MDS3120: Álgebra Lineal Aplicada para Ciencia de Datos

Clase 5: Factorizacion LU y eliminación de Gauss

Instructor: Manuel A. Sánchez, Carlos Sing Long *compilado el 9 de junio de 2024*

5.1. Introducción

Los sistemas de ecuaciones lineales son esenciales en ciencia de datos, permitiendo modelar fenómenos diversos. En esta case los introduciremos y discutiremos métodos para resolverlos.

Considere un conjunto de m ecuaciones lineales en n variables o incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

donde A_{ij} son coeficientes o entradas de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times}$. El sistema se escribe en forma matricial como:

$$Ax = b$$

Comenzamos ilustrando con algunos ejemplos clásicos.

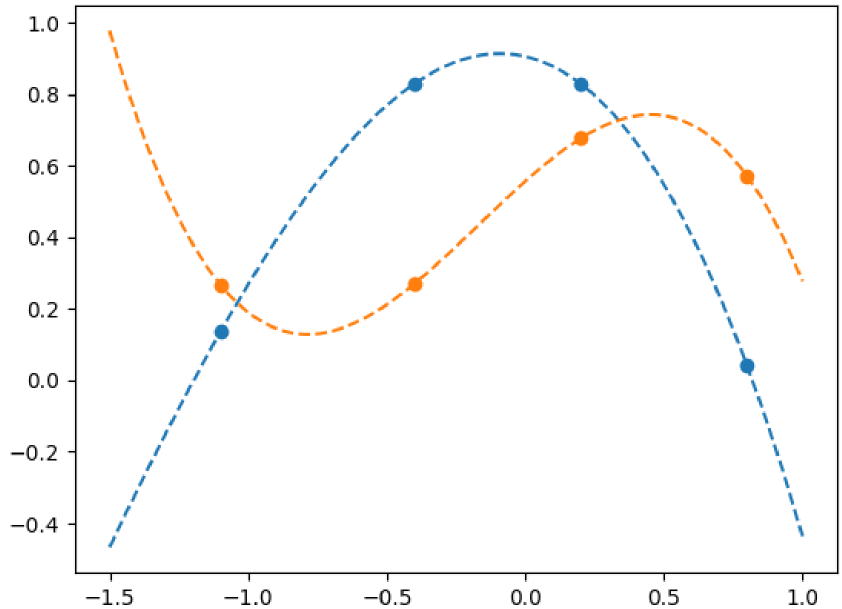
Ejemplo 5.1. Interpolación polinomial.
Considere el problema de encontrar los coeficientes del polinomio cubico que $p(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$ que interpola los valores b_1, b_2, b_3, b_4 en los puntos $x = -1{,}1, -0{,}4, 0{,}2, 0{,}8$.
Resolvemos el problema de interpolación generando la matriz de Vandermonde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1{,}1 & (-1{,}1)^2 & (-1{,}1)^3 \\ 1 & -0{,}4 & (-0{,}4)^2 & (-0{,}4)^3 \\ 1 & 0{,}2 & (0{,}2)^2 & (0{,}2)^3 \\ 1 & 0{,}8 & (0{,}8)^2 & (0{,}8)^3 \end{bmatrix}$$

Encontrar los valores de los coeficientes es equivalente a resolver el sistema lineal

$$Ac = b$$

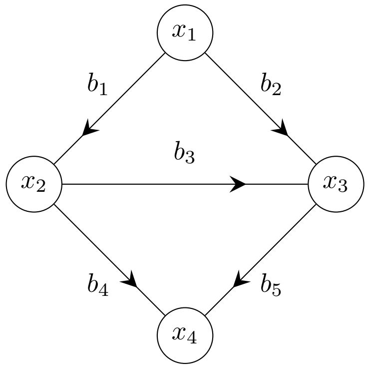
En la figura debajo mostramos el polinomio solución dados los datos marcados con circulo azules y anaranjados.



