CUADERNILLO DE REPASO DE ÁLGEBRA

J. ANDRÉS TAVIZÓN POZOS

www.querersabermas.com

2023

Contenido

Introducción 3
1. Lenguaje y expresiones algebraicas 4
   1.1. Cómo convertir un enunciado a una expresión algebraica 5
   1.2. Cómo convertir una expresión algebraica a en un enunciado 6
2. Leyes de los signos y jerarquía de operaciones 7
   2.1. Clasificación de las expresiones algebraicas 9
3. Evaluación de expresiones algebraicas con valores numéricos 10
4. Exponentes y radicales 10
   4.1. Leyes de los exponentes 11
   4.2. Leyes de los radicales 12
5. Suma y resta de monomios 13
6. Multiplicación y división 14
   6.1. Multiplicación 14
   6.2. División 15
7. Productos notables y factorización 19
   7.1. Productos notables 19
   7.2. Factorización 21
8. Ecuaciones lineales 24
   8.1. Una incógnita y primer grado 24
   8.2. Ecuación lineal cuadrática 26
   8.3. Ecuación de la línea recta 31
9. Sistemas de ecuaciones lineales 33
   9.1. Sistema de ecuaciones con dos incógnitas 33
   9.2. Sistemas de ecuaciones de tres incógnitas 35
Ejercicios de práctica 39
   Lenguaje y expresiones algebraicas 39
   Leyes de los signos y jerarquía de operaciones 39
   Evaluación de expresiones algebraicas con valores numéricos 40
   Exponentes y radicales 40
   Suma y resta de monomios 41
   Multiplicación y división 41
   Productos notables y factorización 41
   Ecuaciones lineales 42
   Sistemas de ecuaciones 42

Introducción

El álgebra, deriva de la palabra árabe "al-jabr", que significa "reunión de partes rotas", es una rama de las matemáticas que explora las reglas y símbolos utilizados para expresar relaciones entre cantidades y resolver problemas matemáticos. Desde sus antiguos orígenes hasta nuestros días, el álgebra ha evolucionado hasta convertirse en una poderosa herramienta con aplicaciones en diversos ámbitos científicos y prácticos.

Los fundamentos del álgebra se remontan a civilizaciones antiguas como la babilónica, la egipcia y la griega. Los babilonios, hacia 1800 a.C., desarrollaron técnicas para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, motivados principalmente por problemas prácticos en el comercio y la medición de terrenos. Los antiguos egipcios también tenían un conocimiento básico de las ideas algebraicas, evidente en sus métodos de resolución de ecuaciones lineales. Los antiguos griegos contribuyeron significativamente al desarrollo de los conceptos algebraicos. Matemáticos como Euclides y Pitágoras sentaron las bases del razonamiento deductivo y del uso de variables. Sin embargo, fue la obra del matemático griego Diofanto en el siglo III d.C. la que marcó un hito importante en la historia del álgebra. El libro "Arithmetica" de Diofanto introdujo la noción de álgebra simbólica, en la que las cantidades desconocidas se representaban mediante símbolos. Durante la Edad de Oro islámica (siglos VIII a XIV de nuestra era), los eruditos realizaron notables avances en diversos campos, entre ellos el álgebra. Matemáticos como **Al-Khwarizmi**, cuyo trabajo ejerció una gran influencia en este campo, introdujeron el álgebra en el mundo occidental a través de su libro "Kitab al-Jabr wa al-Muqabala" (El Libro Compendioso sobre el Cálculo por Compleción y Equilibrio). El tratado de Al-Khwarizmi sentó las bases de la notación algebraica, introdujo técnicas para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas e hizo hincapié en el carácter sistemático de las operaciones algebraicas. De hecho, la palabra "**algoritmo**" es en honor a él.

El Renacimiento fue testigo de un resurgimiento del interés por las matemáticas, y el álgebra experimentó una transformación revolucionaria. François Viète, matemático francés del siglo XVI introdujo el concepto de álgebra simbólica y el uso de letras para representar incógnitas. El trabajo de Viète allanó el camino para el desarrollo del simbolismo algebraico y la aplicación del álgebra a la resolución de problemas complejos. Los siglos XVII y XVIII fueron testigos de nuevos avances en el álgebra, sobre todo en el ámbito de las estructuras algebraicas. Matemáticos como René Descartes y Leonhard Euler exploraron las conexiones entre el álgebra y la geometría, culminando en el desarrollo de la geometría analítica. Las contribuciones de Euler a la notación algebraica, el análisis matemático y la teoría de números ampliaron aún más las fronteras del álgebra. En los siglos XIX y XX, el álgebra experimentó una profunda transformación en lo que hoy se conoce como álgebra moderna o álgebra abstracta.

Matemáticos como Évariste Galois, George Boole y Emmy Noether revolucionaron el campo introduciendo conceptos abstractos como grupos, anillos, campos y espacios vectoriales. Estas estructuras abstractas proporcionaron un poderoso marco para estudiar sistemas matemáticos y allanaron el camino para aplicaciones en criptografía, teoría de la codificación e informática.

La rica historia del álgebra refleja la evolución de la búsqueda humana por comprender las relaciones y los patrones que subyacen en el mundo de los números. Desde sus antiguos orígenes hasta los reinos abstractos del álgebra moderna, esta disciplina ha proporcionado poderosas herramientas para resolver problemas, modelizar fenómenos del mundo real y hacer avanzar el conocimiento científico. Hoy en día, el álgebra sigue siendo una parte indispensable de las matemáticas, sirviendo de puente entre la teoría y las aplicaciones en numerosos ámbitos, lo que la convierte en un pilar fundamental de la comprensión matemática.

1. Lenguaje y expresiones algebraicas

La necesidad de ampliar los conocimientos aritméticos para resolver problemas más complejos, que requerían el manejo de cantidades que, aunque desconocidas, se manifestaban en la ocurrencia de fenómenos naturales y sociales, atrajeron la curiosidad de las mentes brillantes de las generaciones pasadas. Esta ampliación o generalización del conocimiento aritmético dio lugar a una nueva rama de las matemáticas, el Álgebra. En la actualidad, el Álgebra es y seguirá siendo una herramienta científica esencial para el estudio de las relaciones cuantitativas en todas las ramas de la ciencia.

La principal característica del Álgebra es el uso de letras o literales para representar cantidades desconocidas que se relacionan y rigen con las mismas reglas de la Aritmética. Todo lo que aprendiste en la primaria y secundaria se sigue aplicando en Álgebra. Por eso se dice que el Álgebra, es la generalización de la Aritmética.

La herramienta principal del Álgebra, y en general del lenguaje matemático, es la expresión algebraica, la cual representa la relación que existe entre diferentes cantidades y/o magnitudes utilizando los signos de operación, relación y agrupación. Al igual que el lenguaje común, el lenguaje matemático está constituido por símbolos que representan ideas o conceptos.

Para comprender un lenguaje es necesario apropiarse del significado de los símbolos que maneja. Para traducir de un lenguaje a otro, entonces, se requiere de establecer los símbolos de cada lenguaje que tienen un mismo significado.

En nuestro caso, nos interesa, por un lado, poder representar una situación o problema que esté enunciado en lenguaje común o cotidiano, en lenguaje algebraico, de manera que a partir de allí podamos aplicar el poder de las matemáticas para resolverlo. Por otro lado, también es necesario el proceso inverso, la interpretación de expresiones matemáticas para comprender lo que representan en nuestro lenguaje cotidiano.

1.1. Cómo convertir un enunciado a una expresión algebraica

Una diferencia entre el lenguaje común y el algebraico es que el lenguaje común se lee en la mayoría de los casos de izquierda a derecha, mientras que el algebraico se lee desde "afuera" o desde las operaciones que afectan a la mayoría de los elementos, en forma posterior se va particularizando en cada uno de los elementos. En igualdad de condiciones de operaciones, nos referiremos primero al elemento a la izquierda y después el de la derecha.

Ejemplo 1.1. Convertir a una expresión algebraica el siguiente resultado:

"El cubo de la diferencia entre el doble de un número y el triple de otro al cuadrado"

Se deben de identificar las partes del enunciado.

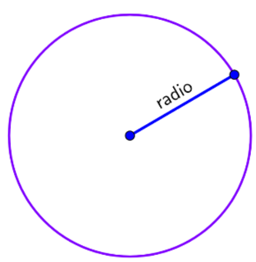
Parte del enunciado	Lo que significa	Expresión algebraica
"El cubo de la diferencia"	hay una resta que está al cubo	$(\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_)^3$
"entre el doble de un número"	Hay una multiplicación de un número x por 2	2x
"y el triple de otro al cuadrado"	Hay una multiplicación de un número y por 3. Además, el número y está al cuadrado	$3y^2$

La respuesta sería entonces $\mathbf{(2x-3y^2)^3}$

Ejemplo 1.2.

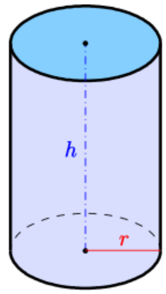
"El volumen de un cilindro es el producto de pi por el radio del círculo al cuadrado y la altura"

Este sencillo ejemplo menciona que para calcular el volumen de un cilindro se tendría que multiplicar (el producto) el número pi por el radio del círculo al cuadrado ($\boldsymbol{\pi r^2}$). Tiene lógica ya que un cilindro es circular y de esa forma sabemos que hay que determinar su área.



$$A = \pi r^2$$

Ahora bien, dado que queremos saber un volumen, es decir, un objeto tridimensional; también se debe de incluir la altura (**h**). De esa forma se considera que ese círculo se extiende en una dimensión adicional.



