INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
CAMPUS TIANGUÁ
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

ERINALDO CARDOSO DA SILVA

RELATÓRIO DA ATIVIDADE AVALIATIVA SOBRE OS MÉTODOS DE REGRESSÃO E INTERPOLAÇÃO

Tianguá - CE
2021

ERINALDO CARDOSO DA SILVA

RELATÓRIO DA ATIVIDADE AVALIATIVA SOBRE OS MÉTODOS DE REGRESSÃO E INTERPOLAÇÃO

Relatório da atividade sobre os métodos de Regressão e Interpolação da disciplina de Cálculo Numérico, voltado para análise dos Métodos dos Mínimos Quadrados e do Método de Lagrange, do curso de Bacharelado em Ciência da Computação, como pré-requisito para a obtenção da segunda nota, 1ª fase, da disciplina do semestre 2021.1

Professor: Lucas Freitas Campos

Tianguá - CE
2021

RESUMO

O presente relatório tem como objetivo fazer uma análise sobre um conjunto de pontos utilizando métodos de regressão e interpolação. Foi trabalhado o Método dos Mínimos Quadrados – MMQ e o Método de Lagrange. A análise consistia no primeiro momento criar o gráfico dos pontos, encontrar as equações da reta e da parábola por meio dos Método dos Mínimos Quadrados, com o objetivo de que essas equações fosse o mais próximo dos pontos, e achar os erros médio do método nessas equações. Num segundo momento o objetivo desse trabalho também era encontrar por meio dos pontos x e y a equação polinomial através do Método de Lagrange.

Palavras-chaves: Pontos. Regressão. Interpolação. Método dos Mínimos Quadrados. Lagrange.

SUMÁRIO

1. Questões da Atividade

01- Considere o sistema abaixo:

Considere os pontos a seguir

{(-3, 10), (1, -20), (0, 30), (1, 18.99), (3, 40)}

a) Plote o gráfico dos pontos.
b) Aproxime os pontos pelo método dos mínimos quadrados por meio de uma reta e parábola.
c) Calcule o erro do Método.

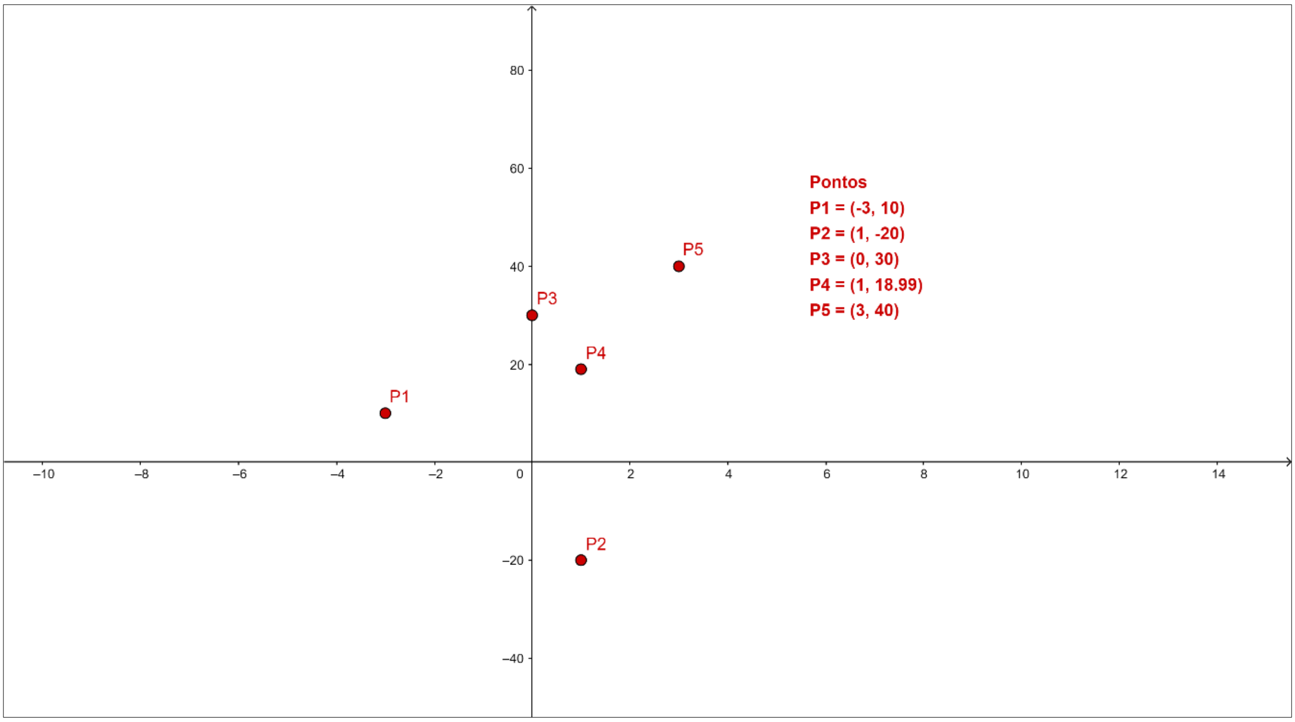
02- Encontre uma interpolação quadrática para os seguintes pontos:

