Universidad del Norte
Facultad de Ingeniería de Sistemas y Computación
Estructuras Discretas

Relaciones de recurrencia

5 de marzo de 2022

Profesor: Alfonso M. Mancilla Herrera,
Monitor: Enrique A. Niebles Saco.

"Don't limit yourself. Many people limit themselves to what they think they can do. You can go as far as your mind lets you. What you believe, remember, you can achieve".
– Mary Kay Ash

1. Relaciones de Recurrencia

1.1. Definición

Una Relación de Recurrencia (RR) es una ecuación escrita en términos de sus predecesores. Esta es una expresión **no** cerrada, de la cual se puede hallar una expresión cerrada equivalente.

$$f_n = f(n) = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot f_{n-j}$$

Donde j hace referencia a los predecesores, y c_j al coeficiente del predecesor. Así mismo, el grado de la RR está determino por k, al ser el predecesor más distante o lejano. A su vez, la RR tendrá tantos casos bases como indique su grado. Es importante saber que estos casos bases, no son generados por la RR.

Por otro lado, al ser expresiones **no cerradas** son términos que están escritos en función de predecesores. Por ejemplo, las siguientes funciones: $f_n = c_1 \cdot f_{n-1} + c_2 \cdot f_{n-2}$. Mientras que una expresión **cerrada** es aquella que depende inmediatamente de n, y no de algún predecesor. Por ejemplo, $f_n = 2^n$, $f_n = 2n + 1$, entre otras.

1.2. Características

Las relaciones de recurrencia pueden tener las siguientes características.

1. **Lineal:** Cuando el exponente de los predecesores es de grado uno, es decir, f^1_{n-1} y así.

2. **Homogénea:** Cuando todos los términos de la ecuación dependen de un predecesor.

3. **Coeficientes constantes:** Cuando los coeficientes de los predecesores son un número que no depende de n. Ejemplo: $f_n = 2f_{n-1}$

Para escoger el método que se utilizará para resolver la RR, debemos tener en cuenta las características anteriormente mencionadas. En caso de cumplir todas y cada una de ellas, el método por antonomacia es el de coeficientes constantes (fórmula general). Sino, nos queda el método de iteraciones. Las Funciones Generadoras permiten resolver cualquier RR.

1.3. Sumatorias básica

$$\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$$

$$\sum_{k=m}^{n} c = c \cdot (n - m + 1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot r^k = \frac{nr^{n+2} - (n+1)r^{n+1} + r}{(r-1)^2}$$

2. Método Iterativo

Este método se caracteriza por evaluar de forma bruta cada uno de los predecesores de la función.

2.1. Ejemplo 1

Dada la RR, halle su expresión cerrada (no recurrente)

$$f_n = f_{n-1} + 3^{n-1}; \quad f_0 = 2; \quad n \geq 1$$

Dado que la RR no es homogénea, no podemos utilizar el método de los coeficientes. Lo cual, nos limita a resolverla por el método de iteraciones.

Para $m = 1$ (Primera iteración):

$$
\begin{aligned}
f_n &= f_{n-1} + 3^{n-1}; \quad f_0 = 2; \quad n \geq 1 \\
f_n &= f_{n-1} + 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

Para $m = 2$ (Segunda iteración):

$$
\begin{aligned}
f_n &= (f_{(n-1)-1} + 3^{(n-1)-1}) + 3^{n-1} \\
f_n &= f_{n-2} + 3^{n-2} + 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

Para $m = 3$ (Tercera iteración):

$$
\begin{aligned}
f_n &= (f_{(n-1)-2} + 3^{(n-1)-2} + 3^{(n-1)-1}) + 3^{n-1} \\
f_n &= f_{n-3} + 3^{n-3} + 3^{n-2} + 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

Realizamos el proceso anterior hasta encontrar un patrón. En este caso, se cumple que:

$$f_n = f_{n-m} + \sum_{i=0}^{m-1} 3^{n-i-1}$$

Reescribamos la sumatoria en términos de una geométrica.

$$\sum_{i=0}^{m-1} 3^{n-i-1} = \sum_{i=0}^{m-1} 3^{-i} \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i$$

Según la tabla de sumatorias básicas, sabemos que el resultado de la serie geométrica es

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i; \quad a = 1, r = \frac{1}{3} \\
&\sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

De esta forma, podemos decir que:

$$\sum_{i=0}^{m-1} 3^{n-i-1} = 3^{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i = 3^{n-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

$$f_n = f_{n-m} + \sum_{i=0}^{m-1} 3^{n-i-1}$$
$$f_n = f_{n-m} + 3^{n-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

