Universidad del Norte
Facultad de Ingeniería de Sistemas y Computación
Estructuras Discretas

Funciones Generadoras Ordinarias

14 de marzo de 2021

Profesor: Alfonso M. Mancilla Herrera,
Monitor: Enrique A. Niebles Saco.

"Don't limit yourself. Many people limit themselves to what they think they can do. You can go as far as your mind lets you. What you believe, remember, you can achieve".
– Mary Kay Ash

1. Funciones Generadoras Ordinarias

1.1. Ejemplo 1

Comencemos resolviendo una relación de recurrencias por el método de funciones generadoras.

$$f_n = 5f_{n-1} - 8f_{n-2} + 4f_{n-3}; \quad f_0 = 1, f_1 = 2, f_2 = 4; \quad n \geq 3$$

$$f_n = \langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots \rangle$$

Definamos la OGF:

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n = f_0 z^0 + f_1 z^1 + f_2 z^2 + f_3 z^3 + \ldots$$

En este caso en específico:

$$\sum_{n \geq 0} f_n z^n = 1z^0 + 2z^1 + 4z^2 + 8z^3 + \ldots$$

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

Reescribamos la relación de recurrencia en términos de sumas de potencia

$$\sum_{n \geq 3} f_n z^n = 5 \sum_{n \geq 3} f_{n-1} z^n - 8 \sum_{n \geq 3} f_{n-2} z^n + 4 \sum_{n \geq 3} f_{n-3} z^n$$

$$\sum_{n \geq 3} f_n z^n = 5z \sum_{n \geq 3} f_{n-1} z^{n-1} - 8z^2 \sum_{n \geq 3} f_{n-2} z^{n-2} + 4 \sum_{n \geq 3} f_{n-3} z^n$$

$$\sum_{n\geq 3} f_n z^n = 5z \sum_{n+1\geq 3} f_{n+1-1} z^{n+1-1} - 8z^2 \sum_{n+2\geq 3} f_{n+2-2} z^{n+2-2} + 4 \sum_{n+3\geq 3} f_{n+3-3} z^{n+3}$$

$$\sum_{n\geq 3} f_n z^n = 5z \sum_{n\geq 2} f_n z^n - 8z^2 \sum_{n\geq 1} f_n z^n + 4z^3 \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

Pero sabemos

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n = f_0 z^0 + f_1 z^1 + f_2 z^2 + f_{m-1} z^{m-1} + \sum_{n\geq m} f_n z^n$$

De igual manera,

$$\sum_{n\geq m} f_n z^n = \sum_{n\geq 0} f_n z^n - f_0 z^0 - f_1 z^1 - f_2 z^2 - f_{m-1} z^{m-1}$$

Continuando con el ejercicio

$$\underbrace{\sum_{n\geq 0} f_n z^n - f_0 z^0 - f_1 z^1 - f_2 z^2}_{\sum_{n\geq 3} f_n z^n} = 5z \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0} f_n z^n - f_0 z^0 - f_1 z^1 \right)}_{\sum_{n\geq 2} f_n z^n} - 8z^2 \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0} f_n z^n - f_0 z^0 \right)}_{\sum_{n\geq 1} f_n z^n} + 4z^3 \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

$$F(z) - 1z^0 - 2z^1 - 4z^2 = 5z \left[F(z) - 1z^0 - 2z^1 \right] - 8z^2 \left[F(z) - 1z^0 \right] + 4z^3 F(z)$$

$$F(z) - 1 - 2z - 4z^2 = 5zF(z) - 5z - 10z^2 - 8z^2 F(z) - 8z^2 + 4z^3 F(z)$$

$$F(z)(1 - 5z + 8z^2 - 4z^3) = -3z + 1 + 2z^2$$

Se despeja la función generadora

$$F(z) = \frac{2z^2 - 3z + 1}{-4z^3 + 8z^2 - 5z + 1}$$

Simplificamos

$$F(z) = \frac{(2z-1)(z-1)}{(2z-1)^2(1-z)}$$

Finalmente, se obtiene que el resultado es el siguiente

$$\boxed{F(z) = \frac{1}{1-2z}}$$

A partir de la función generadora, se hallará la función f_n que describe la secuencia. Aplicando la propiedad de escala de las funciones generadoras,

$$G(z) = \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

$$G(2z) = \sum_{n\geq 0} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$$

De igual manera,

$$F(z) = G(2z) = \sum_{n\geq 0} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$$

