



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Práctica 5

1er cuatrimestre 2022

Algoritmos y Estructuras de Datos 1

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar



**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

# Índice

<b>5. Práctica 5</b>	<b>2</b>
5.1. Ejercicio 1 . . . . .	2
5.2. Ejercicio 2 . . . . .	4
5.3. Ejercicio 3 . . . . .	5
5.4. Ejercicio 4 . . . . .	7
5.5. Ejercicio 5 . . . . .	7
5.6. Ejercicio 6 . . . . .	9
5.7. Ejercicio 7 . . . . .	10
5.8. Ejercicio 8 . . . . .	11
5.9. Ejercicio 9 . . . . .	12
5.10. Ejercicio 10 . . . . .	12

## 5. Práctica 5

### 5.1. Ejercicio 1

#### 5.1.A. Pregunta i

- $P_c \equiv \{i = 0; result = 0\}$
- $Q_c \equiv \{result = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$

#### 5.1.B. Pregunta ii

Falla  $\{I \wedge B\}S\{I\}$  en la última iteración, pues al finalizar esta,  $i = |s|$

#### 5.1.C. Pregunta iii

Falla  $P_c \implies I$  pues si el límite de la sumatoria es  $i$ , la misma se inicializa con  $result = s[0]$ .

#### 5.1.D. Pregunta iv

Falla  $\{I \wedge B\}S\{I\}$  en la última iteración, pues se indefin  $s[i]$  en la última iteración.

#### 5.1.E. Pregunta v

Defino y/o recuerdo,

- $P_c \equiv \{i = 0 \wedge result = 0\}$
- $Q_c \equiv \{result = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$
- $I \equiv \{0 \leq i \leq |s| \wedge_L result = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]\}$
- $B \equiv \{i < |s|\}$

Para probar la correctitud del ciclo tengo que demostrar que valen:

- (a)  $P_c \implies I$
- (b)  $\{I \wedge B\}S\{I\}$
- (c)  $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$

#### Demostración (a)

$i = 0 \implies 0 \leq i \leq |s|$  pues  $|s| \geq 0$

$i = 0 \implies result = \sum_{j=0}^{0-1} s[j] = 0 = result$

#### Demostración (c)

$$\begin{aligned}(I \wedge \neg B) &\equiv \{0 \leq i \leq |s| \wedge_L result = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \wedge i \geq |s|\} \\ &\equiv \{i = |s| \wedge_L result = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]\}\end{aligned}$$

Pero  $i = |s| \implies result = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \equiv Q_c$

**Demostración (b)**

$$\{I \wedge B\}S\{I\} \iff (I \wedge B) \implies wp(S, I)$$

$$\begin{aligned}
wp(S, I) &\equiv wp(result := result + s[i], wp(i := i + 1, I)) \\
&\equiv wp(result := result + s[i], def(i + 1) \wedge_L (0 \leq i + 1 \leq |s| \wedge_L result = \sum_{j=0}^{i+1-1} s[j])) \\
&\equiv wp(result := result + s[i], (0 \leq i + 1 \leq |s| \wedge_L result = \sum_{j=0}^{i+1-1} s[j])) \\
&\equiv def(result + s[i]) \wedge_L (0 \leq i + 1 \leq |s| \wedge_L result + s[i] = \sum_{j=0}^{i+1-1} s[j]) \\
&\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (0 \leq i + 1 \leq |s| \wedge_L result + s[i] = \sum_{j=0}^{i+1-1} s[j]) \\
&\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L result + s[i] = \sum_{j=0}^i s[j]
\end{aligned}$$

Por  $(I \wedge B)$  se que  $0 \leq i < |s|$  y  $result + s[i] = \sum_{j=0}^i s[j] \iff result = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]$

Luego el ciclo es parcialmente correcto.

