



**Universitat**  
de les Illes Balears

# Incorporación de métricas difusas en el algoritmo RANSAC

Implementación y análisis de comportamiento

**Esaú Ortiz**

**[esau.ortiz@uib.es](mailto:esau.ortiz@uib.es)**

Directores: Alberto Ortiz, Juan José Miñana y Óscar Valero

Septiembre, 2021

# Índice de contenidos

Introducción

Fundamentos teóricos

*Fuzzy Metric* RANSAC (FM-R)

Análisis de comportamiento de los algoritmos FM-R

Otros problemas de estimación

Conclusiones y trabajo futuro

# Introducción

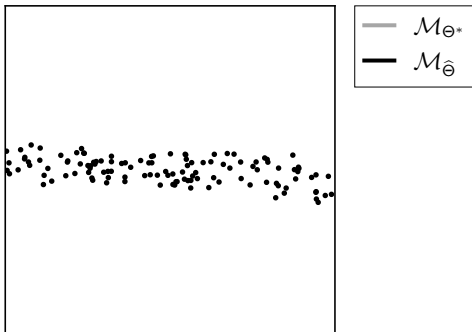
## Estimación de modelos

La estimación de un **modelo**  $\mathcal{M}_\Theta$  consiste en estimar el vector de **parámetros**  $\Theta$  que lo describen, a partir de un conjunto de **muestras**  $P$ .

- $P$  está sujeto habitualmente a una cierta medida de **aleatoriedad**.
- El **procedimiento** de estimación ha de ser capaz de **tolerar** dicha aleatoriedad.
  - La elección del procedimiento dependerá, entre otros, de la naturaleza de la aleatoriedad presente en las muestras.

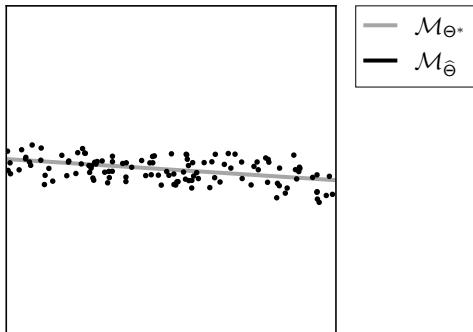
## Estimación de modelos

La estimación de un modelo  $\mathcal{M}_\Theta$  consiste en estimar el vector de parámetros  $\Theta$  que lo describen, a partir de un conjunto de muestras  $P$ .



## Estimación de modelos

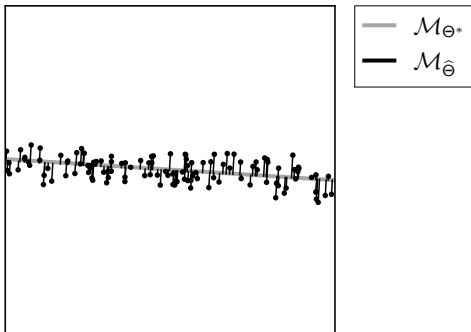
La estimación de un modelo  $\mathcal{M}_\Theta$  consiste en estimar el vector de parámetros  $\Theta$  que lo describen, a partir de un conjunto de muestras  $P$ .



- La ecuación general de una recta 2D es  $Ax + By + C = 0$  y el vector de parámetros puede definirse como  $\Theta = (A, B, C)$ .

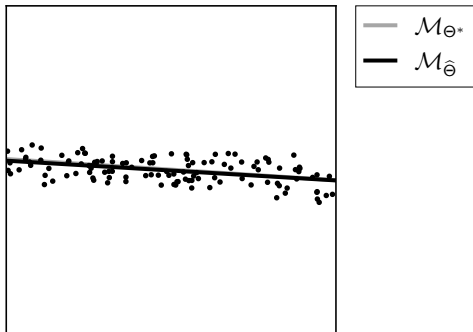
# Estimación de modelos

La estimación de un modelo  $\mathcal{M}_\Theta$  consiste en estimar el vector de parámetros  $\Theta$  que lo describen, a partir de un conjunto de muestras  $P$ .



## Estimación de modelos

La estimación de un modelo  $\mathcal{M}_\Theta$  consiste en estimar el vector de parámetros  $\Theta$  que lo describen, a partir de un conjunto de muestras  $P$ .

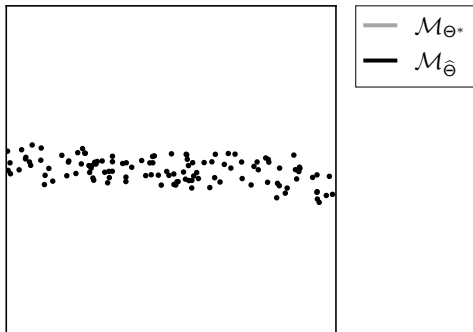


- Tanto *Least Squares* (**LS**) como *Total Least Squares* (**TLS**)  
asumen que la media de la distribución de errores de ajuste es cero.



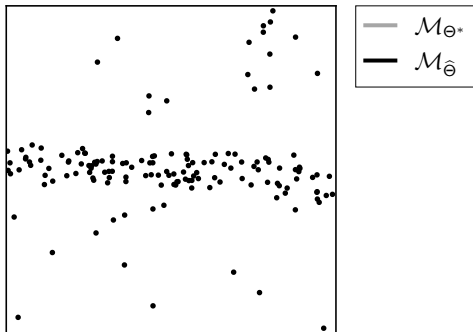
## Estimación de modelos

La estimación de un modelo  $\mathcal{M}_\Theta$  consiste en estimar el vector de parámetros  $\Theta$  que lo describen, a partir de un conjunto de muestras  $P$ .



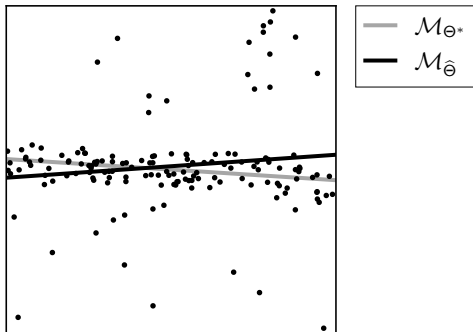
## Estimación de modelos

La estimación de un modelo  $\mathcal{M}_\Theta$  consiste en estimar el vector de parámetros  $\Theta$  que lo describen, a partir de un conjunto de muestras  $\mathcal{P}$ .



## Estimación de modelos

La estimación de un modelo  $\mathcal{M}_\Theta$  consiste en estimar el vector de parámetros  $\Theta$  que lo describen, a partir de un conjunto de muestras  $P$ .



- **LS y TLS** son **sensibles** a los valores atípicos o **outliers**.

