ОБРАБОТКА И МОДЕЛИРОВАНИЕ ДАННЫХ В MS EXCEL

ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Екатерина Золотарева

ТЕМА 3. ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Финансовая математика. Основы

- Простые и сложные проценты
- Эффективная ставка
- Серии одинаковых платежей (рента)
- Дисконтирование
- NPV и внутренняя норма доходности проектов

Терминология

- **Основная сумма, текущая стоимость** – первоначальная сумма, которая инвестируется (Principal,P)
- **Процентная ставка** – ставка вознаграждения, которая выплачивается за период

  e.g. save £200 in a bank's savings account at an interest rate of 5 % a year. At the end of the year the bank will pay you £10.
- Если в новом периоде заработанные проценты не прибавляются к основной сумме, то они **простые**

Простые проценты

Размер простых процентов за **n** лет, выплаченных на инвестицию **P** по ставке **r** равен

$$I = Prn$$

Остаток на счете через **n** лет (будущая стомость):

$$F=P+I=P+Prn=P(1+Rn)$$

Сложные проценты

Обычно заработанные проценты так и остаются на счете, то есть они реинвестируются (или аккумулируются) и на них тоже начисляются проценты в следующем периоде.

По итогам 1-го года: **$P + Pr = P(1 + r)$**
По итогам 2-го года: **$P(1 + r)(1+r)$**
Через n лет: **$S = P(1+r)^n$**

Периоды, не кратные году

Как правило, всегда указывается годовая процентная ставка, она называется **номинальной**.

Но проценты могут начисляться и чаще – раз квартал, раз в месяц и т.п.

$$S = P(1 + r/m)^{nm}$$

где $1/m$ - доля от года: для 6 месяцев – ½, для квартала – ¼ и т.д.

Непрерывные проценты

Если число **m** сделать очень большим (то есть предположить, что проценты начисляются непрерывно), то формула:

$$S = P(1 + r/m)^{nm} \quad \text{при } m \to \infty$$

превращается в $S = Pe^{rn}$ (e=2,71828)

Чем чаще в течение года делаются начисления, тем больше будущая стоимость. Непрерывные проценты **всегда** дают больше выгоды чем какие бы то ни было дискретные.

Нахождение текущей стоимости

Можно решать обратную задачу: сколько надо инвестировать сейчас, чтобы через n лет получить некую целевую сумму

$$P = S/(1 + r)^n$$

Когда речь идет о нахождении текущей стоимости каких-либо будущих платежей, процентная ставка называется **ставкой дисконтирования**

Нахождение процентной ставки n

Зная, сколько денег у нас есть сейчас (текущая стоимость) и сколько мы хотим получить (будущая стоимость) через **n** лет, под какую процентную ставку **r** надо вложиться?

$$r=(S/P)^{1/n} -1$$

Эффективная процентная ставка

Допустим, нам известна номинальная (годовая) ставка **r**, а выплата процентов происходит **m** раз в год.

В конце 1го периода: $P\ (1 + r/m)$

В конце 2го периода: $P(1 + r/m)^2$

В конце 1го года, после периода m: $P(\ 1 + r/m)^m$

Пусть существует ставка **i**, инвестируя под которую мы в конце 1ого года получаем **$P(1 + i)$**

Допустим $P(1 + i) = P(\ 1 + r/m)^m$

Решение этого уравнения **$i = (\ 1 + r/m)^m - 1$ – эффективная ставка**

Эффективная процентная ставка

Допустим, нам известна номинальная (годовая) ставка **r**, а выплата процентов происходит **m** раз в год.

В конце 1го периода: P (1 + r/m)

В конце 2го периода: $P(1 + r/m)^2$

В конце 1го года, после периода m: $P(1 + r/m)^m$

Пусть существует ставка **i**, инвестируя под которую мы в конце 1ого года получаем **P(1 + i)**

Допустим $P(1 + i) = P(1 + r/m)^m$

Решение этого уравнения $\mathbf{i = (1 + r/m)^m - 1}$ – **эффективная ставка**

Кейс: сравнение депозитов

У Вас есть два депозита

(1) 6% с ежеквартальным начислением

(2) 5,9% с ежемесячным

(1) $i = (1 + 0.06/4)^4 - 1 = 0.061364$

эффективная ставка 6.1364 %

(2) $i = (1 + 0.059/12)^{12} - 1 = 0.06$

- Эффективная ставка 6.06%

(большее количество начислений не компенсировало **не комппенсировало** снижение ставки)

Чтобы выбрать между двумя депозитами с разными периодами и разными номинальными ставками надо сравнить их **эффективные ставки**

Формулы в Excel

Функция	Описание
ЭФФЕКТ	Возвращает фактическую (эффективную) годовую процентную ставку.
БС	Возвращает будущую стоимость инвестиции.
КПЕР	Возвращает общее количество периодов выплаты для инвестиции.
ПС	Возвращает приведенную (к текущему моменту) стоимость инвестиции.
ПЛТ	Возвращает регулярный платеж годичной ренты.
СТАВКА	Возвращает процентную ставку по аннуитету за один период.

Регулярные платежи

- Часто суммы выплачиваются не единовременно, а равными платежами через регулярные интервалы
- Пример: ипотека, автокредит и прочие кредиты выплачиваются равными частями в течение нескольких лет
- Аналогично: пенсии, страховые платежи и прочее

Кейс 1: сколько накопим?

