Universidad del Norte
Facultad de Ingeniería de Sistemas y Computación
Estructuras Discretas

Análisis Combinatorio

9 de abril de 2021

Profesor: Alfonso M. Mancilla Herrera,
Monitor: Enrique A. Niebles Saco.

"Don't limit yourself. Many people limit themselves to what they think they can do. You can go as far as your mind lets you. What you believe, remember, you can achieve".
– Mary Kay Ash

1. Análisis combinatorio

1.1. Ejercicio 1

Suponga que se encuentra en una fundación y se le ha encargado repartir dulces a 3 niños. A su disposición, cuenta con 27 caramelos idénticos. ¿De cuántas se pueden repartir esos caramelos entre los niños?

- Sin ninguna restricción.
- Con cada niño obteniendo al menos 1 caramelo.

Se comienza partiendo de un prototipo que de solución al problema.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 27; \qquad x_i \geq 0; \quad i = 1, 2, 3$$

Prototipo:

$$\_\_ \;\; \_\_ \;\; \_\_$$

Se estable el conjunto solución:

$$n(\mathbb{S}) = \left[\binom{27}{27}\binom{1}{1}\binom{3+27-1}{27}\right] = 406$$

En el caso de que cada niño tengo por lo menos un caramelo.
Prototipo:

$$\underline{\;1\;} \;\; \underline{\;1\;} \;\; \underline{\;1\;}$$

En el conjunto solución, se tiene lo siguiente:

$$n(\mathbb{S}) = \left[\binom{1}{1}\binom{1}{1}\right]^3 \cdot \left[\binom{27-3\cdot 1}{27-3\cdot 1}\binom{3+(27-3\cdot 1)-1}{27-3\cdot 1}\right] = 325$$

Solucionemos el mismo ejercicio, pero haciendo uso de funciones generadoras.

Este ejercicio también puede ser resulto mediante OGF, para esto es necesario definir la función que se requiere hallar. En este caso, f_n representa el número maneras que se tiene para repartir n caramelos.

$$S_1 + S_2 + S_3 = n; \qquad S_i \geq 1; \quad i = 1, 2, 3$$

Definamos las OGF

$$F(z) = \left(\sum_{n\geq 1} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 1} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 1} z^n\right)$$

$$F(z) = \left(\sum_{n\geq 1} z^n\right)^3$$

$$F(z) = \left(\sum_{n\geq 0} z^n - z^0\right)^3 = \left(\sum_{n\geq 0} z^n - 1\right)^3$$

$$F(z) = \left(\frac{1}{1-z} - 1\right)^3$$

$$F(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^3 = \frac{z^3}{(1-z)^3}$$

Partiendo de una OGF ya conocida

$$\sum_{n\geq 2} \binom{n}{2} z^n = \frac{z^2}{(1-z)^3}$$

$$\sum_{n\geq 3} \binom{n-1}{2} z^n = \frac{z^3}{(1-z)^3}$$

$$f_n = [z^n]F(z) = \binom{n-1}{2}, \quad n \geq 3$$

$$f_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad n \geq 3$$

$$f_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}, \quad n \geq 3$$

En el caso de querer repartir 27 caramelos, $n = 27$. Por lo cual,

$$f_{27} = \frac{27^2 - 3 \cdot 27 + 2}{2} = 325$$

Hagamos el caso de que cada niño tenga al menos 2 caramelos.

$$S_1 + S_2 + S_3 = n; \qquad S_i \geq 2; \quad i = 1, 2, 3$$

$$F(z) = \left(\sum_{n\geq 2} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 2} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 2} z^n\right)$$

$$F(z) = \left(\sum_{n\geq 2} z^n\right)^3$$

Partiendo de la función generadora ya conocida

$$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Desplazamos 2 unidades hacia la derecha

$$\sum_{n\geq 2} z^n = \frac{z^2}{1-z}$$

Continuando con el ejercicio,

$$F(z) = \left(\frac{z^2}{1-z}\right)^3 = \frac{z^6}{(1-z)^3}$$

Se parte de una OGF conocida

$$\sum_{n\geq 2} \binom{n}{2} z^n = \frac{z^2}{(1-z)^3}$$

Desplazo 4 unidades hacia la derecha

$$\sum_{n\geq 6} \binom{n-4}{2} z^n = \frac{z^6}{(1-z)^3}$$

$$f_n = [z^n]F(z) = \binom{n-4}{2}, \quad n \geq 6$$

$$f_n = \frac{(n-4)(n-5)}{2}, \quad n \geq 6$$

$$f_n = \frac{n^2 - 9n + 20}{2}, \quad n \geq 6$$

En el caso de querer repartir 27 caramelos, $n = 27$. Por lo cual,

$$f_{27} = \frac{27^2 - 9 \cdot 27 + 20}{2} = 253$$

1.2. Ejercicio 2

Suponga que se encuentra en una fundación y se le ha encargado repartir dulces a 3 niños. A su disposición, cuenta con n caramelos idénticos. Asuma que dos niños deben tener al menos 1 caramelos; mientras que el otro, debe tener una cantidad impar de estos.

$$S_1 + S_2 + S_3 = n; \qquad S_1 \geq 1, \quad S_2 \geq 1, \quad S_3 \mod 2 = 1$$

Planteamos la función generadora que describe el conjunto solución del ejercicio

$$F(z) = \left(\sum_{n\geq 1} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 1} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n \mod 2=1} z^n\right)$$

$$F(z) = \left(\sum_{n\geq 1} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 1} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1-(-1)^n}{2} z^n\right)$$

$$F(z) = \left(\sum_{n\geq 1} z^n\right)^2 \cdot \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1-(-1)^n}{2} z^n\right)$$

Para la segunda función generadora, se tiene que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1-(-1)^n}{2} z^n = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{n\geq 0} z^n - \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}\right]$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1-(-1)^n}{2} z^n = \frac{z}{1-z^2}$$

Continuando el ejercicio

$$F(z) = \underbrace{\frac{z^2}{(1-z)^2}}_{A(z)} \cdot \underbrace{\frac{z}{1-z^2}}_{B(z)} = A(z) \cdot B(z)$$

Recordemos que el producto de dos OGF, se traduce como una convolución de sus funciones.

$$A(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2}$$

Para hallar a_n, se partirá de una una OGF ya conocida

$$\sum_{n\geq 1} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Se desplaza una unidad hacia la derecha

$$\sum_{n\geq 2} (n-1)z^n = \frac{z^2}{(1-z)^2}$$

De aquí, se deduce que $a_n = n - 1$. y $b_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$.

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n-2} \frac{1-(-1)^k}{2} \cdot (n-k-1) \right) z^n$$

De este modo, se concluye que

$$f_n = \sum_{0\leq k\leq n-2} \frac{1-(-1)^k}{2} \cdot (n-k-1)$$

Para $n = 27$

$$f_{27} = \sum_{0\leq k\leq 27-2} \frac{1-(-1)^k}{2} \cdot (27-k-1) = 169$$

Se comprueba el resultado con Python.

```python
solucion = [True for x1 in range(1, 28) for x2 in range(1, 28) for x3 in range(0, 28) if x1 + x2 + x3 == 27 and x3 % 2 == 1]

def suma(n):
  s = 0
  for k in range(n):
    s += (n - k - 1)*((1 - (-1)**k)/2)
  return s

print(Las maneras de repartir 27 caramelos entre 3 niños es i.format(i=suma(27)))

print(Las maneras de repartir 27 caramelos entre 3 niños es i.format(i=len(solucion)))
```