Лабораторная работа 5

«Решение задач линейного программирования симплекс– методом»

Цель работы: Научиться сводить произвольную задачу линейного программирования к основной задаче линейного программирования. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

Краткие теоретические основания выполнения задания

Общая характеристика задач оптимизации

Задачи линейной оптимизации относятся к широко распространённому классу задач, встречающихся в различных сферах деятельности: в бизнесе, на производстве, в быту. Как оптимально распорядиться бюджетом или за минимальное время добраться до нужного места в городе, как наилучшим образом спланировать деловые встречи, минимизировать риски капитальных вложений, определить оптимальные запасы сырья на складе - это те задачи, в которых нужно найти наилучшее из всех возможных решений.

Различают следующие типы линейных оптимизационных задач:

- задачи о перевозках, например, минимизация расходов по доставке товаров с нескольких фабрик в несколько магазинов с учетом спроса;
- задачи распределения рабочих мест, например, минимизация расходов на содержание штата с соблюдением требований, определенных законодательством;
- управление ассортиментом товаров: извлечение максимальной прибыли с помощью варьирования ассортиментным набором товаров (при соблюдении требований клиентов). Аналогичная задача возникает при продаже товаров с разной структурой затрат, рентабельностью и показателями спроса;
- замена или смешивание материалов, например, манипуляция материалами с целью снижения себестоимости, поддержания необходимого уровня качества и соблюдения требований потребителей;
- задача о диете. Из имеющихся в распоряжении продуктов требуется составить такую диету, которая, с одной стороны, удовлетворяла бы минимальным потребностям организма в питательных веществах (белки, жиры, углеводы, минеральные соли, витамины), с другой — требовала бы наименьших затрат;
- задача распределения ресурсов, например, распределение ресурсов между работами таким образом, чтобы максимизировать прибыль, или минимизировать затраты, или определить такой состав работ, который можно выполнить, используя имеющиеся ресурсы, и при этом достичь максимума определенной меры эффективности, или рассчитать, какие ресурсы необходимы для того, чтобы выполнить заданные работы с наименьшими издержками.

Математическая постановка задачи линейного программирования

Рассмотрим наиболее распространенный класс оптимизационных задач - задачи линейного программирования. К такому классу относятся задачи, описываемые линейными математическими моделями.
Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = 1, \dots, k), \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = k+1, \dots, m), \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, \dots, l, \qquad l \le n), \qquad (4)$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины и $k \le m$.

Функция (1) называется *целевой функцией* задачи, а условия (2)–(4) – *ограничениями* задачи. Совокупность чисел $X = (x_1, x_2, x_{3,\dots,} x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи, называется *допустимым решением*. Решение, при котором целевая функция задачи принимает максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным*.

Использование надстройки Excel
для решения задач линейного программирования

Поиск решения – это надстройка EXCEL, которая позволяет решать оптимизационные задачи. Если команда Поиск решения или группа Анализ отсутствует, необходимо загрузить надстройку Поиск решения.

На вкладке Файл выберите команду Параметры, а затем – категорию Надстройки (рис. 1).

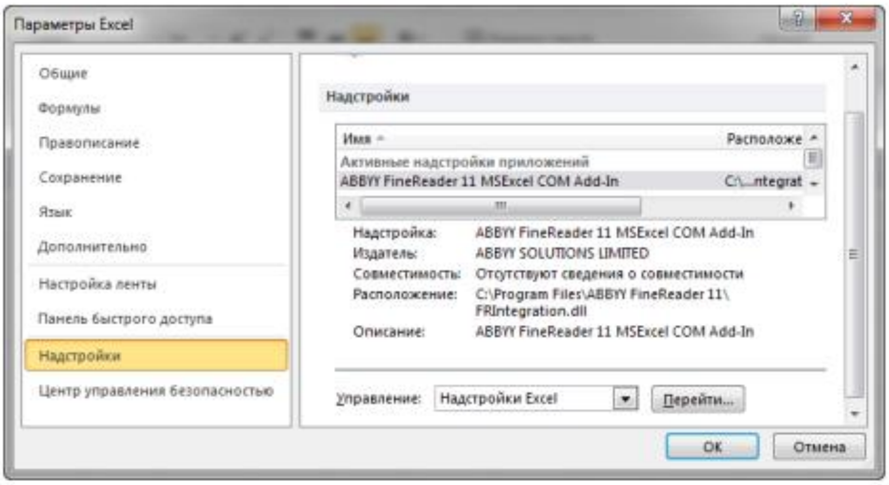


Рис. 1

В поле Управление выберите значение Надстройки Excel и нажмите кнопку Перейти.