## Estimación robusta de modelos

La **estimación robusta** de modelos tiene como objetivo **tolerar** los valores atípicos (**outliers**).

- Un estimador robusto puede ser clasificado en función del porcentaje de *outliers* que es capaz de tolerar (*breakdown point*).
- De la amplia variedad de estimadores robustos, **RANSAC** puede llegar a **tolerar más de un 50% de outliers** presente en el conjunto de muestras  $P$ .
  - El funcionamiento de RANSAC se basa en la **clasificación** de  $P$  en **inliers** y **outliers** en función del **error de ajuste** asociado a cada muestra.

## Métricas difusas en la estimación de modelos

Las metodologías de **lógica difusa** son utilizadas para **tratar datos imprecisos** y son de utilidad en el diseño de sistemas que son capaces de hacer frente a la **incertidumbre** de diversas formas. En el caso de la estimación de modelos:

- Un estimador robusto ha de ser capaz de **tolerar muestras** que **no** puedan ser **clasificadas** de forma clara como *inliers* o *outliers*.
- El uso de **métricas difusas** permitirían otorgar un grado de **compatibilidad** entre cada muestra  $p_j$  y el modelo  $\mathcal{M}_\Theta$ , en lugar de hacer esta clasificación.

# Objetivos de este TFM

El **objetivo principal** de este Trabajo Final de Máster (TFM) es **incorporar** y **evaluar** el uso de **métricas difusas** en el algoritmo **RANSAC**.

- Implementación de **cuatro variantes** del algoritmo original.
  - El uso de métricas difusas en cada una de las variantes es distinto.
- Caracterización de las **métricas difusas** incorporadas dentro de las variantes.
- Evaluación del resultado para **diferentes problemas de estimación**.

## Publicaciones de este trabajo

- A. Ortiz, E. Ortiz, J. J. Miñana, and O. Valero, “On the Use of Fuzzy Metrics for Robust Model Estimation: a RANSAC-based Approach ,” in *Proceedings of the International Work-conference On Artificial Neural Networks*, Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2021.
- A. Ortiz, E. Ortiz, J. J. Miñana, and O. Valero, “Hypothesis Scoring and Model Refinement Strategies for FM-based RANSAC,” in *Proceedings of the Spanish Conference on Fuzzy Logic and Technologies*, Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer, 2021.
- J. J. Miñana, A. Ortiz, E. Ortiz, and O. Valero, “On the standard fuzzy metric: generalizations and application to model estimation ,” in *Proceedings of the Spanish Conference on Fuzzy Logic and Technologies*, Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer, 2021, *in press*.

# Fundamentos teóricos



## El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

- Función de coste:

$$C = \sum_j \rho(\epsilon_j; \tau),$$

donde  $\rho(\epsilon_j; \tau)$  se define de la siguiente manera:

$$\rho(\epsilon_j; \tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon_j = |\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\Theta})| \leq \tau \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

## El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

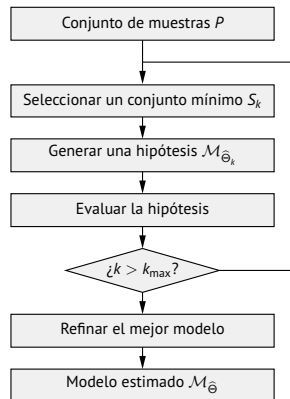
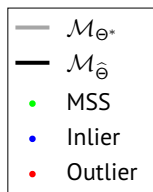
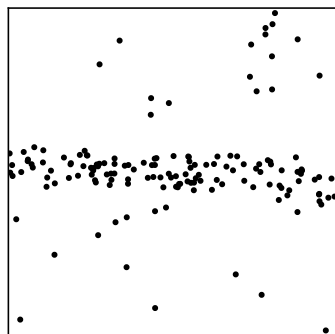
- Número máximo de iteraciones  $k_{\max}$ :

$$N = \frac{\log(1 - p)}{\log(1 - (1 - \omega)^s)},$$

donde  $p$  es la probabilidad con la que se encuentra un conjunto mínimo  $s$  no contaminado por *outliers* y  $\omega$  es la proporción de *outliers* en  $P$ .

# El algoritmo RANSAC

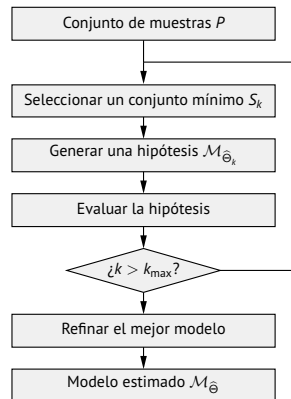
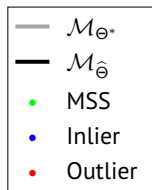
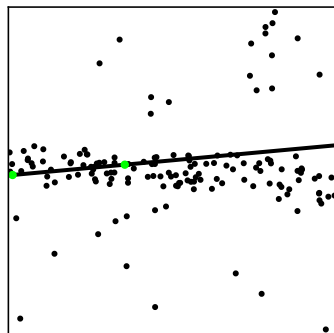
El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.



# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

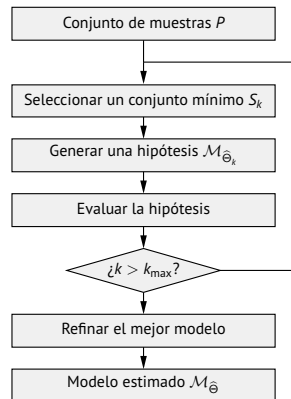
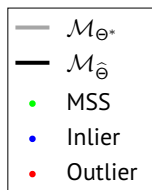
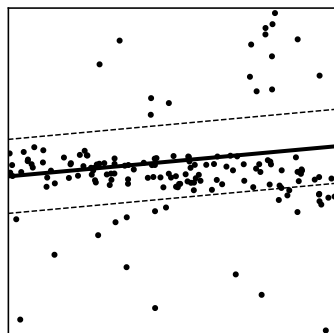
Iteración  $k = 1$



# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

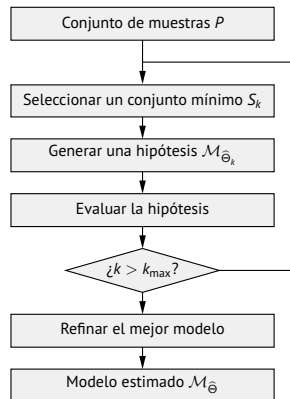
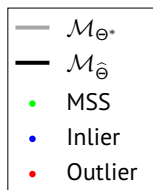
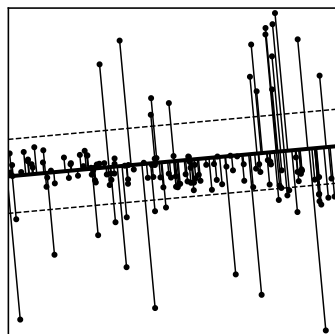
Iteración  $k = 1$



# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

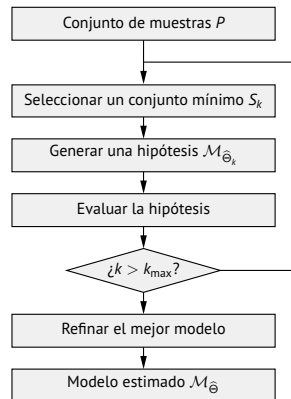
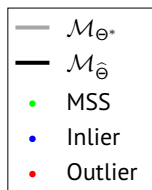
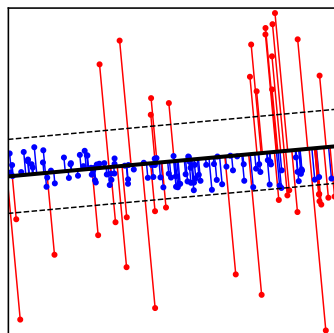
Iteración  $k = 1$



# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

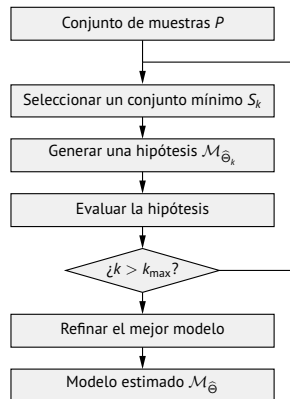
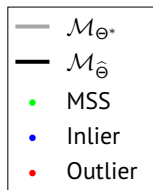
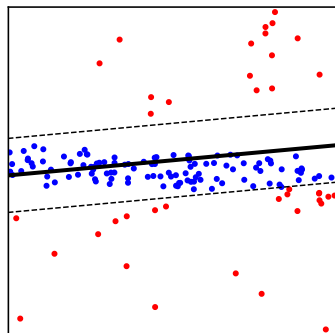
Iteración  $k = 1$



# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

Iteración  $k = 1$

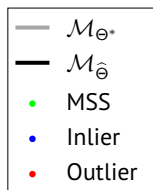
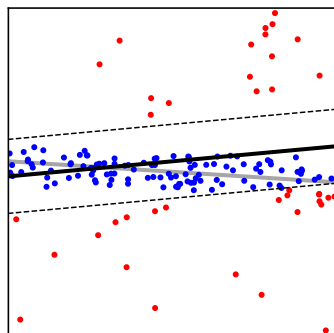




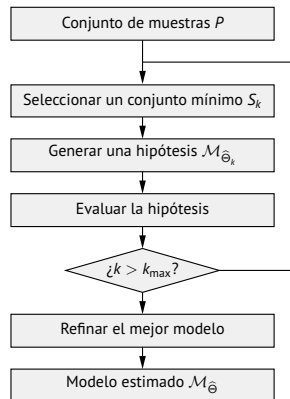
# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

Iteración  $k = 1$



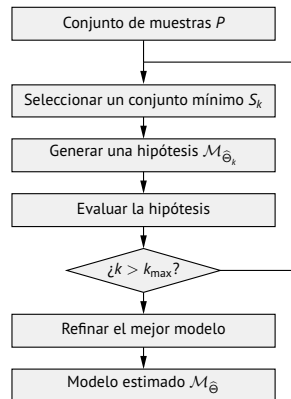
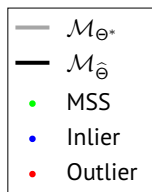
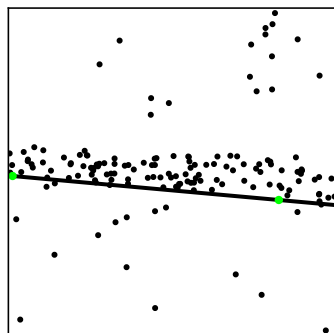
C: 39



# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

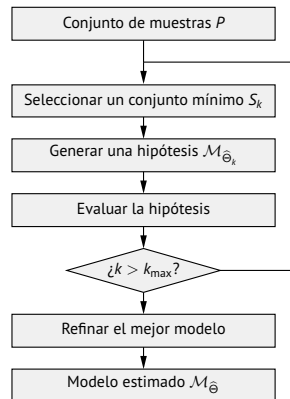
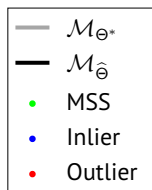
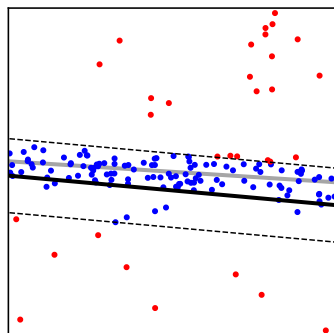
Iteración  $k = 2$



# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

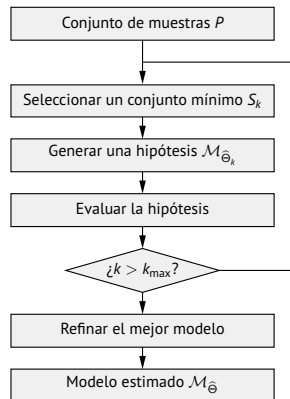
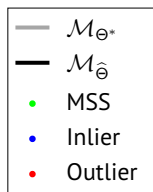
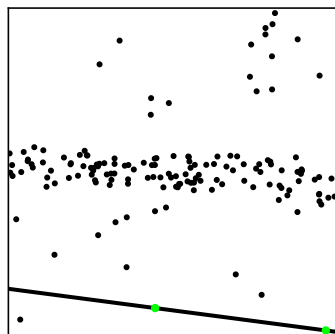
Iteración  $k = 2$



# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

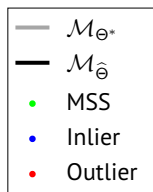
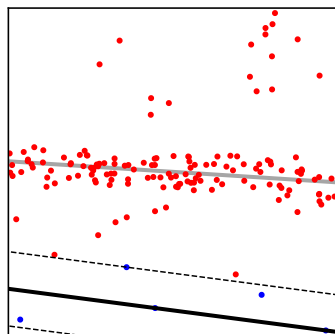
Iteración  $k = 3$



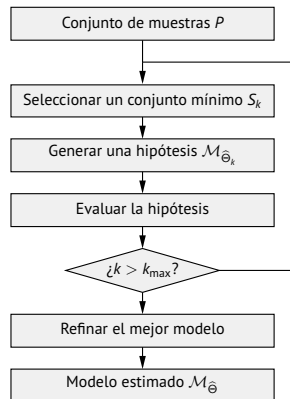
# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

