Universidad del Norte

IST 4330 - ESTRUCTURAS DISCRETAS

Profesor: Alfonso Mancilla Herrera.

Monitor: Enrique Niebles Saco.

26 de febrero de 2021

Relaciones de recurrencia pt. II

Ejercicios planteados en la sesión anterior:

1. $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; \quad f_0 = 3, f_1 = 6; \quad n \geq 2.$
2. $f_n = 2f_{n-2} + f_{n-1}; \quad f_0 = f_1 = 1; \quad n \geq 2.$
3. $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2} - 2f_{n-3}; \quad f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 2; \quad n \geq 3.$
4. $f_n = \sqrt{1 + f_{n-1}^2}; \quad f_0 = 0; \quad n \geq 1.$
5. $f_n = 2f_{n-1} + n; \quad f_0 = 0; \quad n \geq 1.$
6. $f_n = 6f_{n-1} - 9f_{n-2}; \quad f_0 = 0, f_1 = 1; \quad n \geq 2.$
7. $f_n = \frac{3}{2}f_{n-1} + 4; \quad f_0 = 2; \quad n \geq 1.$
8. $f_n = \sqrt{\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}}; \quad f_0 = 2^3, f_1 = 2^{-3/2}; \quad n \geq 2.$

Ejemplo 1

Resolvamos la primera RR. Hallemos su expresión cerrada o no recurrente.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; \quad f_0 = 3, f_1 = 6; \quad n \geq 2$$

Analizando la RR, nos damos cuenta que es **lineal, homogénea y constante.** Razón por la cual podemos utilizar el método de coeficientes constantes.

$$f_n = \sum_{j=1}^{nr} \left(\sum_{i=0}^{m_j - 1} b_{i+1} n^i r_j^n \right)$$

Comencemos: Donde encontremos una función predecesora, haremos un cambio de variable, cambiando el subíndice a ser exponente:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

Igualamos a 0, y se obtiene

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$$

Ahora sacamos como factor común el exponente más distante, es decir:

$$x^{n-2}(x^2 - x - 1) = 0$$

Dado que $x^{n-2} \neq 0$. Nos queda entonces que $x^2 - x - 1 = 0$. Por lo cual se deben hallar sus raíces, aplicando la fórmula general.

Nota:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Una vez aplicada la fórmula, nos quedan las siguientes raíces:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La multiplicidad de cada raíz es 1. Aplicando el teorema de coeficientes constantes, tenemos que:

$$f_n = b_1 n^0 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b_2 n^0 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Simplificando,

$$f_n = b_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Utilizando los casos bases, se llega a lo siguient:

Para $f_0 = 3$

$$f_0 = b_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + b_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 3$$

$$\underbrace{b_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0}_{1} + \underbrace{b_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}_{1} = 3$$

$$b_1 + b_2 = 3; \implies b_1 = 3 - b_2$$

Para $f_1 = 6$

$$f_1 = (3 - b_2)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + b_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 6$$

Aplicando álgebra básica:

$$3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - b_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 6$$
$$b_2\left[-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = 6 - 3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Resolviendo,

$$b_2 = \frac{15 - 9\sqrt{5}}{10}$$

Por lo cual,

$$b_1 = 3 - b_2 = 3 - \frac{15 - 9\sqrt{5}}{10} = \frac{15 + 9\sqrt{5}}{10}$$

Una vez encontradas las constantes, se reemplazan en f_n, y se ha hallado la versión cerrada de la RR.

$$f_n = b_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Finalmente,

$$\boxed{f_n = \left(\frac{15 + 9\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{15 - 9\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

In [2]:
```
import numpy as np

def recurrencia(n):
  if n == 0: return 3
  elif n == 1: return 6
  return recurrencia(n-1) + recurrencia(n-2)

def no_recurrente(n):
  return int((15+9*np.sqrt(5))/10 * ((1+np.sqrt(5))/2)**n + (15-9*np.sqrt(5))/10 * ((1-np.sqrt(5))/2)**n)

for i in range(0, 9):
  print("n={i}. Resultado recurrente: {rr}\t Resultado no recurrente: {nrr}".format(i=i, rr=recurrencia(i), nrr=no
_recurrente(i)))
```

```
n=0. Resultado recurrente: 3     Resultado no recurrente: 3
n=1. Resultado recurrente: 6     Resultado no recurrente: 6
n=2. Resultado recurrente: 9     Resultado no recurrente: 9
n=3. Resultado recurrente: 15    Resultado no recurrente: 15
n=4. Resultado recurrente: 24    Resultado no recurrente: 24
n=5. Resultado recurrente: 39    Resultado no recurrente: 39
n=6. Resultado recurrente: 63    Resultado no recurrente: 63
n=7. Resultado recurrente: 102   Resultado no recurrente: 102
n=8. Resultado recurrente: 165   Resultado no recurrente: 165
```

Ejemplo 2

Resolvamos la segunda RR:

$$f_n = 2f_{n-2} + f_{n-1}; \quad f_0 = f_1 = 1; \quad n \geq 2.$$

Dada a sus propiedades, lineal, homogénea y constante. Utilizaremos el método de los coeficientes.