В поле Доступные надстройки установите флажок рядом с пунктом Поиск решения (рис. 2) и нажмите кнопку ОК.

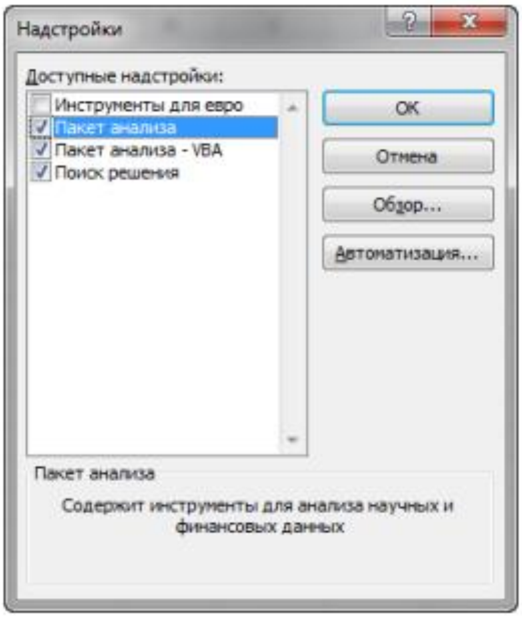


Рис. 2

Пример решения оптимизационных линейных задач в MS Excel 2010

Схема решения задач линейного программирования в MS Excel 2010 следующая:

1. Составить математическую модель.
2. Ввести на рабочий лист Excel условия задачи:

а) создать форму на рабочем листе для ввода условий задачи;

б) ввести исходные данные, целевую функцию, ограничения и граничные условия.

3. Указать параметры в диалоговом окне Поиск решения.
4. Проанализировать полученные результаты.

Рассмотрим решение задачи оптимизации на примере.

Пример. Задача определения оптимального ассортимента продукции

Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – А и В. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 ед. соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и $П_2$ – табл. 1.

Таблица 1

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
А	2	3	9
В	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: 3 д. е. – для $П_1$ и 4 д. е. – для $П_2$.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Построим математическую модель для решения поставленной задачи.

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц продукции $П_2$. Поскольку производство продукции ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$2x_1 + 3x_2 \le 9,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 13,$$
$$x_1 - x_2 \le 1,$$
$$x_2 \le 2,$$
$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 0.$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц продукции $П_2$ составит

$$F = 3x_1 + 4x_2.$$

Среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значения F_{max}.

Рассматриваемая задача относится к разряду типовых задач оптимизации производственной программы предприятия. В качестве критериев оптимальности в этих задачах могут быть также использованы: прибыль, себестоимость, номенклатура производимой продукции и затраты станочного времени.

Создадим на рабочем листе форму для ввода исходных данных (рис. 3). Заливкой выделены ячейки для ввода функций.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2		x1	x2				
3	Значения искомых переменных						
4					Целевая функция		
5	Коэффициенты в уравнении целевой функции	3	4				
6							
7		Ограничения		Левая			
8	Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		часть		Запас	
9		П1	П2	неравенст	Знак	сырья	
10	A	2	3		<=	9	
11	B	3	2		<=	13	

Рис. 3

В ячейку E5 введем формулу для целевой функции $F = 3x_1 + 4x_2$ (рис. 4). Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel, формулу для расчета целевой функции можно записать как сумму произведений каждой из ячеек, отведенной для значений переменных задачи (B3, C3), на соответствующие ячейки, отведенные для коэффициентов целевой функции (B5, C5).