La manera de resaltar los coeficientes de una función generadora es

$$[z^n]F(z) = f_n$$

Por consiguiente $f_n = 2^n$. Por medio de una expansión por series de Taylor, se comprueba que el resultado corresponde a lo esperado.

1.2. Ejemplo 2

Dada la secuencia $\{n\}_{n\geq 0}$. Halle su función generadora ordinaria. Definamos la función generadora que queremos hallar

$$\langle 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \rangle$$

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} nz^n$$

Partamos de la función generadora base.

$$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Aplicamos la propiedad de la derivada (derivar ambas partes de la ecuación).

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}; \quad \text{Primera derivada.}$$

$$\sum_{n\geq 0} nz^n + \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 0} nz^n + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 0} nz^n = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z}$$

Simplificando,

$$\sum_{n\geq 0} nz^n = \frac{1-(1-z)}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 0} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Finalmente,

$$\boxed{F(z) = \frac{z}{(1-z)^2}}$$

1.3. Ejemplo 3

Dada la secuencia $\{n^2\}_{n\geq 1}$. Halle su función generadora ordinaria. Definamos la función generadora que queremos hallar

$$\langle 0, 1, 4, 9, 16, 25, 49, \ldots \rangle$$

$$F(z) = \sum_{n\geq 1} n^2 z^n$$

Partamos de la función generadora base.

$$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Aplicamos la propiedad de la derivada (derivar ambas partes de la ecuación).

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}; \quad \text{Primera derivada.}$$

Derivando nuevamente

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)z^n = \frac{2}{(1-z)^3}; \quad \text{Segunda derivada.}$$

Se desplaza hacia la derecha

$$\sum_{n-1\geq 0}(n-1+1)(n-1+2)z^{n-1} = \frac{2}{(1-z)^3}$$

$$\sum_{n\geq 1} n(n+1)z^n = \frac{2z}{(1-z)^3}$$

$$\sum_{n\geq 1} n^2 z^n + \underbrace{\sum_{n\geq 1} nz^n}_{G(z)} = \frac{2z}{(1-z)^3}$$

Hallemos $G(z)$.
Partamos de

$$\sum_{n\geq 0} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Desplacemos hacia la derecha 1 unidad

$$z\sum_{n-1\geq 0}(n-1)z^{n-1} = \frac{z^2}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 1} nz^n = \frac{z^2}{(1-z)^2} + \sum_{n\geq 1} z^n$$

$$\sum_{n\geq 1} nz^n = \frac{z^2}{(1-z)^2} + \frac{z}{1-z}$$

$$\sum_{n\geq 1} nz^n = \frac{z^2}{(1-z)^2} + \frac{z(1-z)}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 1} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

De este modo

$$G(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Continuando el ejercicio principal

$$\sum_{n\geq 1} n^2 z^n = \frac{2z}{(1-z)^3} - G(z)$$

$$\sum_{n\geq 1} n^2 z^n = \frac{2z}{(1-z)^3} - \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 1} n^2 z^n = \frac{2z}{(1-z)^3} - \frac{z(1-z)}{(1-z)^3}$$

$$\sum_{n\geq 1} n^2 z^n = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}$$

Finalmente,

$$\boxed{F(z) = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}}$$

Nuevamente, al aplicar expansión por series de Taylor, se comprueba que el resultado es el correcto.

