Universidad del Norte
Facultad de Ingeniería de Sistemas y Computación
Estructuras Discretas

Funciones Generadoras Ordinarias - OGF

8 de abril de 2022

Profesor: Alfonso M. Mancilla Herrera,
Monitor: Enrique A. Niebles Saco.

"Don't limit yourself. Many people limit themselves to what they think they can do. You can go as far as your mind lets you. What you believe, remember, you can achieve".
– Mary Kay Ash

1. Funciones Generadoras Ordinarias

Ejercicio 1.1. Hallar f_n a partir de la siguiente OGF:

$$F(z) = \frac{-5z}{(1+5z)^2}$$

A partir de una OGF conocida, hallamos una equilavente a $F(z)$

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 1} \binom{n}{1} z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 1} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 1} n(-5z)^n = \frac{-5z}{(1-(-5z))^2}$$

$$\sum_{n\geq 1} n(-5)^n \cdot z^n = \frac{-5z}{(1+5z)^2}$$

Finalmente,

$$\boxed{f_n = n \cdot (-5)^n; \quad n \geq 1}$$

Ejercicio 1.2. Resuelva la siguiente RR utilizando el nuevo método, es decir, Funciones Generadoras Ordinarias.

$$f_n = 2f_{n-1} - f_{n-2}; \quad f_0 = 3, f_1 = 5; \quad n \geq 2.$$

Comenzamos definiendo quién va a ser nuestra OGF. Esta sabemos que es la serie de potencias que describe a una sucesión o función f_n.

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n \cdot z^n$$

Ahora, se reescribe nuestra RR en términos de series de potencia. Esto es,

$$\sum_{n\geq 2} f_n \cdot z^n = \sum_{n\geq 2} 2f_{n-1} \cdot z^n - \sum_{n\geq 2} f_{n-2} \cdot z^n$$

De la expresión anterior, se busca que cada serie de potencia pueda reescribirse en términos de $F(z)$. Para posteriormente despejarlas y hallar la OGF. Como nuestro dominio es $n \geq 2$ y mi sumatoria que describe a $F(z)$ parte en $n \geq 0$, debo reescribir todas las sumatoria de la RR en función de ese dominio. Por lo tanto, se hará un desplazamiento, donde la operación $(-)$ corresponde a un desplazamiento hacia la derecha, y la operación $(+)$ uno hacia la izquierda.

$$\sum_{n\geq 2} f_n \cdot z^n = \sum_{n+1\geq 2} 2f_{(n+1)-1} \cdot z^{n+1} - \sum_{n+2\geq 2} f_{(n+2)-2} \cdot z^{n+2}$$

$$\sum_{n\geq 2} f_n \cdot z^n = 2z \cdot \sum_{n\geq 1} f_n \cdot z^n - z^2 \cdot \underbrace{\sum_{n\geq 0} f_n \cdot z^n}_{F(z)}$$

$$\sum_{n\geq 2} f_n \cdot z^n = 2z \cdot \sum_{n\geq 1} f_n \cdot z^n - z^2 \cdot F(z)$$

Ahora reescribimos las sumatorias restantes de forma tal que se puedan expresar en términos de $F(z)$. Esto se logrará generando todas las sucesiones $(n \geq 0)$ y restando aquellas que no sean de nuestro interés, es decir, aquellas que no estén contempladas en el dominio de la sumatoria base.

$$\underbrace{\sum_{n\geq 0} f_n \cdot z^n - f_0 z^0 - f_1 z^1}_{\sum_{n\geq 2} f_n \cdot z^n} = 2z \cdot \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0} f_n \cdot z^n - f_0 z^0\right)}_{\sum_{n\geq 1} f_n \cdot z^n} - z^2 \cdot F(z)$$

$$F(z) - f_0 - f_1 z = 2z \cdot [F(z) - f_0] - z^2 \cdot F(z)$$

$$F(z) - 3 - 5z = 2z \cdot [F(z) - 3] - z^2 \cdot F(z)$$

A partir de esa ecuación, se despeja $F(z)$

$$F(z) - 3 - 5z = 2zF(z) - 6z - z^2 \cdot F(z)$$

$$F(z)[1-2z+z^2] = 3-z$$

$$F(z) = \frac{3-z}{1-2z+z^2}$$

$$F(z) = \frac{3-z}{(1-z)^2}$$

$$F(z) = \underbrace{\frac{3}{(1-z)^2}}_{A(z)} - \underbrace{\frac{z}{(1-z)^2}}_{B(z)}$$

De esta forma,

$$f_n = a_n - b_n$$

Continuar el ejercicio...