Ejemplo 5.2. Matriz de incidencia de un grafo.
Un grafo dirigido consiste de un conjunto de vertices o nodos, etiquetados del $1, ..., n$ y un conjunto de aristas dirigidas (o ramas), etiquetadas de $1, ..., m$. Cada arista es conectada desde uno de los nodos a otro nodo, en tal caso decimos que los nodos estan conectados o son adyascentes. Los grafos dirigidos son usualmente representados con los vertices como circulos o puntos y las aristas con flechas. Un grafo dirigido puede ser descrito por su matriz de incidencia con dimensiones de $n \times m$ definida por

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{arista } j \text{ apunta hacia nodo } i, \\ -1 & \text{arista } j \text{ apunta desde nodo } i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

La matriz de incidencia es sparse o rala, dado que tiene solo dos entradas no cero en cada columna.
Considere el siguiente ejemplo de sistema lineal con 5 ecuaciones y 4 incógnitas. Las ecuaciones tienen 4 incógnitas, una para cada nodo en el grafo asociado.



$$\underbrace{\begin{array}{rrrrcl} -x_1 & +x_2 & & & = & b_1 \\ -x_1 & & +x_3 & & = & b_2 \\ & -x_2 & +x_3 & & = & b_3 \\ & -x_2 & & +x_4 & = & b_4 \\ & & -x_3 & +x_4 & = & b_5 \end{array}}_{Ax=b}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$$

5.2. Matriz inversa

Definición 5.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces

- Una matriz $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ que satisface $XA = I \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es llamada una **inversa por la izquierda**. Decimos que la matriz A es invertible por la izquierda si una inversa por la izquierda de A existe.
- Una matriz $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ que satisface $AX = I \in \mathbb{R}^{m\times m}$, es llamada una **inversa por la derecha**. Decimos que la matriz A es invertible por la derecha si una inversa por la derecha de A existe.

A continuacún enumeramos algunas propiedades de las matrices inversas.

Propiedad 5.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, una matriz de m por n. Entonces:

1. La matriz A tiene una **inversa por la izquierda** X, si y sólo si las **columnas** de A son **linealmente independientes**.
2. La matriz A tiene una **inversa por la derecha** X si y sólo si sus **filas** son **linealmente independientes**.
3. Si A tiene una inversa por la derecha X, entonces $X^\top$ es una inversa por la izquierda de $A^\top$.
4. Si A tiene una inversa por la izquierda X, entonces $X^\top$ es una inversa por la derecha de $A^\top$.
5. Si A es una matriz alta, es decir $m > n$, entonces A no puede tener una inversa por la derecha.
6. Si A es una matriz ancha, es decir $m < n$, entonces A no puede tener una inversa por la izquierda.

Ejemplo 5.3. En general no tenemos la unicidad de la inversa por la izquierda o por la derecha.
Considere la siguiente matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces un simple calculo nos lleva a observar que las siguientes dos matrices son inversas por la izquierda de A

$$B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -11 & -10 & 16 \\ 7 & 8 & -11 \end{bmatrix}, \qquad C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Es decir, la inversa por la izquierda de A no es única.

Nos preguntamos: ¿cuando podemos asegurar que tenemos la unicidad de la inversa? La siguiente definición responde esta pregunta.

Definición 5.2. Si una matriz A es invertible por la izquierda y por la derecha entonces las inversas por la izquierda y por la derecha son iguales, y estas son únicas. Además decimos en este caso que la matriz en simplemente **invertible** (o **no singular**) y la **matriz inversa** se denota por A^{-1} y satisface

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Una matriz cuadrada que no es invertible se dice **singular**.

Resolviendo ecuaciones lineales con la inversa

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con n variables $Ax = b$, y asumamos que A es invertible, entonces para cualquier n-vector b, la solución del sistema lineal se expresa como

$$x = A^{-1}b.$$

Un sistema cuadrado de ecuaciones lineales $Ax = b$, con A una matriz invertible, tiene una única solución $x = A^{-1}b$, para cualquier vector b.

Condiciones de invertibilidad: Para matrices cuadradas, invertibilidad por la izquierda, invertibilidad por la derecha e invertibilidad simplemente son equivalentes. Es decir, tenemos el siguiente diagrama:

invert. por la derecha $\iff$ indep. de filas $\iff$ invert.por la izquierda $\iff$ indep. de columnas

Ejemplo 5.4. Ejemplos básicos del cálculo de la matriz inversa.

