Universidad del Norte
Facultad de Ingeniería de Sistemas y Computación
Estructuras Discretas

Relaciones de Recurrencia - Parcial

1 de abril de 2022

Profesor: Alfonso M. Mancilla Herrera,
Monitor: Enrique A. Niebles Saco.

"Don't limit yourself. Many people limit themselves to what they think they can do. You can go as far as your mind lets you. What you believe, remember, you can achieve".
– Mary Kay Ash

1. Funciones Generadoras Ordinarias

1.1. Definición

Una Relación de Recurrencia (RR) es una ecuación escrita en términos de sus predecesores. Esta es una expresión **no** cerrada, de la cual se puede hallar una expresión cerrada equivalente.

$$f_n = f(n) = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot f_{n-j}$$

Donde j hace referencia a los predecesores, y c_j al coeficiente del predecesor. Así mismo, el grado de la RR está determino por k, al ser el predecesor más distante o lejano. A su vez, la RR tendrá tantos casos bases como indique su grado. Es importante saber que estos casos bases, no son generados por la RR.

Por otro lado, al ser expresiones **no cerradas** son términos que están escritos en función de predecesores. Por ejemplo, las siguientes funciones: $f_n = c_1 \cdot f_{n-1} + c_2 \cdot f_{n-2}$. Mientras que una expresión **cerrada** es aquella que depende inmediatamente de n, y no de algún predecesor. Por ejemplo, $f_n = 2^n$, $f_n = 2n + 1$, entre otras.

1.2. Características

Las relaciones de recurrencia pueden tener las siguientes características.

1. **Lineal:** Cuando el exponente de los predecesores es de grado uno, es decir, f_{n-1}^1 y así.
2. **Homogénea:** Cuando todos los términos de la ecuación dependen de un predecesor.
3. **Coeficientes constantes:** Cuando los coeficientes de los predecesores son un número que no depende de n. Ejemplo: $f_n = 2f_{n-1}$

Para escoger el método que se utilizará para resolver la RR, debemos tener en cuenta las características anteriormente mencionadas. En caso de cumplir todas y cada una de ellas, el método por antonomacia es el de coeficientes constantes (fórmula general). Sino, nos queda el método de iteraciones. Las Funciones Generadoras permiten resolver cualquier RR.

1.3. Sumatorias básica

$$\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$$
$$\sum_{k=m}^{n} c = c \cdot (n - m + 1)$$
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot r^k = \frac{nr^{n+2} - (n+1)r^{n+1} + r}{(r-1)^2}$$

2. Ejercicio parcial

$$f(n) = 2f(n-1) + (-1)^n; \quad f(0) = 1; \quad n \geq 1$$

Para $k = 1$

$$f(n) = 2f(n-1) + (-1)^n; \quad f(0) = 1; \quad n \geq 1$$

$$f_n = 2f_{n-1} + (-1)^n; \quad f_0 = 1; \quad n \geq 1$$

Para $k = 2$

$$f_n = 2(2f_{(n-1)-1} + (-1)^{n-1}) + (-1)^n$$

$$f_n = 2^2 \cdot f_{n-2} + 2 \cdot (-1)^{n-1} + (-1)^n$$

Para $k = 3$

$$f_n = 2(2^2 \cdot f_{(n-1)-2} + 2 \cdot (-1)^{(n-1)-1} + (-1)^{n-1}) + (-1)^n$$

$$f_n = 2^3 \cdot f_{n-3} + 2^2 \cdot (-1)^{n-2} + 2 \cdot (-1)^{n-1} + (-1)^n$$

Se realizan iteraciones hasta encontrar un patrón, y con ella establecer la ecuación paramétrica. Nos guiaremos de la sumatoria presentada en 1.

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \tag{1}$$

$$f_n = 2^k \cdot f_{n-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i (-1)^{n-i}$$

$$f_n = 2^k \cdot f_{n-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i (-1)^n \cdot (-1)^{-i}$$

$$f_n = 2^k \cdot f_{n-k} + (-1)^n \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 2^i (-1)^{-i}$$

$$f_n = 2^k \cdot f_{n-k} + (-1)^n \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \frac{1}{(-1)^i}$$

$$f_n = 2^k \cdot f_{n-k} + (-1)^n \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (-2)^i$$

Resolviendo la sumatoria tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-2)^i = \frac{1 - (-2)^k}{3}$$

Continuando con el ejercicio

$$f_n = 2^k \cdot f_{n-k} + (-1)^n \cdot \frac{1 - (-2)^k}{3}$$

Para dejar la ecuación en términos de n, partiremos del caso base. Recordemos que $f_0 = 1$. Lo cual implica que $f_{n-k} = f_0 = 1$. Esto se cumple cuando los subíndices son iguales, es decir, $n - k = 0$. Lo cual implica, que $k = n$. Reemplazando queda que:

$$f_n = 2^n + (-1)^n \cdot \frac{1 - (-2)^n}{3}$$

$$f_n = 2^n + \frac{(-1)^n - (-1)^n \cdot (-2)^n}{3}$$

$$f_n = 2^n + \frac{(-1)^n - 2^n}{3}$$

$$f_n = \frac{3}{3} \cdot 2^n + \frac{(-1)^n - 2^n}{3}$$

$$f_n = \frac{(-1)^n + 2 \cdot 2^n}{3}$$

Finalmente,

$$\boxed{f_n = \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}}$$