**5.1.F. Pregunta vi**

Defino  $fv = |s| - i$

Para probar que el ciclo termina tengo que demostrar que,

$$(a) \{I \wedge B \wedge fv = v_0\}S\{fv < v_0\}$$

$$(b) (I \wedge fv \leq 0) \implies \neg B$$

**Demostración (b)**

$$fv \leq 0 \iff |s| - i \leq 0 \iff |s| \leq i \equiv i \geq |s|$$

$$\neg B \equiv \neg(i < |s|) \equiv i \geq |s|$$

**Demostración (a)**

Tengo que probar que  $(I \wedge B \wedge fv = v_0) \implies wp(S, fv < v_0)$

$$\begin{aligned}
wp(S, fv < v_0) &\equiv wp(result := result + s[i], wp(i := i + 1, fv < v_0)) \\
&\equiv wp(result := result + s[i], def(i + 1) \wedge_L |s| - (i + 1) < v_0) \\
&\equiv wp(result := result + s[i], |s| - (i + 1) < v_0) \\
&\equiv \{def(result + s[i]) \wedge_L |s| - (i + 1) < v_0\} \\
&\equiv \{0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - (i + 1) < v_0\}
\end{aligned}$$

Pero,

- $0 \leq i < |s|$  vale por  $(I \wedge B)$
- $|s| - i - 1 < v_0 \iff |s| - i - 1 < |s| - i \iff -1 < 0$

Por lo tanto el ciclo es correcto y finaliza.

## 5.2. Ejercicio 2

Defino,

- $P_c \equiv \{result = 0 \wedge i = 0\}$
- $Q_c \equiv \{i = n + n \bmod 2 \wedge result = \sum_{j=0}^{n-1} \text{if } j \bmod 2 = 0 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi}\}$
- $I \equiv 0 \leq i \leq n + 1 \wedge i \bmod 2 = 0 \wedge result = \sum_{j=0}^{i-1} \text{if } j \bmod 2 = 0 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi}$
- $B \equiv i < n$

Para probar la correctitud del ciclo tengo que demostrar que valen:

- (a)  $P_c \implies I$
- (b)  $\{I \wedge B\}S\{I\}$
- (c)  $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$

### Demostración (a)

Se que  $result = 0$  y que  $i = 0$

Quiero probar que:

- $0 \leq i \leq n + 1$ . Vale pues  $n \geq 0$  e  $i = 0$
- $i \bmod 2 = 0$ . Vale pues  $0 \bmod 2 = 0$
- $result = \sum_{j=0}^{i-1} \text{if } j \bmod 2 = 0 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi}$

Con  $i = 0 \implies \sum_{j=0}^{0-1} \text{if } j \bmod 2 = 0 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi} = 0 = result$

Luego  $P_c \implies I$  como se quería probar.

### Demostración (c)

$$(I \wedge \neg B) \equiv \{0 \leq i \leq n + 1 \wedge i \geq n \wedge i \bmod 2 = 0 \wedge result = \sum_{j=0}^{i-1} \text{if } j \bmod 2 = 0 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi}\}$$

Luego se que  $n \leq i \leq n + 1 \iff i = n \vee i = n + 1$

Separo en casos par e impar,

- $n \text{ par} \implies i = n + n \bmod 2 = n$
- $n \text{ impar} \implies i = n + n \bmod 2 = n + 1$

Y con los valores de  $i$  hallados,

- $i = n \implies result = \sum_{j=0}^{n-1} \text{if } j \bmod 2 = 0 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi}$
- $i = n + 1 \implies result = \sum_{j=0}^n \text{if } j \bmod 2 = 0 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi} = \sum_{j=0}^{n-1} \text{if } j \bmod 2 = 0 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi} + 0$

Luego  $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$  como se quería probar.