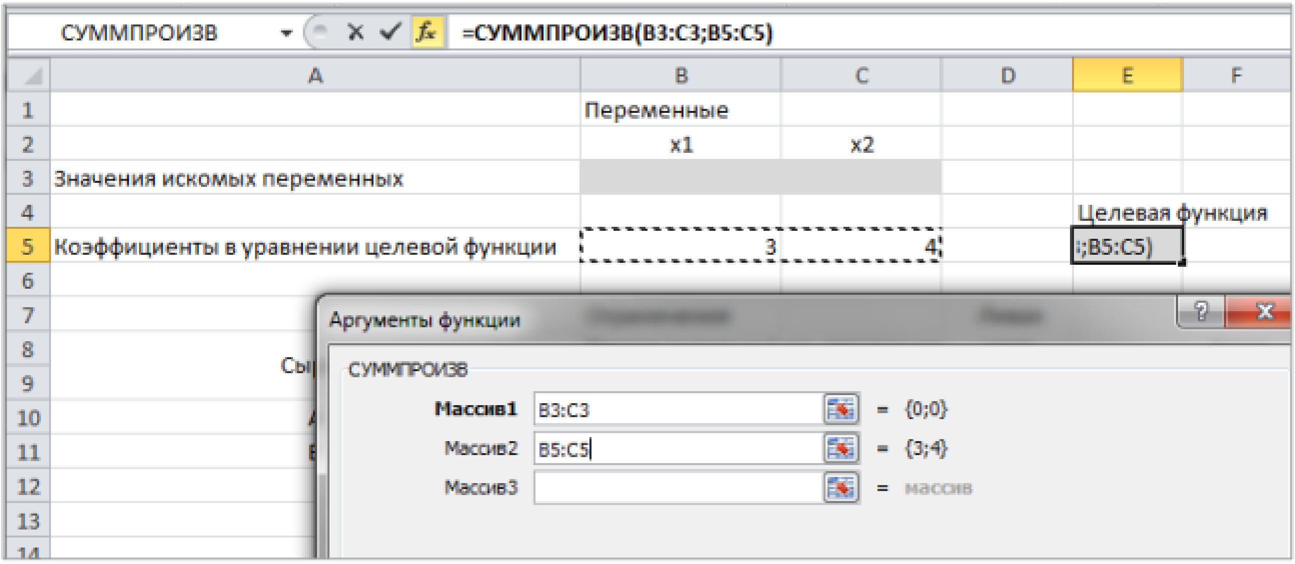
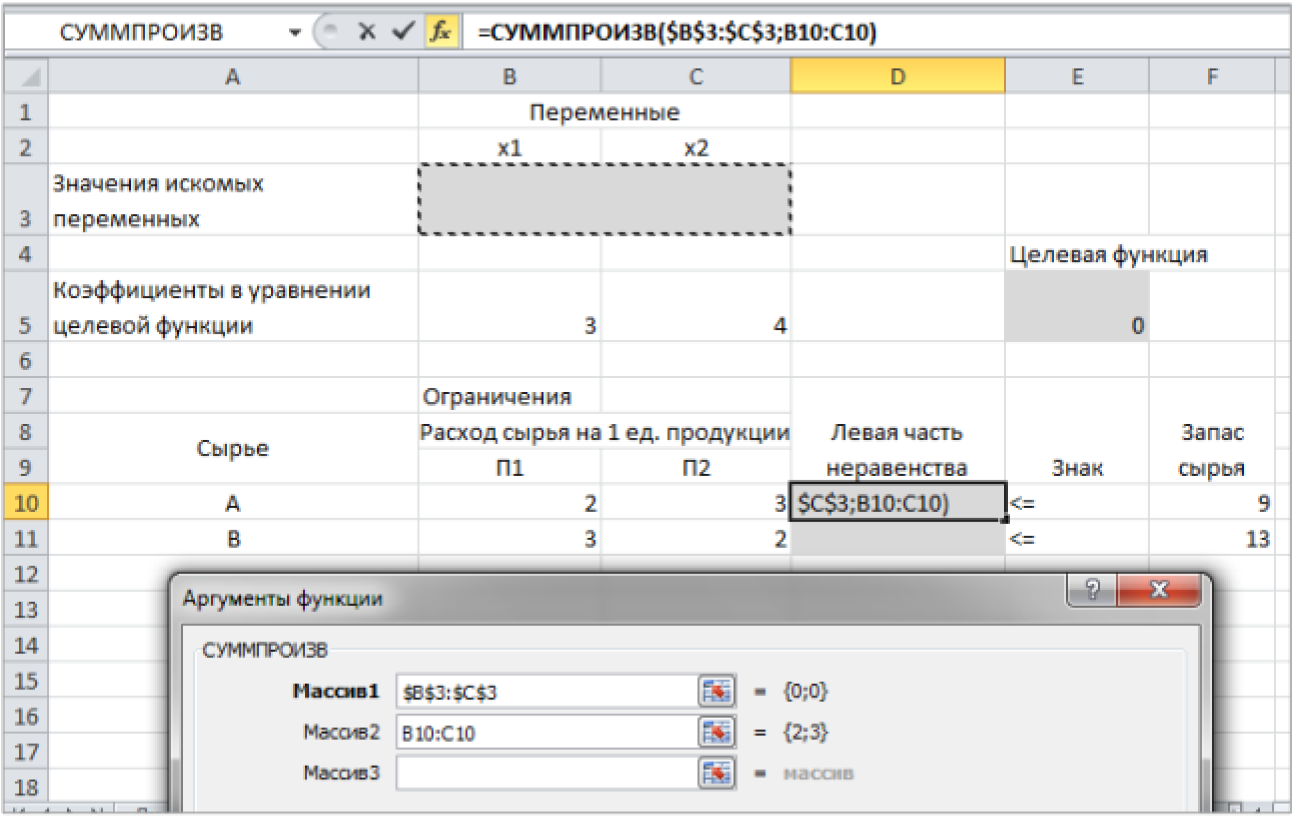


Рис. 4

Аналогично в ячейки D10:D11 введены формулы для расчета левой части ограничений (рис. 5).