1.4. Ejemplo 4

Hallemos G(z) del ejercicio anterior, partiendo de otra función generadora.

$$\langle 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \rangle$$

$$G(z) = \sum_{n\geq 1} n z^n$$

Partamos de la siguiente OGF:

$$\sum_{n\geq m} \binom{n}{m} z^n = \frac{z^m}{(1-z)^{m+1}}$$

Para $m = 1$

$$\sum_{n\geq 1}\binom{n}{1}z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 1}\left[\frac{n!}{1!(n-1)!}\right]z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 1}\left[\frac{n(n-1)!}{1(n-1)!}\right]z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 1} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

1.5. Ejemplo 5

Dada la secuencia $\{n\}_{n\geq 0;\ n \bmod 2=0}$. Halle su función generadora ordinaria. Definamos la función generadora que queremos hallar

$$F(z) = \sum_{n\geq 0;\ n \bmod 2=0} nz^n$$

Descubramos la secuencia que sigue

$$\langle 0, 0, 2, 0, 4, 0, 6, \ldots\rangle$$

Reescribo mi función generadora, de modo que imprima la secuencia de números pares

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} 2nz^{2n}$$

Partamos de una función generadora cualquiera.

$$\sum_{n\geq 0} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Multiplicamos por 2 ambas partes

$$G(z) = \sum_{n\geq 0} 2nz^n = \frac{2z}{(1-z)^2}$$

¿Quién es $G(z^2)$?

$$G(z^2) = \sum_{n\geq 0} 2nz^{2n} = \frac{2z^2}{(1-z^2)^2} = F(z)$$

Finalmente

$$\boxed{F(z) = \frac{2z^2}{(1-z^2)^2}}$$

Al aplicar la expansión por series de Taylor, se comprueba que el resultado es el correcto.

1.6. Ejemplo 6

Dada la secuencia $\{3n^2\}_{n\geq 2;\ n \bmod 2=1}$. Halle su función generadora ordinaria.

Definamos secuencia y la función generadora que queremos hallar

$$\langle 0, 0, 0, 3\cdot 3^2, 0, 3\cdot 5^2, 0, 3\cdot 7^2, \ldots\rangle$$

$$F(z) = \sum_{n\geq 2;\ n \bmod 2=1} 3n^2 z^n$$

Nos deshacemos del módulo

$$F(z) = \sum_{n\geq 1} 3(2n+1)^2 z^{2n+1}$$

Resolvemos

$$F(z) = z\sum_{n\geq 1} 3(4n^2+4n+1)z^{2n}$$

$$F(z) = 12z\underbrace{\sum_{n\geq 1} n^2 z^{2n}}_{F_1(z^2)} + 12z\underbrace{\sum_{n\geq 1} nz^{2n}}_{F_2(z^2)} + 3z\underbrace{\sum_{n\geq 1} z^{2n}}_{F_3(z^2)}$$

Hallemos $F_1(z^2), F_2(z^2), F_3(z^2)$ con los resultados que obtuvimos de ejercicios anteriores.

$$F_1(z) = \sum_{n\geq 1} n^2 z^n = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}$$

$$F_1(z^2) = \sum_{n\geq 1} n^2 z^{2n} = \frac{z^4 + z^2}{(1-z^2)^3}$$

$$F_2(z) = \sum_{n\geq 1} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$F_2(z^2) = \sum_{n\geq 1} n z^{2n} = \frac{z^2}{(1-z^2)^2}$$

$$F_3(z) = \sum_{n\geq 1} z^n = \frac{z}{1-z}$$

$$F_3(z^2) = \sum_{n\geq 1} z^{2n} = \frac{z^2}{1-z^2}$$

Continuando con el ejercicio,

$$F(z) = 12z \cdot F_1(z^2) + 12z \cdot F_2(z^2) + 3z \cdot F_3(z^2)$$

$$F(z) = 12z\frac{z^4 + z^2}{(1-z^2)^3} + 12z\frac{z^2}{(1-z^2)^2} + 3z\frac{z^2}{1-z^2}$$

Simplificando se obtiene

$$\boxed{F(z) = \frac{-3z^7 + 6z^5 - 27z^3}{(z+1)^3\,(z-1)^3}}$$

Al aplicar la expansión por series de Taylor, se comprueba que el resultado es el correcto.