Universidad del Norte
Facultad de Ingeniería de Sistemas y Computación
Estructuras Discretas

Análisis Combinatorio

8 de abril de 2022

Profesor: Alfonso M. Mancilla Herrera,
Monitor: Enrique A. Niebles Saco.

"Don't limit yourself. Many people limit themselves to what they think they can do. You can go as far as your mind lets you. What you believe, remember, you can achieve".
– Mary Kay Ash

1. Análisis combinatorio

Ejercicio 1.1. ¿Cuantas subcadenas de longitud 5 pueden formarse con los caracteres de la cadena COMUNICACIONES?

Solución. Para la solución de este ejercicio, se seguirá la siguiente secuencia de pasos:

1. Primero se definen la cantidad de caracteres n. En este caso, $n = 14$.

2. Se definen la cantidad de categorías c, es decir, la cantidad de caracteres distintos que tenga la palabra a analizar. En este caso, $c = 9$.

3. Después de definir n y c, se procede a establecer las categorías:

$$\begin{aligned} n_1 &= 3 & \{\text{C}\} \\ n_2 = n_3 = n_4 &= 2 & \{\text{I, N, O}\} \\ n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = n_9 &= 1 & \{\text{A, E, M, S, U}\} \end{aligned}$$

4. Lo siguiente es escribir las particiones posibles para $m = 5$. Donde el valor de m corresponde a la longitud de las cadenas que se requieren contar.
   De este modo, para $m = 5$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & & & \\ 3 & 1 & 1 & & \\ 2 & 2 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

5. Se establecen los conjuntos de soluciones posibles.

   - Para CCCII

$$n(\mathbb{S}_{3,2}) = \left[\binom{1}{1}\binom{3}{3}\right] \cdot \left[\binom{4-1}{1}\binom{2}{2}\right] \cdot \binom{5}{3,2}$$

- Para CCCAE

$$n(\mathbb{S}_{3,1,1}) = \left[\binom{1}{1}\binom{3}{3}\right] \cdot \left[\binom{9-1}{2}\binom{2}{2}\right] \cdot \binom{5}{3,1,1}$$

- Para IINNA

$$n(\mathbb{S}_{2,2,1}) = \left[\binom{4}{2}\binom{2}{2}\right] \cdot \left[\binom{9-2}{1}\binom{1}{1}\right] \cdot \binom{5}{2,2,1}$$

- Para IIAEM

$$n(\mathbb{S}_{2,1,1,1}) = \left[\binom{4}{1}\binom{2}{2}\right] \cdot \left[\binom{9-1}{3}\binom{1}{1}\right] \cdot \binom{5}{2,1,1,1}$$

- Para AEMSU

$$n(\mathbb{S}_{1,1,1,1,1}) = \left[\binom{9}{5}\binom{1}{1}\right] \cdot \binom{5}{1,1,1,1,1}$$

Nota: Si los elementos no son idénticos, es necesario permutar. Además, la primera combinatoria hace referencia al número de categorías que satisfacen el requerimiento; mientras que la segunda, se refiere a la cantidad de elementos que se escogen de cada categoría escogida

6. Se estable el conjunto final de soluciones.

$$n(\mathbb{S}) = n(\mathbb{S}_{3,2}) + n(\mathbb{S}_{3,1,1}) + n(\mathbb{S}_{2,2,1}) + n(\mathbb{S}_{2,1,1,1}) + n(\mathbb{S}_{1,1,1,1,1})$$

Ejercicio 1.2. ¿Cuántas maneras hay de seleccionar una secuencia de 5 letras de las que aparecen en ESTADISTICA?. Ejemplo: AAEIS y DESTT son dos maneras de hacer la selección.

1. El primer paso es contar la cantidad de caracteres que tiene la cadena. En este caso, $n = 11$.

2. De esos caracteres totales, se extraen aquellos que representan una categoría única. $c = 7$.

3. Se definen las categorías correspondientes, de acuerdo con n y c.

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2 &\qquad \{\text{S, T, I, A}\} \\ n_5 = n_6 = n_7 = 1 &\qquad \{\text{E, D, C}\} \end{aligned}$$

4. A partir de esas categorías, se construye la matriz de cadenas posibles para elaborar una subcadena de longitud $m = 5$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 2 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

5. Se construyen los espacios de solución.

- Para SSTTE

$$n(\mathbb{S}_{2,2,1}) = \left[\binom{4}{2}\binom{2}{2}\right] \cdot \left[\binom{7-2}{1}\binom{1}{1}\right] \cdot \binom{5}{2,2,1}$$