1. La inversa de la matriz identidad I es la misma matriz identidad, es decir, $I^{-1} = I$.

2. La inversa de una matriz diagonal A con entradas diagonales distintas de cero es la matriz diagonal con entradas diagonales el inverso de las entradas de A, es decir

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/A_{nn} \end{bmatrix}$$

o tambien lo escribimos como

$$A = \mathbf{diag}(A_{11}, A_{22}, ..., A_{nn})^{-1} = \mathbf{diag}(A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1}, ..., A_{nn}^{-1}).$$

3. Considere la matriz A y su inversa A^{-1} dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 0 & -20 & -10 \\ -6 & 5 & -2 \\ 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

estas verifican que $AA^{-1} = I$.

4. En el caso de $n = 2$ podemos expresar la matriz inversa usando una fórmula. Sea matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es invertible si y sólo si $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = neq0$, y su inversa está dada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$$

Otras propiedades importantes de la matriz inversas son las siguientes

Propiedad 5.2. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces

1. Si A es invertible, su matriz transpuesta $A^\top$ es tambien invertible y su inversa es $(A^{-1})^\top = A^{-\top}$.

2. Si A y B son invertibles, entonces el producto AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5.3. Sistemas triangulares

Consideremos la tarea de resolver un sistema lineal cuadrado de n ecuaciones y n incógnitas para una matriz invertible. Para una matriz general no parece haber una metodología clara para resolverlo. Sin embargo existen matrices donde la situación es favorable. Por ejemplo si la matriz es diagonal, el cálculo de sus inversa es simple tal como mostramos anteriormente.

Un tipo de sistema lineal fundamental que resulta simple de resolver son los **sistemas triangulares**. Analicemos primero el caso de un sistema **triangular inferior**, es decir el cual tiene la siguiente estructura:

$$\begin{array}{lllllllll} L_{11}x_1 & & & & & & & = & b_1 \\ L_{21}x_1 & + & L_{22}x_2 & & & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\ L_{n1}x_1 & + & L_{n2}x_{n2} & + & \cdots & + & L_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Este sistema lineal tiene un equivalente matricial $Lx = b$ con matriz de coeficientes L triangular inferior, es decir, las entradas de L sobre diagonal son cero, es decir,

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn-1} & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Observamos que la matriz L es invertible si sy solo si las entradas de la diagonal son distintas de cero, esto es, $L_{ii} \neq 0$, para todo $i = 1, ..., n$. Así si esto se cumple el sistema tiene única solución.

Para sistemas con estas estructura podemos escribir un algortimo que calcule fácilmente la solución del sistema lineal, este es el algoritmo de **sustitución progresiva**. La idea del algortimo es simplemente encontrar la solución de las primeras variables, desde x_1 en adelante y reemplazar en las ecuaciones de las variable que le sigue. Lo presentamos a continuación.

Algoritmo 1: Sustitución progresiva

Data: $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, triangular inferior invertible, $b \in \mathbb{R}^n$.
Result: $x \in \mathbb{R}^n$, solución de $Lx = b$.
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  $x_i = (b_i - L_{i,i-1}x_{i-1} - \cdots - L_{i,1}x_1)/L_{ii}$
return x

Analogamente podemos considerar ahora sistemas de ecuaciones lineales $Rx = b$, donde $n \times n$ matriz R es triangular superior, es decir con la forma

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ 0 & R_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

El algoritmo para resolver esto sistema sigue el mismo principio que el anterior, esta vez reemplaza desde la última variable hacia la primera. Este es el algoritmo de **sustitución regresiva**.