Iteración  $k = 3$



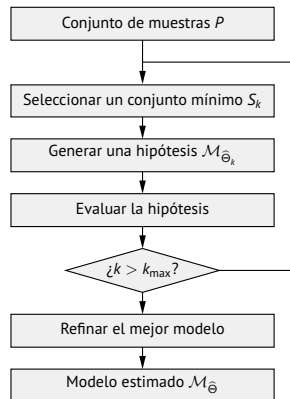
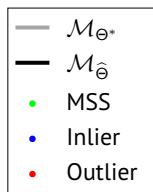
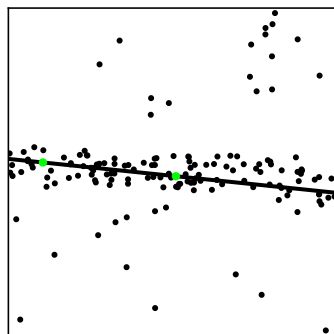
$C: 145$



# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

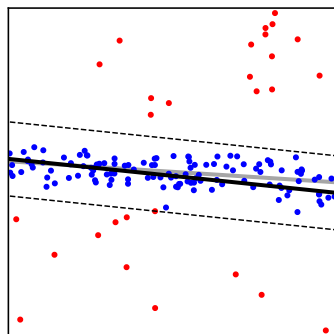
Iteración  $k = 4$



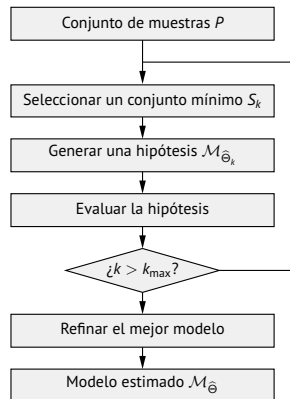
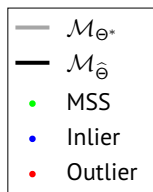
# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

Iteración  $k = 4$



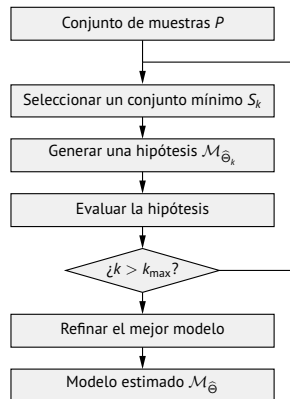
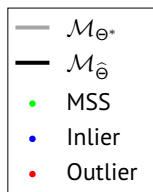
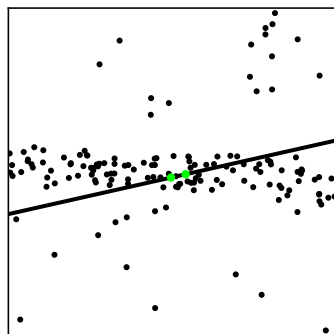
$C: 28$



# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

Iteración  $k = 5$

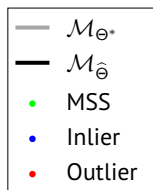
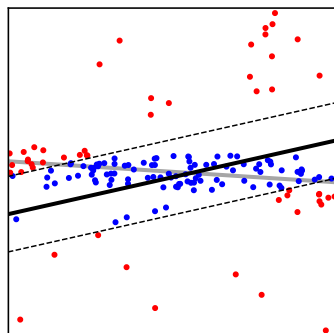




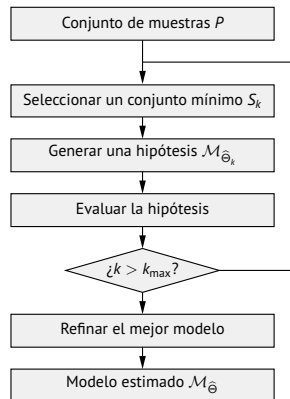
# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

Iteración  $k = 5$



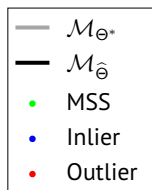
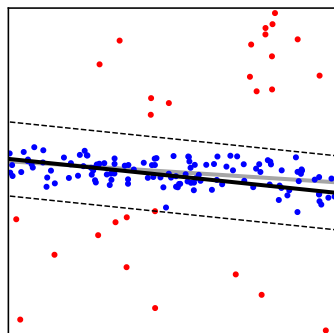
C: 51



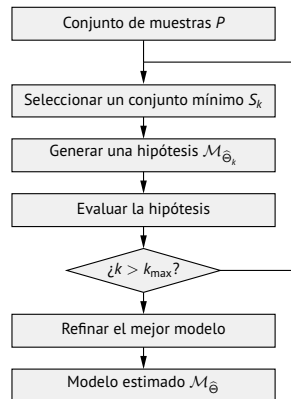
# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

Iteración  $k = 5$



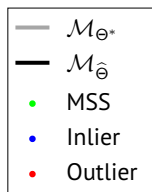
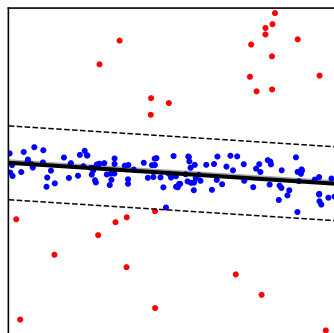
$C: 28$



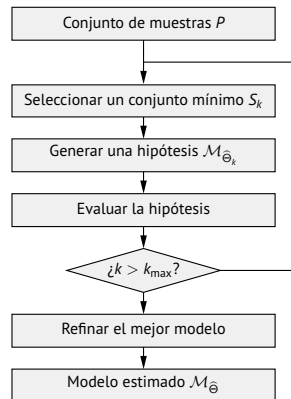
# El algoritmo RANSAC

El algoritmo RANSAC selecciona el **modelo**  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$  que **minimiza** una determinada función de **coste**  $C$  en un proceso iterativo.

Iteración  $k = 5$



$C: 28$



## Variantes de RANSAC

Las particularidades de cada aplicación en la que se utiliza RANSAC dan lugar a una amplia cantidad de **variantes**. Estas variantes **mejoran** una o varias de las **fases del algoritmo**.

- Mejoras enfocadas a la **selección** del **conjunto mínimo**:
  - **NAPSAC**: selecciona **muestras en la vecindad** de una muestra seleccionada de forma aleatoria. Útil si los *inliers* tienden a ser cercanos (p.e. hiperplanos).
  - **PROSAC**: selecciona **primero** las **muestras con mayor calidad** en base a un criterio determinado (p.e. grado de similitud entre correspondencias de dos imágenes)

## Variantes de RANSAC

Las particularidades de cada aplicación en la que se utiliza RANSAC dan lugar a una amplia cantidad de **variantes**. Estas variantes **mejoran** una o varias de las **fases del algoritmo**.

