Universidad del Norte

IST 4330 - ESTRUCTURAS DISCRETAS

Profesor: Alfonso Mancilla Herrera.

Monitor: Enrique Niebles Saco.

27 de febrero de 2021

Relaciones de recurrencia pt. III

Continuemos resolviendo ejercicios de RR.

Ejemplo 1

Dada la RR, halle su expresión cerrada.

$$f_n = \sqrt{1 + f_{n-1}^2}; \quad f_0 = 0; \quad n \geq 1$$

Dada que la expresión no es lineal ni homogénea, nos queda resolverlo por el método de iteraciones.

El primer paso propuesto para la solución, es elevar ambas partes al cuadrado.

$$f_n = \sqrt{1 + f_{n-1}^2}; \quad f_0 = 0; \quad n \geq 1$$

$$f_n^2 = 1 + f_{n-1}^2; \quad f_0 = 0; \quad n \geq 1$$

Dada que la expresión es cuadrática y no lineal, se recomienda hacer un cambio de variable $g_n = f_n^2$. Y se calculan los nuevos bases:

$g_n = f_n^2$

$g_0 = f_0^2 = 0^2 = 0.$

$$g_n = 1 + g_{n-1}; \quad g_0 = 0; \quad n \geq 1$$

Una vez se tiene la nueva ecuación, se procede a resolver:

Para k = 1:

$$g_n = 1 + g_{n-1}; \quad g_0 = 0; \quad n \geq 1$$

Para k = 2:

$$g_n = 1 + \underbrace{(1 + g_{(n-1)-1})}_{g_{n-1}}$$

$$g_n = 1 + (1 + g_{n-2})$$

$$g_n = 2 + g_{n-2}$$

Para k = 3:

$$g_n = 1 + \underbrace{(2 + g_{(n-1)-2})}_{g_{n-2}}$$

$$g_n = 3 + g_{n-3}$$

Se realizan tantas iteraciones sean necesarias como para encontrar un patrón. En este caso, la ecuación parámetrica es la siguiente:

$$g_n = k + g_{n-k}$$

Para resolver, dado que ya está simplificada la expresión, procederemos a igualar los casos bases.

Para $g_{n-k} = g_0 = 0$. Esto implica que $n - k = 0$, por consiguiente $n = k$. Reemplazamos:

$$g_n = n + 0 = n$$

En este sentido $g_n = n$. Dado que el ejercicio pide resolver f_n, debemos recordar que el cambio de variable fue $g_n = f_n^2$. Entonces:

$$f_n = \sqrt{g_n}$$

$$\boxed{f_n = \sqrt{n}}$$

Ahora sólo queda comprobar que la solución hallada se cumple para todo n. Se deja como labor del estudiante, realizarlo por indcucción matemática.

In [1]:
```
import numpy as np

def recurrencia(n):
  if n == 0: return 0
  return np.sqrt(1+recurrencia(n-1)**2)

def no_recurrente(n):
  return np.sqrt(n)

for i in range(0, 9):
  print("n={i}. Resultado recurrente: {rr}\tResultado no recurrente: {nrr}".format(i=i, rr=recurrencia(i), nrr=no_recu
```

```
n=0. Resultado recurrente: 0    Resultado no recurrente: 0.0
n=1. Resultado recurrente: 1.0  Resultado no recurrente: 1.0
n=2. Resultado recurrente: 1.4142135623730951   Resultado no recurrente: 1.4142135623730951
n=3. Resultado recurrente: 1.7320508075688774   Resultado no recurrente: 1.7320508075688772
n=4. Resultado recurrente: 2.0  Resultado no recurrente: 2.0
n=5. Resultado recurrente: 2.23606797749979     Resultado no recurrente: 2.23606797749979
n=6. Resultado recurrente: 2.4494897427831783   Resultado no recurrente: 2.449489742783178
n=7. Resultado recurrente: 2.6457513110645907   Resultado no recurrente: 2.6457513110645907
n=8. Resultado recurrente: 2.8284271247461903   Resultado no recurrente: 2.8284271247461903
```