Para resolver la ecuación, se procede a parametrizarla. Esto es igualar los predecesores a sus casos bases. Por tanto, $f_{n-m} = f_0 = 2$. Para que esto se cumpla, $n - m = 0$, entonces $n = m$. Reemplazando m en la función anterior, se obtiene que:

$$f_n = f_{n-n} + 3^{n-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$
$$f_n = f_0 + 3^{n-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

Se procede a simplificar,

$$f_n = 2 + 3^{n-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$
$$f_n = 2 + 3^{n-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$
$$f_n = 2 + 3^{n-1} \cdot \frac{3 \cdot (1-\left(\frac{1}{3}\right)^n)}{2}$$
$$f_n = 2 + \frac{3^n \cdot (1-\left(\frac{1}{3}\right)^n)}{2}$$
$$f_n = 2 + \frac{3^n \cdot (1-3^{-n})}{2}$$
$$f_n = 2 + \frac{3^n - 1}{2}$$
$$\boxed{f_n = \frac{3^n + 3}{2}}$$

3. Método de Coeficientes constantes

Cuando una RR de recurrencia cumple las características de ser homogénea, lineal y de coeficientes constantes, se puede utilizar este método sin ningún inconveniente. La fórmula está dada en 1.

$$f_n = \sum_{j=1}^{nr} \left(\sum_{i=0}^{m_j - 1} c_{j+i} \cdot n^i \cdot r_j^n \right) \tag{1}$$

Donde nr es el número de raíces, m_j la multiplicidad de la raíz, c_j es el coeficiente, y r_j es la raíz en cuestión.

3.1. Ejemplo

Dada la siguiente RR, halle su versión no recurrente.

$$f_n = \sqrt{\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}}; \quad f_0 = 8, f_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad n \geq 2.$$

En un principio, la RR parece no cumplir ninguna de las características de las RR, lo indicaría que se debe resolver por el método de iteraciones. Pero, esta es una ecuación compleja cuyo resultado también sería complejo. Por lo cual, lo más conveniente es tratar de hallar una ecuación equivalente que permita simplificar el problema.

Para tratar de encontrar un reemplazo equivalente, comencemos analizando lo que tenemos. En este caso, la mejor pista está en los casos bases.

$$f_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-2} = 2^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_0 = 8 = 2^3$$

$$f_n = \sqrt{\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}} = \left(\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Por otra parte, recordemos que:

- $\log_a b^c = c \log_a b$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

- $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a b = c \implies a^c = b$

Viendo las propiedades de los logaritmos, procedemos a aplicarlas a la RR.

$$\begin{aligned}
\log_a f_n &= \log_a \left(\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\log_a f_n &= \frac{1}{2} \cdot \log_a \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} \\
2\log_a f_n &= \log_a \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} \\
2\log_a f_n &= \log_a f_{n-2} - \log_a f_{n-1} \\
2\log_2 f_n &= \log_2 f_{n-2} - \log_2 f_{n-1}
\end{aligned}$$

Procedo a hacer un cambio de variable, con el fin de simplificar el problema. Para ello,

$$g_n = \log_2 f_n$$

¿Cuáles deberían ser los predecesores en términos de la nueva variable g_n?
Para $n = n - 1$

$$g_{n-1} = \log_2 f_{n-1}$$

Para $n = n - 2$

$$g_{n-2} = \log_2 f_{n-2}$$

De esta forma, la ecuación queda como

$$2\underbrace{\log_2 f_n}_{g_n} = \underbrace{\log_2 f_{n-2}}_{g_{n-2}} - \underbrace{\log_2 f_{n-1}}_{g_{n-1}}$$

$$g_n = \frac{1}{2}g_{n-2} - \frac{1}{2}g_{n-1}$$

¿Cuáles deberían ser los casos bases en términos de la nueva variable g_n?
Para ello, despejamos f_n de g_n
Para $n = 0$

$$g_0 = \log_2 f_0 = \log_2 2^3 = 3$$

Para $n = 1$

$$g_1 = \log_2 f_1 = \log_2 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

El nuevo ejercicio es entonces

$$g_n = \frac{1}{2} g_{n-2} - \frac{1}{2} g_{n-1}; \quad g_0 = 3, g_1 = -\frac{3}{2}; \quad n \geq 2.$$

Ahora tenemos una RR de coeficientes constantes, lineal y homogénea. Por lo cual aplicaremos la fórmula correspondiente.

