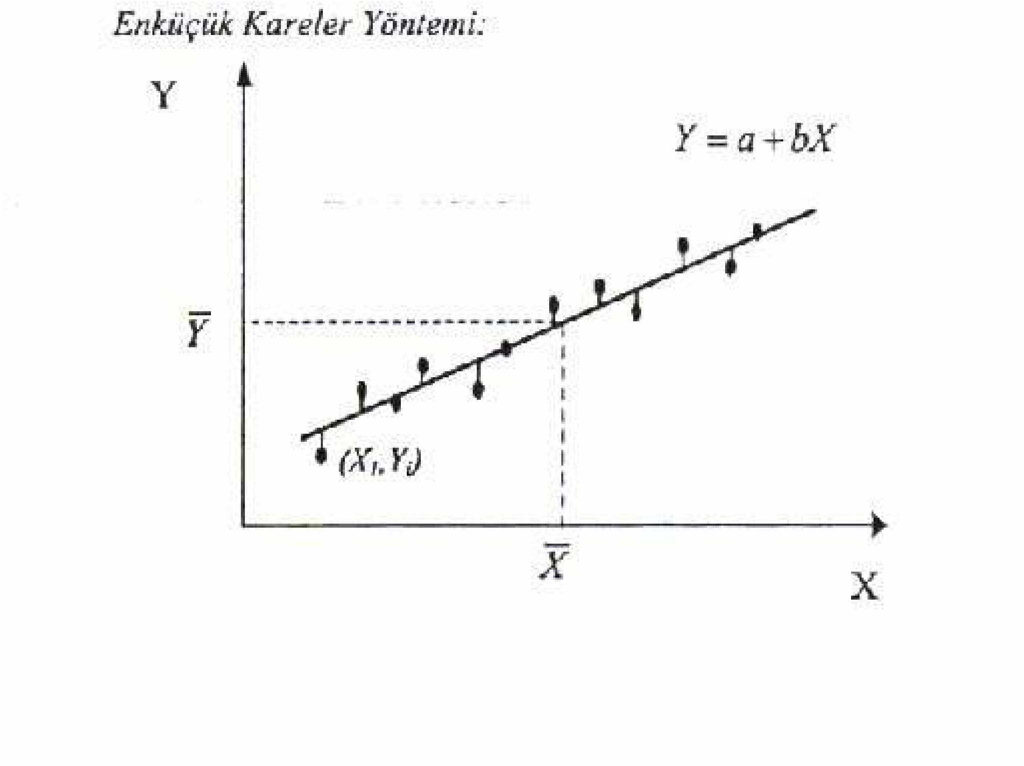
En Küçük Kareler Yöntemi



Problem :

$$(x_1,y_1)\ ,\ (x_2,y_2)\ ,\ (x_3,y_3)\ ,\ \ldots\ ,\ (x_n,y_n)$$

serpme noktalarına en yakın olan eğrinin belirlenmesi uygulamada önemli bir problemdir. Serpme noktalarının dağılımına göre, uygulamacı, öncelikle eğrinin ne olabileceğine karar vermelidir. Çoğunlukla karşılaşılan haller şunlardır:

1. y = ax doğrusu,

2. 2. 2. 2. y = a + bx doğrusu,

3. 3. 3. 3. y = a + bx + cx2 parabolü.

İlk durum, ikincinin özel bir durumudur. Burada, ikinci durum için matris denklemlerinden yararlanan bir çözüm yapacağız. Aynı problemin, doğrusal denklem sistemlerine dayanan bir çözümü için bkz. : Doğrusal Denklemler Sistemleriyle En Küçük Kareler Yöntemi

En Küçük Kareler Yöntemi, y = a + bx doğrusu üzerindeki (x_i , $\bar{y}$) noktaları ile verilen (x_i , y_i) serpme noktaları arasındaki uzaklıkların kareleri toplamını minumum yapan **a** ve **b** katsayılarını bulma işleminden ibarettir. Bu katsayılar bulununca, y = a + bx doğrusu (regresyon doğrusu) bulunmuş olur.

Bu uzaklıkların kareleri toplamı

$$\bar{y}_i = a + bx_i$$
$$T = \sum_1^n (\bar{y} - y_i)^2$$
$$T = \sum_1^n (a + bx_i - y_i)^2$$

T yi minumum yapan a ve b sayılarını bulmak için, T nin **a** ve **b** ye göre kısmi türevlerini sıfır yapan değerleri bulmalıyız. Bunun için

$$\frac{\partial T}{\partial a} = \sum_1^n (a + bx_i - y_i) = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial b} = \sum_1^n (a + bx_i - y_i)x_i = 0$$

denklem sisteminin çözülmesi gerekir. Bu denklemleri düzenlersek,

$$\begin{pmatrix} n & \sum_1^n x_i \\ \sum_1^n x_i & \sum_1^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_1^n y_i \\ \sum_1^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

yazabiliriz. Bu matrisleri soldan sağa doğru M, A, N ile gösterirsek

$$MA = N$$

matris eşitliği elde edilir. Serpme diyağramındaki noktaların koordinatlarından yararlanarak,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots} \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

matrisleri tanımlanırsa,

$$M = X^T X \quad \text{ve} \quad N = X^T Y$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\left(X^T X\right)A = X^T Y$$

çıkar. Bu matris eşitliğinden A matrisini çözersek,

$$A = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$

buluruz. Sağ taraftaki matrisleri yerlerine yazarak A matrisini bulabiliriz. Bu da aradığımız **a** ve **b** katsayılarının bulunması demektir.

Aşağıdaki Pascal programı, bu matris denklemini çözmektedir.

Pascal Programı ile En Küçük Kareler Yöntemi

Matris Çözümü

```
(* En Küçük Kareler Yöntemi *)
(* Matris Denklemiyle Çözüm *)

program ekareler;

uses wincrt;

const
     max = 20;

type
   boyut          = 1..max;
   dizi           = array[boyut] of real;
   matris         = array[boyut,boyut] of real;


var
   m               : boyut;
   apsis , ordinat : dizi;

   A, V, W, X , Y,
   TX, tersW       : matris;



Procedure DiziGir(var   s,t : dizi ; k : integer);
var
  i : integer;
Begin
    for i:=1 to k do
    begin
      WriteLn('x(' ,i, ')' , ' , y(',i,') sayılarını giriniz :');
       readln(s[i],t[i]);
    end;
End;



procedure DiziYaz(T : dizi; k : boyut);
```