- Mejoras enfocadas a la **evaluación** de la **hipótesis**:
  - **MLESAC** y **MSAC**: modifican la **función de coste** dando más importancia al error de ajuste. Mejora la precisión de estimación con respecto de RANSAC.

$$\rho(p_j; \tau) = \begin{cases} (\epsilon(p_j; \mathcal{M}_\Theta))^2 & \text{si } |\epsilon(p_j; \mathcal{M}_\Theta)| \leq \tau \\ \text{cte.} & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

- **LO-RANSAC**: **optimización local** cuando se actualiza el mejor modelo encontrado. Si se combina con una estrategia de terminación adaptativa (recalculando  $k_{\max}$ ), **permite realizar** de forma aproximada  $N$  **iteraciones teóricas** sin especificar  $\omega$ .

## Concepto de métrica y métrica difusa

La clasificación que hace **RANSAC** se basa en el error de ajuste, una medida de proximidad entre las muestras y el modelo estimado. Es habitual el uso de la **métrica Euclídea**, una métrica que cumple:

$$(d1) \quad d(x, y) = 0 \text{ si, y sólo si } x = y;$$

$$(d2) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$(d3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Una alternativa es el uso de una **medida de similitud** como puede ser una **métrica difusa**:

$$(KM1) \quad M(x, y, 0) = 0;$$

$$(KM2) \quad M(x, y, \theta) = 1 \text{ para todo } \theta > 0 \text{ si, y sólo si } x = y;$$

$$(KM3) \quad M(x, y, \theta) = M(y, x, \theta).$$

De esta manera, podríamos asignar un **grado de compatibilidad** entre cada muestra  $p_j$  y un determinado modelo  $\mathcal{M}_\Theta$ .

# *Fuzzy Metric RANSAC (FM-R)*

## Métricas difusas consideradas

La familia de **métricas difusas**  $M_{i,n}^d$  consideradas emplean una **métrica clásica** para determinar el **grado de compatibilidad** entre dos elementos:

$$M_{1,n}^d(x, y, \theta) = \begin{cases} \left(1 - \frac{d(x,y)}{n\theta}\right)^n, & \text{si } d(x, y) \leq n\theta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases},$$

$$M_{2,n}^d(x, y, \theta) = \begin{cases} 1 - \frac{d^n(x,y)}{\theta^n}, & \text{si } d(x, y) \leq \theta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases},$$

$$M_{3,n}^d(x, y, \theta) = e^{-\frac{d^n(x,y)}{\theta^n}},$$

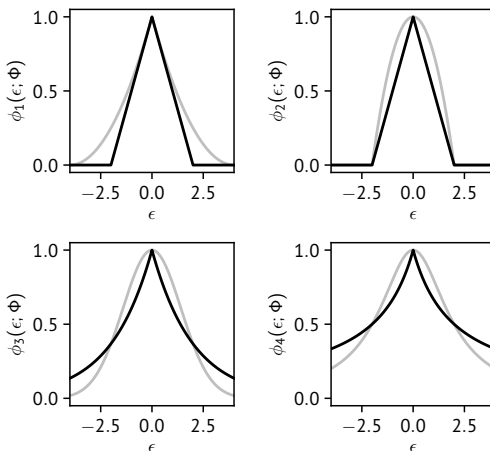
$$M_{4,n}^d(x, y, \theta) = \frac{\theta^n}{\theta^n + d^n(x, y)}.$$

Consideramos que dicha **métrica clásica**  $d(x, y) = \epsilon(p_j, \mathcal{M}_\Theta)$ . De esta manera, el valor proporcionado por la métrica difusa  $M_{i,n}^d$  puede denotarse como  $\phi_i(\epsilon; \Phi)$  donde  $\Phi = (n, \theta)$ . De ahora en adelante nos referiremos a la métrica difusa como  $M_i$ .



# Métricas difusas consideradas

La familia de **métricas difusas**  $M_{i,n}^d$  consideradas emplean una **métrica clásica** para determinar el **grado de compatibilidad** entre dos elementos:



## FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

- Conjunto de *inliers*:

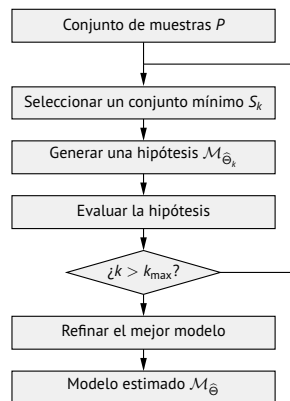
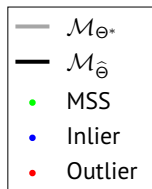
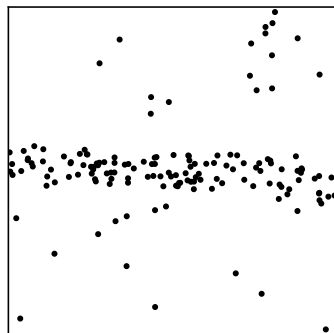
$$\mathcal{P}_{in_k} = \{p_j \in P : |\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k})| \leq \tau\}$$

- Bondad del modelo:

$$\varphi_k = \sum_j \phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi), \forall p_j \in \mathcal{P}_{in_k}$$

# FM-R1

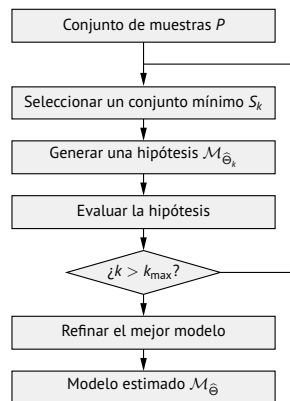
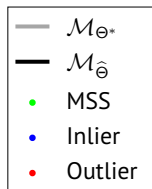
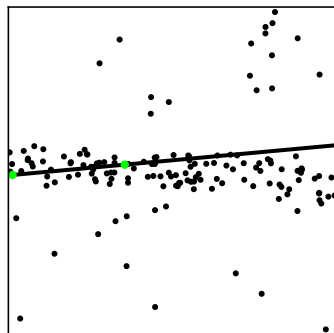
La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.



# FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

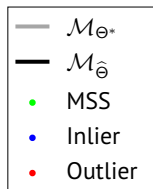
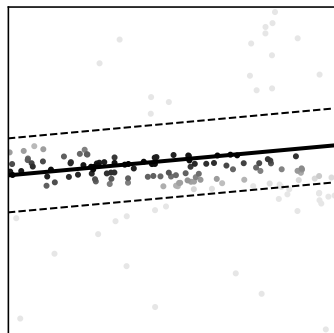
Iteración  $k = 1$



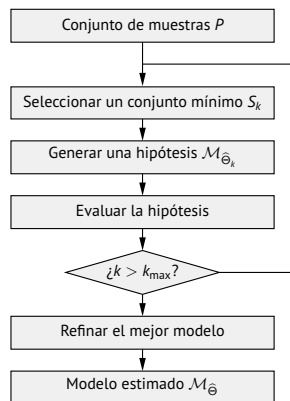
# FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

Iteración  $k = 1$



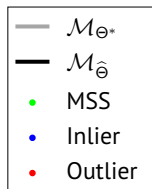
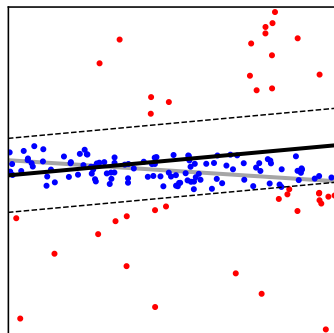
$\varphi: 70.94$



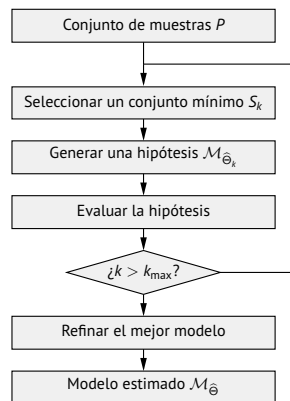
# FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

Iteración  $k = 1$



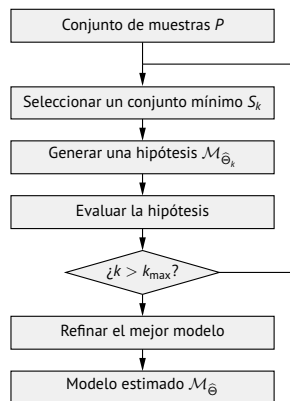
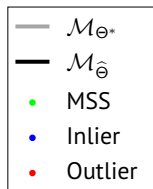
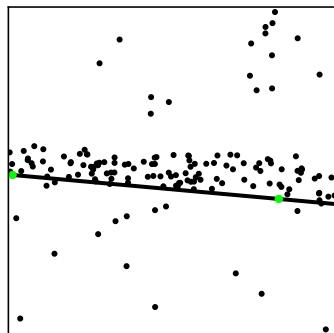
$\varphi: 70.94$



# FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

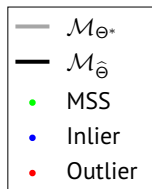
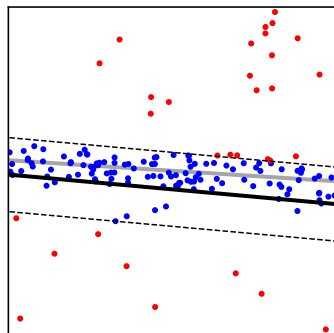
Iteración  $k = 2$



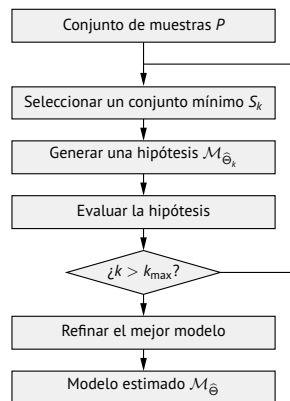
# FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

Iteración  $k = 2$



$\varphi: 64.68$

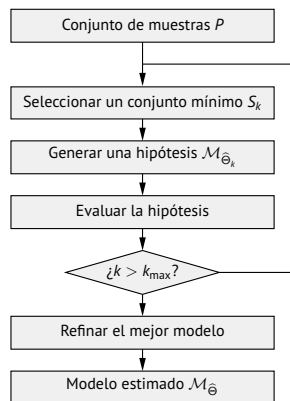
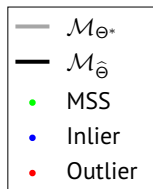
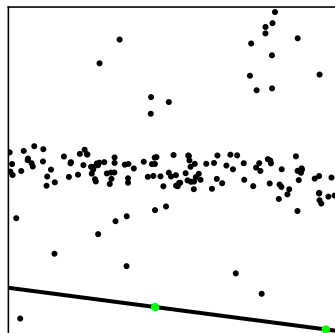




## FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

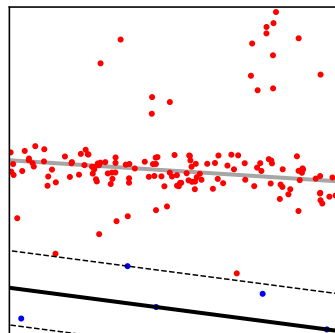
Iteración  $k = 3$



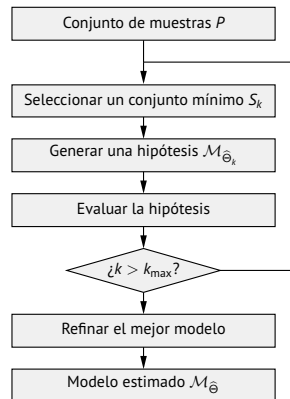
# FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

Iteración  $k = 3$



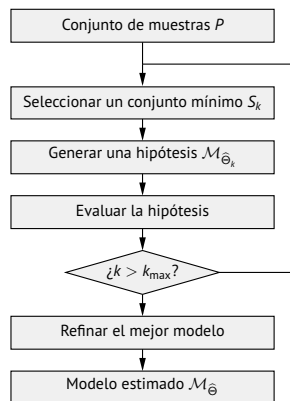
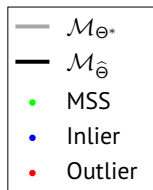
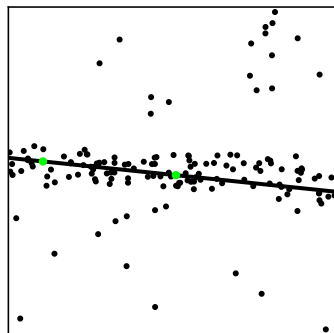
$\varphi: 2.48$



# FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

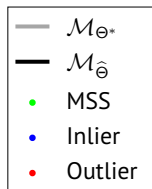
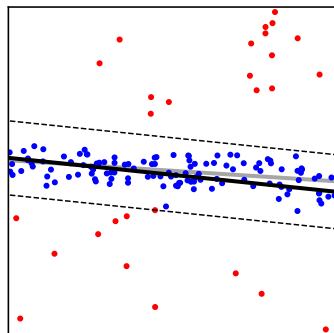
Iteración  $k = 4$



