

3.3. Метод потенциалов решения транспортной задачи

Одним из самых эффективных способов решения транспортной задачи является метод потенциалов. Суть его такова: находим опорный план (первоначальный план перевозок), проверяем его на оптимальность. Если он оптимален, то решение найдено. Если нет – улучшаем план.

Опорный план можно найти разными способами. Самые распространенные из них – *метод северо-западного угла* и *метод минимального элемента*. Проверка на оптимальность и улучшение плана проводится с помощью потенциалов.

Алгоритм метода:

1. Построить транспортную таблицу.
2. Проверить, является ли задача закрытой. Если нет, то закрыть задачу с помощью фиктивных поставщиков или фиктивных потребителей.
3. Составить опорный план определенным способом.
4. Проверить его на вырожденность.

План является вырожденным, если количество заполненных клеток меньше, чем $n+m-1$. Если план получился вырожденный, то следует его перестроить с соблюдением ацикличности.

5. Вычислить стоимость построенного плана.
6. Вычислить потенциалы поставщиков и потребителей.
7. Проверить план на оптимальность. Для этого проставить в незаполненных клетках суммы потенциалов и сравнить их с тарифами. Если есть клетки, в которых сумма потенциалов больше транспортного тарифа, то план не оптимален. перейти к пункту 3, перераспределив поставки, начиная с переноса поставки в ту клетку, в которой разница между суммой потенциалов и тарифом самая большая.

Покажем, как работает метод потенциалов на примере. Опорный план построим методом северо-западного угла.

Пример 19. Требуется перевести груз с трех складов в два магазина. Известны запасы груза на складах (шт.), потребности магазинов (шт.) и стоимости перевозки единицы груза с каждого склада в каждый магазин (д. е./шт.):

Склад Магазин	1	2	Потребности
1	5	4	100
2	4	3	150
3	3	6	150
Запасы	100	200	400 300

Необходимо построить план перевозок с минимальной стоимостью. Задачу решить методом потенциалов. Опорный план построить методом северо-западного угла и методом минимального элемента.

Решение

1.1. Транспортная таблица дана в условии задачи.

1.2. Проверим, является ли задача закрытой. Суммарные потребности: $100+150+150 = 400$. Суммарные запасы: $100+200 = 300$. Задача является открытой. Прежде, чем приступить к составлению опорного плана, закроем задачу – введем дополнительный – фиктивный склад с запасом груза 100. Получим новую таблицу тарифов:

Склад Магазин	1	2	3	Потребности
1		4	0	100
2		3	0	150
3		6	0	150
Запасы	100	200	100	400

1.3. Построим опорный план методом северо-западного элемента. Начинаем заполнять таблицу с левого верхнего угла. Первому магазину требуется 100 ед. продукции, 100 ед. есть на первом складе, забираем все. Потребности первого магазина удовлетворены, в остальных клетках первой строки и первого столбца ставим прочерк. Второму магазину надо 150 ед. Первый склад пуст, на втором складе есть 200, забираем 150. Потребности второго магазина удовлетворены, в остальных клетках второй строки ставим прочерк. Третьему магазину надо 150 ед., заберем 50 – остаток на втором складе и 100 – на третьем. Получим первый опорный план:

Склад Магазин	1	2	3	Потребности
1	100 ₅	— ₄	— ₀	100
2	— ₄	150 ₃	— ₀	150
3	— ₃	50 ₆	100 ₀	150
Запасы	100	200	100	400

1.4. Проверим план на вырожденность.

$N+m-1 = 3+3-1 = 5$. $4 < 5$, значит, план вырожденный. Перестроим его, добавив в клетку (2,1) значение 0.

Склад Магазин	1	2	3	Потребности
1	100 ₅	— ₄	— ₀	100
2	0 ₄	150 ₃	— ₀	150
3	— ₃	50 ₆	100 ₀	150
Запасы	100	200	100	400

1.5. Сосчитаем стоимость такого плана перевозок:
 $100 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 150 \cdot 3 + 50 \cdot 6 + 100 \cdot 0 = 1250$.

1.6. Расставим потенциалы поставщиков и потребителей. Для этого добавим в таблицу столбец и строку, в которых будем расставлять потенциалы. Обозначим $u_i, i = \overline{1,3}$, $v_j = \overline{1,3}$ – потенциалы магазинов и складов соответственно, c_{ij} – стоимости перевозки единицы груза от j -го поставщика i -му потребителю.

