Universidad del Norte

Facultad de Ingeniería de Sistemas y Computación

Estructuras Discretas

Funciones Generadoras Ordinarias

26 de marzo de 2021

Profesor: Alfonso M. Mancilla Herrera,

Monitor: Enrique A. Niebles Saco.

"Don't limit yourself. Many people limit themselves to what they think they can do. You can go as far as your mind lets you. What you believe, remember, you can achieve".
– Mary Kay Ash

1. Funciones Generadoras Ordinarias

1.1. Ejemplo 10

Dada la siguiente secuencia, halle su función generadora (OGF):

$$\left\{ \sum_{0<k<n} 3^k \cdot (n-k) \right\}_{n\geq 2}$$

Reescribiendo la sumatoria

$$\left\{ \sum_{1\leq k\leq n-1} 3^k \cdot (n-k) \right\}_{n\geq 2}$$

Definamos la función generadora

$$F(z) = \sum_{n\geq 2} \underbrace{\left(\sum_{1\leq k\leq n-1} 3^k \cdot (n-k) \right) z^n}_{f_n}$$

Desplazamos k una unidad hacia la izquierda

$$F(z) = \sum_{n\geq 2} \left(\sum_{1\leq k+1\leq n-1} 3^{k+1} \cdot (n-k-1) \right) z^n$$

$$F(z) = \sum_{n\geq 2} \left(\sum_{0\leq k\leq n-2} 3^{k+1} \cdot (n-k-1) \right) z^n$$

Desplacemos n dos unidades hacia la izquierda.

$$F(z) = \sum_{n+2\geq 2} \left(\sum_{0\leq k\leq n} 3^{k+1} \cdot (n-k+1) \right) z^{n+2}$$

$$F(z) = z^2 \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n} 3^{k+1} \cdot (n-k+1) \right) z^n$$

Definimos $a_k = 3^{k+1}$ y $b_{n-k} = n - k + 1$. De igual manera, $b_n = n + 1$. Ahora, se calculará las funciones generadoras $A(z)$ y $B(z)$.

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} 3^{n+1} z^n = \frac{3}{1-3z}$$

$$B(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n = \sum_{n\geq 0} (n+1) z^n = \sum_{n\geq 0} n z^n + \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Ahora bien, la solución queda de la siguiente forma

$$F(z) = z^2 \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n} 3^{k+1} \cdot (n-k+1) \right) z^n = z^2 [A(z) \cdot B(z)]$$

Finalmente,

$$\boxed{F(z) = z^2 \cdot \frac{3}{1-3z} \cdot \frac{1}{(1-z)^2}}$$

1.2. Ejemplo 11

Dada la siguiente secuencia, halle su función generadora (OGF):

$$\left\{ \sum_{2\leq k\leq n} \binom{k}{2} \cdot 2^{n-k} \right\}_{n\geq 3}$$

Planteemos la función generadora $F(z)$

$$F(z) = \sum_{n\geq 3} \left(\sum_{2\leq k\leq n} \binom{k}{2} \cdot 2^{n-k} \right) z^n$$

Desplazamos k dos unidades hacia la izquierda

$$F(z) = \sum_{n\geq 3} \left(\sum_{2\leq k+2\leq n} \binom{k+2}{2} \cdot 2^{n-k-2} \right) z^n$$

$$F(z) = \sum_{n\geq 3} \left(\sum_{0\leq k\leq n-2} \binom{k+2}{2} \cdot 2^{n-k-2} \right) z^n$$

Desplazamos n dos unidades hacia la izquierda

$$F(z) = \sum_{n+2\geq 3} \left(\sum_{0\leq k\leq n} \binom{k+2}{2} \cdot 2^{n-k} \right) z^{n+2}$$

$$F(z) = z^2 \sum_{n\geq 1} \underbrace{\left(\sum_{0\leq k\leq n} \binom{k+2}{2} \cdot 2^{n-k} \right)}_{f_n} z^{n}$$

Pero sabemos

$$\sum_{n\geq 0} f_n z^n = f_0 z^0 + f_1 z^1 + f_2 z^2 + f_{m-1} z^{m-1} + \sum_{n\geq m} f_n z^n$$

