Universidad del Norte
Facultad de Ingeniería de Sistemas y Computación
Estructuras Discretas

Funciones Generadoras Ordinarias

19 de marzo de 2021

Profesor: Alfonso M. Mancilla Herrera,
Monitor: Enrique A. Niebles Saco.

"Don't limit yourself. Many people limit themselves to what they think they can do. You can go as far as your mind lets you. What you believe, remember, you can achieve".
– Mary Kay Ash

1. Funciones Generadoras Ordinarias

1.1. Ejemplo 7

Dada la secuencia, halle su función generadora.

$$\left\{\sum_{0\leq k\leq n} k^2\right\}_{n\geq 0}$$

Definamos nuestra función generadora ordinaria F(z):

$$F(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n} k^2\right)\cdot z^n$$

Recordemos la propiedad de la convolución

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n} a_k\cdot b_{n-k}\right)\cdot z^n = A(z)\cdot B(z)$$

Partiendo de nuestro ejercicio, definimos $a_k = k^2$, y $b_{n-k} = 1$. Esto que implica que $b_k = 1$.

Ahora calculemos $A(z)$ y $B(z)$:

$$A(z) = \sum_{k\geq 0} k^2\cdot z^k$$

Para resolver $A(z)$, partiremos de:

$$\sum_{k\geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}$$

Derivamos dos veces la OGF escogida, de modo que

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)z^k = \frac{1}{(1-z)^2}; \quad \text{Primera derivada.}$$

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)(k+2)z^k = \frac{2}{(1-z)^3}; \quad \text{Segunda derivada.}$$

$$\sum_{k\geq 0}(k^2+3k+2)z^k = \frac{2}{(1-z)^3}$$

Separamos las sumatorias

$$\underbrace{\sum_{k\geq 0} k^2 \cdot z^k}_{A(z)} + \sum_{k\geq 0} 3k \cdot z^k + \sum_{k\geq 0} 2 \cdot z^k = \frac{2}{(1-z)^3}$$

$$A(z) = \frac{2}{(1-z)^3} - 3\sum_{k\geq 0} k \cdot z^k - \sum_{k\geq 0} 2 \cdot z^k$$

$$A(z) = \frac{2}{(1-z)^3} - 3 \cdot \frac{z}{(1-z)^2} - 2 \cdot \frac{1}{1-z}$$

$$A(z) = \frac{2}{(1-z)^3} - 3(1-z) \cdot \frac{z}{(1-z)^3} - 2(1-2z+z^2) \cdot \frac{1}{(1-z)^3}$$

$$A(z) = \frac{2-3z+3z^2-2+4z-2z^2}{(1-z)^3}$$

$$A(z) = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}$$

Ahora debemos hallar la función generadora de b_k

$$B(z) = \sum_{k\geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}$$

$$A(z) \cdot B(z) = \frac{z^2+z}{(1-z)^3} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{z^2+z}{(1-z)^4}$$

$$F(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n} k^2\right) \cdot z^n = \frac{z^2+z}{(1-z)^4}$$

Finalmente,

$$\boxed{F(z) = \frac{z^2+z}{(1-z)^4}}$$

1.2. Ejemplo 8

Dada la secuencia, halle su función generadora.

$$\left\{ \sum_{0\leq k\leq n} 2^k \cdot (n-k) \right\}_{n\geq 0}$$

Se plantea la OGF

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n} 2^k \cdot (n-k) \right) \cdot z^n = A(z) \cdot B(z)$$

Definimos nuestro $a_k = 2^k$, y nuestro $b_{n-k} = n-k$. Por lo tanto, $b_k = k$.
Definamos las funciones generadoras de a_k y b_k

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_k z^n = \sum_{n\geq 0} 2^k \cdot z^n = \frac{1}{1-2z}$$

$$B(z) = \sum_{n\geq 0} b_k z^n = \sum_{n\geq 0} k \cdot z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Finalmente,

$$F(z) = A(z) \cdot B(z) = \frac{1}{1-2z} \cdot \frac{z}{(1-z)^2}$$

Al realizar la expansión por series de Taylor, se comprueba que el resultado es el correcto.

1.3. Ejemplo 9

Dada la siguiente secuencia

$$\left\{ n^2 \cdot 3^{n+5} \right\}_{n\geq 2}$$

Definamos la OGF:

$$F(z) = \sum_{n\geq 2} n^2 \cdot 3^{n+5} \cdot z^n$$

Partiremos de una OGF ya conocida

$$\sum_{n\geq 2}\binom{n}{2}z^n = \frac{z^2}{(1-z)^3}$$

$$\sum_{n\geq 2}\frac{n!}{2!(n-2)!}z^n = \frac{z^2}{(1-z)^3}$$

$$\sum_{n\geq 2}\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}z^n = \frac{z^2}{(1-z)^3}$$

$$\sum_{n\geq 2}\frac{n(n-1)}{2}z^n = \frac{z^2}{(1-z)^3}$$

$$\sum_{n\geq 2}(n^2-n)z^n = \frac{2z^2}{(1-z)^3}$$

$$\sum_{n\geq 2}n^2z^n = \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \underbrace{\sum_{n\geq 2}nz^n}_{G(z)}$$

Calculamos $G(z)$

$$G(z) = \sum_{n\geq 2}nz^n$$

Partamos de uno ya conocido, y desplacemos 1 unidad hacia la derecha

$$\sum_{n\geq 1}nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 2}(n-1)z^{n-1} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 2}(n-1)z^n = \frac{z^2}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 2}nz^n = \frac{z^2}{(1-z)^2} + \sum_{n\geq 2}z^n$$

$$\sum_{n\geq 2}nz^n = \frac{z^2}{(1-z)^2} + \frac{z^2}{1-z}$$

$$\sum_{n\geq 2} nz^n = \frac{z^2}{(1-z)^2} + \frac{z^2(1-z)}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 2} nz^n = \frac{2z^2 - z^3}{(1-z)^2}$$

Una ves calculado $G(z)$, se continúa el ejercicio

$$\sum_{n\geq 2} n^2 z^n = \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{2z^2 - z^3}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 2} n^2 z^n = \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{(2z^2 - z^3)(1-z)}{(1-z)^3}$$

$$\sum_{n\geq 2} n^2 z^n = \frac{2z^2 + 2z^2 - 2z^3 - z^3 + z^4}{(1-z)^3}$$

$$\sum_{n\geq 2} n^2 z^n = \frac{z^4 - 3z^3 + 4z^2}{(1-z)^3}$$

Escalamos el resultado anterior

$$\sum_{n\geq 2} n^2 3^n z^n = \frac{(3z)^4 - 3(3z)^3 + 4(3z)^2}{(1-3z)^3}$$

Multiplicamos ambas partes de la ecuación por 3^5

$$\sum_{n\geq 2} n^2 3^{n+5} z^n = 3^5 \cdot \frac{(3z)^4 - 3(3z)^3 + 4(3z)^2}{(1-3z)^3}$$

Finalmente,

$$\boxed{F(z) = \frac{243\left(81z^4 - 81z^3 + 36z^2\right)}{\left(1-3z\right)^3}}$$

Por medio de una expansión por series de Taylor, se comprueba que el resultado hallado es el correcto.