

Практическая работа №8

«Задача о распределении средств между предприятиями»

Цель работы: Решить простейшие задачи методом динамического программирования.

Краткие теоретические основания выполнения задания

Динамическое программирование – метод оптимизации, приспособленный, к задачам, в которых процесс принятия решения может быть разбит на отдельные этапы (шаги). Такие задачи называются многошаговыми.

Характерные особенности задач динамического программирования:

1. Неоднозначность решения.
2. Возможность деления вычислительного процесса на этапы.
3. Общий критерий – сумма частных критериев на этапах.

Динамическое программирование позволяет осуществлять оптимальное планирование многошаговых процессов, зависящих от времени. Процесс называется управляемым, если можно влиять на ход его развития. Управлением называется совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход процесса. Началом этапа (шага) управляемого процесса считается момент принятия решения. Планируя многошаговый процесс, исходя из интересов всего процесса в целом, всегда необходимо иметь в виду конечную цель.

Метод динамического программирования состоит в том, что оптимальное управление строится постепенно. На каждом этапе оптимизируется управление только этого этапа, причем управление выбирается с учётом последствий, т.е. оптимальное управление для данного этапа должно учитывать весь последующий ход процесса, для чего необходимо знать все управления на последующих этапах. Поскольку процесс заканчивается на последнем этапе, оптимальное решение не должно учитывать последующего управления. Таким образом, процесс вычисления протекает в обратном направлении, от конца к началу.

Постановка задачи динамического программирования.

Пусть S_0, S_k, S_n - состояния системы на начальном, k -ом и конечном этапе, u_0, u_k, u_n - управления системой на начальном, k -ом и конечном этапах. Управление u_k переводит систему из состояния S_{k-1} в состояние S_k . Показатель эффективности на k -ом этапе обозначим через $W_k(S_{k-1})$.

Так как оптимизацию показателя эффективности начинаем с последнего этапа, то, зная максимум показателя эффективности на n -ом шаге

$$W_n^*(S_{n-1}) = \max_{u_n} (W_n(S_{n-1}, u_n))$$

найдем максимум показателя эффективности на $(n-1)$ -ом шаге

$$W_{n-1}^*(S_{n-2}) = \max_{u_{n-1}} (W_{n-1}(S_{n-2}, u_{n-1}) + W_n^*(S_{n-1})),$$

где $W_{n-1}(S_{n-2}, u_{n-1})$ называется "сиюминутной" выгодой на $(n-1)$ -ом шаге.

Основное функциональное уравнение динамического программирования (уравнение Беллмана) имеет вид:

$$W_k^*(S_{k-1}) = \max_{u_k} (W_k(S_{k-1}, u_k) + W_{k+1}^*(S_k))$$

Принцип оптимальности Беллмана можно сформулировать следующим образом: каковы бы не были начальное состояние и начальное решение, последующее решение должно быть оптимальным по отношению к состоянию, полученному в результате начального решения. Иными словами, принцип оптимальности утверждает, что если в данный момент выбрано не наилучшее решение, то последствия этого нельзя исправить в будущем.

Порядок выполнения заданий

Пример. Между четырьмя предприятиями распределяются 60 млн. руб. Прирост выпуска продукции на каждом предприятии зависит от выделенной суммы средств x . Значения прироста задаются в виде таблицы $g_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Найти такой план распределения 60 млн. руб. между предприятиями, при котором общий прирост выпуска продукции будет максимальным.

Средства x , млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
0	0	0	0	0
20	7	6	14	14
40	23	23	21	20
60	31	30	34	35

Начальное состояние $S_0 = 60$ млн. руб.

На 1-м шаге выделим x_1 млн. руб. 1-му предприятию. После этого останется $S_1 = S_0 - x_1$ млн. руб.

На 2-м шаге выделим x_2 млн. руб. 2-му предприятию. После этого останется $S_2 = S_1 - x_2$ млн. руб.

На 3-м шаге выделим x_3 млн. руб. 3-му предприятию. После этого останется $S_3 = S_2 - x_3$ млн. руб.

