Universidad del Norte
Facultad de Ingeniería de Sistemas y Computación
Estructuras Discretas

Análisis Combinatorio

16 de abril de 2021

Profesor: Alfonso M. Mancilla Herrera,
Monitor: Enrique A. Niebles Saco.

"Don't limit yourself. Many people limit themselves to what they think they can do. You can go as far as your mind lets you. What you believe, remember, you can achieve".
– Mary Kay Ash

1. Análisis combinatorio

1.1. Ejercicio 1.

¿De cuántas maneras puede la suma de 3 dados de ocho caras dar n como resultado?

$$S_1 + S_2 + S_3 = n; \qquad 3 \leq n \leq 24; \qquad 1 \leq S_i \leq 8, \quad i = 1, 2, 3.$$

Se plante la función generadora que describe la función f_n del problema.

$$F(z) = \left(\sum_{1 \leq k \leq 8} z^k \right)^3$$

$$F(z) = \left(z^1 + z^2 + \cdots + z^8 \right)^3$$

Partiendo de la sumatoria

$$\sum_{n \geq 0} \binom{m}{n} z^n = (1 + z)^m$$

Para $m = 1$

$$G(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{1}{n} z^n = 1 - z$$

Aplicando la propiedad de suma parcial, se llega a lo siguiente:

$$\frac{G(z)}{1 - z} = \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \binom{1}{k} \right] z^n = \frac{1 - z}{1 - z} = 1$$

La sumatoria base es igual a:

$$\sum_{n \geq 0} \left[\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \binom{1}{k} \right] z^n = 1$$

A través de desplazamientos hacia la derecha se puede lograr que

$$\sum_{n\geq m}\left[\sum_{0\leq k\leq n-m}(-1)^k\binom{1}{k}\right]z^n = z^m$$

Finalmente,

$$f_n = \left\{\sum_{1\leq m\leq 8}\left[\sum_{0\leq k\leq n-m}(-1)^k\binom{1}{k}\right]\right\}^3$$

1.1.1. Otro camino:

$$F(z) = \left(\sum_{n\geq 1} z^n - \sum_{n\geq 9} z^n\right)^3$$

$$F(z) = \left(\frac{z-z^9}{1-z}\right)^3$$

$$F(z) = \frac{-z^{27}+3z^{19}-3z^{11}+z^3}{(1-z)^3}$$

Se puede partir de la siguiente OGF:

$$H(z) = \sum_{n\geq 2}\binom{n}{2}z^n = \frac{z^2}{(1-z)^3}$$

$$F(z) = -z^{25}\cdot H(z) + 3z^{17}\cdot H(z) - 3z^9\cdot H(z) + z\cdot H(z)$$

$$F(z) = -\sum_{n\geq 27}\binom{n-25}{2}z^n + 3\sum_{n\geq 19}\binom{n-17}{2}z^n - 3\sum_{n\geq 11}\binom{n-9}{2}z^n + \sum_{n\geq 3}\binom{n-1}{2}z^n$$

$$\sum_{n\geq 27}\binom{n-25}{2}z^n = \sum_{n\geq 3}\binom{n-25}{2}z^n - \sum_{3\leq n\leq 26}\binom{n-25}{2}z^n$$

$$F(z) = -\left[\sum_{n\geq 3}\binom{n-25}{2}z^n - \sum_{3\leq n\leq 26}\binom{n-25}{2}z^n\right] + 3\sum_{n\geq 19}\binom{n-17}{2}z^n - 3\sum_{n\geq 11}\binom{n-9}{2}z^n + \sum_{n\geq 3}\binom{n-1}{2}$$

$$F(z) = \sum_{n\geq 3}\left[\binom{n-1}{2} - \binom{n-15}{2}\right] z^n + \sum_{3\leq n\leq 26}\binom{n-15}{2} z^n + 3\sum_{n\geq 19}\binom{n-17}{2} z^n - 3\sum_{n\geq 11}\binom{n-9}{2} z^n$$

1.2. Ejercicio 2

Suponga que tiene dos veterinarias y una cantidad n de perros. Sea f_n las formas de repartir los perritos en las veterinarias. Calcule cuántas serían de modo que en la primera halla al menos un perro, y que en la segunda hallan al menos dos perros y una cantidad par de estos.

$$S_1 + S_2 = n; \qquad S_1 \geq 1, \qquad S_2 \geq 2; \quad S_2 \bmod 2 = 0.$$

$$F(z) = \left(\sum_{n\geq 1} z^n\right) \cdot \left(\sum_{\substack{n\geq 2 \\ n \bmod 2 = 0}} z^n\right)$$

$$F(z) = \left(\sum_{n\geq 1} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 2} \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot z^n\right)$$

$$F(z) = \frac{z}{1-z} \cdot \frac{z^2}{1-z^2}$$

Reescribiendo:

$$\sum_{n\geq 3} z^n = \frac{z^3}{1-z}$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot z^n = \frac{1}{1-z^2}$$

$$F(z) = \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{z^3}{1-z}$$

$$F(z) = \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{0\leq k\leq n-3} \frac{1+(-1)^k}{2} \cdot 1\right] z^n$$

De este modo, la función f_n queda de la siguiente manera:

$$\boxed{f_n = \sum_{0 \le k \le n-3} \frac{1 + (-1)^k}{2}; \qquad n \ge 3.}$$