### Demostración (b)

$$\{I \wedge B\}S\{I\} \iff (I \wedge B) \implies wp(S, I)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
wp(S, I) &\equiv wp(result := result + 1, wp(i := i + 2, I)) \\
&\equiv wp(result := result + 1, (0 \leq i + 2 \leq n + 1 \wedge i + 2 \bmod 2 = 0 \wedge result = \sum_{j=0}^{i+2-1} \text{if } j \bmod 2 = 0 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi})) \\
&\equiv def(result + 1) \wedge_L (0 \leq i + 2 \leq n + 1 \wedge i + 2 \bmod 2 = 0 \wedge result + 1 = \sum_{j=0}^{i+2-1} \text{if } j \bmod 2 = 0 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi}) \\
&\equiv \{0 \leq i + 2 \leq n + 1 \wedge i \bmod 2 = 0 \wedge result + i = \sum_{j=0}^{i+1} \text{if } j \bmod 2 = 0 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi}\}
\end{aligned}$$

Queda ver que  $(I \wedge B) \implies wp(S, I)$

Entonces,  $(I \wedge B) \equiv 0 \leq i \leq n + 1 \wedge i < n \wedge i \bmod 2 = 0 \wedge result = \sum_{j=0}^{i-1} \text{if } j \bmod 2 = 0 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi}$

Y quiero probar,

- $0 \leq i + 2$ . Vale pues por I,  $0 \leq i$
- $i + 2 \leq n + 1$ . Vale pues  $i < n \iff i + 1 \leq n \iff i + 2 \leq n + 1$
- $i \bmod 2 = 0$ . Vale por I
- $result = \sum_{j=0}^{i-1} \text{if } j \bmod 2 = 0 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi}$

La última condicion vale pues la sumatoria entre  $0 \leq j \leq i - 1$  vale por I, dado que  $i$  es par, el  $i$ -ésimo termino de la sumatoria es igual a  $i$  y el  $i + 1$  es cero.

Por lo tanto el ciclo es parcialmente correcto respecto a su especificación.

Para probar finalización del ciclo tengo que probar:

- (a)  $\{I \wedge B \wedge f_v = v_0\} S \{f_v < v_0\}$
- (b)  $(I \wedge f_v \leq 0) \implies \neg B$

Sea  $f_v = n - i$

**Demostración (b)**

$$n - i \leq 0 \iff n - i + i \leq i \iff n \leq i \equiv \neg B$$

**Demostración (a)**

$$\{I \wedge B \wedge f_v = v_0\} S \{f_v < v_0\} \iff (I \wedge B \wedge f_v = v_0) \implies wp(S, f_v < v_0)$$

$$\begin{aligned}
wp(S, f_v < v_0) &\equiv wp(result := result + 1, wp(i := i + 2, f_v < v_0)) \\
&\equiv wp(result := result + 1, n - (i + 2) < v_0) \\
&\equiv \{n - (i + 2) < v_0\} \\
&\equiv \{n - i - 2 < v_0\}
\end{aligned}$$

$$\text{Pero } f_v = v_0 \implies n - i = v_0 \implies n - i - 2 = v_0 - 2 < v_0 \iff -2 < 0$$

Luego el ciclo finaliza y por lo tanto es correcto respecto a su especificación.

### 5.3. Ejercicio 3

#### 5.3.A. Pregunta i

```

int result = 1;
int i = 0;
while ( i < n ) {
    result = result * m;
    i = i + 1;
}

```

Defino,

- $P_C \equiv \{result = 1 \wedge i = 0\}$
- $Q_C \equiv \{result = m^n\}$
- $I \equiv \{0 \leq i \leq n \wedge result = m^i\}$
- $B \equiv \{i < n\}$

Para probar la correctitud del ciclo tengo que demostrar que valen:

- (a)  $P_c \implies I$
- (b)  $\{I \wedge B\}S\{I\}$
- (c)  $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$

**Demostración (a)**

$$i = 0 \implies 0 \leq i \text{ y por } Pre : n \geq 0 \implies i \leq n$$

$$i = 0 \implies m^0 = 1 = result$$

**Demostración (c)**

$$(I \wedge \neg B) \equiv \{0 \leq i \leq n \wedge result = m^i \wedge i \geq n\}$$

$$\text{Luego se que } (I \wedge \neg B) \implies i = n \implies result = m^n \equiv Post$$