Ejercicio 1.3. Dada la siguiente relación de recurrencia, halle su versión no recurrente de la forma $[x^n]F(x)$ o f_n.

$$F(x) = \frac{1-x}{8-4x-2x^2+x^3}$$

Factorizando el denominador, se obtiene que:

$$F(x) = \frac{1-x}{(2-x)^2(2+x)}$$

Aplicando fracciones parciales:

$$F(x) = \frac{1-x}{(2-x)^2(2+x)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{(2-x)^2} + \frac{C}{2+x}$$

Calculando las constantes

$$A(2-x)(2+x) + B(2+x) + C(2-x)^2 = 1-x$$

$$A(4-x^2) + B(2+x) + C(4-4x+x^2) = 1-x$$

$$4A - Ax^2 + 2B + Bx + 4C - 4Cx + Cx^2 = 1-x$$

$$-A + C = 0$$

$$B - 4C = -1$$

$$4A + 2B + 4C = 1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$C = A$$

$$B = 4A - 1$$

$$16A = 3$$

Por consiguiente:

$$A = \frac{3}{16}; \quad B = -\frac{1}{4}; \quad C = \frac{3}{16}$$

Reemplazando,

$$F(x) = \frac{1-x}{(2-x)^2(2+x)} = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2-x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2+x}$$

Reescribiendo:

$$F(x) = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2(1-\frac{1}{2}x)} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4(1-\frac{1}{2}x)^2} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2(1+\frac{1}{2}x)}$$

$$F(x) = \frac{3}{32} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}}_{A(x)} - \frac{1}{16} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1-\frac{1}{2}x)^2}}_{B(x)} + \frac{3}{32} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{2}x}}_{C(x)}$$

$$F(x) = \frac{3}{32}A(x) - \frac{1}{16}B(x) + \frac{3}{32}C(x)$$

$$[x^n]F(x) = \frac{3}{32}[x^n]A(x) - \frac{1}{16}[x^n]B(x) + \frac{3}{32}[x^n]C(x)$$

$$f_n = \frac{3}{32}(a_n + c_n) - \frac{1}{16}b_n$$

Ahora hallamos cada función que representa a cada OGF para solucionar el problema.

Para hallar a_n Partimos de una función generadora ya conocida, en esta ocasión partiré de la más sencilla: la base.

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$F(c\cdot x) = \sum_{n\geq 0} (c\cdot x)^n = \frac{1}{1-c\cdot x}$$

$$F(c\cdot x) = \sum_{n\geq 0} c^n \cdot x^n = \frac{1}{1-c\cdot x}$$

Para el caso de $c = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}x}$$

De esta forma, se concluye que $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Para el caso de $c = -\frac{1}{2}$

$$\sum_{n\geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot x^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}x}$$

De esta forma, se concluye que $c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
Por último, hallamos b_n. Para ello, partimos de una función generadora conocida.

$$\sum_{n\geq M} \binom{n}{M} x^n = \frac{x^M}{(1-x)^{M+1}}$$

Cuando $M = 1$

$$\sum_{n\geq 1} \binom{n}{1} x^n = \frac{x^1}{(1-x)^{1+1}}$$

$$\sum_{n\geq 1} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Desplazamos una unidad hacia la izquierda,

$$\sum_{n+1\geq 1} (n+1)x^{n+1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$x\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Escalamos en factor de $\frac{1}{2}$ la función:

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}x)^2}$$

De acá se concluye que $b_n = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$
Reemplazamos las sucesiones encontradas en la función original.

$$f_n = \frac{3}{32}(a_n + c_n) - \frac{1}{16}b_n$$

Finalmente

$$\boxed{f_n = \frac{3}{32}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] - \frac{1}{16}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Combinatorias:

$$f_n = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)!}{(n+2-2)!2!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!\cdot 2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+1}{2}$$

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)n!$$

1.1. Ejercicio 2do parcial 2021-03

Dada la siguiente Función Generadora Ordinaria, halle una expresión cerrada f_n de la misma.

$$F(z) = \frac{1-z}{1-4z+4z^2}$$

1. El primer paso es tratar de reducir la OGF a su mínima expresión.

$$F(z) = \frac{1-z}{1-4z+4z^2}$$

Para ello, factorizaremos el denominador. $1 - 4z + 4z^2 = 0$, el cual haciendo uso de la fórmula general:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ z_{1,2} &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(1)}}{2(4)} \\ z_1 = z_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - 4z + 4z^2 &= 0 \\ \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \\ \left(\frac{2z - 1}{2}\right)^2 &= 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 (2z - 1)^2 &= 0 \\ (2z - 1)^2 &= 0 \\ (-(1 - 2z))^2 &= 0 \\ (1 - 2z)^2 &= 0 \end{aligned}$$

De este modo,

$$F(z) = \frac{1 - z}{1 - 4z + 4z^2} = \frac{1 - z}{(1 - 2z)^2}$$

$$F(z) = \frac{1 - z}{(1 - 2z)^2} = \underbrace{\frac{1}{(1 - 2z)^2}}_{A(z)} - \underbrace{\frac{z}{(1 - 2z)^2}}_{B(z)}$$

Hemos descompuesto un problema complejo en dos subproblemas más sencillos $A(z)$ y $B(z)$.