Así la expresión algebraica que describe el volumen de un cilindro es **$V=\pi r^2 h$**. De hecho, como las unidades de volumen son unidades de longitud como centímetros o metros al cubo, al elevar el radio al cuadrado se tendría, por ejemplo, **m^2**. **El número pi no tiene dimensiones** y no afecta en este análisis, pero su presencia dice que es un círculo. Finalmente, para adicionar la última dimensión se multiplica por la altura para tener **m^3**.

1.2. Cómo convertir una expresión algebraica a en un enunciado

Para realizar este procedimiento iniciaremos desde "afuera", es decir, desde la operación que describe o afecta a todos los elementos de la expresión (cuadrado), después continuaremos con la descripción de lo que se encuentra dentro del paréntesis (resta) y por último describiremos de izquierda a derecha los elementos que se restan.

Ejemplo 1.3. Convertir la siguiente expresión algebraica en un enunciado

$$\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2y^3}}$$

Lenguaje algebraico	Lo que significa	Lenguaje común
$\sqrt[3]{\_}$	Hay una raíz cúbica o bien un radical al cubo	La raíz cúbica
$\sqrt[3]{\frac{\blacksquare}{\blacksquare}}$	Hay una división (cociente) en el radical	Del cociente
$3x^2$	Un número que está elevado al cuadrado y al mismo tiempo multiplicado por tres	De un número elevado al cuadrado y multiplicado por tres
$2y^3$	Un número que está elevado al cubo y al mismo tiempo multiplicado por dos	Entre otro número elevado al cubo y multiplicado por dos

"La raíz cúbica del cociente de un número elevado al cuadrado multiplicado por tres entre otro número elevado al cubo multiplicado por dos".

Ejemplo 4.1.

La ecuación de la fuerza de gravitación universal de Newton es

$$F_G = \frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}^2}$$

Newton determinó que hay una fuerza que es proporcional (**G**) a la masa **m** de dos cuerpos (**m_1** y **m_2**) que se atraen entre sí. Pero dichos cuerpos están separados por una distancia (**$r_{1,2}$**). Entonces se puede describir esta ecuación de las siguientes formas:

- El producto de dos cuerpos dividido entre el cuadrado de la distancia que los separa es proporcional a la fuerza de gravedad entre ellos.
- El cociente de la gravedad por la masa de dos cuerpos entre la distancia que los separa al cuadrado es igual a la fuerza de gravedad.
- La fuerza de gravedad es igual a la constante de la gravedad por la masa de dos cuerpos entre la distancia entre ellos al cuadrado.

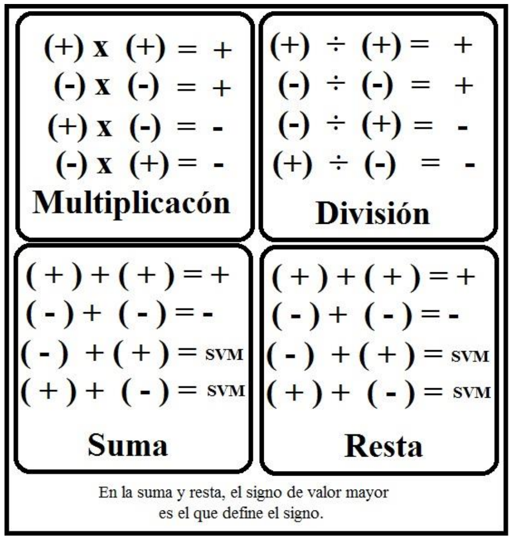
Como se puede ver, no existe una forma única de describir una ecuación. Sin embargo, hay que tener cuidado en cómo nos expresamos para no confundirnos en quién está multiplicando o dividiendo o elevando a un exponente.

En ciencias aplicadas, la mayoría de las ecuaciones se refieren a la descripción fenómenos físicos o químicos, o bien, determinaciones de cantidades que nos ayudan a entender mejor lo que ocurre. En otras palabras, las ecuaciones describen o determinan lo que hay en la realidad que medimos u observamos. Las matemáticas no son ajenas a la realidad, sino que son las herramientas que tenemos para describirla.

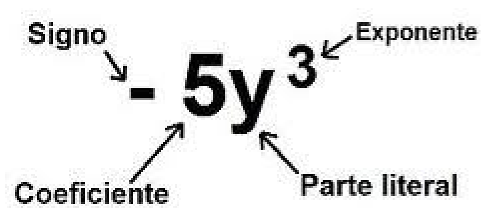
2. Leyes de los signos y jerarquía de operaciones

Los signos de matemáticas conocidos como +, -, x y ÷, son símbolos aritméticos para indicar el estado de una operación matemática. Este tipo de operaciones son conocidas como la adición, sustracción, multiplicación y división. Así mismo, también pueden englobar a los signos algebraicos en las operaciones.

Dicha ley de los signos está basada en la multiplicación. Es decir, se rige para que los números se multipliquen como corresponda. La ley se basa en lo siguiente: si los signos son iguales el resultado debe ser positivo. En cambio, si los signos son diferentes el resultado será negativo. En otras palabras, podría decirse que signos iguales se suman, signos diferentes se restan. Esto va relacionado en operaciones básicas con números enteros. Por lo que esta forma o ley se debe memorizar de una forma simple para realizar otro tipo de operaciones.



Un término algebraico es el producto y/o división de una o más variables (factor literal) y un coeficiente o factor numérico.



Las operaciones tienen jerarquía, es decir, un orden en que las operaciones deben efectuarse, de acuerdo con la organización siguiente:

Paréntesis primero	10 x **(4 + 2)**= 10 x 6 =60
Exponentes	5 + **2^2** = 5 + 4 =9
Multiplicación	10 – 4 **x 2** = 10 – 8 =2
División	10 + **6/2** =10 + 3 = 13
Suma	10 x 4 **+ 7** = 40 + 7 = 47
Resta	10 / 2 **– 3** = 5 – 3 =2

Cabe señalar que la multiplicación y la división son de jerarquía similar y que la suma y la resta son similares entre sí.

Ejemplo 2.1.

$$8\{3 + 7[5 - 5(1 + 2)] - 2 + 4(3 + 2)\} =$$

$$8\{3 + 7[5 - 5(3)] - 2 + 4(5)\} =$$

$$8\{3 + 7[5 - 15] - 2 + 20\} =$$

$$8\{3 + 7[-10] - 2 + 20\} =$$

$$8\{3 - 70 - 2 + 20\} =$$

$$8\{-49\} = -392$$

2.1. Clasificación de las expresiones algebraicas

Una forma de clasificar las expresiones algebraicas consiste en tomar en cuenta el número de términos que la integran cuando está totalmente simplificada, es decir, cuando ya no se puede realizar ninguna otra operación. Los términos en una expresión algebraica simplificada están separados por signos de suma o resta. Si solo hay un término es un **monomio**, si hay más de uno se le llama **polinomio**.

Tipo	Descripción	Ejemplos
Monomio	Es una expresión algebraica que consta de **un solo término** algebraico.	3a, -5b, $9x^4$, 7xy, z^3y^4
Binomio	Es un polinomio que consta de **dos términos** algebraicos	a+b, a^2+b2, c+$78y^3$, $7(xy)^{½}$
Trinomio	Es un polinomio que consta de **tres términos** algebraicos	a+b+c, x^2-8x+9, $3y^3$-2x-7

Los polinomios pueden tener "grados" u "órdenes", que se refiere al exponente al que está elevado la literal de un término.

- La ecuación $\mathbf{4x^4-5x^3+8x^2-9=0}$, el primer término es de cuarto, el segundo de tercero, el tercero de segundo y el último no tiene ya que solo es un número.

Además, puede haber un **grado relativo**, el cual es el mayor exponente de dicha literal en el polinomio.

- La ecuación $\mathbf{x^6+x^4y^2-x^3=0}$ es de sexto grado respecto a la *x*; de segundo grado respecto a *y*; pero el segundo término x^4y^2 es de sexto grado ya que sería la suma de ambos exponentes.

Ejemplo 2.2.

$\mathbf{w = 2zy - 6x^2z+xy^4}$

Coeficientes: 2, -6, 1

Tipo de expresión: trinomio

Literales (variables): *x, y, z*

Grado absoluto: 1 + 4 =5 (se observa en el último término)

Grado relativo a *x*:2

Grado relativo a *y*: 4

Grado relativo a *z*: 1

Grado relativo a *zy*:2

Grado relativo a *xz*:3

Grado relativo a *xy*:5

3. Evaluación de expresiones algebraicas con valores numéricos

La evaluación de expresiones algebraicas es el proceso de sustituir los valores numéricos asignados para las variables de una expresión algebraica y resolver las operaciones que resulten de estas sustituciones, a continuación, ponemos algunos ejemplos.

Debido a que las expresiones algebraicas representan el valor de una magnitud de interés en el momento de resolver un problema, es necesario determinar su valor para las condiciones dadas o requeridas.

Ejemplo 3.1. Evaluar la expresión W = a – 2b + 3ac, siendo a=4, b=-1, c=2.

Sustituyendo:

W= (4) – 2(-1) + 3(4)(2)

W=30

Ejemplo 3.2. Si tienes un resistor desconocido conectado a una batería, al medir tiene un voltaje E=12 volts (V) y la corriente es de I=3 amperes (A), siendo la expresión algebraica: R=E/I ¿cuánto vale la resistencia (ohm) del resistor (R)?