На 4-м шаге выделим x_4 млн. руб. 4-му предприятию.

Уравнения Беллмана

$$Z_k(S_{k-1}) = \max_{x_k} \{F_k(S_{k-1}, x_k) + Z_{k+1}(S_k)\} = \max_{0 \leq x_k \leq S_{k-1}} \{g_k(x_k) + Z_{k+1}(S_{k-1} - x_k)\},$$

то есть на k -м шаге из оставшихся S_{k-1} средств надо выделить x_k средств k -му предприятию, чтобы прирост выпуска продукции на k -м и оставшихся предприятиях был максимальным.

Пусть $k = 4$. Тогда $Z_4(S_3) = \max_{0 \leq x_4 \leq S_3} \{g_4(x_4)\}$.

Заполним таблицу:

$S_3 \backslash X_4$	0	20	40	60	$Z_4(S_3)$	X_4^*
0	0				0	0
20		14			14	20
40			20		20	40
60				35	35	60

В столбце S_3 и строке X_4 указаны все возможные значения. Столбец S_3 показывает варианты - сколько денег осталось не распределено перед последним шагом. Все оставшиеся перед 4-м шагом средства нужно выделить 4-му предприятию. Поэтому числа из столбца $g_4(X)$ исходной таблицы записываем в нашу таблицу в столбцы со 2-го по 5-й. В столбцах со 2-й по 5-й определяем максимум в каждой строке, и результат пишем в 6-й столбец. Т.е X_4 , которым соответствуют числа 6-го столбца, пишем в 7-й столбец.

Пусть $k = 3$. Тогда

$$Z_3(S_2) = \max_{0 \leq x_3 \leq S_2} \{g_3(x_3) + Z_4(S_2 - x_3)\}.$$

$S_2 \backslash X_3$	0	20	40	60	$Z_3(S_2)$	X_3^*
0	0+0=0				0	0
20	0+14=14	14+0=14			14	0 или 20
40	0+20=20	14+14=28	21+0=21		28	20
60	0+35=35	14+20=34	21+14=35	34+0=34	35	0 или 40

Пусть $k=2$, тогда $Z_2(S_1) = \max_{0 \leq X_2 \leq S_1} \{g_2(X_2) + Z_3(S_1 - X_2)\}.$

$S_1 \backslash X_2$	0	20	40	60	$Z_2(S_1)$	X_2^*
0	0+0=0				0	0
20	0+14=14	6+0=6			14	0
40	0+28=28	6+14=20	23+0=23		28	0
60	0+35=35	6+28=34	23+14=37	30+0=30	37	40

Пусть $k=1$, тогда $Z_1(S_0) = \max_{0 \leq X_1 \leq S_0} \{g_1(X_1) + Z_2(S_0 - X_1)\}.$

$S_0 \backslash X_1$	0	20	40	60	$Z_1(S_0)$	X_1^*
0	0+0=0				0	0
20	0+14=14	7+0=7			14	0
40	0+28=28	7+14=21	23+0=23		28	0
60	0+37=37	7+28=35	23+14=37	31+0=31	37	0 или 40

Максимальное значение $Z_0(S_0) = 37, S_0 = 60, X_1^* = 0$ или 40 . Если $X_1^* = 0$, то $S_1 = S_0 - X_1^* = 60 - 0 = 60$.

Из таблицы при $k=2$ и $S_1 = 60$ находим в последнем столбце $X_2^* = 40$, тогда $S_2 = S_1 - X_2^* = 60 - 40 = 20$.

Из таблицы при $k=3$ и $S_2 = 20$ находим в последнем столбце $X_3^* = 0$ или 20 . Если $X_3^* = 0$ тогда $S_3 = S_2 - X_3^* = 20 - 0 = 20$.

Из таблицы при $k=4$ и $S_3 = 20$ находим в последнем столбце $X_4^* = 20$.

Получен оптимальный вариант распределения средств:
 $X_1^* = 0; X_2^* = 40; X_3^* = 0; X_4^* = 20$

Если $X_3^* = 20$ тогда $S_3 = S_2 - X_3^* = 20 - 20 = 0$. Из таблицы при $k=4$ и $S_3 = 0$ находим в последнем столбце $X_4^* = 0$.

