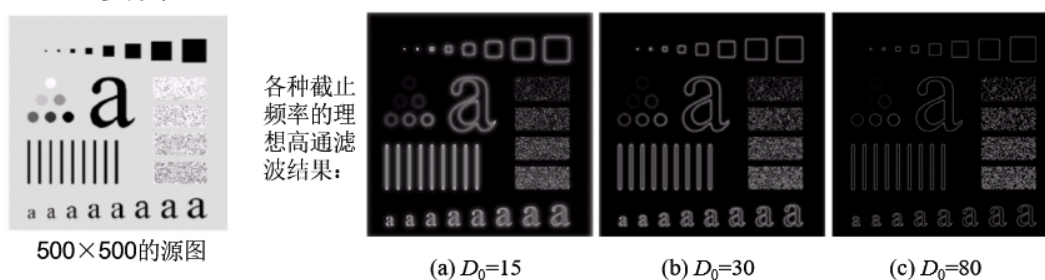
高斯高通滤波器

高斯高通滤波器（GHPF）(2/2)

⊕ GHPF 的空域表示 $h(u,v)$:



⊕ 实例:



500×500的源图

结论: GHPF 的结果比 BHPF 和 IHPF 的结果更尖锐, 即使是对微小物体和细线条的滤波也是较清晰的。

30/37