На вкладке Данные в группе Анализ выберем команду Поиск решения.

В диалоговом окне Параметры поиска решения установим следующее (рис. 6):

- в поле Оптимизировать целевую функцию выбираем ячейку со значением целевой функции – E5;
- выбираем, максимизировать или минимизировать целевую функцию;
- в поле Изменяя ячейки переменных выбираем ячейки со значениями искомых переменных B3:C3 (пока в них нули или пусто);
- в области В соответствии с ограничениями с помощью кнопки Добавить размещаем все ограничения нашей задачи (рис. 7);
- в поле Выберите метод решения указываем Поиск решения линейных задач симплекс-методом;
- нажимаем кнопку Найти решение.

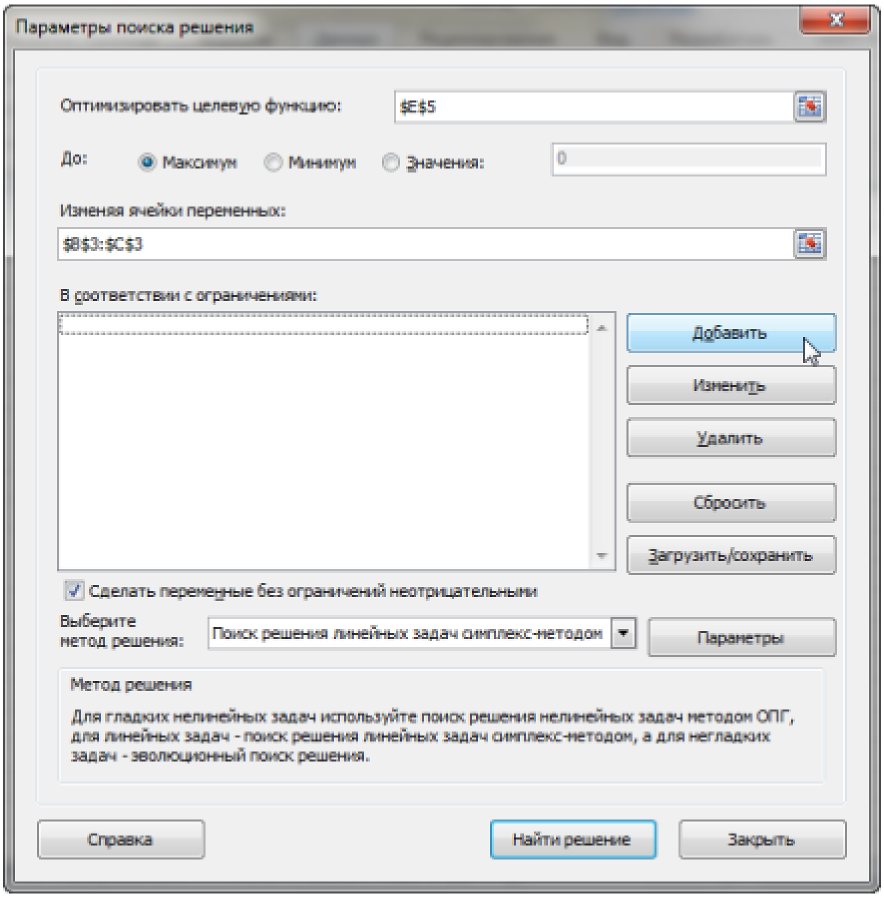


Рис. 6

Добавляем ограничения для нашей задачи. Для неравенств

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9,$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 13$$

указываем в поле Ссылка на ячейки диапазон D10:D11, выбираем в раскрывающемся списке знак неравенства, в поле Ограничение выделяем диапазон F10:F11 и нажимаем кнопку Добавить (рис. 7), чтобы принять ограничение и добавить следующее ограничение. Для принятия ограничения и возврата к диалоговому окну Поиск решения нажмите кнопку Ok.