**Demostración (b)**

$$\{I \wedge B\}S\{I\} \iff (I \wedge B) \implies wp(S, I)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 wp(S, I) &\equiv wp(result = result * m, wp(i = i + 1, I)) \\
 &\equiv wp(result = result * m, def(i + 1) \wedge_L 0 \leq i + 1 \leq n \wedge result = m^{i+1}) \\
 &\equiv wp(result = result * m, 0 \leq i + 1 \leq n \wedge result = m^{i+1}) \\
 &\equiv def(result * m) \wedge_L 0 \leq i + 1 \leq n \wedge result * m = m^{i+1} \\
 &\equiv 0 \leq i + 1 \leq n \wedge result * m = m^{i+1}
 \end{aligned}$$

$$0 \leq i \leq n \wedge i < n \implies 0 \leq i < n \implies \leq i + 1 \wedge i < n \implies i + 1 \leq n$$

$$result = m^i \iff result * m = m^i * m \iff result * m = m^{i+1}$$

Por lo tanto queda probado que el ciclo es parcialmente correcto.

Para probar finalización del ciclo tengo que probar:

- (a)  $\{I \wedge B \wedge f_v = v_0\}S\{f_v < v_0\}$
- (b)  $(I \wedge f_v \leq 0) \implies \neg B$

$$\text{Sea } f_v = n - i$$

**Demostración (b)**

$$(I \wedge f_v \leq 0) \equiv \{0 \leq i \leq n \wedge result = m^i \wedge n - i \leq 0\}$$

Pero,  $n - i \leq 0 \implies n \leq i \implies i \geq n \equiv \neg B$

### **Demostración (a)**

$$\{I \wedge B \wedge f_v = v_0\} S \{f_v < v_0\} \iff (I \wedge B \wedge f_v = v_0) \implies wp(S, f_v < v_0)$$

$$\begin{aligned} wp(S, f_v < v_0) &\equiv wp(result = result * m, wp(i = i + 1, n - i < v_0)) \\ &\equiv wp(result = result * m, def(i + 1) \wedge_L n - (i + 1) < v_0) \\ &\equiv wp(result = result * m, n - (i + 1) < v_0) \\ &\equiv \{def(result * m) \wedge_L n - (i + 1) < v_0\} \\ &\equiv \{n - (i + 1) < v_0\} \end{aligned}$$

Pero,  $n - i = v_0 \implies n - i - 1 < v_0 \iff v_0 - 1 < v_0 \iff -1 < 0$

Por lo tanto el ciclo finaliza. Y el programa es correcto respecto a su especificación.

### **5.3.B. Pregunta ii**

Falla la demostración de  $\{I \wedge B\} S \{I\}$

### **5.3.C. Pregunta iii**

Es correcto, solo hay que probar de nuevo los puntos (2) y (4) de la demostración.

### **5.3.D. Pregunta iv**

Se puede pedir  $n \geq 2$  en la precondition.

## **5.4. Ejercicio 4**

### **5.4.A. Pregunta i**

```
int i = 1;
int result = 0;
while (i <= n) {
    if (n % i == 0) {
        result = result + 1;
    }
    i = i + 1;
}
```

### **5.4.B. Pregunta ii**

El invariante propuesto falla en la última iteración, hay que cambiarlo por  $\{1 \leq i \leq n \wedge result = \sum_{j=1}^i \text{if } n \bmod j = 1 \text{ then } j \text{ else } 0 \text{ fi}\}$

## **5.5. Ejercicio 5**

### **5.5.A. Pregunta i**



```

int result = 0;
int j = 0;
while (j < s.size()) {
    if (j % 2 == 1) {
        result = result + s[j];
    }
    j = j+1;
}

```

### 5.5.B. Pregunta ii

Defino,

- $P_C \equiv \{result = 0 \wedge j = 0\}$
- $Q_C \equiv \{result = \sum_{i=0}^{|s|-1} \text{if } i \bmod 2 = 1 \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi}\}$
- $I \equiv \{0 \leq j \leq |s| \wedge result = \sum_{i=0}^{j-1} \text{if } i \bmod 2 = 1 \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi}\}$
- $B \equiv \{j < |s|\}$
- $f_v = |s| - j$

Para probar la correctitud del ciclo tengo que demostrar que valen:

- (a)  $P_C \implies I$
- (b)  $\{I \wedge B\}S\{I\}$
- (c)  $(I \wedge \neg B) \implies Q_C$
- (d)  $\{I \wedge B \wedge f_v = v_0\}S\{f_v < v_0\}$
- (e)  $(I \wedge f_v \leq 0) \implies \neg B$

#### **Demostración (a)**

$$j = 0 \implies 0 \leq j \leq |s|$$

$$j = 0 \implies \sum_{i=0}^{j-1} \text{if } i \bmod 2 = 1 \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi} = 0 = result$$

#### **Demostración (c)**

$$0 \leq j \leq |s| \wedge j \geq |s| \implies j = |s| \implies result = \sum_{i=0}^{|s|-1} \text{if } i \bmod 2 = 1 \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi} \equiv Q_C$$

#### **Demostración (b)**

$$\{I \wedge B\}S\{I\} \iff (I \wedge B) \implies wp(S, I)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
wp(S, I) &\equiv wp(if(...), wp(j = j + 1, I)) \\
&\equiv wp(if(...), def(j + 1) \wedge_L (0 \leq j + 1 \leq |s| \wedge result = \sum_{i=0}^{j+1-1} \text{if } i \text{ mód } 2 = 1 \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi})) \\
&\equiv wp(if(...), (0 \leq j + 1 \leq |s| \wedge result = \sum_{i=0}^j \text{if } i \text{ mód } 2 = 1 \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi})) \\
&\equiv (j \text{ mód } 2 = 1 \wedge wp(result = result + 1, (0 \leq j + 1 \leq |s| \wedge result = \sum_{i=0}^j \text{if } i \text{ mód } 2 = 1 \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi}))) \vee \\
&\quad (j \text{ mód } 2 = 0 \wedge wp(skip, (0 \leq j + 1 \leq |s| \wedge result = \sum_{i=0}^j \text{if } i \text{ mód } 2 = 1 \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi}))) \\
&\equiv (j \text{ mód } 2 = 1 \wedge (0 \leq j + 1 \leq |s| \wedge result + 1 = \sum_{i=0}^j \text{if } i \text{ mód } 2 = 1 \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi})) \vee \\
&\quad (j \text{ mód } 2 = 0 \wedge (0 \leq j + 1 \leq |s| \wedge result = \sum_{i=0}^j \text{if } i \text{ mód } 2 = 1 \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi}))
\end{aligned}$$

Por  $(I \wedge B)$  vale que  $0 \leq j + 1 \leq |s|$  en ambas ramas del if.

Ambas sumatorias valen pues dependiendo de la paridad de  $j$ , se suma 1 a la sumatoria. Y la sumatoria entre  $0 \leq j \leq |s|$  vale por  $I$

#### **Demostración (e)**

$$|s| - j < 0 \implies j \geq |s| \equiv \neq B$$

#### **Demostración (d)**

$$\begin{aligned}
\{I \wedge B \wedge f_v = v_0\} S \{f_v < v_0\} &\iff (I \wedge B \wedge f_v = v_0) \implies wp(S, f_v < v_0) \\
wp(S, f_v < v_0) &\equiv wp(if(...), wp(j = j + 1, f_v < v_0)) \\
&\equiv wp(if(...), def(j + 1) \wedge_L |s| - (j + 1) < v_0) \\
&\equiv wp(if(...), |s| - (j + 1) < v_0) \\
&\equiv (j \text{ mód } 2 = 1 \wedge |s| - (j + 1) < v_0) \vee ((j \text{ mód } 2 \neq 1 \wedge |s| - (j + 1) < v_0)) \\
&\equiv \{|s| - (j + 1) < v_0\}
\end{aligned}$$

$$\text{Luego } |s| - j - 1 < v_0 \iff v_0 - 1 < v_0 \iff -1 < 0$$

Por lo tanto el ciclo es correcto.