R= E/I = 12 V/3 A= 4 ohm

Ejemplo 3.3. Expresa 25 °C como una temperatura en grados Fahrenheit usando la expresión algebraica: °F=9/5 °C+32

°F= 9/5 (**25°C**) + 32 = 77 °F

Ejemplo 3.4. Determinar y valorar la densidad (ρ) de un trozo de plomo si tiene una masa (m) de 35 kg y ocupa un volumen (v) de 0.3500 m^3. Su expresión algebraica es: ρ=m/v

ρ=m/v = 35 kg/0.35 m3 = 100 kg/m^3

4. Exponentes y radicales

Determinar y escribir un número extraordinariamente grande, es en la actualidad relativamente fácil si utilizamos una expresión exponencial; 263 es la expresión que representa el número de granos de trigo en el enunciado anterior.

En álgebra, frecuentemente nos encontramos con la **multiplicación de un número por sí mismo varias veces**; por ejemplo, al calcular el área de un cuadrado cuyo lado es L se presenta la situación mencionada, ya que el área es igual al producto A= L x L = L^2. El volumen de un cubo de lado L es igual a V=L x L x L= L^3. Por esto surge la necesidad de abreviar este tipo de operaciones.

Cualquier potencia de una cantidad positiva evidentemente es positiva, porque sus factores serán positivos. Respecto a las potencias de una cantidad negativa tenemos las siguientes consideraciones: 1. Toda potencia par de una cantidad o término negativo es positiva. 2. Toda potencia impar de una cantidad o término negativo es negativa.

$$(-2a)^2 = (-2a)(-2a) = 4a^2$$

$$(-2a)^3 = (-2a)(-2a)(-2a) = -8a^3$$

4.1. Leyes de los exponentes

Las potencias se utilizan en una variedad de situaciones, desde la representación de medidas astronómicas y atómicas en operaciones basadas en la notación científica, hasta la representación de relaciones de igualdad que se dan en el estudio de diversos problemas de las ciencias.

Los exponentes también pueden ser negativos y fraccionarios, por lo que es importante entender lo que significa, de tal manera que, para su manejo, es necesario conocer las "**leyes de los exponentes**", mismas que explican la forma de realizar las operaciones con potencias

Ley	Ejemplo
$x^1 = x$	$6^1 = 6$
$x^0 = 1$	$8^0 = 1$
$x^{-1} = 1/x$	$3^{-1} = 1/3$
$x^m x^n = x^{m+n}$	$x^2 x^3 = x^{2+3} = x^5$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$\frac{x^6}{x^2} = x^{6-2} = x^4$
$\left(x^m\right)^n = x^{mn}$	$\left(x^2\right)^3 = x^{2*3} = x^6$
$(xy)^n = x^n y^n$	$(xy)^3 = x^3 y^3$
$(x/y)^n = x^n/y^n$	$(x/y)^2 = x^2/y^2$
$x^{-n} = 1/x^n$	$x^{-3} = 1/x^3$
Ley de las fracciones como exponentes	
$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$	$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$

Ejemplo 4.1. Algunos ejemplos de las leyes de los exponentes.

$$(a^4)(a^3) = a^7$$

$$3m^{-7} = \frac{1}{3m^7}$$

$$\frac{9y^6z^3}{3y^3z^2} = 3y^3z$$

$$a^4b^3 = \frac{1}{a^{-4}b^{-3}}$$

$$\left(y^{1/4}\right)^3 = y^{3/4}$$

$$\left(\frac{mn}{p}\right)^{-6} = \left(\frac{p}{mn}\right)^6$$

$$\left(x^3y^{1/2}\right)^4 = x^{12}y^2$$

$$\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[5]{x^6}} = \frac{x^{3/4}}{x^{5/6}} = x^{\frac{-1}{12}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{x}}$$

$$\left(\frac{2ab}{c}\right)^3 = \frac{8a^3b^3}{c^3}$$

4.2. Leyes de los radicales

La operación de radicación es la operación inversa a la potenciación, es decir, si se tiene el resultado de una potencia, la obtención de la raíz permite encontrar el número que se elevó al exponente igual al índice de la raíz.

Radicales

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

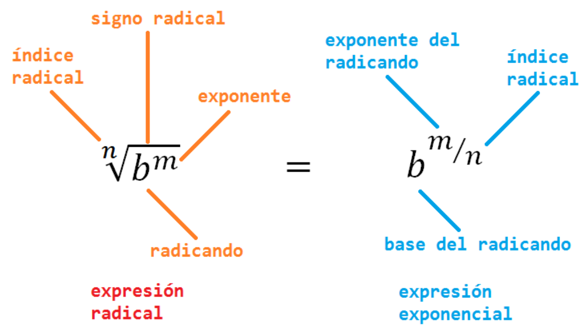
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Para comprender mejor está operación, es necesario tener en claro los términos de la radicación, estos son el radicando, el índice y la raíz:

• El radicando es el número o expresión al cual queremos hallar su raíz.

• El índice nos indica cuántas veces debemos multiplicar por sí mismo un número o término para así obtener el radicando.

• La raíz (base) es aquel número o término que si se multiplica por sí mismo las veces que indica el índice, da como resultado el radicando.



- Si la raíz indicada es exacta, se dice que es racional; si no es exacta, es irracional.
- Las raíces impares de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad del radicando.

$$\sqrt[3]{-27a^3} = -3a$$

- Las raíces pares de una cantidad positiva tienen doble signo: + y –.

$$\sqrt{25x^2} = \pm 5x$$

Ejemplo 4.2. Algunos ejemplos de las leyes de los radicales

$$\sqrt[3]{x^3} = 3$$
$$\left(\sqrt[5]{3c}\right)\left(\sqrt[5]{2d}\right) = \sqrt[5]{6cd}$$
$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{x^4y^5}{x^4z^3}}} = \sqrt[6]{\frac{y^5}{z^3}}$$
$$\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[15]{\frac{x^6}{y^5}}$$

$$\sqrt[3]{(2x+y)^5} = (2x+y)^{\frac{5}{3}}$$
$$\sqrt[4]{2x\sqrt[6]{y}} = \sqrt[24]{2x^6y}$$
$$\sqrt[5]{\frac{x^{10}}{y^5}} = \frac{\sqrt[5]{x^{10}}}{\sqrt[5]{y^5}}$$

5. Suma y resta de monomios

En una suma y resta de expresiones algebraicas solo es necesario expresar los términos que las componen y luego debemos simplificar los términos semejantes. Cuando restamos expresiones, antes de simplificar debemos de cambiar el signo de todos los términos del polinomio que se va a restar (sustraendo). **Solo intervienen los coeficientes**, **los exponentes permanecen inalterables**. **Es recomendable** asociar los términos que contengan el mismo signo.

Ejemplo 5.1. Sumas y restas

$$5b - 6b + 7b - 14b + 9b =$$

$$5b + 7b + 9b - 6b - 14b = b$$

En este caso, se agruparon primero los positivos y luego los negativos. Esto no es obligatorio, pero se hizo para hacer más explícito el proceso de suma y resta.

Ejemplo 5.2. Agrupación de términos semejantes

$$2y^3 - 5y^2 - 8y^2 + 12y^4 - 4y^2 + 5y^3 = 12y^4 + 7y^3 - 17y^2$$

Otro:

$$\frac{3}{4}h - \frac{5}{7}y - \frac{2}{3}h + \frac{3}{2}y + \frac{5}{6}h - \frac{3}{14}y - \frac{5}{12}h + 4y =$$

$$\frac{3}{4}h - \frac{2}{3}h + \frac{5}{6}h - \frac{5}{12}h - \frac{5}{7}y + \frac{3}{2}y - \frac{3}{14}y + 4y =$$

$$\frac{9h + 10h - 8h - 5h}{12} + \frac{21y + 56y - 10y - 3y}{14} =$$

$$\frac{19h - 13h}{12} + \frac{77y - 13y}{14} = \frac{h}{2} + \frac{32y}{7}$$

Ejemplo 5.3. El signo menos entre los dos paréntesis afecta a todos los términos de la derecha.

$$(5x^2y + 8x - xy - 2) - (3xy + 2x^2y - 4x + 5) =$$

$$5x^2y - 2x^2y + 8x + 4x - xy - 3xy - 2 - 5 = 3x^2y - 4xy + 12x - 7$$

Si el signo entre los paréntesis fuera un signo positivo (+) los signos dentro de la agrupación no cambian.