Algoritmo 2: Sustitución regresiva

Data: $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, triangular superior invertible, $b \in \mathbb{R}^n$.
Result: $x \in \mathbb{R}^n$, solución de $Rx = b$.
for $i \leftarrow n$ **to** 1 **do**
  $x_i = (b_i - R_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - R_{i,n}x_n)/R_{ii}$
return x

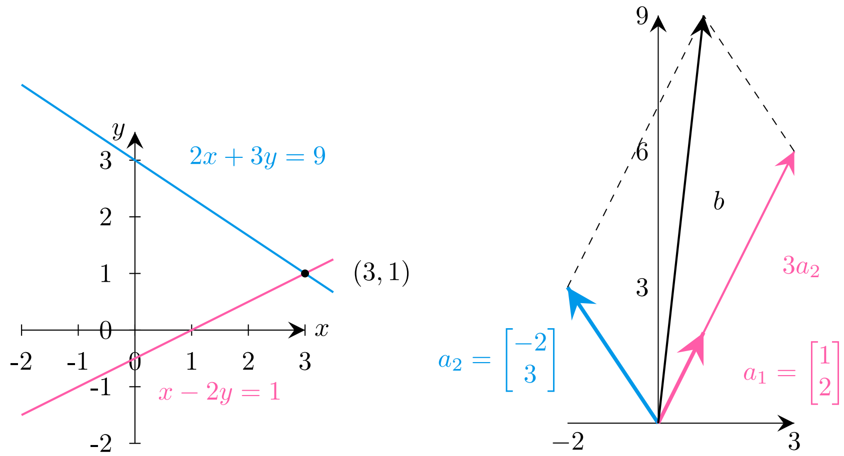
5.4. Eliminación de Gauss

Presentaremos a continuación un algoritmo para resolver sistemas lineales. Comenzamos con la siguiente ilustración acerca de la solución de un sistema lineal.

Ejemplo 5.5. Considere el siguiente sistema lineal de 2×2. Escribimos la equivalencia entre el sistema matricial, el sistema de ecuaciones lineales y su solución respectiva el vector $[3,1]^\top$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & - & 2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 9 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Graficamente, podemos interpretar la solución de dos forma como mostramos en la figura a continuación:



La figura de la izquierda representa la solución como el punto intersección de las líneas $2x+3y=9$ y $x-2y=1$, las cuales corresponden a las rectas formadas con las filas del sistema lineal. La figura de la derecha representa la solución como los escalares x_1 y x_2 tales que escriben el vector $b=[1,9]^\top$ como combinación lineal de los vectores columnas de la matriz, $a_1=[1,2]^\top$, $a_2=[-2,3]^\top$.

Resolver un sistema lineal usando eliminación de Gauss

El algoritmo de eliminación de Gauss es un método fundamental para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Consiste en aplicar una serie de transformaciones elementales a las ecuaciones del sistema con el objetivo de **triangularizar** la matriz de coeficientes, es decir, llevarla a una forma escalonada. Una vez que la matriz está en esta forma, se puede utilizar el algoritmo de **sustitución regresiva** para encontrar las soluciones del sistema de manera eficiente.

El algoritmo aplicando a resolver sistemas lineales implicitamente factoriza la matriz, es decir, la esribe como producto de dos matrices, siendo una de estas triangular inferior y la segunda triangular superior. Esto lo conocemos como **factorización** LU.

> **Definición 5.3.** Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Decimos que A tiene una factorización LU si existen matrices $L, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que, L es triangular inferior y U es triangular superior y además $A = LU$.

La elimininación estándar tiene el siguiente procedimiento

Columna 1: Escoger como pivot el elemento de esta columna que corresponde a la primera ecuación. Usar la ecuación 1 para crear ceros bajo el primer pivot. (Los pivots no pueden ser cero.)

Columna 2: Usar como pivot el elemento de esta columna y la segunda ecuación. Usar la segunda ecuación para crear ceros bajo el segundo pivot.

Columna 3 a n: Continuar con el procedimiento hasta encontrar la matriz triangular superior U.