{(-2.5, 10), (0, -20), (2.5, 10)}

2. Solução da Questão 01

2.1. Solução do item a – Gráfico dos Pontos

Considerando os pontos {(-3, 10), (1, -20), (0, 30), (1, 18.99), (3, 40)}, o gráfico desses pontos é representado na imagem abaixo.



2.2. Solução do item b

Aproximando os pontos pelo Método dos Mínimos Quadrados – MMQ por meio de uma reta:

Para que seja possível determinar uma reta que se aproxime dos pontos, primeiro teremos que encontrar os valores de *a* e *b*. Para isso vamos utilizar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a \,.\, n + b \sum x = \sum y \\ a \sum x \;+ b \sum x^2 = \sum x \,.\, y \end{cases}$$

Onde *n* é a quantidade de pontos dados.

a e *b* são as variáveis.

Os valores de *x* e *y* são os pontos dados.

As demais são os somatórios.

Para estabelecermos a reta vamos analisar a seguinte equação: $g(x) = a + bx$

Com base nos valores *x* e *y*, que são os pontos, calcularemos os demais valores de x^2 e $x.y$

	x	y	x^2	$x\,.\,y$
	-3	10	9	-30
	1	-20	1	-20
	0	30	0	0
	1	18,99	1	18,99
	3	40	9	120
Σ	**2**	**78,99**	**20**	**88,99**

No final fizemos a somatória da coluna desses valores e encontramos esses resultados:

$\sum x = 2$

$\sum y = 78{,}99$

$\sum x^2 = 20$

$\sum x.y = 88{,}99$

$n = 5$

Substituindo os resultados da somatória no sistema do Método dos Mínimos Quadrados vamos obter o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 5a + 2b = 78{,}99 \\ 2a + 20b = 88{,}99 \end{cases}$$

Agora vamos encontrar os valores de *a* e *b*, mas para isso teremos que isolar uma das variáveis do sistema linear. Usaremos o processo de multiplicação para podermos eliminar a variável *b*, isolando a variável *a*.

$$\begin{cases} 5a + 2b = 78{,}99 \quad (-10) \\ 2a + 20b = 88{,}99 \end{cases} \qquad \begin{cases} -50a - \cancel{20b} = -789{,}90 \\ 2a + \cancel{20b} = \ 88{,}99 \end{cases}$$

$$-48a = -700{,}91$$

$$a = \frac{-700{,}91}{-48} \longrightarrow a = 14{,}6022916667$$

Agora que temos o valor da variável *a*, vamos encontrar o valor da variável *b*, substituindo o resultado do valor de *a* em qualquer uma das equações do sistema. Para isso vou pegar a segunda equação do sistema linear.

$5a + 2b = 78{,}99 \longrightarrow 5(14{,}6022916667) + 2b = 78{,}99$

$73{,}0114583333 + 2b = 78{,}99 \longrightarrow 2b = 78{,}99 - 73{,}0114583333$

$2b = 5{,}9785416667 \longrightarrow b = \dfrac{5{,}9785416667}{2} \longrightarrow b = 2{,}9892708333$

Logo tivemos como resultado:

$a = 14{,}6022916667$

$b = 2{,}9892708333$

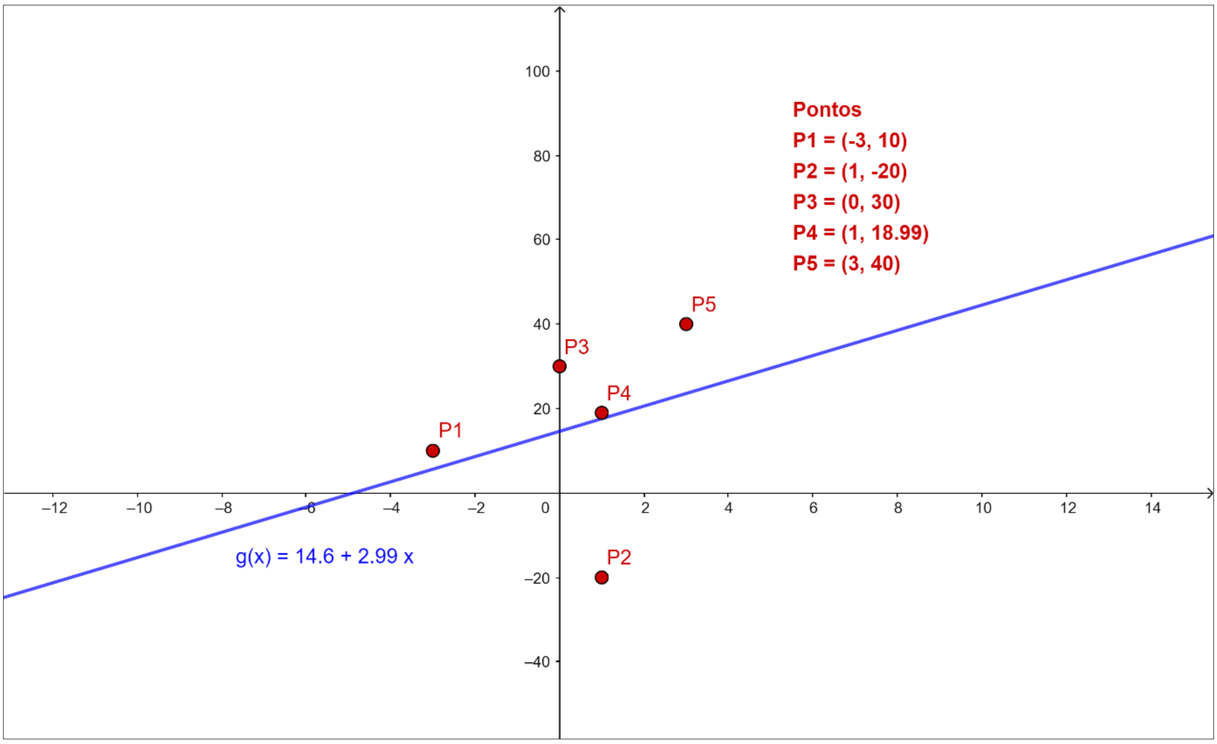
Agora é só substituir os valores na seguinte equação:

$g(x) = a + bx$

Logo a equação da reta é:

$g(x) = 14{,}6022916667 + 2{,}9892708333\,x$

Para definirmos a reta, vamos aproximar o valor de *a* para 14,6 e o valor de *b* para 2,99



Aproximando os pontos pelo Método dos Mínimos Quadrados – MMQ por meio de uma parábola:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} n & \sum x & \sum x^2 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \end{vmatrix} . \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum x\, y \\ \sum x^2\, y \end{bmatrix}$$

Multiplicando os valores das matrizes gera-se o sistema abaixo.

$$\begin{cases} n \,.\, c + b \,.\, \sum x + a \,.\, \sum x^2 = \sum y \\ c \,.\, \sum x + b \,.\, \sum x^2 + a \,.\, \sum x^3 = \sum x \,.\, y \\ c \,.\, \sum x^2 + b \,.\, \sum x^3 + a \,.\, \sum x^4 = \sum x^2 .\, y \end{cases}$$

Onde n é a quantidade de pontos dados.

a, b e c são as variáveis.

Os valores de x e y são os pontos dados.

As demais são os somatórios.

Para determinarmos a parábola onde se deseja que ela chegue mais próxima dos pontos dados, precisamos encontrar os valores de a, b e c. E para isso vamos analisar a seguinte equação: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Com base nos valores x e y, que são os pontos, calcularemos os demais valores de x^2, x^3, x^4, $x.y$ e $x^2.y$

	x	y	x^2	x^3	x^4	$x \,.\, y$	$x^2 \,.\, y$
	-3	10	9	-27	81	-30	90
	1	-20	1	1	1	-20	-20
	0	30	0	0	0	0	0
	1	18,99	1	1	1	18,99	18,99
	3	40	9	27	81	120	360
Σ	**2**	**78,99**	**20**	**2**	**164**	**88,99**	**448,99**

No final fizemos a somatória de cada coluna desses valores e encontramos esses resultados:

$\sum x = 2$

$\sum y = 78{,}99$

$\sum x^2 = 20$

$\sum x^3 = 2$

$\sum x^4 = 164$

$\sum x \,.\, y = 88{,}99$

$\sum x^2 .\, y = 448{,}99$

$n = 5$

Substituindo os resultados da somatória no sistema do Método dos Mínimos Quadrados, vamos obter o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 5 \,.\, c + b \,.\, 2 + a \,.\, 20 = 78{,}99 \\ c \,.\, 2 + b \,.\, 20 + a \,.\, 2 = 88{,}99 \\ c \,.\, 20 + b \,.\, 2 + a \,.\, 164 = 448{,}99 \end{cases}$$

Trocando a posição dos coeficientes e das variáveis, temos:

$$\begin{cases} 5c + 2b + 20a = 78{,}99 \\ 2c + 20b + 2a = 88{,}99 \\ 20c + 2b + 164a = 448{,}99 \end{cases}$$

Dispondo os coeficientes numa matriz, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} \underline{\mathbf{5}} & 2 & 20 & 78{,}99 \\ 2 & 20 & 2 & 88{,}99 \\ 20 & 2 & 164 & 448{,}99 \end{array}\right] \quad R_1 \leftarrow R_1 \div 5$$

(A primeira linha dividimos por 5)

$$\left[\begin{array}{ccc:c} \underline{\mathbf{1}} & 0{,}4 & 4 & 15{,}798 \\ 2 & 20 & 2 & 88{,}99 \\ 20 & 2 & 164 & 448{,}99 \end{array}\right] \quad R_2 \leftarrow R_2 - 2 \,.\, R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} \underline{\mathbf{1}} & 0{,}4 & 4 & 15{,}798 \\ 0 & 19{,}2 & -6 & 57{,}394 \\ 20 & 2 & 164 & 448{,}99 \end{array}\right] \quad R_3 \leftarrow R_3 - 20 \,.\, R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}4 & 4 & 15{,}798 \\ 0 & \underline{19{,}2} & -6 & 57{,}394 \\ 0 & -6 & 84 & 133{,}03 \end{array}\right] \qquad R_2 \leftarrow R_2 \div 19{,}2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}4 & 4 & 15{,}798 \\ 0 & \underline{1} & -0{,}3125 & 2{,}989271 \\ 0 & -6 & 84 & 133{,}03 \end{array}\right] \qquad R_3 \leftarrow R_3 - 1.\,(-6)\,.\,R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}4 & 4 & 15{,}798 \\ 0 & 1 & -0{,}3125 & 2{,}989271 \\ 0 & 0 & \underline{82{,}125} & 150{,}965625 \end{array}\right] \qquad R_3 \leftarrow R_3 \div (82{,}125)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}4 & 4 & 15{,}798 \\ 0 & 1 & -0{,}3125 & 2{,}989271 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1{,}838242 \end{array}\right] \qquad R_2 \leftarrow R_2 - 1.\,(-0{,}3125)\,.\,R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}4 & 4 & 15{,}798 \\ 0 & 1 & 0 & 3{,}563721 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1{,}838242 \end{array}\right] \qquad R_1 \leftarrow R_1 - 4\,.\,(R_3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}4 & 0 & 8{,}445032 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 3{,}563721 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}838242 \end{array}\right] \qquad R_1 \leftarrow R_1 - 1.\,(0{,}4)\,.\,R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7{,}019544 \\ 0 & 1 & 0 & 3{,}563721 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}838242 \end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{lll} c & & = 7{,}019544 \\ & b & = 3{,}563721 \\ & \quad a & = 1{,}838242 \end{array}\right.$$

Da equação 3 do sistema obtemos a variável a = 1,838242

Da equação 2 do sistema obtemos a variável b = 3,563721

Da equação 1 do sistema obtemos a variável c = 7,019544

Logo tivemos como resultado:

a = 1,838242

b = 3,563721

c = 7,019544

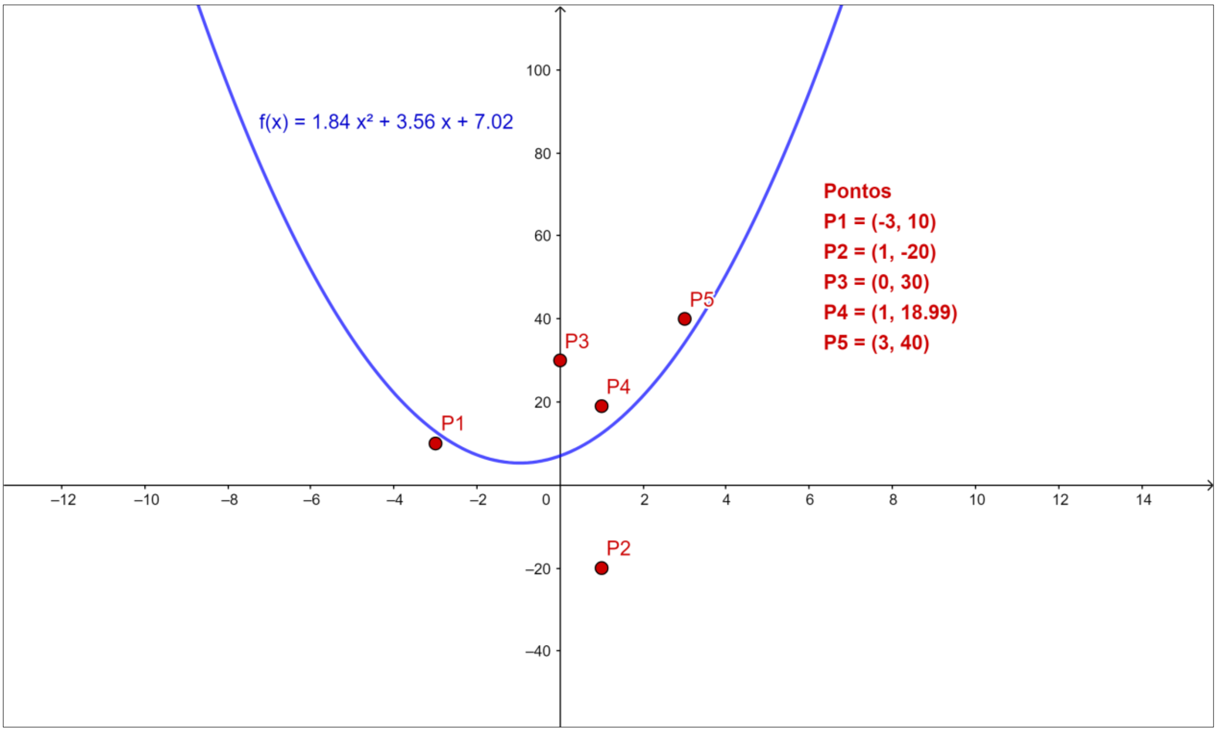
Com base nos resultados obtidos para os coeficientes a, b e c, agora é só substituir esses valores na seguinte equação:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Logo a equação da parábola é:

$f(x)$ = 1,838242 x^2 + 3,563721 x + 7,019544

Para definirmos a parábola no gráfico, vamos aproximar o valor de a para 1,84, o valor de b para 3,56 e o valor de c para 7,02



2.3. Solução do item c - Erro do Método

Erro - Equação da reta

$g(x) = a + bx$

$g(x) = 14{,}6022916667 + 2{,}9892708333\, x$

Fazendo o arredondamento

$g(x) = 14{,}6 + 2{,}99\, x$

$EQ(y, g(x)) = \sqrt{\sum (y - g(x))^2}$

$EQ = \sqrt{1941{,}17} = 44{,}06$

Erro - Equação da parábola

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = 1{,}838242\, x^2 + 3{,}563721\, x + 7{,}019544$

Fazendo o arredondamento

$f(x) = 1{,}84\, x^2 + 3{,}56\, x + 7{,}02$

$EQ(y, f(x)) = \sqrt{\sum (y - f(x))^2}$

$EQ = \sqrt{1663{,}66} = 40{,}79$

		Erro da Reta		Erro da Parábola	
x	***y***	***g(x)***	***(y - g(x))²***	***f(x)***	***(y - f(x))²***
-3	10	5,63	19,10	12,9	8,41
1	-20	17,59	1413,01	12,42	1051,06
0	30	14,6	237,16	7,02	528,08
1	18,99	17,59	1,96	12,42	43,16
3	40	23,57	269,94	34,26	32,95
Soma			**1941,17**		**1663,66**
Raiz quadrada			44,06		40,79

3. Solução da Questão 02

Utilizarei o método da Interpolação de Lagrange para a resolução dessa questão.