- Para AAEIS

$$n(\mathbb{S}_{2,1,1,1}) = \left[\binom{4}{1}\binom{1}{1}\right] \cdot \left[\binom{7-1}{3}\binom{3}{3}\right] \cdot \binom{5}{2,1,1,1}$$

- Para STIAC

$$n(\mathbb{S}_{1,1,1,1,1}) = \left[\binom{7}{5}\binom{5}{5}\right] \cdot \binom{5}{1,1,1,1,1}$$

6. Finalmente, la solución corresponde a la suma de cada espacio muestral.

$$n(\mathbb{S}) = n(\mathbb{S}_{2,2,1}) + n(\mathbb{S}_{2,1,1,1}) + n(\mathbb{S}_{1,1,1,1,1})$$

Ejercicio 1.3. Cadenas de longitud 7 tal que la B y la C no estén juntas. De una solución directa del problema.

Solución. Se comienza planteando el prototipo que dé solución al problema.
Prototipo: $\_\_\ B\ \underline{\ *\ }\ C\ \_\_$.
Nota: Puesto que las letras B y C no son idénticas, es necesario realizar una permutación; de modo que pueda asegurarse el conjunto solución total del problema.

1. Primero se seleccionan las letras B y C, se ubican en dos palomares, se cierran los palomares. Finalmente, se permutan.

$$\left[\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{2}{1,1}\right]$$

2. Se escoge una letra cualquiera de las restantes (A, D, E, F, G) y se ubica en el palomar con comodín.
$$\left[\binom{7-2}{1}\cdot\binom{1}{1}\right]$$

3. Por último, se distribuyen los caracteres restantes en los palomares. Cabe resaltar que el comodín cuenta como palomar, pues este no se cerró.
$$\left[\binom{7-3}{7-3}\cdot\binom{3+(7-3)-1}{7-3}\right]\cdot\binom{7-3}{1,1,1,1}$$

Finalmente, queda que la solución al problema es:

$$n(\mathbb{S}) = \left[\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{1,1}\right]\cdot\left[\binom{7-2}{1}\cdot\binom{1}{1}\right]\cdot\left[\binom{7-3}{7-3}\cdot\binom{3+(7-3)-1}{7-3}\cdot\binom{7-3}{1,1,1,1}\right]$$

Ejercicio 1.4. Cadenas de longitud 7 tal que la B y la C no estén juntas. De una solución por complemento del problema.

Solución. Se comienza planteando el prototipo que dé solución al problema.
Prototipo: $\{\ \_\_\ \} - \{\ \_\_\ BC\ \_\_\ \}$.
Nota: Puesto que las letras B y C no son idénticas, es necesario realizar una permutación; de modo que pueda asegurarse el conjunto solución total del problema.

1. Primero se distribuyen todas las letras en un palomar, esto es el conjunto total de letras.
$$\left[\binom{7}{7}\cdot\binom{1+7-1}{7}\cdot\binom{7}{1,1,\ldots,1}\right]$$

2. Por último, se distribuyen los caracteres restantes en los palomares. Cabe resaltar que el comodín cuenta como palomar, pues este no se cerró.
$$\left[\binom{2}{2}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1,1}\right]\cdot\left[\binom{7-2}{7-2}\cdot\binom{2+(7-2)-1}{7-2}\cdot\binom{7-2}{1,1,1,1,1}\right]$$

Finalmente, queda que la solución al problema es:

$$\begin{aligned} n(\mathbb{S}) = &\left[\binom{7}{7}\cdot\binom{1+7-1}{7}\cdot\binom{7}{1,1,\ldots,1}\right] \\ &-\left[\binom{2}{2}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1,1}\right]\cdot\left[\binom{7-2}{7-2}\cdot\binom{2+(7-2)-1}{7-2}\cdot\binom{7-2}{1,1,1,1,1}\right]\end{aligned}$$

Ejercicio 1.5. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 27 caramelos idénticos entre 3 niños?

- Sin ninguna restricción.
- Con cada niño obteniendo a lo menos n caramelo, $1 \leq n \leq 9$.

$$x1 + x2 + x3 = 27$$

Prototipo: __ __ __

$$n(\mathbb{S}) = \left[\binom{27}{27}\binom{1}{1}\binom{3+27-1}{27}\right]$$

Prototipo: $\underline{\ n\ }$ $\underline{\ n\ }$ $\underline{\ n\ }$

$$n(\mathbb{S}) = \left[\binom{n}{n}\binom{1}{1}\right]^3 \left[\binom{27-3\cdot n}{27-3\cdot n}\binom{3+(27-3\cdot n)-1}{(27-3\cdot n)}\right]$$