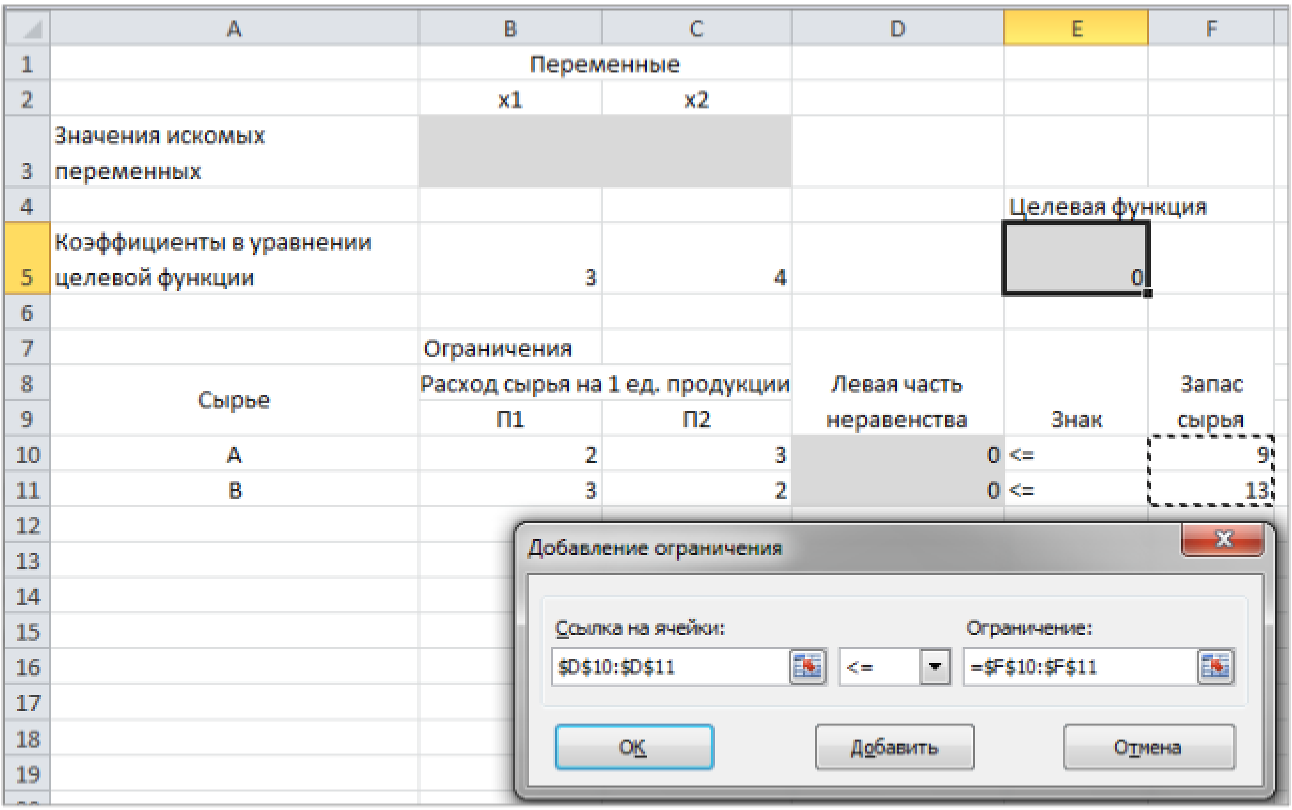


Рис. 7

Покажем окна для добавления ограничений :

$x_1 - x_2 \leq 1$ преобразуем в $x_1 \leq x_2 + 1$ (рис. 8);

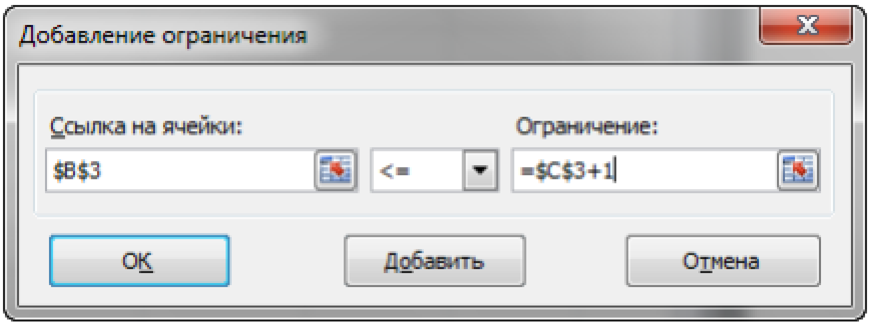


Рис. 8

$x_2 \leq 2$ (рис. 9);

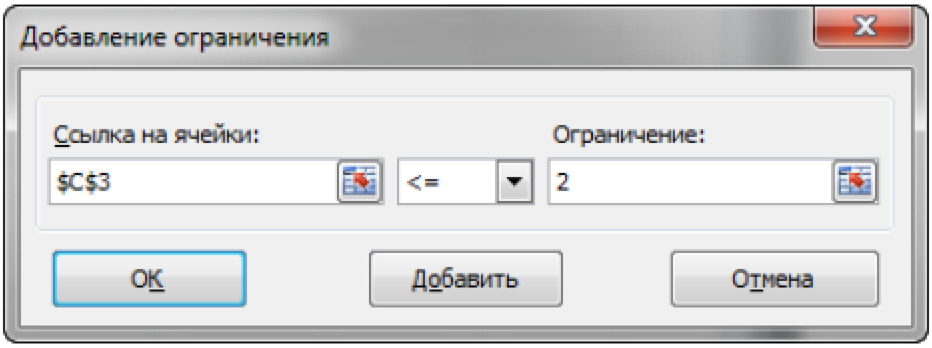


Рис. 9

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (рис. 10).