Склад Магазин	1	2	3	Потребности	u_i
1	100 ₅	— ₄	— ₀	100	0
2	0 ₄	150 ₃	— ₀	150	-1
3	— ₃	50 ₆	100 ₀	150	2
Запасы	100	200	100	400	
v_j	5	4	-2		

$$u_1 = 0.$$

$$v_1 = c_{11} - u_1 = 5 - 0 = 5.$$

$$u_2 = c_{21} - v_1 = 4 - 5 = -1.$$

$$v_2 = c_{22} - u_2 = 3 - (-1) = 4.$$

$$u_3 = c_{32} - v_2 = 6 - 4 = 2.$$

$$v_3 = c_{33} - u_3 = 0 - 2 = -2.$$

1.7. Проверим план на оптимальность. Для свободных клеток определим сумму потенциалов и запишем их в левом нижнем углу.

Склад Магазин	1	2	3	Потребности	u_i
1	100 ₅	4 - 4	-2 - 0	100	0
2	0 ₄	150 ₃	-3 - 0	150	-1
3	7 - 3	50 ₆	3 100 ₀	150	2
Запасы	100	200	100	400	
v_j	5	4	-2		

$$s_{12} = u_1 + v_2 = 0 + 4 = 4.$$

$$s_{13} = u_1 + v_3 = 0 - 2 = -2.$$

$$s_{23} = u_2 + v_3 = -1 - 2 = -3.$$

$$s_{31} = u_3 + v_1 = 2 + 5 = 7.$$

Определим клетки, в которых сумма потенциалов больше транспортного тарифа. Это клетка (3,1). Значит, план не оптимален. Будем его улучшать.

2.1. Построим цикл для клетки (3,1), переместив 100 ед. груза так: (1,1)→(3,1), (3,3)→(1,3).

Склад Магазин	1	2	3	Потребности	u_i
1	- ₅	- 4	100 ₀	100	
2	0 ₄	150 ₃	- 0	150	
3	100 ₃	50 ₆	- 0	150	
Запасы	100	200	100	400	
v_j					

2.2. План не вырожден. Но в нем есть цикл: (2,1)→(3,1)→(3,2)→(2,2). Избавимся от цикла, переместив значение 0 из клетки (2,1) в клетку (2,3).

Склад Магазин	1	2	3	Потребности	u_i
1	— 5	— 4	100 0	100	
2	— 4	150 3	0 0	150	
3	100 3	50 6	— 0	150	
Запасы	100	200	100	400	
v_j					

2.3. Сосчитаем стоимость такого плана перевозок:

$$100 \cdot 0 + 150 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 6 = 1050.$$

2.4. Заново расставим потенциалы, начиная с $u_1 = 0$.

2.5. Для свободных клеток определим сумму потенциалов и запишем их в левом нижнем углу.

Получим таблицу:

Склад Магазин	1	2	3	Потребности	u_i
1	0 — 5	3 — 4	100 0	100	0
2	0 — 4	150 3	0 0	150	0
3	100 3	50 6	3 — 0	150	3
Запасы	100	200	100	400	
v_j	0	3	0		

Теперь (3,3) – клетка, в которой сумма потенциалов больше транспортного тарифа. Значит, план не оптимален.

3.1. Построим цикл, переместив 50 ед. груза так: (3,2)→(3,3), (1,3)→(1,2).

Склад Магазин	1	2	3	Потребности	u_i
1	— 5	50 4	50 0	100	
2	— 4	150 3	0 0	150	
3	100 3	— 6	50 0	150	
Запасы	100	200	100	400	
v_j					

3.4. План не вырожден, но цикличен. Убрав значение 0 из клетки (2,3), мы избавимся от цикла, не потеряв невырожденность.

3.5. Сосчитаем стоимость такого плана перевозок:

$$50 \cdot 4 + 50 \cdot 0 + 150 \cdot 3 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 0 = 950.$$

3.6. Заново расставим потенциалы, начиная с $u_1 = 0$.

3.7. Для свободных клеток определим сумму потенциалов и запишем их в левом нижнем углу.

