Universidad del Norte
Facultad de Ingeniería de Sistemas y Computación
Estructuras Discretas

Análisis Combinatorio

8 de abril de 2022

Profesor: Alfonso M. Mancilla Herrera,
Monitor: Enrique A. Niebles Saco.

"Don't limit yourself. Many people limit themselves to what they think they can do. You can go as far as your mind lets you. What you believe, remember, you can achieve".
– Mary Kay Ash

1. Análisis combinatorio

Ejercicio 1.1. ¿Cuántas maneras hay de seleccionar una secuencia de 4 letras de las que aparecen en la palabra CONVOCATORIA?

Solución. Para solucionar este ejercicio, seguiremos una secuencia de pasos.

1. Se comienza conociendo la longitud n de la cadena, la cual corresponde a la cantidad de caracteres que la componen. En este caso $n = 12$.

2. Se halla la cantidad de caracteres distintos que componen la cadena, este número se conoce como la cantidad de categorías c. Para este caso $c = 8$.

3. Se definen las categorías:

$$\begin{aligned} n_1 = 3 &\qquad \{\text{O}\} \\ n_2 = n_3 = 2 &\qquad \{\text{C, A}\} \\ n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = 1 &\qquad \{\text{R, T, V, I, N}\} \end{aligned}$$

4. A partir de las categorías, se definen los casos posibles de solución. En este ejemplo, se busca construir subcadenas de longitud $m = 4$. Por los cual, los escenarios deben contemplar el conjunto de caracteres que de solución a este requerimiento.

$$\begin{matrix} 3 & 1 & & \\ 2 & 2 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

5. A partir del prototipo de escenarios posibles, se construyen los conjuntos solución:

   - Para OOOA

$$n(\mathbb{S}_{3,1}) = \left[\binom{1}{1}\binom{3}{3}\right] \cdot \left[\binom{8-1}{1}\binom{1}{1}\right] \cdot \binom{4}{3,1} = 28$$

- Para AACC

$$n(\mathbb{S}_{2,2}) = \left[\binom{3}{2}\binom{4}{4}\right] \cdot \binom{4}{2,2} = 18$$

- Para CCRO

$$n(\mathbb{S}_{2,1,1}) = \left[\binom{3}{1}\binom{2}{2}\right] \cdot \left[\binom{8-1}{2}\binom{2}{2}\right] \cdot \binom{4}{2,1,1} = 30240$$

- Para OCRV

$$n(\mathbb{S}_{1,1,1,1}) = \left[\binom{8}{4}\binom{4}{4}\right] \cdot \binom{4}{1,1,1,1} = 40320$$

6. Finalmente, se suma el conjunto solución.

$$n(\mathbb{S}) = n(\mathbb{S}_{3,1}) + n(\mathbb{S}_{2,2}) + n(\mathbb{S}_{2,1,1}) + n(\mathbb{S}_{1,1,1,1})$$

Ejercicio 1.2. Halle la cantidad de soluciones posibles, que satisfacen la siguiente ecuación. Tenga en cuenta las restricciones dadas para cada término.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23. \qquad x_1 \geq 0, \quad 2 \leq x_2 \leq 5, \quad x_3 = 3, \quad x_4 \geq 2$$

A continuación se describe la secuencia de pasos para resolver este problema.

1. Primero se define el prototipo del problema.
   Prototipo:
   $n(\mathbb{S}) = \{\ \_\_\ \ \_\_\ 3\ \underline{\ 2\ }\ \} - \{\ \_\_\ 0\ 3\ \underline{\ 2\ }\ \} - \{\ \_\_\ 1\ 3\ \underline{\ 2\ }\ \} - \{\ \_\_\ \ \underline{\ 6\ }\ 3\ \underline{\ 2\ }\ \}$

2. La solución será por complemento. Para esto, se define el conjunto de soluciones que abarque la mayor cantidad de casos posibles. A esto, se le restarán los casos que no encajan o que se *sobrecuentan* posteriormente.

$$n(\mathbb{S}_1) = \underbrace{\left[\binom{3}{3}\binom{1}{1}\right]}_{x_3=3} \cdot \underbrace{\left[\binom{2}{2}\binom{1}{1}\right]}_{x_4\geq 2} \cdot \left[\binom{23-5}{23-5} \cdot \binom{3+(23-5)-1}{23-5}\right] = 190$$

3. Se definen los casos que no son de interés.

$$n(\mathbb{S}_k) = \sum_{k=0}^{m} \left\{ \underbrace{\left[\binom{k}{k}\binom{1}{1}\right]}_{x_2=k} \underbrace{\left[\binom{3}{3}\binom{1}{1}\right]}_{x_3=3} \cdot \underbrace{\left[\binom{2}{2}\binom{1}{1}\right]}_{x_4\geq 2} \cdot \left[\binom{23-(5+k)}{23-(5+k)} \cdot \binom{2+(23-(5+k))-1}{23-(5+k)}\right] \right\}$$

$$n(\mathbb{S}_2) = \underbrace{\left[\binom{0}{0}\binom{1}{1}\right]}_{x_2=0} \underbrace{\left[\binom{3}{3}\binom{1}{1}\right]}_{x_3=3} \cdot \underbrace{\left[\binom{2}{2}\binom{1}{1}\right]}_{x_4\geq 2} \cdot \left[\binom{23-5}{23-5} \cdot \binom{2+(23-5)-1}{23-5}\right] = 19$$

$$n(\mathbb{S}_3) = \underbrace{\left[\binom{1}{1}\binom{1}{1}\right]}_{x_2=1} \underbrace{\left[\binom{3}{3}\binom{1}{1}\right]}_{x_3=3} \cdot \underbrace{\left[\binom{2}{2}\binom{1}{1}\right]}_{x_4\geq 2} \cdot \left[\binom{23-6}{23-6} \cdot \binom{2+(23-6)-1}{23-6}\right] = 18$$

$$n(\mathbb{S}_4) = \underbrace{\left[\binom{6}{6}\binom{1}{1}\right]}_{x_2\geq 6} \underbrace{\left[\binom{3}{3}\binom{1}{1}\right]}_{x_3=3} \cdot \underbrace{\left[\binom{2}{2}\binom{1}{1}\right]}_{x_4\geq 2} \cdot \left[\binom{23-11}{23-11} \cdot \binom{3+(23-11)-1}{23-11}\right] = 91$$

4. Se halla el conjunto solución al problema inicialmente planteado.

$$n(\mathbb{S}) = n(\mathbb{S}_1) - n(\mathbb{S}_2) - n(\mathbb{S}_3) - n(\mathbb{S}_4) = 190 - 19 - 18 - 91 = 62$$