Получен еще один оптимальный план распределения средств:
 $X_1^* = 0; X_2^* = 40; X_3^* = 20; X_4^* = 0$.

Если $X_1^* = 40$, то $S_1 = S_0 - X_1^* = 60 - 40 = 20$. Из таблицы при $k=2$ и $S_1 = 20$ находим в последнем столбце $X_2^* = 0$, тогда $S_2 = S_1 - X_2^* = 20 - 0 = 20$.

Действия при $S_2 = 20$ рассмотрены выше.

Получим еще два оптимальных варианта распределения средств:

$X_1^* = 40; X_2^* = 0; X_3^* = 0; X_4^* = 20$ и

$X_1^* = 40; X_2^* = 0; X_3^* = 20; X_4^* = 0$

Общий прирост выпуска продукции в каждом из вариантов равен 37 млн. руб.

Студенты, чьи фамилии начинаются на буквы **А-Д** выполняют **1 вариант**.

Студенты, чьи фамилии начинаются на буквы **Е-И** выполняют **2 вариант**.

Студенты, чьи фамилии начинаются на буквы **К-Н** выполняют **3 вариант**.

Студенты, чьи фамилии начинаются на буквы **О–Т** выполняют **4 вариант**.

Студенты, чьи фамилии начинаются на буквы **У–Я** выполняют **5 вариант**.

Задания для самостоятельной работы

1 вариант.

Между предприятиями А, Б, В, Г распределяют 75 млн. руб. Прирост выпуска продукции на каждом предприятии зависит от выделенной суммы средств x . Значения прироста задаются в виде таблицы $f_i(x)$ $i=1,2,3,4$. Найти такой план распределения 75 млн. руб. между предприятиями, при котором общий прирост выпуска продукции будет максимальным.

Средства x , млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
25	9	7	15	17
50	21	20	22	21
75	30	31	35	34

2 вариант.

Между предприятиями А, Б, В, Г распределяют 90 млн. руб. Прирост выпуска продукции на каждом предприятии зависит от выделенной суммы средств x . Значения прироста задаются в виде таблицы $f_i(x)$ $i=1,2,3,4$. Найти такой план распределения 90 млн. руб. между предприятиями, при котором общий прирост выпуска продукции будет максимальным.

Средства x , млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0	0	0	0	0
30	9	7	15	17
60	21	20	22	21
90	30	31	35	34

3 вариант.

Между предприятиями А, Б, В, Г распределяют 30 млн. руб. Прирост выпуска продукции на каждом предприятии зависит от выделенной суммы средств x . Значения прироста задаются в виде таблицы $f_i(x)$ $i=1,2,3,4$. Найти такой план распределения 30 млн. руб. между предприятиями, при котором общий прирост выпуска продукции будет максимальным.

Средства x , млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0	0	0	0	0
10	8	9	15	16
20	19	20	22	21
30	30	31	35	33

4 вариант.

Между предприятиями А, Б, В, Г распределяют 45 млн. руб. Прирост выпуска продукции на каждом предприятии зависит от выделенной суммы средств x . Значения прироста задаются в виде таблицы $f_i(x)$ $i=1,2,3,4$. Найти такой план распределения 45 млн. руб. между предприятиями, при котором общий прирост выпуска продукции будет максимальным.

Средства x , млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0	0	0	0	0
15	9	8	15	17
30	21	20	22	21
45	30	31	35	33

5 вариант.

Между предприятиями А, Б, В, Г распределяют 75 млн. руб. Прирост выпуска продукции на каждом предприятии зависит от выделенной суммы средств x . Значения прироста задаются в виде таблицы $f_i(x)$ $i=1,2,3,4$. Найти такой план распределения 75 млн. руб. между предприятиями, при котором общий прирост выпуска продукции будет максимальным.

Средства x , млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0	0	0	0	0
25	9	17	14	13
50	29	30	22	21
75	40	32	35	36