Nuevamente, se cambian los subíndices por exponentes:

$$x^n = 2x^{n-2} + x^{n-1}$$

Se saca como factor el exponente más lejano:

$$x^n - 2x^{n-2} - x^{n-1} = 0$$
$$x^{n-2}(x^2 - x - 2) = 0$$

Dado que $x^{n-2} \neq 0$, entonces $x^2 - x - 2 = 0$. Hallando las raíces:

$$(x-2)(x+1) = 0; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -1.$$

Una vez halladas las raíces, se procede a hallar la ecuación con sus coeficientes.

$$f_n = \sum_{j=1}^{nr} \left(\sum_{i=0}^{m_j - 1} b_{i+1} n^i r_j^n \right)$$
$$f_n = b_1 n^0 (2)^n + b_2 n^0 (-1)^n$$

Simplificando

$$f_n = b_1 (2)^n + b_2 (-1)^n$$

Se iguala a los casos bases, y se despeja cada coeficiente:

Para $f_0 = 1$

$$f_0 = b_1(2)^0 + b_2(-1)^0 = 1$$
$$f_0 = b_1 + b_2 = 1; \quad b_1 = 1 - b_2$$

Para $f_1 = 1$

$$f_1 = (1 - b_2)(2)^1 + b_2(-1)^1 = 1$$
$$(1 - b_2)(2) + b_2(-1) = 1$$
$$2 - 2b_2 - b_2 = 1$$

$$3b_2 = 1; \quad b_2 = \frac{1}{3}$$

Hallamos b_1

$$b_1 = 1 - b_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Reemplazamos los coeficientes encontrados en la función no recurrente f_n y se simplifica en caso de ser necesario:

$$f_n = \frac{2}{3}(2)^n + \frac{1}{3}(-1)^n$$

$$\boxed{f_n = \frac{(2)^{n+1} + (-1)^n}{3}}$$

Se comprueba que la solución hallada es la correcta, por medio de su comparación con la versión no recurrente. Se recomienda hacer el mismo proceso por

In [4]:
```
def recurrencia(n):
  if n == 0: return 1
  elif n == 1: return 1
  return 2*recurrencia(n-2) + recurrencia(n-1)

def no_recurrente(n):
  return int((2**(n+1)+(-1)**n)/3)

for i in range(0, 9):
  print("n={i}. Resultado recurrente: {rr}\t Resultado no recurrente: {nrr}".format(i=i, rr=recurrencia(i), nrr=no
_recurrente(i)))
```

```
n=0. Resultado recurrente: 1     Resultado no recurrente: 1
n=1. Resultado recurrente: 1     Resultado no recurrente: 1
n=2. Resultado recurrente: 3     Resultado no recurrente: 3
n=3. Resultado recurrente: 5     Resultado no recurrente: 5
n=4. Resultado recurrente: 11    Resultado no recurrente: 11
n=5. Resultado recurrente: 21    Resultado no recurrente: 21
n=6. Resultado recurrente: 43    Resultado no recurrente: 43
n=7. Resultado recurrente: 85    Resultado no recurrente: 85
n=8. Resultado recurrente: 171   Resultado no recurrente: 171
```

Ejemplo 3

Dada la relación de recurrencia $f_n = \sqrt{\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}}; \quad f_0 = 2^3, f_1 = 2^{-3/2}; \quad n \geq 2$. Halle su versión no recurrente.