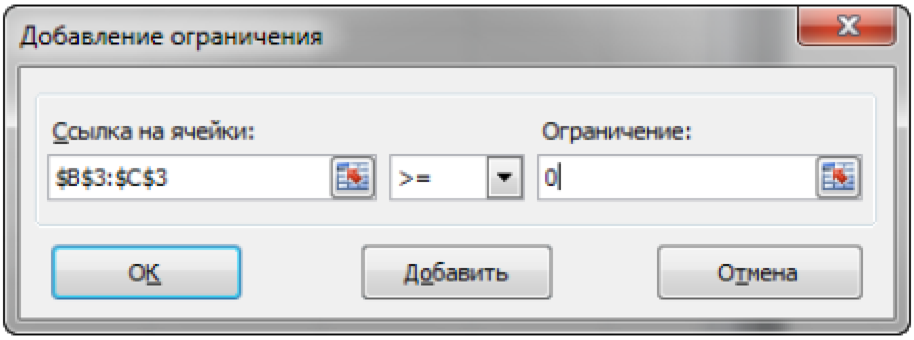


Рис. 10

После выбора кнопки **Найти решение** появляется окно **Результаты поиска решения** (рис. 11).

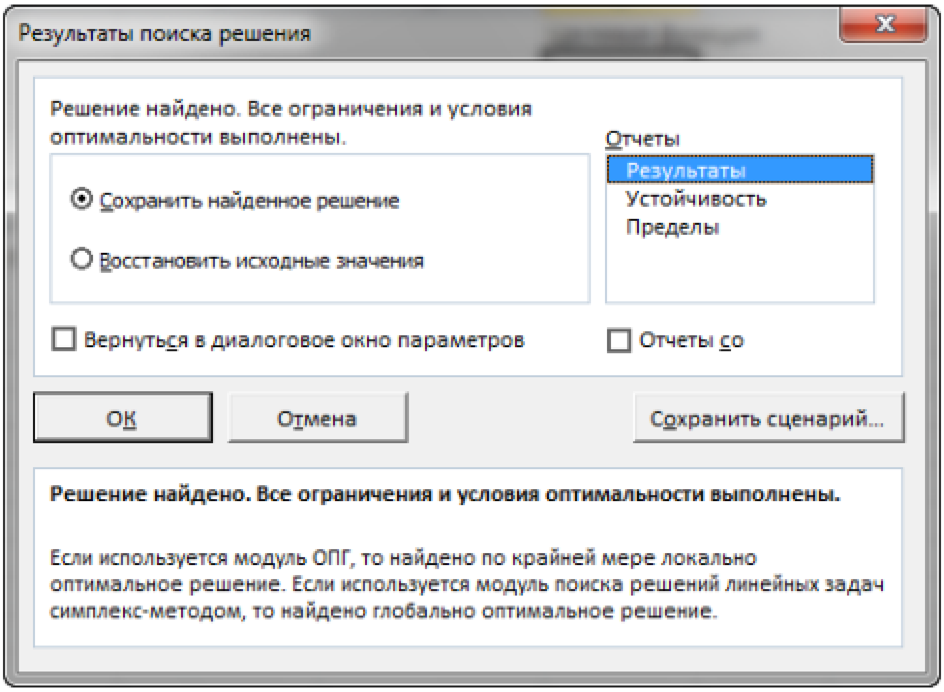


Рис. 11

Для сохранения полученного решения необходимо использовать переключатель Сохранить найденное решение в открывшемся окне диалога Результаты поиска решения. После чего рабочий лист примет вид, представленный на рис. 12.