## **5.6. Ejercicio 6**

### **5.6.A. Pregunta i**

- $P_c \equiv \{i = 0 \wedge j = 1\}$
- $Q_c \equiv Post$

### **5.6.B. Pregunta ii**

Defino,

- $P_C \equiv \{i = 0 \wedge j = 1\}$
- $Q_C \equiv Post$

- $I \equiv \{(0 \leq i < |s| \wedge 1 \leq j \leq |s|) \wedge_L (\forall k : \mathbb{Z})(0 \leq k < j \longrightarrow_L s[k] \leq s[i])\}$
- $B \equiv \{j < |s|\}$

Para probar la correctitud parcial del ciclo tengo que demostrar que valen:

- (a)  $P_c \implies I$
- (b)  $\{I \wedge B\}S\{I\}$
- (c)  $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$

**Demostración (a)**

$$i = 0 \wedge j = 1 \implies 0 \leq 0 \leq |s| \wedge 1 \leq 1 \leq |s| \wedge k = 0 \implies s[0] = s[0]$$

**Demostración (c)**

$$1 \leq j \leq |s| \wedge j \geq |s| \implies j = |s| \implies (\forall k : \mathbb{Z})(0 \leq k \leq |s| \longrightarrow_L s[k] \leq s[i]) \equiv Q_C$$

**Demostración (b)**

$$\{I \wedge B\}S\{I\} \iff (I \wedge B) \implies wp(C, I)$$

$$\begin{aligned} wp(C, I) &\equiv wp(iff(...), wp(j = j + 1, I)) \\ &\equiv wp(iff(...), def(j + 1) \wedge_L (0 \leq i < |s| \wedge 1 \leq j + 1 \leq |s|) \wedge_L (\forall k : \mathbb{Z})(0 \leq k < j + 1 \longrightarrow_L s[k] \leq s[i])) \\ &\equiv wp(iff(...), (0 \leq i < |s| \wedge 1 \leq j + 1 \leq |s|) \wedge_L (\forall k : \mathbb{Z})(0 \leq k < j + 1 \longrightarrow_L s[k] \leq s[i])) \\ &\equiv def(s[j] > s[i]) \wedge_L (s[j] > s[i] \wedge wp(i = j, (0 \leq i < |s| \wedge 1 \leq j + 1 \leq |s|) \wedge_L (\forall k : \mathbb{Z})(0 \leq k < j + 1 \longrightarrow_L s[k] \leq s[i]))) \vee \\ &\quad (s[j] \leq s[i] \wedge wp(skip, (0 \leq i < |s| \wedge 1 \leq j + 1 \leq |s|) \wedge_L (\forall k : \mathbb{Z})(0 \leq k < j + 1 \longrightarrow_L s[k] \leq s[i]))) \\ &\equiv 0 \leq j < |s| \wedge 0 \leq i < |s| \wedge_L (s[j] > s[i] \wedge (0 \leq j < |s| \wedge 1 \leq j + 1 \leq |s|) \wedge_L (\forall k : \mathbb{Z})(0 \leq k < j + 1 \longrightarrow_L s[k] \leq s[j])) \vee \\ &\quad (s[j] \leq s[i] \wedge (0 \leq i < |s| \wedge 1 \leq j + 1 \leq |s|) \wedge_L (\forall k : \mathbb{Z})(0 \leq k < j + 1 \longrightarrow_L s[k] \leq s[i])) \end{aligned}$$

### 5.6.C. Pregunta ii

$$f_v = |s| - j - 1$$

TODO la demostración de finalización.

## 5.7. Ejercicio 7

### 5.7.A. Pregunta i

- $P_c \equiv i = 0 \wedge |r| = |s|$
- $Q_c \equiv Post$

### 5.7.B. Pregunta ii

Defino,

- $P_C \equiv \{i = 0 \wedge |r| = |s|\}$
- $Q_C \equiv Post$
- $I \equiv \{0 \leq i \leq |s| \wedge |s| = |r| \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i \longrightarrow_L s[j] = r[j])\}$
- $B \equiv \{i < |s|\}$

Para probar la correctitud parcial del ciclo tengo que demostrar que valen:

- (a)  $P_c \implies I$

- (b)  $\{I \wedge B\}S\{I\}$   
(c)  $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$