Graficamente, el algoritmo se representa con el siguiente diagrama.

$$\underset{\text{Paso 1}}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & x & x & x \\ \boldsymbol{x} & x & x & x \\ \boldsymbol{x} & x & x & x \\ \boldsymbol{x} & x & x & x \end{bmatrix}} \Longrightarrow \underset{\text{Paso 2}}{\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & \boldsymbol{x} & x & x \\ 0 & \boldsymbol{x} & x & x \\ 0 & \boldsymbol{x} & x & x \end{bmatrix}} \Longrightarrow \underset{\text{Paso 3}}{\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & \boldsymbol{x} & x \\ 0 & 0 & \boldsymbol{x} & x \end{bmatrix}} \Longrightarrow \underset{\text{Paso 4}}{\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}}$$

En el Paso 1, usamos el pivot A_{11} para hacer ceros bajo el pivot en la columna 1. Así debemos restar a las columnas 2,3,y 4 la columna 1 multiplicado por:

$$\text{Multiplicadores:} \quad \ell_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}}, \quad \ell_{31} = \frac{A_{31}}{A_{11}}, \quad \ell_{41} = \frac{A_{41}}{A_{11}},$$

En el Paso 2, usamos el pivot de la columna 2 y fila 2 de la matriz actualizada y hacemos ceros bajo el pivot calculando los multiplicadores ℓ_{32} y ℓ_{42}. Finalmente, en el tercer paso calculamos el multiplicador ℓ_{43}.

Consideremos el siguiente ejemplo que ilustra el procedimiento descrito.

Ejemplo 5.6. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Utilinzando el procedimiento anterior calcularemos el Paso 1 y el Paso obteniendo la secuencia de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El cual convierte la matriz A en triangular superior. Observemos el procedimiento con mas detención observemos que en el primer paso tenemos que al escoger los multiplicadores $\ell_1 = [1, 2, 2]^\top$ y $u_1 = [1, 2, 3]^\top$ tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}}_{\ell_1 u_1^\top} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego, en el Paso 2, escogemos los multiplicadores $\ell_2 = [0, 1, 3]^\top$ y $u_2 = [0, 1, 1]^\top$ y tenemos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}}_{\ell_2 u_2^\top} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\ell_3 u_3^\top}$$

Por lo tanto, hemos probado que:

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}}_{\ell_1 u_1^\top} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{\ell_2 u_2^\top} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\ell_3 u_3^\top} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = LU \end{aligned}$$

Lo que completa la factorización LU de la matriz A.

5.4.1. Pivoteo parcial o intercambio de filas.

En casos donde nos encontremos con un pivot que es cero, el algoritmo descrito anteriormente falla. Para estos casos en necesario efectuar un intercambio de filas, con el fin de escoger un pivot no cero y proceder con el algoritmo. Sin embargo, el intercambio filas no solo es necesario en estos casos, sino que es fundamental realizarlo por razones de estabilidad. En general escogemos el pivot en una determinada columna con el mayor valor absoluto.

Consideremos el siguiente ejemplo que describe la estrategia de pivoteo e intercambio de filas.

Ejemplo 5.7. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ \mathbf{2} & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Observamos que la entrada 1,1 de la matriz es un cero, entonces necesitamos intercambiar esta fila con otra con entrada no cero y así poder elegir el pivot. De acuerdo al comentario anterior, no solo intercambiaremos por una distinta de cero sino que elegiremos la fila cuya componete tenga el mayor valor absoluto, en este caso la fila 3. El procedimiento nos queda graficado por la siguiente figura donde se marca en negrita los pivots y en celeste los ceros que introducimos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ \mathbf{2} & 4 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

La matriz resultante no es triangular superior, sin embargo no es dificil observar que un simple intercambio de filas la lleva a triangular superior.
De la misma forma que hicimos en el ejemplo anterior, podemos escribir el procemiento en términos de los multiplicadores y los vectores filas, de donde apararece la factorización

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\ell_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}}_{u_1^\top} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\ell_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{u_2^\top} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\ell_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{u_3^\top} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En este caso observamos que la primera matriz en la factorización no es triangular inferior. Sin embargo un simple intercamvio de filas la lleva a triangular inferior. Este intercambio es equivalente a multiplicar por una matriz de permutación, es decir, una matriz que es equivalente a la matriz identidad por intercambio de filas.
Así, al considerar la matriz de permutación

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Una propiedad de la matriz de permutación es la siguiente

Comentario 5.1. La inversa de una matriz de permutación P es su transpuesta $P^\top$.