Предположим, что Вы каждый год вносите на счет 1000 под 5%

End of year	Amount (£)	Value at the end of year 10
1	1000	1000×1.05^9
2	1000	1000×1.05^8
3	1000	1000×1.05^7
4	1000	1000×1.05^6
5	1000	1000×1.05^5
6	1000	1000×1.05^4
7	1000	1000×1.05^3
8	1000	1000×1.05^2
9	1000	1000×1.05
10	1000	1000

$S = 1000 + 1000*1.05 + 1000*1.05^2 + \ldots.. \; 1000*1.05^9$

Каждая 1000, внесенная на счет в этом году, пролежит на счете дольше следующей и заработает больше процентов

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия:

$$S = a + aR + aR^2 + aR^3 + aR^4 + \ldots\ldots. \ aR^{n-1}$$

Сумма геометрической прогрессии

$$S = a(R^n – 1) /(R-1)$$

Пример: 3 + 6 + 12 + 24

Геометрическая прогрессия с a=3, R = 2 и n = 4

тогда $S = 3(2^4 – 1)/(2 – 1) = 45$

Кейс 1: решение

В нашем примере

$S = 1000. +1000.1.05 + 1000\ 1.05^2 +\ldots..\ \ 1000\ 1.05^9$

Это геометрическая прогрессия с a = 1000, n = 10 и R = 1.05.

Тогда по формуле:

$S = 1000\ (1.05^{10} - 1)\ /\ (1.05 - 1)\ =\ £12.577.89$

Кейс 2: сколько можно снимать?

Предположим, что Вы располагаете суммой $5000, которую Вы положили на счет под ставку 5% годовых на 5 лет.Вы хотели бы каждый год снимать какую-то сумму (получать ренту). Сколько можно снимать каждый год, чтобы баланс остался положительным?

Кейс 2: решение

End of Year	Amount	Value at the end of year 5
0	5000	$5000*(1{,}05)^5$
1	-Y	$-Y*(1{,}05)^4$
2	-Y	$-Y*(1{,}05)^3$
3	-Y	$-Y*(1{,}05)^2$
4	-Y	$-Y*(1{,}05)$
5	-Y	$-Y$
Total balance		**$5000*(1{,}05)^5 - Y(1-1{,}05^5)/(1-1{,}05)$**

Чтобы остаток на счет был положительным должно выполняться:

$Y \le 5000*(1{,}05)^5*(1-1{,}05)/(1-1{,}05^5) = \$\ 1154{,}87$

Кейс 3: сколько можно взять в долг?

Клиент может выплачивать кредит ежемесячными платежами по 300$ в течение 25 лет. Банк начисляет проценты по ставке 1% в месяц. Какова сумма кредита?

Value of repayments is

$$\frac{300}{1.01}+\frac{300}{1.01^2}+\frac{300}{1.01^3}+\cdots+\frac{300}{1.01^{299}}+\frac{300}{1.01^{300}}$$

a = 300/1.01, R = 1/1.01 and n = 25x12 = 300

The sum gives the value of the loan

$$\frac{300}{1.01}\frac{\left(\frac{1}{1.01}\right)^{300}-1}{\frac{1}{1.01}-1}=£28{,}483.97$$

Кейс 4: каков ежемесячный платеж?

Клиент взял кредит 3000 $ сроком на 3 года. Банк начисляет проценты ежемесячно по ставке 6% годовых. Каков ежемесячный платеж?

$3000 = X/1.005 + X/1.005^2 + X/1.005^3 + X/1.005^{36}$

LHS is a geometric series with a = X, R = 1/1.005 and n = 36

$$3000 = \frac{X}{1.005}\frac{(\frac{1}{1.005})^{36}-1}{\frac{1}{1.005}-1}$$

Evaluate to get 3000 = 32.871016X so X = £91.27 monthly

Нерегулярные платежи: NPV

- Проекты имеют инвестиции на старте, а доход генерируется в различные моменты времени в будущем
- Рентабельность проекта оценивается путем дисконтирования всех денежных потоков
- **Чистая приведенная стоимость (NPV)** – это разность между всеми доходами и расходами, приведенными к одному моменту времени
- Если NPV > 0, то проект рентабельный
- NPV зависит от ставки дисконтирования

Кейс: оценка проекта

Покупаем новый комбайн за £10,000

Получаем доход £7000 через 2 года, £5000 через 3 года. Ставка дисконтирования5%.

End of year	(£)	Present value		(£)
0	–10,000			–10,000
2	+7000	$\frac{7000}{1.05^2}$	=	6349.21
3	+5000	$\frac{5000}{1.05^3}$	=	4319.19
		Net present value		£668.40

Проект рентабельный.

Нерегулярные платежи: IRR

NPV проекта зависит от ставки дисконтирования.

В нашем проекте:

при $r = 0.07$ получим NPV = £195.56 (рентабельно)

при $r = 0.08$ получаем NPV =- £ 29.47 (НЕ рентабельно)

Точка безубыточности (NPV = 0) достигается при процентной ставке от 0.07 до 0.08.

Внутренняя норма доходности - эта такая ставка дисконтирования, при которой чистая приведенная стоимость равна нулю.

Формулы в Excel

Функция	Описание
ВСД	Возвращает внутреннюю ставку доходности для ряда потоков денежных средств.
ЧПС	Возвращает чистую приведенную стоимость инвестиции, основанной на серии периодических денежных потоков и ставке дисконтирования.