Como el ejercicio pide

$$[z^n]F(z) = [z^n]A(z) - [z^n]B(z)$$

$$f_n = a_n - b_n$$

2. Para hallar a_n, partimos de una OGF conocida.

$$\sum_{n \geq M} \binom{n}{M} z^n = \frac{z^M}{(1-z)^{M+1}}$$

Para $M = 1$

$$\sum_{n \geq 1} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Como del lado derecho tenemos un polinomio en el numerador del tipo z^c, y queremos deshacernos de él, debemos desplazar c unidades hacia la izquierda. Lo cual, no es más que reemplazar en cada n de la OGF por $n + c$. En este caso $c = 1$.

$$\sum_{n+1 \geq 1} (n+1) z^{n+1} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n \geq 1-1} (n+1) z^n z^1 = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$z \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Escalamos en un factor $k = 2$

$$A(2z) = \sum_{n \geq 0} (n+1)(2^n) z^n = \frac{1}{(1-2z)^2}$$

Entonces,

$$a_n = (n+1)(2^n); \quad n \geq 0$$

3. Para hallar b_n. Partimos de la que hayamos anteriormente,

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)(2^n)z^n = \frac{1}{(1-2z)^2}$$

Como ahora queremos añadir un polinomio del tipo z^c en el numerador de la derecha, hacemos un corrimiento hacia la derecha c unidades. Es decir, se reemplaza n por $n-c$. En este caso, $c=1$.

$$\sum_{n-1\geq 0}(n-1+1)(2^{n-1})z^{n-1} = \frac{1}{(1-2z)^2}$$

$$z^{-1}\sum_{n\geq 1}(n)(2^{n-1})z^n = \frac{1}{(1-2z)^2}$$

$$\sum_{n\geq 1}(n)(2^{n-1})z^n = \frac{z}{(1-2z)^2}$$

Entonces,

$$b_n = n(2^{n-1}); \quad n \geq 1$$

4. Recordemos que

$$f_n = a_n - b_n$$

Como a_n tiene un dominio para $n \geq 0$. Es lo mismo que $a_0 + a_n \quad n \geq 1$

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ (n+1)(2^n), & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Finalmente,

$$f_n = \begin{cases} a_0, & \text{si } n = 0 \\ a_n - b_n, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

$$f_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ (n+1)(2^n) - n(2^{n-1}), & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{f_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1}(n+2), & \text{si } n \geq 1 \end{cases}}$$

Ejercicio 1.4. Hallar f_n a partir de la siguiente OGF:

$$F(z) = \frac{1}{(1-2z^2)^4}$$

Partimos de una OGF ya conocida

$$\sum_{n \geq M} \binom{n}{M} z^n = \frac{z^M}{(1-z)^{M+1}}$$

Para $M = 3$

$$\sum_{n \geq 3} \binom{n}{3} z^n = \frac{z^3}{(1-z)^4}$$

Para deshacernos del z^3, corremos 3 unidades hacia la derecha (+)

$$\sum_{(n+3) \geq 3} \binom{n+3}{3} z^{n+3} = \frac{z^3}{(1-z)^4}$$

$$z^3 \sum_{n \geq 0} \binom{n+3}{3} z^n = \frac{z^3}{(1-z)^4}$$

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \binom{n+3}{3} z^n = \frac{1}{(1-z)^4}$$

Ahora escalamos en un factor $2z^2$

$$F(2z^2) = \sum_{n \geq 0} \binom{n+3}{3} (2z^2)^n = \frac{1}{(1-2z^2)^4}$$

$$F(2z^2) = \sum_{n\geq 0} \binom{n+3}{3} (2)^n z^{2n} = \frac{1}{(1-2z^2)^4}$$

Finalmente,

$$[z^{2n}]F(z) = \binom{n+3}{3} (2)^n$$

$$\boxed{f_n = \binom{n+3}{3} (2)^n; \quad n \bmod 2 = 0.}$$

Expandiendo

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!}$$

Para $k = 3$

$$\binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)!}{n!3!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n!}{n!3!} = \frac{(n+3)!}{n!3!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$