Finalmente, mostramos como usar la factorización LU para resolver un sistema lineal:

Comentario 5.2. Sea el sistema lineal $Ax = b$ y asuma la factorización $PA = LU$. entonces

$$Ax = b \iff PAx = Pb \iff LUx = Pb \iff \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

En conclusión, para resolver el sistema lineal, debemos encontrar la factorización $PA = LU$ y resolver dos sistemas triangulares.

Presentamos el algoritmo de eliminación de Gauss para la factorización LU con pivoteo parcial a continuación.

Algoritmo 3: Eliminación Gaussiana con Pivotes Parciales y Factorización $PA = LU$

Data: Matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Result: Matrices L (triang. inferior), U (triang. superior) y P (matriz de permutación)
Inicializar L como la matriz identidad;
Inicializar U como una copia de A;
Inicializar P como la matriz identidad;
for $k \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  ; `// Encuentra el pivote parcial`
  $p \leftarrow \arg\max_{i=k}^{n} |U_{ik}|$;
  ; `// Intercambia filas si es necesario`
  if $p \neq k$ **then**
    Intercambiar fila k con fila p en U;
    Intercambiar fila k con fila p en L;
    Intercambiar fila k con fila p en P;
  for $i \leftarrow k+1$ **to** n **do**
    $m \leftarrow U_{ik}/U_{kk}$;
    $L_{ik} \leftarrow m$;
    for $j \leftarrow k$ **to** n **do**
      $U_{ij} \leftarrow U_{ij} - m \cdot U_{kj}$;
return P, L, U

Forma escalonada o de echelon

Se dice que una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene forma de echelon o forma de escalonada si

1. Todas las filas que contienen solo ceros están en la parte inferior de la matriz.
2. El primer elemento no nulo de cada fila no nula está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior.

Podemos calcular la forma de escalón de una matriz usando el proceso de eliminación Gaussiana

Ejemplo 5.8. Considere la siguiente matriz y el cálculo de si forma de escalón.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 8 \\ -1 & 1 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 5 & -6 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas 1, 2, y 4 de A forman la base del subespacio Imagen(A).

Pregunta #1: ¿En qué situación una matriz cuadrada A tiene inversa por la izquierda?

1. Cuando A es una matriz singular.
2. Cuando A tiene todas sus filas linealmente independientes.
3. Cuando A tiene todas sus columnas linealmente independientes.
4. Cuando A es una matriz diagonal.

Feedback Pregunta #1

1. **Respuesta incorrecta:** Una matriz singular no es invertible.
2. **Respuesta incorrecta:** Esto garantiza que la inversa por la derecha exista pero no por la izquierda.
3. **Respuesta correcta:** Esto garantiza la existencia de la inversa por la izquierda.
4. **Respuesta incorrecta:** Una matriz diagonal puede ser singular si algunos de sus elementos es cero.

Pregunta #2: ¿Cuál es el propósito principal del pivoteo parcial en el método de eliminación de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales?

1. Seleccionar un pivot no cero y minimizar los errores de redondeo en los cálculos numéricos.

2. Facilitar la aplicación de transformaciones elementales de fila.
3. Solo para evitar la división por cero al seleccionar el elemento pivot.
4. Reducir el número de operaciones requeridas para triangularizar la matriz.

Feedback Pregunta #2

1. **Respuesta correcta:** El pivoteo parcial ayuda a seleccionar un pivot no cero. Además, el pivoteo parcial ayuda a minimizar los errores de redondeo en los cálculos numéricos al seleccionar un pivote que tenga un valor absoluto grande, lo que reduce la sensibilidad del método a errores de redondeo.
2. **Respuesta incorrecta:** No es necesariamente cierto que se faciliten las operaciones.
3. **Respuesta incorrecta:** El pivoteo parcial ayuda a seleccionar un pivot no cero. Además, el pivoteo parcial ayuda a minimizar los errores de redondeo en los cálculos numéricos al seleccionar un pivote que tenga un valor absoluto grande, lo que reduce la sensibilidad del método a errores de redondeo.
4. **Respuesta incorrecta:** No tiene el objetivo de minimizar operaciones.

5.5. Referencias bibliográficas

Referencias

[1] Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2018). *Introduction to applied linear algebra: vectors, matrices, and least squares.* Cambridge university press.