6. Multiplicación y división

6.1. Multiplicación

Para **multiplicar monomios**, por un lado, multiplicamos sus coeficientes y, por otro, sus partes literales. Se multiplican las literales sumando sus exponentes. Cuando las literales no son iguales las dejamos expresadas una junto a la otra.

$$4x^2 \cdot 3x^4 = (4 \cdot 3) \cdot (x^2 \cdot x^4) = 12x^{2+4} = 12x^6$$

$$4x \cdot -5y = (4 \cdot -5) \cdot (x \cdot y) = -20xy$$

Para **multiplicar un monomio por un polinomio**, multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

$$3x^2(-x^5 + 4x^3 - 5x - 1) = -3x^7 + 12x^5 - 15x^3 - 3x^2$$

$$2ab(3a - ab^2 + 4b^2c^2) = 6a^2b - 2a^2b^3 + 8ab^3c^2$$

Para multiplicar **dos polinomios**, multiplicamos cada uno de los términos de uno de los polinomios por el otro, y después se realiza la reducción de términos semejantes de los polinomios obtenidos de la multiplicación.

$$(2x - 3y + 4z^2)(5x + 2xy + 4xz^2) =$$

$$10x^2 + 4x^2y + 8x^2z^2 - 15yx - 6xy^2 - 12yxz^2 + 20z^2x + 8z^2xy + 16xz^4$$

Ejemplo 6.1. Multiplicación

$(2x^3)(5x^3) = 10x^3$

$(12x^3)(4x) = 48x^4$

$5(2x^2y^3z) = 10x^2y^3z$

$(6x^4 - 5x^5 - 7)(-4x^3) = -24x^7 + 20x^8 + 28x^3$

$(3x^2 - 5x)(2x^3 + 4x^2 - x + 2) = 6x^2 + 2x^4 - 23x^3 + 30x^2 - 10x$

6.2. División

División de dos monomios: se dividen los coeficientes (si la división no es exacta, se puede dejar indicada) y se aplica la ley de los signos; posteriormente, si los coeficientes literales son iguales, se restan sus exponentes (si el exponente es negativo, significa que se debe colocar en el denominador con signo positivo), si las variables literales son diferentes, entonces se queda indicada la división.

Ejemplo 6.2.

$$\frac{4a^6b^4}{-2a^2b} = \left(\frac{4}{-2}\right)\left(\frac{a^6}{a^2}\right)\left(\frac{b^4}{b}\right) = -2a^4b^3$$

$$\frac{10a^5b^6}{-5ax^4} = \frac{-2a^4b^6}{x^4}$$

$$\frac{-9x^2y^3}{-3x^2y} = 3x^0y^2 = 3y^2$$

División de un polinomio entre un monomio: se procede de igual forma que en el caso anterior, dividiendo cada término del polinomio por el mismo monomio dado.

$$\frac{6-12a}{6} = 1-2a$$

$$\frac{4x^3y^4 + 2x^3y^2 - 4x^2y^2 + 6x^2y^3}{-2xy^2} = -2x^2y^2 - x^2 + 2x - 3xy$$

División de un polinomio entre un polinomio. Conviene hacer una similitud con el procedimiento utilizado para la división aritmética, posteriormente recuperaremos los pasos a realizar, mismos que serán fáciles de recordar al paso del tiempo.

Los pasos para seguir en una división algebraica de polinomios son los siguientes:

1) Se ordenan los dos polinomios en forma decreciente según las potencias de x, teniendo cuidado de dejar los huecos correspondientes a los términos que falten en el dividendo.

2) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

3) El término hallado del cociente se multiplica por el divisor y el producto se resta del dividendo, obteniendo un resto parcial.

4) Si el resto parcial es cero, o su grado es menor que el grado del divisor, hemos concluido la división. En caso contrario, se repite el proceso hasta llegar a un resto cuyo grado sea menor que el divisor.

Realice la división de la siguiente expresión algebraica $\frac{x^2+4x+3}{x+1}$

La x^2 se divide entre la x, el resultado es de x y se coloca en la parte superior.

$$\begin{array}{r|rrr} & & x & \\ \cline{2-4} x+1 & x^2 & +4x & +3 \end{array}$$

La x se multiplica por $(x+1)$ y el resultado se coloca en la parte inferior.

$$\begin{array}{r|rrr} & & x & \\ \cline{2-4} x+1 & x^2 & +4x & +3 \\ & x^2 & +x & \\ \cline{2-4} \end{array}$$

Se restan los dos términos y se baja el tercer término.

$$\begin{array}{r|rrr} & & x & \\ \cline{2-4} x+1 & x^2 & +4x & +3 \\ & x^2 & +x & \\ \cline{2-3} & 0 & +3x & +3 \end{array}$$

Se repiten las operaciones de división, multiplicación y resta.

$$\begin{array}{r|rrr} & & x & +3 \\ \cline{2-4} x+1 & x^2 & +4x & +3 \\ & x^2 & +x & \\ \cline{2-3} & 0 & +3x & +3 \\ & & -3x & -3 \\ \cline{2-4} & & & 0 \end{array}$$

También se puede usar esta notación:

$$\left(\mathbf{3x^2-10x^3+4x^5-x+6}\right)\div\left(\mathbf{x^2+1-2x}\right)$$

Se ordenan los dos polinomios tomando en cuenta los exponentes de la variable (x) en orden decreciente y completando con coeficiente cero (0) la potencia faltante.	$\begin{array}{l\|l} 4x^5+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & \underline{x^2-2x+1} \end{array}$
Se divide el primer término del polinomio dividendo entre el primer término del divisor.	$\begin{array}{l\|l} 4x^5+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & \underline{x^2-2x+1} \end{array}$
Para efectuar esto, se divide el coeficiente del dividendo entre el del divisor y con la variable se aplica la regla de potencia de un cociente de igual base. $\frac{4x^5}{x^2}=\frac{4}{1}\frac{x^5}{x^2}=4x^{(5-2)}=4x^3$	$\begin{array}{l\|l} 4x^5+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & \underline{x^2-2x+1} \\ & 4x^3 \end{array}$ Este es el primer término del cociente
Se multiplica el primer término del cociente por todos los términos del divisor, a estos productos se les cambia el signo y se ordenan debajo del dividendo según el exponente de la variable.	$\begin{array}{l\|l} 4x^5+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & \underline{x^2-2x+1} \\ -4x^5+8x^4-4x^3 & 4x^3 \end{array}$

Estos productos se restan del dividendo.	$\begin{array}{l\|l} \cancel{4x^5}+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & \underline{x^2-2x+1} \\ \underline{-\cancel{4x^5}+8x^4-4x^3} & 4x^3 \\ 8x^4-14x^3+3x^2-x+6 & \end{array}$
Se repite todo el procedimiento considerando que ahora el primer término del nuevo dividendo es $8x^4$ $\frac{8x^4}{x^2}=\frac{8}{1}\frac{x^4}{x^2}=8x^{(4-2)}=8x^2$	$\begin{array}{l\|l} \cancel{4x^5}+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & \underline{x^2-2x+1} \\ \underline{-\cancel{4x^5}+8x^4-4x^3} & 4x^3+8x^2 \\ \cancel{8x^4}-14x^3+3x^2-x+6 & \\ \underline{-\cancel{8x^4}+16x^3-8x^2} & \\ 2x^3-5x^2-x+6 & \end{array}$
Continuamos ahora dividiendo los demás términos hasta que la potencia mayor del resultado de la resta sea menor al del divisor.	
$\begin{array}{l\|l} \cancel{4x^5}+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & \underline{x^2-2x+1} \\ -\cancel{4x^5}+8x^4-4x^3 & 4x^3+8x^2+2x-1 \\ \cancel{8x^4}-14x^3+3x^2-x+6 & \\ \underline{-\cancel{8x^4}+16x^3-8x^2} & \\ 2\cancel{x^3}-5x^2-x+6 & \\ \underline{-\cancel{2x^3}+4x^2-2x} & \\ -\cancel{x^2}-3x+6 & \\ \underline{\cancel{x^2}-2x+1} & \\ -5x+7 & \end{array}$	
El cociente de la división es : $\mathbf{4x^3+8x^2+2x-1}$ Y el residuo: $\mathbf{-5x+7}$ (como el grado de este residuo es inferior al del divisor, no se puede continuar dividiendo por lo que la división es inexacta).	

Ejemplo 6.3.

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20}{x^2 + 3x - 2} = x^2 - 5x + 6 \mid residuo\ 2x - 8$$

$$\frac{x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x}{x^2 - x + 3} = x^4 + x^3 + 3x^2 - 6 \mid residuo - 8x + 18$$

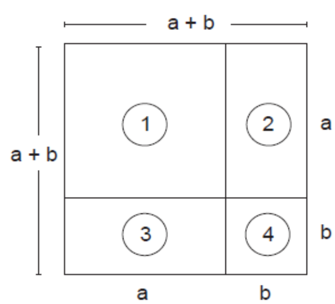
7. Productos notables y factorización

7.1. Productos notables

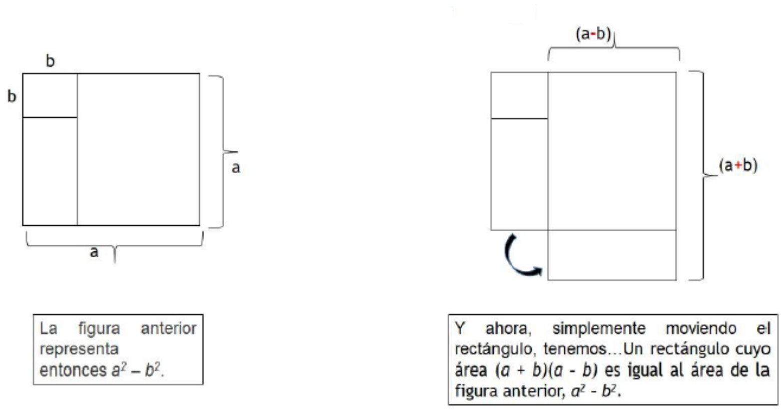
En matemáticas existen algunas multiplicaciones "especiales", esto es, al efectuar el producto de algunas expresiones algebraicas con ciertas características se obtienen resultados que se distinguen por tener rasgos notables. Esto nos permite, a partir de dichas características, el generalizar y poder realizar las operaciones, en este caso, la multiplicación en forma rápida al aplicar la regla correspondiente. Tales productos reciben el nombre de Productos Notables. Los productos notables más importantes son los siguientes:

Suma por su diferencia	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Cuadrado de binomio	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Producto de binomios con término común	$(ax+b)(ax+c) = (ax)^2 + (b+c)ax + bc$
Cuadrado de trinomio	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
Cubo de binomio	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

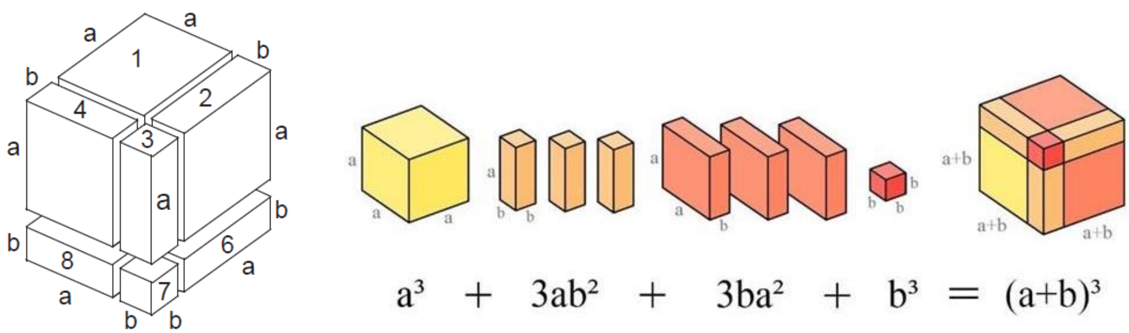
Para el binomio $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ su representación gráfica es:



Para la suma por su diferencia $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ su representación es:



Para el cubo de un binomio $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$:



Ejemplo 7.1. Binomios al cuadrado

$$(2a+5b)^2 = 4a^2 + 20ab + 25b^2$$

$$\left(\frac{5}{6}a + \frac{3}{7}b\right)^2 = \frac{25}{36}a^2 + \frac{5}{7}ab + \frac{9}{49}b^2$$

$$(x+8)(x-8) = x^2 - 64$$

$$(p-6)(-6+p) = p^2 + 36$$

$$(x+9)(x+3) = x^2 + 12x + 27$$

$$(x-9)(x+3) = x^2 - 6x - 27$$

Ejemplo 7.2. Binomios al cubo

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$(6x-1)^3 = 216x^3 - 108x^2 + 18x - 1$$

$$(x+4)^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$$

$$(pq^2+7)^3 = p^3q^6 + 21p^2q^4 + 147pq^2 + 343$$

7.2. Factorización

La factorización consiste en expresar sumas y restas en productos, es decir, lo inverso a los productos notables o bien separar en polinomios más sencillos las ecuaciones algebraicas. Las factorizaciones que más se utilizan son las siguientes:

Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
Factorización de trinomio cuadrático	$x^2 + bx + c = (x+p)(x+q),$ $con\ p + q = b\ y\ pq = c$ "Dos números que sumados den b y multiplicados sean c"
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplo 7.3. Factorización de cuadrados perfectos

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$(ab)^2 - (xy)^2 = (ab+xy)(ab-xy)$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$$

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$$

$$9x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{16} = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2$$

Ejemplo 7.4. Suma y diferencia de cubos

$$\boldsymbol{x^3 + 8}$$

No hay ningún factor común para factorizar, por lo que no se puede simplificar. Tenemos que reescribir al problema original como una suma de dos cubos perfectos:

$$(x)^3 + (2)^3$$

Si es que ignoramos los paréntesis y los cubos tenemos:

$$x + 2$$

Al elevar al cuadrado el primer término, *x*, se tiene x^2. Al multiplicar los términos *x* y *2*, obtenemos *2x*. Al elevar al cuadrado al segundo término, *2*, tenemos *4*.

$$x^2, 2x, 4$$

Esta es una **suma de binomios al cubo**, por lo que los signos son "positivo, negativo, positivo". El resultado es:

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Tenemos

$$\boldsymbol{8 - 27x^3y^3}$$

No tenemos ningún factor común en los términos. Se escribe la expresión como una diferencia de dos cubos.

$$(2)^3 - (3xy)^3$$

Ignorando los paréntesis vemos a la expresión

$$2 - 3xy$$

El primer término, *2*, al cuadrado es *4*. El producto de los términos *2* y *3xy* es *6xy*. El segundo término al cuadrado es $9x^2y^2$.

$$4, 6xy, 9x^2y^2$$

Para una diferencia de cubos, los signos son "negativo, positivo, positivo". La respuesta es

$$8 - 27x^3y^3 = (2 - 3xy)(4 + 6xy + 9x^2y^2)$$

Tenemos

$$\mathbf{27x^3 - 216y^3}$$

Se escribe

$$(3x)^3 - (6y)^3$$

Ignorando paréntesis

$$3x - 6y$$

Los términos son

$$9x^2, 18y, 36y^2$$

Resultado

$$27x^3 - 216y^3 = (3x - 6y)(9x^2 + 18y + 36y^2)$$

Tenemos

$$\mathbf{125x^3 - 27}$$

$$5x - 3$$

$$25x^2, 15x, 9$$

Resultado

$$125x^3 - 27 = (5x - 3)(25x^2 + 15x + 9)$$

Tenemos:

$$\mathbf{2x^3 - 128y^3}$$

Aquí ninguno de los dos números tiene raíz cúbica, pero el *2* es común factor común

$$2(x^3 - 64y^3)$$

Tanto x^3 y *64* tienen raíz cúbica, *x* y *4*.

Ahora bien, quedaría

$$2(x - 4y)$$

Para el segundo paréntesis, el término *x* se eleva al cuadrado, se multiplica *4y* por *x*, y finalmente *4y* se eleva al cuadrado.

$$x^2, 4xy, 16y^2$$

El resultado es

$$2x^3 - 128y^3 = 2(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$$

8. Ecuaciones lineales

8.1. Una incógnita y primer grado

Una ecuación lineal con **una incógnita** es una igualdad en la que figura una letra con exponente uno y que es cierta para un solo valor de la letra, a este valor se le llama solución de la ecuación.

$$\boldsymbol{ax + b = c}$$

Al resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se obtiene el valor de la incógnita que satisface la igualdad. **Esta ecuación describe una línea recta.**

Recordar: Las funciones matemáticas como suma, resta, multiplicación y división pasan del otro lado de la igualdad como su contrario **Suma**, pasa como resta **Resta**, pasa como suma **Multiplicación**, pasa como división **División**, pasa como multiplicación **Potencia**, pasa como raíz **Raíz**, pasa como potencia

Tenemos

$$3x + 2 = 8$$

Se deben de acomodar los números de un lado y los factores con literales del otro. El *2*, tiene un signo positivo del lado izquierdo, pasa del otro lado como negativo, es decir, una resta.

$$3x = 8 - 2 = 6$$

Luego, la literal se despeja, es decir, se deja sola. En ese sentido, el *3* está multiplicando a *x*, debe de pasar del otro lado como una división.

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

Ejemplo 8.1. Despejes

$$7x + 5 = 2x - 15$$

Literales con literales, números con números

$$7x - 2x = -15 - 5$$

Nótese como el *2x* y el *5* estaban positivos y pasaron a negativo, (suma a resta). Ahora se separa la *x* ya que es el factor común. Se puede resolver la operación *-15-5*.

$$x(7 - 2) = -20$$

$$x(5) = -20$$

El *5* pasa dividiendo

$$x = -\frac{20}{5} = -4$$

Ejemplo 8.2. Despejes

$$-2(5y + 1) = -4(y + 6) - 2$$

Primero se deben de eliminar los paréntesis haciendo la multiplicación del *2* por *5y+1* y el *4* por *y+6*.

$$-10y - 2 = -4y - 24 - 2$$

Se separan literales con literales, números con números

$$-10y + 4y = -24 - 2 + 2$$

Se despeja *y*

$$-6y = -24$$

$$y = \frac{-24}{-6} = 4$$

Nótese como el signo del *-6* se conserva cuando pasa como una división. Si no pasa como **división o multiplicación**, el signo cambia de suma a resta y viceversa.

Ejemplo 8.3. Al sumar la edad de Fabián con la edad de Belem, se obtiene 51. Si Fabián es 3 años más grande que Belem, ¿Cuál es la edad de Belem?

La edad de Belem es la incógnita *x* (azul), la cual al sumarse 3 años daría la edad de Fabián (*x+3*, rojo). Y la suma de ambas edades es 51. La ecuación es:

$$Edad\ de\ Belem\ (x) + Edad\ de\ Fabián\ (x + 3) = 51$$

$$x + x + 3 = 51$$

$$2x + 3 = 51$$

La edad de Belem sería:

$$x = \frac{51 - 3}{2} = 24$$

Y la edad de Fabián sería

$$(x + 3) = 24 + 3 = 27$$

Así

$$24 + 27 = 51$$

Ejemplo 8.4. Miguel y Ricardo compraron calculadoras de \$120 y \$90 respectivamente. Si Miguel compró 4 calculadoras más que Ricardo, y en total se gastaron \$1320. ¿Cuántas calculadoras compró Ricardo?