De igual manera,

$$\sum_{n\geq m} f_n z^n = \sum_{n\geq 0} f_n z^n - f_0 z^0 - f_1 z^1 - f_2 z^2 - f_{m-1} z^{m-1}$$

Continuando con el ejercicio

$$F(z) = z^2 \cdot \left[\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n} \binom{k+2}{2} \cdot 2^{n-k} \right) z^{n} - f_0 z^0 \right]$$

Veamos quién es f_0

$$f_0 = \binom{0+2}{2} \cdot 2^{0-0} = \binom{2}{2} \cdot 2^0 = 1$$

$$F(z) = z^2 \cdot \left[\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n} \binom{k+2}{2} \cdot 2^{n-k} \right) z^{n} - 1 \right]$$

Definimos nuestras funciones $a_k = \binom{k+2}{2}$ y $b_{n-k} = 2^{n-k}$. Por lo cual, $b_n = 2^n$. Luego, se proceden a calcular las funciones generadoras de cada uno.

$$F(z) = z^2 \cdot [A(z) \cdot B(z) - 1]$$

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} \binom{n+2}{2} z^n = \frac{1}{(1-z)^3}$$

$$B(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n = \sum_{n\geq 0} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$$

Finalmente,

$$\boxed{F(z) = z^2 \cdot \left(\frac{1}{(1-z)^3} \cdot \frac{1}{1-2z} - 1 \right)}$$

1.3. Ejemplo 12

Dada la siguiente secuencia, halle su función generadora (OGF):

$$\left\{ \sum_{0 \leq k \leq n} k^2 \cdot 2^{n-k} \right\}_{n \geq 2}$$

Definimos nuestra función generadora $F(z)$

$$F(z) = \sum_{n \geq 2} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} k^2 \cdot 2^{n-k} \right) z^n$$

Reescribimos la OGF

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} k^2 \cdot 2^{n-k} \right) z^n - \sum_{0 \leq n \leq 1} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} k^2 \cdot 2^{n-k} \right) z^n$$

Resolvamos la convolución envuelta. Definimos que nuestras funciones $a_k = k^2$ y $b_{n-k} = 2^{n-k}$. Por lo cual, $b_n = 2^n$. Posteriormente, hallamos $A(z)$ y $B(z)$.

$$F(z) = A(z) \cdot B(z) - \sum_{0 \leq n \leq 1} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} k^2 \cdot 2^{n-k} \right) z^n$$

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} n^2 z^n = \frac{z^2 + z}{(1-z)^3}$$

$$B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n = \sum_{n \geq 0} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$$

Finalmente,

$$\boxed{F(z) = \frac{z^2 + z}{(1-z)^3} \cdot \frac{1}{1-2z} - z}$$

1.4. Ejemplo 13

Dada la siguiente secuencia, halle su función generadora (OGF):

$$\left\{ \sum_{0\leq k\leq n} 2^k \cdot 3^{n-k} \right\}_{n\geq 4}$$

Definimos nuestra función generadora $F(z)$

$$F(z) = \sum_{n\geq 4} \left(\sum_{0\leq k\leq n} 2^k \cdot 3^{n-k} \right) z^n$$

Reescribimos la OGF

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n} 2^k \cdot 3^{n-k} \right) z^n - \sum_{0\leq n\leq 3} \left(\sum_{0\leq k\leq n} 2^k \cdot 3^{n-k} \right) z^n$$

Resolvamos la convolución envuelta. Definimos que nuestras funciones $a_k = 2^k$ y $b_{n-k} = 3^{n-k}$. Por lo cual, $b_n = 3^n$. Posteriormente, hallamos $A(z)$ y $B(z)$.

$$F(z) = A(z) \cdot B(z) - \sum_{0\leq n\leq 3} \left(\sum_{0\leq k\leq n} 2^k \cdot 3^{n-k} \right) z^n$$

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$$

$$B(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n = \sum_{n\geq 0} 3^n z^n = \frac{1}{1-3z}$$

Finalmente,

$$\boxed{F(z) = \frac{1}{1-2z} \cdot \frac{1}{1-3z} - 1 - 5z - 19z^2 - 65z^3}$$