**Demostración (a)**

$$\begin{aligned} i = 0 &\implies 0 \leq i \leq |s| \\ |s| = |r| &\implies |s| = |r| \\ i = 0 &\implies (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < 0 \longrightarrow_L s[j] = r[j]) \text{ pero } 0 \leq j < 0 \equiv \text{False} \end{aligned}$$

**Demostración (c)**

$$\begin{aligned} (I \wedge \neg B) &\equiv 0 \leq i \leq |s| \wedge |s| = |r| \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i \longrightarrow_L s[j] = r[j]) \wedge i \geq |s| \\ \text{Pero, } 0 \leq i \leq |s| \wedge i \geq |s| &\implies i = |s| \\ \text{Luego, } i = 0 &\implies |s| = |r| \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \longrightarrow_L s[j] = r[j]) \equiv Q_c \end{aligned}$$

**Demostración (b)**

$$\{I \wedge B\}S\{I\} \iff (I \wedge B) \implies wp(S, I)$$

$$\begin{aligned} wp(S, I) &\equiv wp(r[i] = s[i], wp(i = i + 1, I)) \\ &\equiv wp(r[i] = s[i], def(i + 1) \wedge_L 0 \leq i + 1 \leq |s| \wedge |s| = |r| \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i + 1 \longrightarrow_L s[j] = r[j])) \\ &\equiv wp(r = setAt(r, i, s[i]), 0 \leq i + 1 \leq |s| \wedge |s| = |r| \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i + 1 \longrightarrow_L s[j] = r[j])) \\ &\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L |s| = |r| \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i \longrightarrow_L s[j] = r[j]) \end{aligned}$$

Es facil ver que por  $I \wedge B$  valen los tres elementos de la conjunción.

Luego el ciclo es parcialmente correcto.

### 5.7.C. Pregunta iii

Defino  $f_v = |s| - i$

Para probar finalización del ciclo tengo que probar:

- (a)  $\{I \wedge B \wedge f_v = v_0\}S\{f_v < v_0\}$   
(b)  $(I \wedge f_v \leq 0) \implies \neg B$

**Demostración (b)**

$$(I \wedge f_v \leq 0) \implies |s| - i \leq 0 \implies i \geq |s| \equiv \neg B$$

**Demostración (a)**

$$\begin{aligned} \{I \wedge B \wedge f_v = v_0\}S\{f_v < v_0\} &\iff (I \wedge B \wedge f_v = v_0) \implies wp(S, f_v < v_0) \\ wp(S, I) &\equiv wp(r[i] = s[i], wp(i = i + 1, |s| - i < v_0)) \\ &\equiv wp(r[i] = s[i], |s| - (i + 1) < v_0) \\ &\equiv |s| - (i + 1) < v_0 \end{aligned}$$

$$\text{Pero } f_v = v_0 \implies v_0 - 1 < v_0 \iff -1 < 0$$

Así queda probado que el ciclo finaliza.

## 5.8. Ejercicio 8

### 5.8.A. Pregunta i

- $P_c \equiv \{i = d\}$
- $q_c \equiv \text{Post}$

### 5.8.B. Pregunta ii

Defino,

- $P_C \equiv \{i = d\}$
- $Q_C \equiv Post$
- $I \equiv \{d \leq i \leq |s| \wedge |s| = |s_0| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < d \longrightarrow_L s[j] = s_0[j]) \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(d \leq j < |s| \longrightarrow_L s[j] = e)\}$
- $B \equiv \{i < |s|\}$

Para probar la correctitud parcial del ciclo tengo que demostrar que valen:

- (a)  $P_c \implies I$
- (b)  $\{I \wedge B\}S\{I\}$
- (c)  $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$

TODO. Hecho en clase 20/04/2022.