	A	B	C	D	E	F
1		Переменные				
2		x1	x2			
3	Значения искомых переменных	2,4	1,4			
4					Целевая функция	
5	Коэффициенты в уравнении целевой функции	3	4		12,8	
6						
7		Ограничения				
8	Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Левая часть неравенства		Запас сырья
9		П1	П2		Знак	
10	A	2	3	9	<=	9
11	B	3	2	10	<=	13

Рис. 12

Сохранить модель поиска решения можно следующим образом: 1) при сохранении книги Excel после поиска решения все значения, введенные в окнах диалога Поиск решения, сохраняются вместе с данными рабочего листа. С каждым рабочим листом в рабочей книге можно сохранить один набор значений параметров Поиска решения; 2) если в пределах одного рабочего листа Excel необходимо рассмотреть несколько моделей оптимизации (например, найти максимум и минимум одной функции или максимальные значения нескольких функций), то удобнее сохранить эти модели, используя кнопку Загрузить/Сохранить окна Параметры поиска решения. Диапазон для сохраняемой модели содержит информацию о целевой ячейке, об изменяемых ячейках, о каждом из ограничений и все значения диалога Параметры. Выбор модели для решения конкретной оптимизационной задачи осуществляется с помощью кнопки Загрузить/сохранить диалогового окна Параметры поиска решения; 3) сохранить модель можно в виде именованных сценариев, для этого необходимо нажать на кнопку Сохранить сценарий диалогового окна Результаты поиска решений (см. рис. 11). Кроме вставки оптимальных значений в изменяемые ячейки, Поиск решения позволяет представлять результаты в виде трех отчетов (Результаты Устойчивость и Пределы). Для генерации одного или нескольких отчетов необходимо выделить их названия в окне диалога Результаты поиска решения (рис. 11). Рассмотрим более подробно каждый из них. Отчет по устойчивости (рис. 13) содержит информацию о том, насколько целевая ячейка чувствительна к изменениям ограничений и переменных. Этот отчет имеет два раздела: один – для изменяемых ячеек, а второй – для ограничений. Правый столбец в каждом разделе содержит информацию о чувствительности. Каждая изменяемая ячейка и ограничения приводятся в отдельной строке. При использовании целочисленных ограничений Excel выводит сообщение Отчеты об устойчивости и Пределы не применимы для задач с целочисленными ограничениями.

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости
Лист: [Книга1]Лист1 (3)
Отчет создан: 08.03.2015 21:36:50

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	Значения искомых переменных x1	2,4	0	3	1E+30	0,333333333
$C$3	Значения искомых переменных x2	1,4	0	4	0,5	7

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	Значения искомых переменных x1	2,4	0,2	0	3	1,5
$D$10	А Левая часть неравенства	9	1,4	9	3	7
$D$11	В Левая часть неравенства	10	0	13	1E+30	3

Рис. 13

Отчет по результатам (рис. 14) содержит три таблицы: в первой приведены сведения о целевой функции до начала вычисления, во второй – значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи, в третьей – результаты оптимального решения для ограничений. Этот отчет также содержит информацию о таких параметрах каждого ограничения, как статус и разница. Статус может принимать три состояния: связанное, несвязанное или невыполненное. Значение разницы – это разность между значением, выводимым в ячейке ограничения при получении решения, и числом, заданным в правой части формулы ограничения. Связанное ограничение – это ограничение, для которого значение разницы равно нулю. Несвязанное ограничение – это ограничение, которое было выполнено с ненулевым значением разницы.

Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Модуль поиска решения

Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом

Время решения: 0,25 секунд.

Число итераций: 3 Число подзадач: 0

Параметры поиска решения

Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001, Использовать автоматическое масштабирование

Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$E$5	Коэффициенты в уравнении целевой функции Целевая функция	0	12,8

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$3	Значения искомых переменных x1	0	2,4	Продолжить
$C$3	Значения искомых переменных x2	0	1,4	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$B$3	Значения искомых переменных x1	2,4	$B$3<=1+$C$3	Привязка	0
$D$10	A Левая часть неравенства	9	$D$10<=$F$10	Привязка	0
$D$11	B Левая часть неравенства	10	$D$11<=$F$11	Без привязки	3
$B$3	Значения искомых переменных x1	2,4	$B$3>=0	Без привязки	2,4
$C$3	Значения искомых переменных x2	1,4	$C$3>=0	Без привязки	1,4
$C$3	Значения искомых переменных x2	1,4	$C$3<=2	Без привязки	[illegible]

Рис. 14

Отчет по пределам (рис. 15) содержит информацию о том, в каких пределах значения изменяемых ячеек могут быть увеличены или уменьшены без нарушения ограничений задачи. Для каждой изменяемой ячейки этот отчет содержит оптимальное значение, а также наименьшие значения, которые ячейка может принимать без нарушения огр

Microsoft Excel 14.0 Отчет о пределах

Лист: [Книга1]Лист1 (3)

Отчет создан: 08.03.2015 21:36:50

Целевая функция		
Ячейка	Имя	Значение
$E$5	Коэффициент	12,8

Переменная			Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
$B$3	Значения иск	2,4	0	5,6	2,4	12,8
$C$3	Значения иск	1,4	1,4	12,8	1,4	12,8