Para resolver esta RR, se utilizará un cambio de variables. Pero primero, se sacará el logaritmo en base 2 a ambas partes de la ecuación.

$$\log_2 f_n = \log_2 \left(\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\underbrace{\log_2 f_n}_{g_n} = \frac{1}{2}\log_2 \left(\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}\right)$$

En este caso, se recomienda hacer un cambio de variable de la forma:

$$g_n = \log_2 f_n$$

Recordemos que $\log_n\left(\frac{a}{b}\right) = \log_n a - \log_n b$. Entonces,

$$\underbrace{\log_2 f_n}_{g_n} = \frac{1}{2}\log_2 f_{n-2} - \frac{1}{2}\log_2 f_{n-1}$$
$$\underbrace{\log_2 f_n}_{g_n} = \frac{1}{2}\underbrace{\log_2 f_{n-2}}_{g_{n-2}} - \underbrace{\frac{1}{2}\log_2 f_{n-1}}_{g_{n-1}}$$

Reemplazando,

$$g_n = \frac{1}{2}(g_{n-2} - g_{n-1})$$
$$2g_n = g_{n-2} - g_{n-1}$$

La función resultante **sí** es lineal, homogénea y constante. Razón por la cual, se puede utilizar el método de los coeficientes. No obstante, hay que calcular los nuevos casos bases.

$$g_n = \log_2 f_n$$

Entonces

$$g_0 = \log_2 f_0 = \log_2 2^3 = 3$$
$$g_1 = \log_2 f_1 = \log_2 2^{-3/2} = -\frac{3}{2}$$

En este sentido, la nueva RR. queda de la siguiente forma:

$$2g_n = g_{n-2} - g_{n-1}; \quad g_0 = 3, g_1 = -\frac{3}{2}; \quad n \geq 2$$

Se cambian los suníndices por exponentes:

$$2x^n = x^{n-2} - x^{n-1}$$
$$x^{n-2}(2x^2 + x - 1) = 0$$

De igual forma que los ejercicios anteriores, la expresión es nula cuando $2x^2 + x - 1 = 0$.

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -1$$

Se halla la expresión g_n

$$g_n = \sum_{j=1}^{nr} \left(\sum_{i=0}^{m_j-1} b_{i+1} n^i r_j^n \right)$$
$$g_n = b_1 n^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n + b_2 n^0 (-1)^n$$
$$g_n = b_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + b_2 (-1)^n$$

Igualando a los casos bases se obtiene que:

Para $g_0 = 3$

$$g_0 = b_1 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + b_2(-1)^0 = 3$$
$$g_0 = b_1 + b_2 = 3; \quad b_1 = 3 - b_2$$

Para $g_1 = -3/2$

$$g_1 = (3 - b_2)\left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_2(-1)^1 = -\frac{3}{2}$$
$$3\left(\frac{1}{2}\right) - b_2\left(\frac{1}{2}\right) - b_2 = -\frac{3}{2}$$
$$3\left(\frac{1}{2}\right) - b_2\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$
$$3 - 3b_2 = -3$$
$$b_2 = 2; \quad b_1 = 1$$

Una vez calculados los coeficientes, se reemplzan en la función g_n

$$g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2(-1)^n$$

Nota:

$\log_a b = c$ y $a^c = b$

Recordando que

$$g_n = \log_2 f_n$$

Nos queda lo siguiente

$$\boxed{f_n = 2^{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2(-1)^n\right]}}$$

Una vez hallada f_n, se comprueba que corresponde a lo esperado.

In [6]:
```python
import numpy as np

def recurrencia(n):
  if n == 0: return 2**3
  elif n == 1: return 2**(-3/2)
  return np.sqrt(recurrencia(n-2)/recurrencia(n-1))

def no_recurrente(n):
  return 2**((0.5)**n + 2*(-1)**n)

for i in range(0, 9):
  print("n={i}. Resultado recurrente: {rr}\t Resultado no recurrente: {nrr}".format(i=i, rr=recurrencia(i), nrr=no
_recurrente(i)))
```

```
n=0. Resultado recurrente: 8     Resultado no recurrente: 8.0
n=1. Resultado recurrente: 0.3535533905932738    Resultado no recurrente: 0.3535533905932738
n=2. Resultado recurrente: 4.756828460010884     Resultado no recurrente: 4.756828460010884
n=3. Resultado recurrente: 0.2726269331663144    Resultado no recurrente: 0.2726269331663144
n=4. Resultado recurrente: 4.177095129709655     Resultado no recurrente: 4.177095129709655
n=5. Resultado recurrente: 0.2554742871635292    Resultado no recurrente: 0.25547428716352916
n=6. Resultado recurrente: 4.043557144206801     Resultado no recurrente: 4.043557144206802
n=7. Resultado recurrente: 0.25135747527820074   Resultado no recurrente: 0.2513574752782007
n=8. Resultado recurrente: 4.010845100200809     Resultado no recurrente: 4.01084510020081
```