La incógnita es el número de calculadoras: x

Ricardo: Compro x calculadoras de precio \$90, es decir, 90x

Miguel: Compro (x+4) calculadoras de precio \$120, es decir, 120(x+4)

La ecuación sería

$$120(x+4)+90x=1320$$

$$120x+480+90x=1320$$

$$210x+480=1320$$

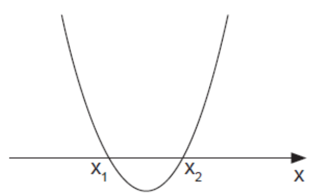
$$x=\frac{1320-480}{210}=4$$

8.2. Ecuación lineal cuadrática

Se llama ecuación cuadrática o de segundo grado a toda ecuación que tiene la forma:

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$$

donde a, b y c son números reales y a ≠ 0. Esta ecuación describe una parábola, por lo tanto, la incógnita siempre tiene dos respuestas (raíces, x_1 y x_2). Esas dos raíces es donde cruza con el eje. Esto se verá con mayor detalle más adelante.



Para resolver una ecuación de este tipo, existen diversos métodos, entre los más importantes,

tenemos:

- Factorización
- Complementación de cuadrados
- Uso de fórmula general
- Método gráfico

Ejemplo 8.5. Factorización

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

Si factorizamos este trinomio como vimos en la sección 7.2, buscamos dos números que sumen -10 y que multipliquen 24, serían -4 y -6. Entonces

$$(x-4)(x-6) = x^2 - 10x + 24$$

$$(x-4)(x-6) = 0$$

Como el producto es cero, los valores de *x* serán *x=4* y *x=6*.

$$x - 4 = 0$$

$$x_1 = 4$$

$$x - 6 = 0$$

$$x_2 = 6$$

Ejemplo 8.6. Complementación de cuadrados

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

Tomamos la mitad del factor central *-8/2=-4*. Luego, se eleva al cuadrado $(-4)^2=16$. Ahora, en donde está el -20 debemos de tener un +16. Para hacer esto, sumamos 36 en ambos lados de la ecuación

$$x^2 - 8x - 20 + 36 = 36$$

$$x^2 - 8x + 16 = 36$$

Ahora, se nos formó un binomio al cuadrado como se vio en 7.1.

$$(x-4)^2 = 36$$

Despejando

$$x - 4 = \pm\sqrt[2]{36}$$

$$x_1 = 6 + 4 = \mathbf{10}$$

$$x_2 = -6 + 4 = \mathbf{-2}$$

Ejemplo 8.7. Fórmula general

Se aplica la formula general, coloquialmente llamada "la chicharronera".

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Para resolver

$$2x^2 + 5x - 12 = 0$$

Siendo a=2, b=5, c=-12.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-12)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{4}$$

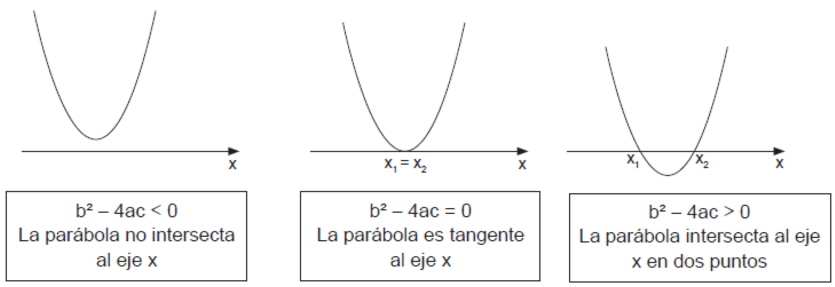
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 11}{4} = 1.5 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 11}{4} = -4$$

La cantidad b^2-$4ac$ que se encuentra en el radical de la fórmula general se le llama **discriminante** y dependiendo su naturaleza puede tener diferentes tipos de soluciones.

Signo de la discriminante	**Tipo de soluciones**
Negativo	No reales
Positivo	Dos raíces reales y distintas
Cero	Reales e iguales



Además, si a > 0 las ramas de la parábola se abren hacia arriba, si a < 0 las ramas se abren hacia abajo.

Ejemplo 8.8.

$$\mathbf{10x^2 + 2x - 3 = 0}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(10)(-3)}}{2(10)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 120}}{20}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{124}}{20}$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{124}}{20} = 0.456$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{124}}{20} = -0.656$$

Tenemos:

$$\boldsymbol{x^2 - 3x + 2 = 0}$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

Ejemplo 8.9. Método gráfico

Una ecuación cuadrática tiene por representación gráfica una curva llamada parábola. Si la parábola corta el eje de las "x" en uno o dos puntos, la abscisa de esos puntos es la raíz o solución de la ecuación.

Recuerda que un punto en un plano cartesiano está compuesto por una pareja de coordenada (x,y) es decir (abscisa, ordenada).

Para realizar la gráfica de una ecuación, es necesario hacer una sustitución de valores "x", de tal manera que, cada resultado obtenido es el valor de la ordenada "y", y en conjunto forman la pareja ordenada, que representa un punto en el plano cartesiano. Sí tenemos una ecuación x^2–2x–3=0 y deseamos encontrar las raíces de la ecuación por el método gráfico, vamos a requerir transformar la ecuación en una función "y", de tal forma que tengamos ahora:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

Su suponemos valores de *x* de -2 a 4 y los sustituimos uno por uno en la ecuación, obtendremos los siguientes valores de *y*.

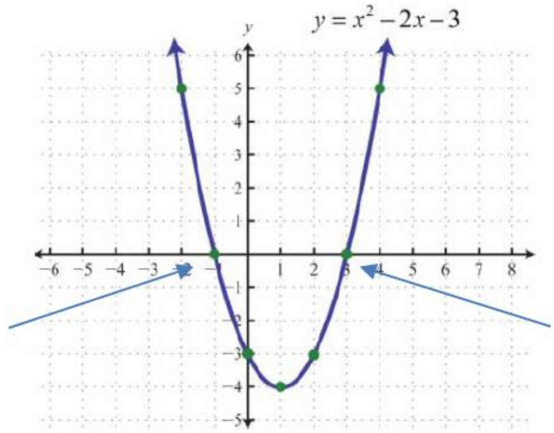
x	*y*
-2	5
-1	**0**
0	-3
1	-4
2	-3
3	**0**
4	5

$$y = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5$$

$$y = (0)^2 - 2(0) - 3 = -3$$

$$y = (3)^2 - 2(3) - 3 = 0$$

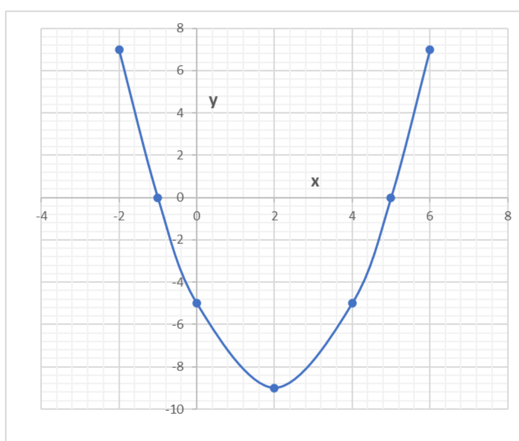
Los valores donde *y=0* son las raíces buscadas ya que es ahí donde cruza con el eje *x*.



Otro ejemplo, para la ecuación siguiente, se tendrían los valores determinados:

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

x	y
-2	7
-1	0
0	-5
2	-9
4	-5
5	0
6	7



En este caso las raíces serían $x_1=-1$ y $x_2=5$.

8.3. Ecuación de la línea recta

Como se mencionó en la parte 8.1. la forma $ax+b=c$ sigue una línea recta. Ahora bien, si a c le llamamos variable dependiente, porque su valor dependerá de los valores de x (variable independiente) podemos escribir la ecuación de la siguiente manera:

$$y = ax + b$$

Donde ***y*** es la variable dependiente, ***a*** la pendiente, ***x*** la variable independiente y ***b*** la ordenada al origen. A veces, la pendiente a puede ser representada con la letra ***m***.

Si el origen de la línea recta es en el cero, entonces, $b=0$; y cuando $x=0$ se determina b ya que $y=b$.

La pendiente a, se calcula con la siguiente ecuación. Si $\boldsymbol{a>0}$ la línea va hacia arriba, si $\boldsymbol{a<0}$ va hacia abajo.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Donde x_1, x_2, y_1 y y_2 son los puntos de los cuales queremos determinar la pendiente. A la línea recta la podemos encontrar de otras tres formas, siendo todas lo mismo, pero con nombre distinto.

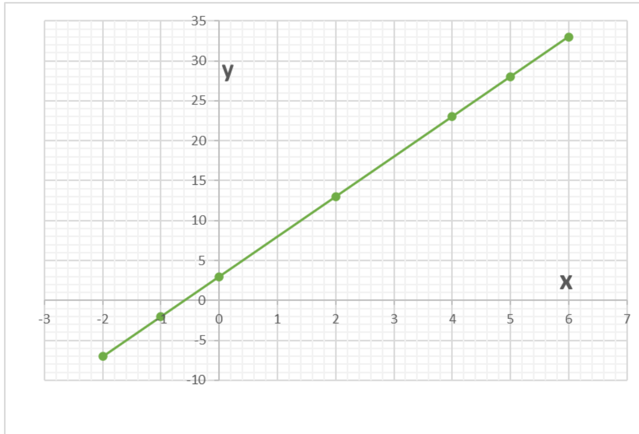
$y - y_1 = a(x - x_1)$	Punto pendiente. Sirve para hacer interpolaciones y extrapolaciones de la línea
$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$	Dos puntos. Al no saber la pendiente, puede sustituirse la ecuación que la determina en la de punto pendiente.
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	Forma simétrica.