Рис. 15

Полученное решение означает, что объем производства продукции вида $П_1$ должен быть равен 2,4 ед., а продукции $П_2$ – 1,4 ед. продукции. Доход, получаемый в этом случае, составит 12,8 д. е. Допустим, что к условию задачи добавилось требование целочисленности значений всех переменных. В этом случае описанный выше процесс ввода условия задачи необходимо *дополнить* следующими шагами. В окне Поиск решения нажмите кнопку Добавить и в появившемся окне Добавление ограничений введите ограничения следующим образом (рис. 16): • в поле Ссылка на ячейки введите адреса ячеек переменных задачи B3:C3; • в поле ввода знака ограничения установите целое; • подтвердите ввод ограничения нажатием кнопки ОК

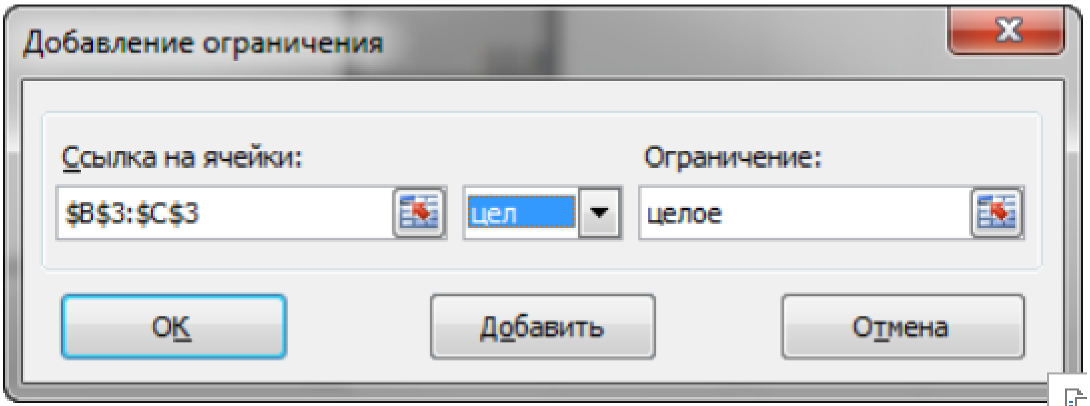


Рис. 16

Решение задачи при условии целочисленности ее переменных – рис. 17.

	A	B	C	D	E	F
1		Переменные				
2		x1	x2			
3	Значения искомых переменных	1	2			
4					Целевая функция	
5	Коэффициенты в уравнении целевой функции	3	4		11	
6						
7		Ограничения				
8	Сырье	сырья на 1 ед. про,				
9		П1	П2	Левая часть неравенства	Знак	Запас сырья
10	А	2	3	8	<=	9
11	В	3	2	7	<=	13

Рис. 17

Задания для самостоятельной работы

Студенты, чьи фамилии начинаются на буквы А-Е выполняют 1 вариант.

Студенты, чьи фамилии начинаются на буквы Ж-Н выполняют 2 вариант.

Студенты, чьи фамилии начинаются на буквы О-Я выполняют 3 вариант.

1. Найти максимум линейной функции при заданной системе ограничений. (Представить ее в табличной форме на листе Excel. Найти решение задачи средствами надстройки Поиск решения.)

Вариант	Целевая функция F	Ограничения
1	$F = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 + x_2 \le 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
2	$F = 3x_1 + 2x_2$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
3	$F = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
4	$F = 3x_1 + 2x_2$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
5	$F = x_1 + x_2$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
6	$F = x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

2. Задание

   1. Построить математическую модель задачи.
   2. Представить ее в табличной форме на листе Excel.
   3. Найти решение задачи средствами надстройки Поиск решения.
   4. Вывести отчеты по результатам и устойчивости.

   Вариант 1

   Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов
   каждого вида – табл. 2.

Таблица 2

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	Стол	Шкаф	
Древесина, $м^3$:			
1-го вида	0,2	0,1	40
2-го вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость, чел.ч	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия, р.	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов следует изготавливать фабрике, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Вариант 2

Для производства двух видов изделий A и B используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида, общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия – табл. 3

Таблица 3

Тип оборудования	Затраты времени, стан.-ч, на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования, ч
	A	B	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реализации одного изделия, р.	14	18	

Найти план выпуска изделий A и B, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Вариант 3

Для изготовления трех видов изделий A, B и C используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования, общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, прибыль от реализации одного изделия данного вида – табл. 4.

Таблица 4

Тип оборудования	Затраты времени, стан.-ч, на обработку одного изделия вида			Общий фонд рабочего времени оборудования, ч
	A	B	C	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль, р.	10	14	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.