DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 5

1er cuatrimestre 2022 — Algoritmos y Estructuras de Datos 1

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

5. Práctica 5

5.1. Ejercicio 1

5.1.A. Pregunta i

- $P_c \equiv \{i = 0; result = 0\}$
- $Q_c \equiv \{result = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$

5.1.B. Pregunta ii

Falla $\{I \wedge B\}S\{I\}$ en la última iteración, pues al finalizar esta, $i = |s|$

5.1.C. Pregunta iii

Falla $P_c \implies I$ pues si el límite de la sumatoria es i, la misma se inicializa con $result = s[0]$.

5.1.D. Pregunta iv

Falla $\{I \wedge B\}S\{I\}$ en la última iteración, pues se indefine $s[i]$ en la última iteración.

5.1.E. Pregunta v

Defino y/o recuerdo,

- $P_c \equiv \{i = 0 \wedge result = 0\}$
- $Q_c \equiv \{result = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$
- $I \equiv \{0 \leq i \leq |s| \wedge_L result = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]\}$
- $B \equiv \{i < |s|\}$

Para probar la correctitud del ciclo tengo que demostrar que valen:

(a) $P_c \implies I$

(b) $\{I \wedge B\}S\{I\}$

(c) $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$

Demostración (a)

$i = 0 \implies 0 \leq i \leq |s|$ pues $|s| \geq 0$

$i = 0 \implies result = \sum_{j=0}^{0-1} s[j] = 0 = result$

Demostración (c)

$$
\begin{aligned}
(I \wedge \neg B) &\equiv \{0 \leq i \leq |s| \wedge_L result = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \wedge i \geq |s|\} \\
&\equiv \{i = |s| \wedge_L result = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]\}
\end{aligned}
$$

Pero $i = |s| \implies result = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \equiv Q_c$

Demostración (b)

$\{I \wedge B\}S\{I\} \iff (I \wedge B) \implies wp(S, I)$

$$\begin{aligned}
wp(S,I) &\equiv wp(result := result + s[i], wp(i := i+1, I)) \\
&\equiv wp(result := result + s[i], def(i+1) \wedge_L (0 \leq i+1 \leq |s| \wedge_L result = \sum_{j=0}^{i+1-1} s[j])) \\
&\equiv wp(result := result + s[i], (0 \leq i+1 \leq |s| \wedge_L result = \sum_{j=0}^{i+1-1} s[j])) \\
&\equiv def(result + s[i]) \wedge_L (0 \leq i+1 \leq |s| \wedge_L result + s[i] = \sum_{j=0}^{i+1-1} s[j]) \\
&\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (0 \leq i+1 \leq |s| \wedge_L result + s[i] = \sum_{j=0}^{i+1-1} s[j]) \\
&\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L result + s[i] = \sum_{j=0}^{i} s[j]
\end{aligned}$$

Por $(I \wedge B)$ se que $0 \leq i < |s|$ y $result + s[i] = \sum_{j=0}^{i} s[j] \iff result = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]$

Luego el ciclo es parcialmente correcto.

5.1.F. Pregunta vi

Defino $fv = |s| - i$

Para probar que el ciclo termina tengo que demostrar que,

(a) $\{I \wedge B \wedge fv = v_0\}S\{fv < v_0\}$

(b) $(I \wedge fv \leq 0) \implies \neg B$

Demostración (b)

$fv \leq 0 \iff |s| - i \leq 0 \iff |s| \leq i \equiv i \geq |s|$

$\neg B \equiv \neg(i < |s|) \equiv i \geq |s|$

Demostración (a)

Tengo que probar que $(I \wedge B \wedge fv = v_0) \implies wp(S, fv < v_0)$

$$\begin{aligned}
wp(S, fv < v_0) &\equiv wp(result := result + s[i], wp(i := i+1, fv < v_0)) \\
&\equiv wp(result := result + s[i], def(i+1) \wedge_L |s| - (i+1) < v_0) \\
&\equiv wp(result := result + s[i], |s| - (i+1) < v_0) \\
&\equiv \{def(result + s[i]) \wedge_L |s| - (i+1) < v_0\} \\
&\equiv \{0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - (i+1) < v_0\}
\end{aligned}$$

Pero,

- $0 \leq i < |s|$ vale por $(I \wedge B)$
- $|s| - i - 1 < v_0 \iff |s| - i - 1 < |s| - i \iff -1 < 0$

Por lo tanto el ciclo es correcto y finaliza.

5.2. Ejercicio 2

Defino,

- $P_c \equiv \{result = 0 \wedge i = 0\}$
- $Q_c \equiv \{i = n + n \bmod 2 \wedge result = \sum_{j=0}^{n-1} \textsf{if } j \bmod 2 = 0 \textsf{ then } j \textsf{ else } 0 \textsf{ fi}\}$
- $I \equiv 0 \leq i \leq n+1 \wedge i \bmod 2 = 0 \wedge result = \sum_{j=0}^{i-1} \textsf{if } j \bmod 2 = 0 \textsf{ then } j \textsf{ else } 0 \textsf{ fi}$
- $B \equiv i < n$

Para probar la correctitud del ciclo tengo que demostrar que valen:

(a) $P_c \implies I$

(b) $\{I \wedge B\}S\{I\}$

(c) $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$

Demostración (a)

Se que $result = 0$ y que $i = 0$

Quiero probar que:

- $0 \leq i \leq n+1$. Vale pues $n \geq 0$ e $i = 0$
- $i \bmod 2 = 0$. Vale pues $0 \bmod 2 = 0$
- $result = \sum_{j=0}^{i-1} \textsf{if } j \bmod 2 = 0 \textsf{ then } j \textsf{ else } 0 \textsf{ fi}$

Con $i = 0 \implies \sum_{j=0}^{0-1} \textsf{if } j \bmod 2 = 0 \textsf{ then } j \textsf{ else } 0 \textsf{ fi} = 0 = result$

Luego $P_c \implies I$ como se quería probar.