Pontos: {(-2.5, 10), (0, -20), (2.5, 10)}

Organizando os valores de *x* e *y* numa tabela, temos:

x		***y***	
x_0	-2.5	y_0	10
x_1	0	y_1	-20
x_2	2.5	y_2	10

O método de Lagrange é descrito dessa forma:

$$\boldsymbol{P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)}$$

Calculando os $L_i(x)$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x1)(x-x2)}{(x0-x1)(x0-x2)} = \frac{(x-0)(x-2.5)}{(-2.5-0)(-2.5-2.5)} = \frac{x^2-2.5x}{12.5}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x0)(x-x2)}{(x1-x0)(x1-x2)} = \frac{(x-(-2.5))(x-2.5)}{(0-(-2.5))(0-2.5)} = \frac{x^2-6.25}{-6.25}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)}{(x2-x0)(x2-x1)} = \frac{(x-(-2.5))(x-0)}{(2.5-(-2.5))(2.5-0)} = \frac{x^2+2.5x}{12.5}$$

Aplicando os resultados dos $L_i(x)$ no método de Lagrange, temos:

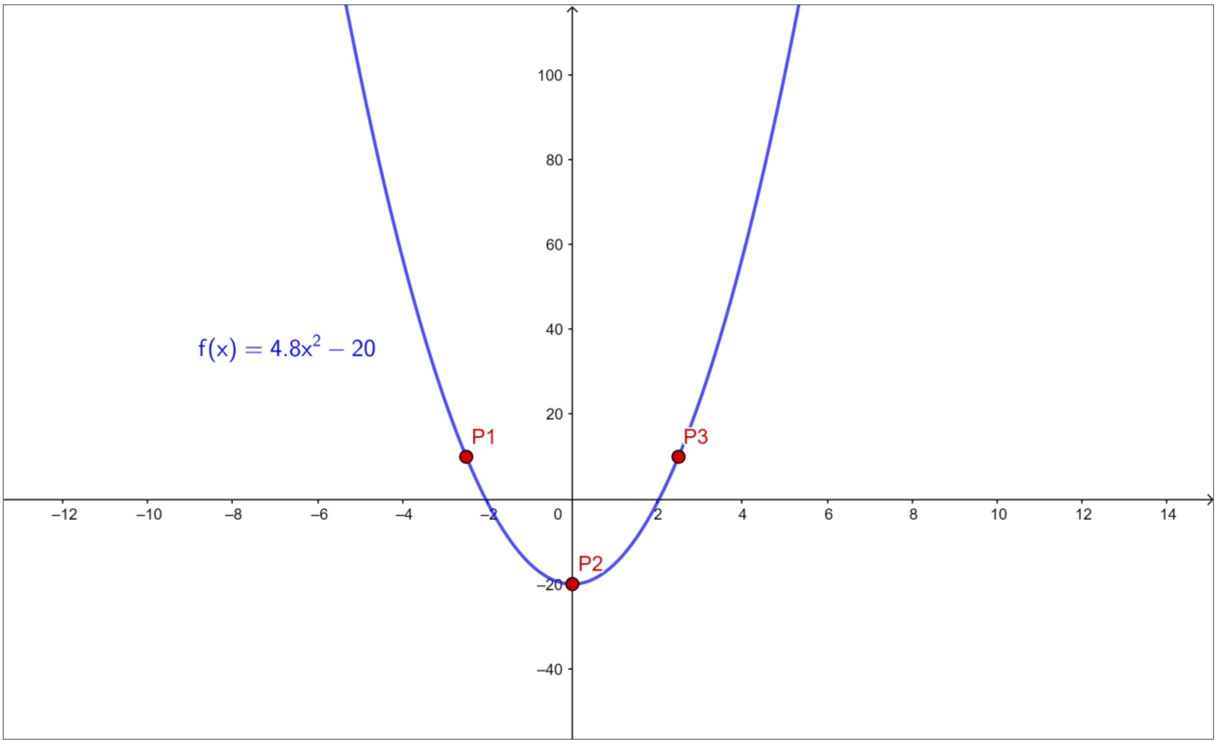
$$P_2(x) = (10).\left(\frac{x^2-2.5x}{12.5}\right) + (-20).\left(\frac{x^2-6.25}{-6.25}\right) + (10).\left(\frac{x^2+2.5x}{12.5}\right)$$

$$P_2(x) = 0.8x^2 - \cancel{2x} + 3.2x^2 - 20 + 0.8x^2 + \cancel{2x}$$

$$P_2(x) = 1.6x^2 + 3.2x^2 - 20$$

$$\boldsymbol{P_2(x) = 4.8x^2 - 20} \quad \longleftarrow \quad \text{Polinômio}$$

Representando essa equação no gráfico, temos:


f(x) = 4.8x^2 − 20
P1
P2
P3