Comencemos haciendo un cambio de variables de subíndices a exponentes

$$x^n = \frac{1}{2} x^{n-2} - \frac{1}{2} x^{n-1}$$

Homogeneizamos, es decir, igualamos a 0.

$$x^n - \frac{1}{2} x^{n-2} + \frac{1}{2} x^{n-1} = 0$$

Ahora, sacamos factor común para hallar las raíces

$$x^{n-2} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2} x^1 - \frac{1}{2} \right) = 0$$

Nota: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$. Por ejemplo, $x^{n-2} \cdot x^2 = x^{n-2+2} = x^n$.

Dado que la ecuación está igualada a 0, implica que uno de los términos del producto, es nulo. Sabemos, que ninguna potencia puede ser nula, lo cual implica que el término nulo es la suma de potencias. Por consiguiente,

$$x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} = 0$$

Para hallar las raíces que hacen que la expresión anterior se cumplan, usaremos la fórmula general para grado 2.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazando los términos correspondientes, tenemos que

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = -1$$

En este caso tenemos 2 raíces (nr) cada una de multiplicada 1 (m_r).

$$g_n = c_1 \cdot n^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \cdot n^0 \cdot (-1)^n$$
$$g_n = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \cdot (-1)^n$$

Para terminar de hallar g_n, nos falta encontrar los coeficientes de las raíces. Para eso, serán necesarios los casos bases. En este sentido,

Para $g_0 = 3$

$$g_0 = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + c_2 \cdot (-1)^0 = 3$$
$$\implies c_1 = 3 - c_2$$

Para $g_1 = -\frac{3}{2}$

$$g_1 = (3 - c_2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + c_2 \cdot (-1)^1 = -\frac{3}{2}$$
$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}c_2 - c_2 = -\frac{3}{2}$$
$$\frac{3}{2} - \frac{3}{2}c_2 = -\frac{3}{2}$$
$$\implies c_2 = 2$$

Reemplazando se obtiene que

$$g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \cdot (-1)^n$$

Una vez hallada g_n, debemos resolver el ejercicio hallando f_n,

$$g_n = \log_2 f_n$$

$$f_n = 2^{g_n}$$

Finalmente, obtenemos que la solución del ejercicio es

$$\boxed{f_n = 2^{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\cdot(-1)^n\right]}}$$

Ejemplo cuando la raíz tiene multiplicidad distinta de 1: Supongamos que $x_{1,2} = 3$

$$g_n = c_1 \cdot n^0 \cdot (3)^n + c_2 \cdot n^1 \cdot (3)^n$$

4. Ejercicios

1. $f_n = \sqrt{1 + f_{n-1}^2}; \quad f_0 = 0; \quad n \geq 1.$
2. $f_n = \frac{3}{2} f_{n-1} + 4; \quad f_0 = 2; \quad n \geq 1.$
3. $f_n = 2^{n-1} \cdot f_{n-1} + (-1)^n; \quad f_0 = 1; \quad n \geq 1.$
4. $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; \quad f_0 = 3, f_1 = 6; \quad n \geq 2.$
5. $f_n = 2f_{n-2} + f_{n-1}; \quad f_0 = f_1 = 1; \quad n \geq 2.$
6. $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2} - 2f_{n-3}; \quad f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 2; \quad n \geq 3.$
7. $f_n = 2f_{n-1} + n; \quad f_0 = 0; \quad n \geq 1.$
8. $f_n = 6f_{n-1} - 9f_{n-2}; \quad f_0 = 0, f_1 = 1; \quad n \geq 2.$

4.1. Solución 1.

En este ejercicio, apreciamos que hay una raíz cuadrada y que los casos bases no son términos de ninguna potencia. Por lo cual, probaremos elevando ambas partes de la ecuación al cuadrado. Esto es

$$f_n^2 = 1 + f_{n-1}^2$$

Ahora, con el fin de seguir simplificando el problema, haremos un cambio de variable

$$g_n = f_n^2$$

Para $n = n - 1$,

$$g_{n-1} = f_{n-1}^2$$

De esta forma, el replanteamiento del problema queda como

$$g_n = 1 + g_{n-1}$$

¿Cuáles serían los casos bases?

$$g_0 = f_0^2 = 0$$

El nuevo problema es

$$g_n = 1 + g_{n-1}; \quad g_0 = 0; \quad n \geq 1$$

Queda como labor del estudiante terminar este ejercicio.