Ejemplo 2

Dada la RR, halle su expresión no recurrente.

$$f_n = 6f_{n-1} - 9f_{n-2}; \quad f_0 = 0, f_1 = 1; \quad n \geq 2.$$

Puesto que la RR es lineal, homogénea y constante, se resolverá por el método de los coeficientes.

$$f_n = \sum_{j=1}^{nr} \left(\sum_{i=0}^{m_j-1} b_{i+1} n^i r_j^n \right)$$

Cambiemos los subíndices por exponentes.

$$x^n = 6x^{n-1} - 9x^{n-2}$$

Igualamos a 0.

$$x^n - 6x^{n-1} + 9x^{n-2} = 0$$

Se saca como factor común el exponente más lejano.

$$x^{n-2}(x^2 - 6x + 9) = 0$$

Debido a que $x^{n-2} \neq 0$. Nos queda $x^2 - 6x + 9 = 0$. Hallamos las raíces:

$$(x-3)^2 = 0; \quad x_1 = x_2 = 3$$

Dado que las raíces encontradas tienen multiplicidad mayor que 1. La función f_n queda de la siguiente forma:

$$f_n = b_1 n^0 (3)^n + b_2 n^1 (3)^n$$

$$f_n = b_1 (3)^n + b_2 n(3)^n$$

Igualamos a los casos bases.

Para $f_0 = 0$

$$f_0 = b_1 (3)^0 + b_2 (0)(3)^0 = 0$$

$$b_1 = 0$$

Para $f_1 = 1$

$$f_1 = 3b_2 = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{3}$$

Una vez calculados los coeficientes, se reemplazan en la función f_n

$$f_n = b_1 (3)^n + b_2 n(3)^n$$

$$f_n = \frac{1}{3} n(3)^n = 3^{-1} n(3)^n = n(3)^{n-1}$$

$$\boxed{f_n = n(3)^{n-1}}$$

Ahora sólo queda comprobar que la solución hallada se cumple para todo n. Se deja como labor del estudiante, realizarlo por indcucción matemática.

```
In [2]: def recurrencia(n):
          if n == 0: return 0
          elif n == 1: return 1
          return 6*recurrencia(n-1)-9*recurrencia(n-2)

        def no_recurrente(n):
          return n*(3)**(n-1)

        for i in range(0, 9):
          print("n={i}. Resultado recurrente: {rr}\tResultado no recurrente: {nrr}".format(i=i, rr=recurrencia(i), nrr=no_recu
```

```
n=0. Resultado recurrente: 0    Resultado no recurrente: 0.0
n=1. Resultado recurrente: 1    Resultado no recurrente: 1
n=2. Resultado recurrente: 6    Resultado no recurrente: 6
n=3. Resultado recurrente: 27   Resultado no recurrente: 27
n=4. Resultado recurrente: 108  Resultado no recurrente: 108
n=5. Resultado recurrente: 405  Resultado no recurrente: 405
n=6. Resultado recurrente: 1458 Resultado no recurrente: 1458
n=7. Resultado recurrente: 5103 Resultado no recurrente: 5103
n=8. Resultado recurrente: 17496        Resultado no recurrente: 17496
```

Ejercicios propuestos para practicar

1. $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2} - 2f_{n-3}; \quad f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 2; \quad n \geq 3.$
2. $f_n = 2f_{n-1} + n; \quad f_0 = 0; \quad n \geq 1.$
3. $f_n = \frac{3}{2}f_{n-1} + 4; \quad f_0 = 2; \quad n \geq 1.$
4. Resolver ejercicios presentados en el texto guía.
5. Resolver nuevamente los ejercicios ya desarrollados.
6. Probar por inducción matemática que las soluciones halladas se cumplen para todo n.