Ejemplo 8.10. Línea recta

$$y = 5x + 3$$

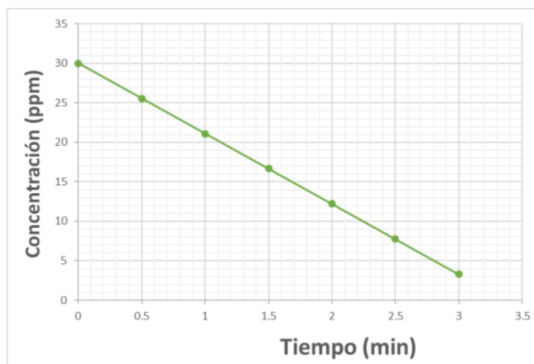
Podemos cambiar los valores de x de -2 a 6 y obtener ciertos valores de y. Los graficamos y y observamos la línea. La pendiente será 5.

x	y
-2	-7
-1	-2
0	3
2	13
4	23
5	28
6	33



Ejemplo 8.11. La concentración de un reactivo disminuye respecto al tiempo como muestra la gráfica y los datos tabulados.

Tiempo (min)	Concentración (ppm)
0	30
0.5	25.55
1	21.1
1.5	16.65
2	12.2
2.5	7.75
3	3.3



La ordenada al origen se determina cuando *x*, en este caso el tiempo es 0, por lo tanto, *b=30*. Ahora bien, para determinar la pendiente se escogen dos puntos **cuales sean**. Dado que la línea recta será una constante, siempre la pendiente tendrá el mismo valor. En este caso $x_1=1.5$, $x_2=2$, $y_1=16.65$, $y_2=12.2$.

$$a = \frac{12.2 - 16.65}{2 - 1.5} = -8.9$$

El signo menos en la pendiente indica que va hacia abajo. La ecuación que describe esta línea es:

$$y = -8.9x + 30$$

9. Sistemas de ecuaciones lineales

Una regla general para la solución de problemas algebraicos es que **siempre se requerirán el mismo número de ecuaciones independientes que de incógnitas o cantidades desconocidas**; así, si un problema tiene 2 cantidades desconocidas y solo se puede formular una ecuación, será imposible hallar un valor numérico específico para cualquiera de las incógnitas. Si se tiene un sistema de ecuaciones en el cual se puede llegar, a partir de una de las ecuaciones, a obtener las otras multiplicando por un factor, entonces las ecuaciones no son independientes. Si la diferencia entre dos ecuaciones es solo un término constante, el sistema puede ser inconsistente debido a que no será posible llegar a una solución.

Las siguientes ecuaciones $x+2y-3=0$ y $3x+6y-9=0$ no son independientes porque la segunda se obtiene de la primera multiplicando por tres. Eso significa que en realidad se trata de **la misma ecuación**. Si las graficamos, representarían la misma recta.

Las ecuaciones $x+2y=3$ y $x+2y=10$ **son inconsistentes** porque no sería posible que un número cualquiera sumado con el doble de otro número den dos resultados distintos. Si graficáramos ambas rectas obtendríamos dos rectas paralelas, es decir, que no se cruzan. Dado que la solución de un sistema de ecuaciones por el método gráfico se obtiene localizando el punto de cruce de las rectas, los sistemas inconsistentes no tienen solución.

Existen diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Aquí se verán solo tres, el de **reducción, igualación y sustitución.**

9.1. Sistema de ecuaciones con dos incógnitas

Supongamos que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + y = 45$$

$$6{,}000x + 4{,}000y = 240{,}000$$

Son dos ecuaciones, con dos incógnitas y se resolverá por los diferentes métodos.

Ejemplo 9.1. Método de reducción

En este método, se elimina una de las incógnitas sumando algebraicamente ambas ecuaciones, después de lograr que los coeficientes, en ambas ecuaciones, de una de las incógnitas sean inversos aditivos, es decir, tengan el mismo valor, pero signo contrario. Para lograr lo anterior, basta multiplicar una de las ecuaciones por un número que logre igualar el coeficiente de la literal seleccionada en ambas ecuaciones pero que su signo sea contrario.

En el caso de nuestro sistema de ecuaciones la primera la vamos a multiplicar por -6000. A la de abajo no le hacemos nada. Entonces queda:

Paso 1. Se multiplica por -6,000 la primera ecuación

$$(-6{,}000)(x + y = 45)$$

$$6{,}000x + 4{,}000y = 240{,}000$$

Paso 2. Se restan ambas ecuaciones

$$-6000x - 6000y = -270{,}000$$

$$6000x + 4000y = 240{,}000$$

Paso 3. Se genera una tercera ecuación

$$-2{,}000y = -30{,}000$$

Paso 4. Podemos despejar *y*

$$y = -\frac{30{,}000}{-2{,}000} = 15$$

Paso 5. Sustituir y=15 en cualquiera de las ecuaciones originales, por lo general la más sencilla. Y despejar x para conocer su valor.

$$x + 15 = 45$$

$$x = 45 - 15 = 30$$

Nota: En este caso con fines didácticos lo sustituiremos en la segunda ecuación para demostrar que da el mismo resultado.

$$6{,}000x + 4{,}000(15) = 240{,}000$$

$$6{,}000x + 60{,}000 = 240{,}000$$

$$x = \frac{240{,}000 - 60{,}000}{6{,}000} = 30$$

Método 9.2. Método de sustitución

En este método, la eliminación de una incógnita se logra despejándola de una de las ecuaciones y sustituyendo su valor en la otra.

$$x + y = 45$$

$$6{,}000x + 4{,}000y = 240{,}000$$

Paso 1. De la primera ecuación despejaremos *x*

$$x = 45 - y$$

Paso 2. La sustituimos en la segunda ecuación para que toda la ecuación esté en términos de *y*

$$6{,}000(45 - y) + 4{,}000y = 240{,}000$$

Paso 3. Resolvemos la operación

$$270{,}000 - 6{,}000y + 4{,}000y = 240{,}000$$

Paso 4. Despejamos *y*

$$y = \frac{240{,}000 - 270{,}000}{4{,}000 - 6{,}000} = 15$$

Paso 5. Sustituimos *y* en la otra ecuación, despejamos x y resolvemos.

$$x + 15 = 45$$

$$x = 45 - 15 = 30$$

Ejemplo 9.3. Método de igualación

En este método, se despeja la misma literal o incógnita de ambas ecuaciones y se igualan los valores obtenidos, para finalmente despejar la literal que permanece.

$$x + y = 45$$

$$6{,}000x + 4{,}000y = 240{,}000$$

Paso 1. De ambas se despeja cualquier literal, en este caso escogimos *x*.

$$x = 45 - y$$

$$x = \frac{240{,}000 - 4{,}000y}{6{,}000}$$

Paso 2. Se igualas ambas ecuaciones entre sí. Ahora solo hay una incógnita *y*

$$45 - y = \frac{240{,}000 - 4{,}000y}{6{,}000}$$

Paso 3. Se despeja *y*

$$6{,}000(45 - y) = 240{,}000 - 4{,}000y$$

$$270{,}000 - 6{,}000y = 240{,}000 - 4{,}000y$$

$$y(-6{,}000 + 4{,}000) = 240{,}000 - 270{,}000$$

$$y = \frac{240{,}000 - 270{,}000}{4{,}000 - 6{,}000} = 15$$

Paso 4. Sustituir *y=15* en cualquiera de las dos ecuaciones para determinar *x*

$$x + 15 = 45$$

$$x = 45 - 15 = 30$$

9.2. Sistemas de ecuaciones de tres incógnitas

Los sistemas de ecuaciones de 3 o 4 incógnitas pueden resolverse por cualquiera de los métodos ya explicados. Solo hay que tener cuidado con hacer correctamente las sustituciones.

Ejemplo 9.4. Método de reducción

Primero debemos eliminar una de las literales de manera que al final obtengamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Para ello formaremos parejas con las ecuaciones originales y eliminaremos una de las literales.

$$3t + 2q + 2w = 105 \qquad Ec.1$$

$$4t + q + w = 90 \qquad Ec.2$$

$$2t + 2q + w = 80 \qquad Ec.3$$

Paso 1. Formamos una pareja de dos ecuaciones (1 y 2) y multiplicamos a la segunda por -2 para eliminar el término de *q* y *w*.

$$3t + 2q + 2w = 105 \quad Ec.1$$

$$-2(4t + q + w = 90)$$

$$-8t - q - 2w = -180 \quad Ec.4$$

Paso 2. Restamos la primera con la tercera y se eliminarían *q* y *w*.

$$-5t = -75 \quad Ec.5$$

Paso 3. Formamos otra pareja entre las ecuaciones 2 y 3.

$$4t + q + w = 90 \quad Ec.2$$

$$2t + 2q + w = 80 \quad Ec.3$$

Paso 4. Para eliminar w, solo tenemos que multiplicar por -1 la ecuación 3.

$$4t + q + w = 90 \quad Ec.2$$

$$-1(2t + 2q + w = 80)$$

$$-2t - 2q - w = -80 \quad Ec.6$$

Paso 5. Restamos la ecuación 2 con la 6.