Demostración (c)

$$(I \wedge \neg B) \equiv \{0 \leq i \leq n+1 \wedge i \geq n \wedge i \bmod 2 = 0 \wedge result = \sum_{j=0}^{i-1} \textsf{if } j \bmod 2 = 0 \textsf{ then } j \textsf{ else } 0 \textsf{ fi}\}$$

Luego se que $n \leq i \leq n+1 \iff i = n \vee i = n+1$

Separo en casos par e impar,

- n par $\implies i = n + n \bmod 2 = n$
- n impar $\implies i = n + n \bmod 2 = n+1$

Y con los valores de i hallados,

- $i = n \implies result = \sum_{j=0}^{n-1} \textsf{if } j \bmod 2 = 0 \textsf{ then } j \textsf{ else } 0 \textsf{ fi}$
- $i = n+1 \implies result = \sum_{j=0}^{n} \textsf{if } j \bmod 2 = 0 \textsf{ then } j \textsf{ else } 0 \textsf{ fi} = \sum_{j=0}^{n-1} \textsf{if } j \bmod 2 = 0 \textsf{ then } j \textsf{ else } 0 \textsf{ fi} + 0$

Luego $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$ como se quería probar.

Demostración (b)

$\{I \wedge B\}S\{I\} \iff (I \wedge B) \implies wp(S, I)$

Luego,

$$\begin{aligned}
wp(S,I) &\equiv wp(result := result+1, wp(i := i+2, I))\\
&\equiv wp(result := result+1, (0 \le i+2 \le n+1 \land i+2 \text{ mód } 2 = 0 \land result = \sum_{j=0}^{i+2-1} \textsf{if } j \text{ mód } 2 = 0 \textsf{ then } j \textsf{ else } 0 \textsf{ fi}))\\
&\equiv def(result+1) \land_L (0 \le i+2 \le n+1 \land i+2 \text{ mód } 2 = 0 \land result+1 = \sum_{j=0}^{i+2-1} \textsf{if } j \text{ mód } 2 = 0 \textsf{ then } j \textsf{ else } 0 \textsf{ fi})\\
&\equiv \{0 \le i+2 \le n+1 \land i \text{ mód } 2 = 0 \land result+i = \sum_{j=0}^{i+1} \textsf{if } j \text{ mód } 2 = 0 \textsf{ then } j \textsf{ else } 0 \textsf{ fi}\}
\end{aligned}$$

Queda ver que $(I \land B) \implies wp(S,I)$

Entonces, $(I \land B) \equiv 0 \le i \le n+1 \land i < n \land i \text{ mód } 2 = 0 \land result = \sum_{j=0}^{i-1} \textsf{if } j \text{ mód } 2 = 0 \textsf{ then } j \textsf{ else } 0 \textsf{ fi}$

Y quiero probar,

- $0 \le i+2$. Vale pues por I, $0 \le i$
- $i+2 \le n+1$. Vale pues $i < n \iff i+1 \le n \iff i+2 \le n+1$
- $i \text{ mód } 2 = 0$. Vale por I
- $result = \sum_{j=0}^{i-1} \textsf{if } j \text{ mód } 2 = 0 \textsf{ then } j \textsf{ else } 0 \textsf{ fi}$

La última condicion vale pues la sumatoria entre $0 \le j \le i-1$ vale por I, dado que i es par, el i-ésimo termino de la sumatoria es igual a i y el $i+1$ es cero.

Por lo tanto el ciclo es parcialmente correcto respecto a su especificación.

Para probar finalización del ciclo tengo que probar:

(a) $\{I \land B \land f_v = v_0\}S\{f_v < v_0\}$

(b) $(I \land f_v \le 0) \implies \neg B$

Sea $f_v = n - i$

Demostración (b)

$n - i \le 0 \iff n - i + i \le i \iff n \le i \equiv \neg B$

Demostración (a)

$\{I \land B \land f_v = v_0\}S\{f_v < v_0\} \iff (I \land B \land f_v = v_0) \implies wp(S, f_v < v_0)$

$$\begin{aligned}
wp(S, f_v < v_0) &\equiv wp(result := result+1, wp(i := i+2, f_v < v_0))\\
&\equiv wp(result := result+1, n-(i+2) < v_0)\\
&\equiv \{n-(i+2) < v_0\}\\
&\equiv \{n-i-2 < v_0\}
\end{aligned}$$

Pero $f_v = v_0 \implies n - i = v_0 \implies n - i - 2 = v_0 - 2 < v_0 \iff -2 < 0$

Luego el ciclo finaliza y por lo tanto es correcto respecto a su especificación.