### 5.9. Ejercicio 9

#### 5.9.A. Pregunta i

Defino,

- $P_C \equiv \{|s| \bmod 2 = 0 \wedge i = |s| - 1 \wedge suma = 0\}$
- $Q_C \equiv \{|s| \bmod 2 = 0 \wedge i = |s|/2 - 1 \wedge_L suma = \sum_{j=0}^{|s|/2-1} s[j]\}$
- $I \equiv \{|s|/2 - 1 \leq i \leq |s| - 1 \wedge |s| \bmod 2 = 0 \wedge suma = \sum_{j=0}^{|s|-2-i} s[j]\}$
- $B \equiv \{i \geq |s|/2\}$

Para probar la correctitud parcial del ciclo tengo que demostrar que valen:

- (a)  $P_c \implies I$
- (b)  $\{I \wedge B\}S\{I\}$
- (c)  $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$

#### 5.9.B. Pregunta ii

$$f_v = i - |s|/2 - 1$$

#### 5.9.C. Pregunta iii

TODO

### 5.10. Ejercicio 10

#### 5.10.A. Pregunta i

```

int i = 0;
while (i < s.size()) {
    if (s[i] == a) {
        s[i] = b;
    }
    i = i+1;
}

```

### 5.10.B. Pregunta ii

- $P_c \equiv i = 0 \wedge |s| = |s_0|$
- $Q_c \equiv Post$

### 5.10.C. Pregunta iii

Defino,

- $P_C \equiv \{i = 0 \wedge |s| = |s_0|\}$
- $Q_C \equiv Post$
- $I \equiv \{|s| = |s_0| \wedge 0 \leq i \leq |s| \wedge (\forall j : \mathbb{Z})((0 \leq j < i \wedge_L s_0[j] = a) \longrightarrow_L s[j] = b) \wedge (\forall j : \mathbb{Z})((0 \leq j < i \wedge_L s_0[j] \neq a) \longrightarrow_L s[j] = s_0[j])\}$
- $B \equiv \{i < |s|\}$

Para probar la correctitud parcial del ciclo tengo que demostrar que valen:

- (a)  $P_c \implies I$
- (b)  $\{I \wedge B\}S\{I\}$
- (c)  $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$

#### Demostración (a)

$$i = 0 \implies 0 \leq i \leq |s|$$

Ambos  $\forall$  son verdaderos pues  $i = 0$  implica antecedente falso y por lo tanto implicación verdadera.

#### Demostración (c)

$$(I \wedge \neg B) \implies 0 \leq i \leq |s| \wedge i \geq |s| \implies i = |s| \implies \text{ambos } \forall \text{ igual que en } Post$$

#### Demostración (b)

$$\{I \wedge B\}S\{I\} \iff (I \wedge B) \implies wp(S, I)$$

$$wp(S, I) \equiv wp((if(...), wp(i = i + 1, I)))$$

$$\equiv wp((if(...), I(i + 1)))$$

$$\equiv def(i < |s|) \wedge_L (i < |s| \wedge wp(s = setAt(s, i, b), I(i + 1))) \vee (i \geq |s| \wedge wp(skip, I(i + 1)))$$

$$\begin{aligned} \equiv (i < |s| \wedge 0 \leq i < |s| \wedge_L |s| = |s_0| \wedge 0 \leq i + 1 \leq |s| \wedge (\forall j : \mathbb{Z})((0 \leq j < i + 1 \wedge_L s_0[j] = a) \longrightarrow_L setAt(s, i, b)[j] = b) \wedge \\ (\forall j : \mathbb{Z})((0 \leq j < i + 1 \wedge_L s_0[j] \neq a) \longrightarrow_L setAt(s, i, b)[j] = s_0[j])) \vee \\ (i \geq |s| \wedge |s| = |s_0| \wedge 0 \leq i + 1 \leq |s| \wedge (\forall j : \mathbb{Z})((0 \leq j < i + 1 \wedge_L s_0[j] = a) \longrightarrow_L s[j] = b) \wedge \\ (\forall j : \mathbb{Z})((0 \leq j < i + 1 \wedge_L s_0[j] \neq a) \longrightarrow_L s[j] = s_0[j])) \end{aligned}$$

Y usando  $I \wedge B$  hay que probar cada termino de la conjunción.

### 5.10.D. Pregunta iv

$$f_v = |s| - i$$