$$2t - q = 10 \quad Ec.7$$

Paso 6. En este caso, la ecuación 5 da directamente el valor de *t*. Una vez encontrado se puede sustituir en la ecuación 7 y encontrar el valor de *q*.

$$t = -\frac{75}{-5} = 15$$

$$2(15) - q = 10$$

$$q = -(10 - 30) = 20$$

Paso 7. Sustituir *t=15* y *q=20* en cualquiera de las ecuaciones 1, 2 o 3. Se despeja *w* y se obtiene su valor.

$$4(15) + 20 + w = 90$$

$$60 + 20 + w = 90$$

$$w = 90 - 80 = 10$$

Ejemplo 9.5. Método de igualación

$$3t + 2q + 2w = 105 \qquad Ec. 1$$

$$4t + q + w = 90 \qquad Ec. 2$$

$$2t + 2q + w = 80 \qquad Ec. 3$$

Paso 1. Despejaremos *t* de las tres ecuaciones. Usualmente se elige la más sencilla, sin embargo, intencionalmente se ha seleccionado *t* para ejemplificar dificultades.

$$t = \frac{105 - 2w - 2q}{3} \qquad Ec. 4$$

$$t = \frac{90 - w - q}{4} \qquad Ec. 5$$

$$t = \frac{80 - w - 2q}{2} \qquad Ec. 6$$

Paso 2. Se iguala la ecuación 4 con la 5 o con la 6, el objetivo es generar un sistema de ecuaciones con solo dos incógnitas.

$$\frac{105 - 2w - 2q}{3} = \frac{90 - q - w}{4}$$

$$4(105 - 2w - 2q) = 3(90 - q - w)$$

$$420 - 8w - 8q = 270 - 3q - 3w$$

$$-5q - 5w = -150 \qquad Ec. 7$$

Paso 3. Se iguala la ecuación 5 con la 6. Y se reduce hasta tener una ecuación con dos incógnitas.

$$\frac{90 - w - q}{4} = \frac{80 - w - 2q}{2}$$

$$2(90 - w - q) = 4(80 - w - 2q)$$

$$180 - 2w - 2q = 320 - 4w - 8q$$

$$6q + 2w = 140 \qquad Ec. 8$$

Paso 4. Las ecuaciones 7 y 8 son el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Y lo podemos resolver por cualquier método ya visto anteriormente.

$$w = \frac{140 - 6q}{2} = 70 - 3q$$

$$-5q - 5(70 - 3q) = -150$$

$$-5q - 350 + 15q = -150$$

$$q = \frac{-150 + 350}{15 - 5} = 20$$

$$\boldsymbol{w = 70 - 3(20) = 10}$$

Paso 5. Ya que se conocen los valores de *q* y *w*, se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones 1, 2, o 3 y se determina *t*.

$$4t + q + w = 90$$

$$4t + 20 + 10 = 90$$

$$t = \frac{90 - 20 - 10}{4} = 15$$

En estos ejercicios se sugiere numerar las ecuaciones para tener orden en ellas y tenerlas bien identificadas de los procedimientos.

Ejercicios de práctica

Lenguaje y expresiones algebraicas

a) María fue al mercado a comprar cebolla y tomate. Si hubiera comprado dos kilos más de tomate y el doble de cebolla, llevaría a casa 10 kilos de hortalizas. Por otro lado, si hubiera comprado la mitad del tomate que lleva, el peso de las hortalizas sería de 6 kilos. ¿Cuántos kilos de cada una de las hortalizas compró?

b) Juan descargó tres archivos de la red de internet, cada uno el doble de pesado que el anterior. Para guardarlos utilizó un dispositivo USB de 32 GB, el cual ya tenía información equivalente a 100 MB. Después de almacenar los tres archivos la memoria ocupada ascendió a 940 MB ¿Cuántos MB de datos ocupó cada uno de los archivos?

c) José tiene un terreno cuadrado. ¿Cuál es la expresión algebraica de su perímetro?

d) En una caja en forma de prisma rectangular se acomodan latas que miden lo mismo de diámetro que de alto. ¿Cuántas latas contiene la caja?

Leyes de los signos y jerarquía de operaciones

Expresión	Signo	Coeficiente	Literales	Exponentes
$-7b^5$				
$8a^2b^5$				
$\frac{4}{7}m^{11}$				
$\frac{1}{3}xyw^5$				
$\frac{9}{11}ayb$				
$-21x^3w^7$				

a) Resuelve: $2 + [4 - 3(3 - 6) - 4] + 10 =$ ______________________

b) Resuelve: $2 + [-2 - 3(2 - 7) - 4] + 12 =$ ______________________

c) Resuelve: $11 + 3\{5[-1 - 3(2 - 6) - 3] + 12\} - 1 =$______________________

Evaluación de expresiones algebraicas con valores numéricos

a) Evalúa la expresión algebraica siguiente: $\frac{a^2+3a+7}{a^2+3a+2}$ cuando a = 1.

b) Si tienes una batería y midiendo tiene un voltaje E = 125 volts y la corriente es de I =5 amperes, siendo la expresión algebraica: R = E/I ¿Cuánto vale la resistencia del resistor (R)?

c) Expresa 30 °C (Celsius) como una temperatura en grados Fahrenheit (°F) usando la expresión algebraica: °F = 9/5 °C + 32

d) Valora la velocidad uniforme de un automóvil; cuando su distancia (d) es igual a 20 metros y cuando su tiempo (t) es igual a 2 segundos. La expresión algebraica de la velocidad es la siguiente: V = d/t

Exponentes y radicales

a) $(2^3)^7 =$

b) $[(x^2)^3]^4 =$

c) $(a^3b^5c^{-4})^2 =$

d) $\left(3y^{\frac{2}{3}}\right)^3 * (2y^2)^2 =$

e) $\sqrt[9]{2^8 2^{-5} 2^6} =$

f) $\sqrt[3]{\frac{(7^4)^6}{7^8}} =$

g) $\left(\sqrt[7]{2ab^5}\right)\left(\sqrt[7]{5a^3b^2}\right) =$

h) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(a^1b^1c^2\ )(a^9b^2c^5\ )}{(a^2b^3c^1)^2}}}} =$

i) $\sqrt[3]{\sqrt[\frac{1}{3}]{3x^2y^2\sqrt[4]{\frac{2}{5}a^2x^3y}}} =$

j) $\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[3]{64}} =$

k) $\sqrt[3]{\frac{x^6}{x^{16}}} =$

Suma y resta de monomios

a) $6a^3 - 5a^3 + 8a^3 + 12a^3 + 4a^3 + 2a^3 =$
b) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}x =$
c) $mn + m^2 + 2n^3 - 5m^2 + 8mn - 6n^3 + 3mn - 6m^2 =$
d) $3x + 2 + 4x - 6 =$
e) $4x^3 + 6x^2 - 8x + 5 + x^3 - 4x^2 - 9x + 9 =$
f) $a^2b^3 - 3a^2b^3 + 8a^2b^3 - 5a^2b^3 + 4a^2b^3 =$
g) $(6a^3 - 5a^2 + 8a - 3) + (a^3 - 12a^2 - 4a + 2) =$
h) $\left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}x^2 + x + \frac{7}{5}\right) =$

Multiplicación y división

a) $(12x^3) \cdot (4x) =$
b) $(18x^3y^2z^5) \cdot (6x^3yz^2) =$
c) $(6x^4 - 5x^2 - 7) \cdot (-4x^3) =$
d) $(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x + 2) =$
e) $(2x^3 - 3x^2 + 5x - 3) \cdot (3x^2) =$
f) $(2x^4)/(4x^6) =$
g) $(x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x)/(x^2 - x + 3) =$
h) $(x^3 + y^2)/(xy) =$

Productos notables y factorización

a) $(5x^2 + 3)^2 =$
b) $(p - 5r)(p - 5r) =$
c) $\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 =$
d) $(a - 2)(a - 2) =$
e) $(xy - z)(xy + z) =$
f) $(k + 8)(k - 8) =$
g) $(x - 7)(x - 19) =$
h) $(x - 2)^3 =$
i) $(z - 3)(z - 3)(z - 3) =$
j) $(b + 10)^3 =$
k) $\left(k - \frac{1}{3}\right)^3 =$
l) Factoriza $x^2 - y^2 - 3x - 3y =$

Ecuaciones lineales

a) $4m + 2 = 20 - 2m$
b) $6x - 10 = 2$
c) $2\frac{1}{3} + 3\frac{2}{4} - x = 0$
d) $-3(2y + 3) = -10(y + 3)$
e) $10x^2 + 2x - 3 = 0$
f) $-2y^2 + y + 3 = 0$
g) $2x^2 - 200 = 0$
h) $x^2 - 3x + 2 = 0$
i) $x^2 + x + 9 = 0$
j) ¿Cuál es la ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son los números reales $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$?

Sistemas de ecuaciones

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $4x + 3y + z = 15$
$x - y - 2z = 2$
$2x - 4y + z = 4$

b) $2x + 2y + 2z = 12$
$3x + 2y - 5z = -7$
$x + y - z = 0$

c) $5x + 2y = 8$
$2x - 4y = -8$

d) $x - y + 5z = 2$
$4x - 3y + 5z = 3$
$3x - 2y + 4z = 1$

e) $95x + 20y = 800$
$20x - 4y = -100$

f) $\frac{6}{x} + \frac{3}{y} = -2$
$\frac{4}{x} + \frac{7}{y} = -2$

g) $8x - 3y = 5$
$5x - 2y = 4$