Склад Магазин \	1	2	3	Потребности	u_i
1	3 — 5	50 4	50 0	100	0
2	2 — 4	150 3	— 0	150	-1
3	100 3	— 6	50 0	150	0
Запасы	100	200	100	400	
v_j	3	4	0		

Теперь у нас нет клеток, в которых сумма потенциалов больше транспортного тарифа. Значит, мы получили оптимальный план перевозок с минимальной стоимостью.

Решим задачу, построив опорный план методом минимального элемента. Начинаем заполнять таблицу с клетки, в которой самый маленький ненулевой транспортный тариф. Если таких клеток несколько, то выбираем любую. В нашей транспортной таблице это клетки (2,2) и (3,1). Начнем с (2,2). Второму магазину надо 150 ед., на втором складе есть 200, забираем 150. Потребности второго магазина удовлетворены, в остальных клетках второй строки и ставим прочерк. Следующей заполним клетку (3,1). Третьему магазину надо 150 ед., на первом складе есть 100, заберем все 100. Первый склад пуст, поэтому в остальных клетках первого столбца ставим прочерк. Следующей заполним клетку (1,2) с тарифом 4. Первому магазину надо 100 ед., а на втором складе осталось 50, их и заберем. Второй склад пуст, поэтому в остальных клетках второго столбца ставим прочерк. Заполняем оставшиеся клетки (1,3) и (3,3). Первому магазину надо еще 50 ед., третьему тоже 50. Заберем их с третьего склада, на нем как раз и осталось 100 ед. Получим первый опорный план:

Склад Магазин \	1	2	3	Потребности
1	—	50	50 ₀	100
2	— ₄	150	— ₀	150
3	100 ₃	—	50 ₀	150
Запасы	100	200	100	400

Полученный план является оптимальным. Заметим, что не всегда опорный план, построенный методом минимального элемента, будет оптимальным. Но количество шагов будет меньше по сравнению с методом северо-западного элемента.

Приведем пример реализации алгоритма в Microsoft Excel. Будем использовать сбалансированную модель, то есть учитываем фиктивного агента.

Заполним диапазон A1:C3 тарифными значениями.

Заполним диапазон A5:C7 нулями – будущими размерами перевозок.

В ячейку D5 введем формулу: =СУММ(A5:C5). Тиражируем ее вниз еще на две строки.

В ячейку A7 введем формулу: =СУММ(A5:A7). Тиражируем ее вправо еще на два столбца.

В ячейки E5:E7 введем значения суммарных потребностей.

В ячейки A9:C9 введем значения суммарных запасов.

В ячейке E1 введем формулу стоимости всех перевозок: =суммпроизв(A5:C7; A1:C3) (рис. 3.1).

E1		fx		=СУММПРОИЗВ(A5:C7;A1:C3)				
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	5	4	0		0			
2	4	3	0					
3	3	6	0					
4								
5	0	0	0	0	100			
6	0	0	0	0	150			
7	0	0	0	0	150			
8	0	0	0					
9	100	200	100					
10								

Рис. 3.1

Активируем ячейку E1 и на вкладке Данные вызовем процедуру Поиск решения. Выставим следующие параметры.

Оптимизировать целевую функцию – \$E\$1.

До: Минимум.

В графе Изменяя ячейки переменных нужно указать адреса ячеек, в которых лежат начальные значения размеров перевозок: \$A\$5:\$C\$71. Записать ограничения в окно В соответствии с ограничениями нужно с помощью кнопки Добавить (рис. 3.2).

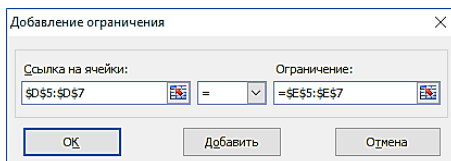


Рис. 3.2

Активируем опцию Сделать переменные без ограничений неотрицательными, выбираем метод решения: Поиск решения линейных задач симплекс-методом, нажимаем кнопку Найти решение.

Выбираем опцию Сохранить найденное решение и нажимаем ОК. На рис. 3.3 представлено полученное решение: в диапазоне A5:C7 – оптимальный план перевозок, в ячейке E1 – его стоимость.

E1					fx =СУММПРОИЗВ(A5:C7;A	
	A	B	C	D	E	F
1		5	4	0		950
2		4	3	0		
3		3	6	0		
4						
5	0	50	50	100	100	
6	0	150	0	150	150	
7	100	0	50	150	150	
8	100	200	100			
9	100	200	100			
10						

Рис. 3.3