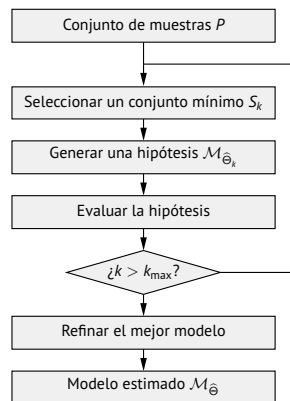
# FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

Iteración  $k = 4$



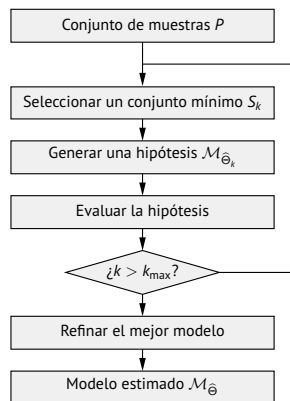
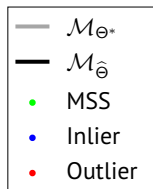
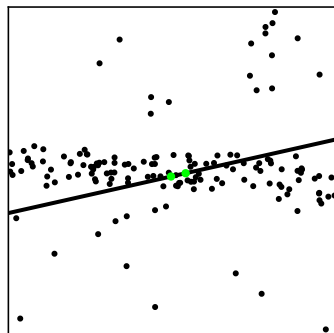
$\varphi: 88.82$



## FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

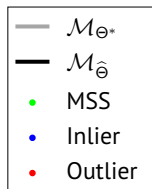
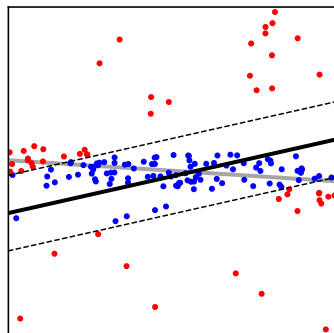
Iteración  $k = 5$



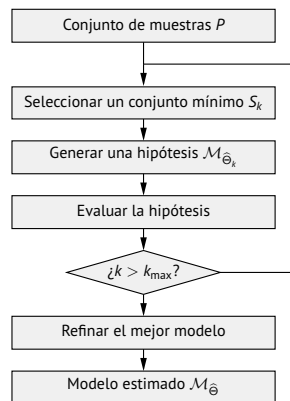
# FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

Iteración  $k = 5$



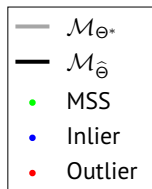
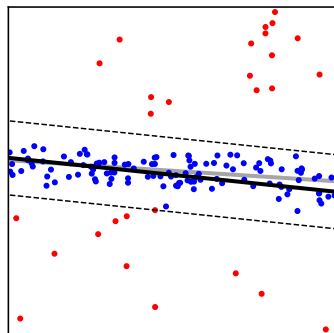
$\varphi: 53.70$



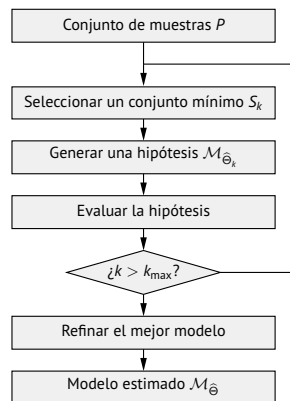
# FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

Iteración  $k = 5$



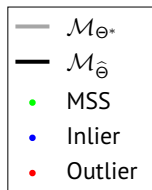
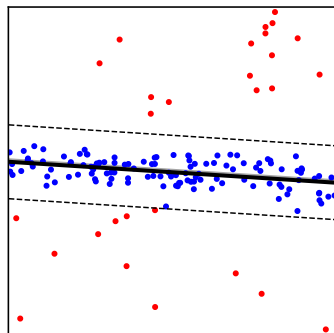
$\varphi: 88.82$



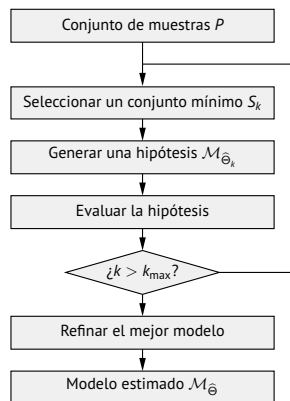
# FM-R1

La variante FM-R1 distingue entre *inliers* y *outliers* e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para **evaluar la bondad del modelo**.

Iteración  $k = 5$



$\varphi: 88.82$





## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

- Conjunto de *inliers*:

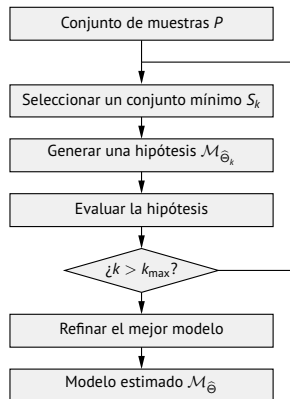
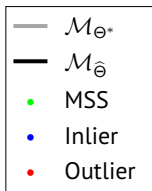
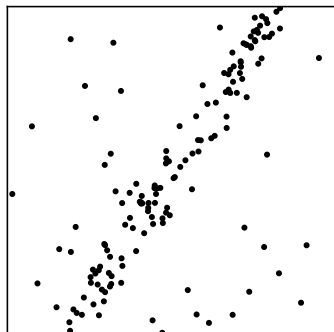
$$\mathcal{P}_{in_k} = \{p_j \in P : |\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k})| \leq \tau\}$$

- Bondad del modelo:

$$\varphi_k = \sum_j \phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi), \forall p_j \in \mathcal{P}_{in_k}$$

## FM-R2

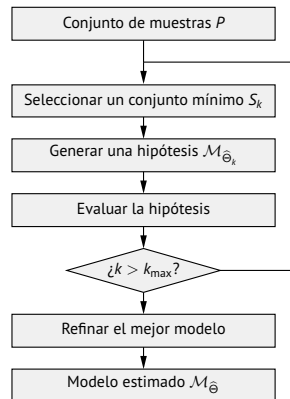
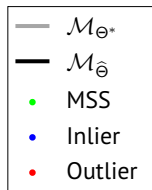
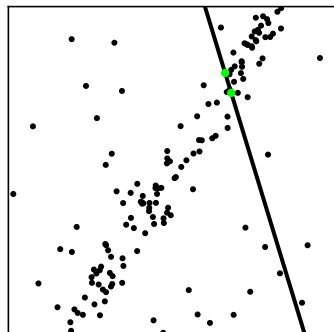
La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.



## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

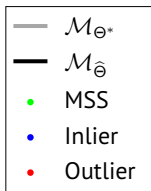
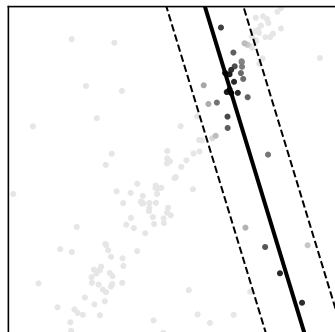
Iteración  $k = 1$



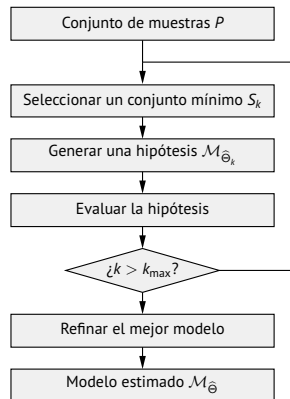
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $k = 1$



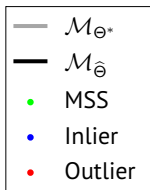
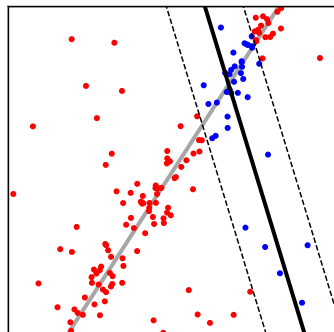
$\varphi: 19.86$



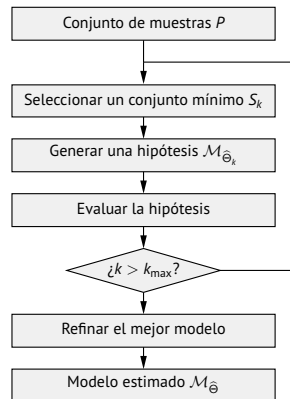
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $k = 1$



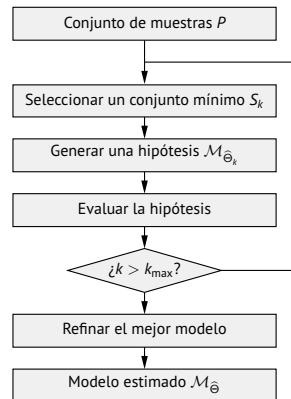
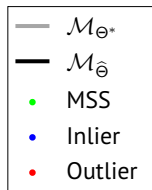
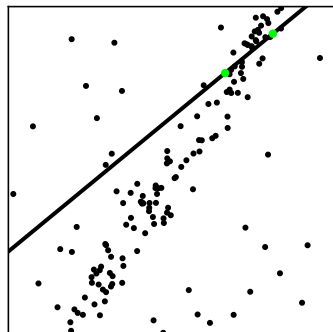
$\varphi: 19.86$



## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

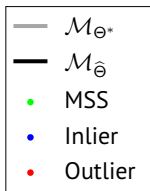
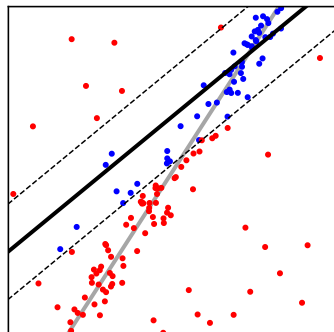
Iteración  $k = 2$



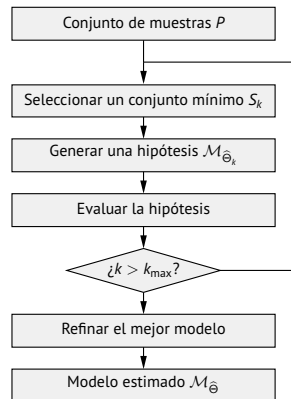
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $k = 2$

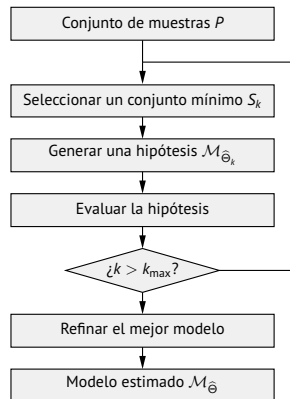
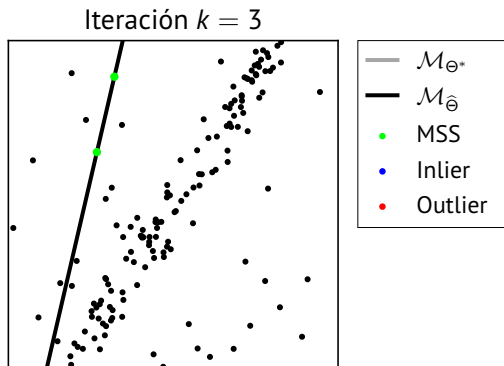


$\varphi: 36.03$



## FM-R2

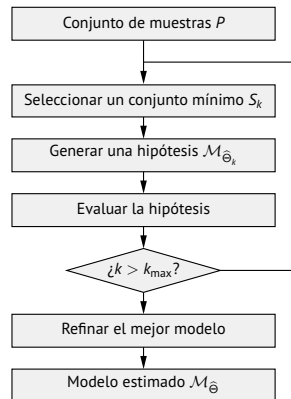
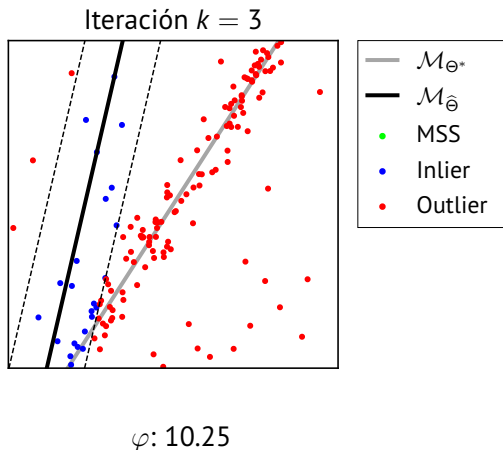
La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.





## FM-R2

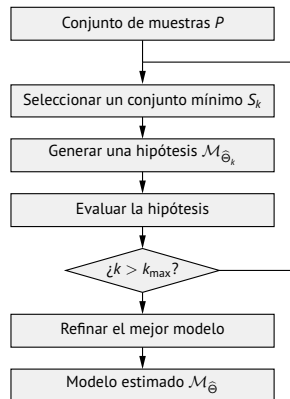
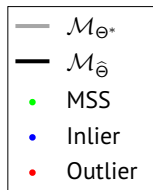
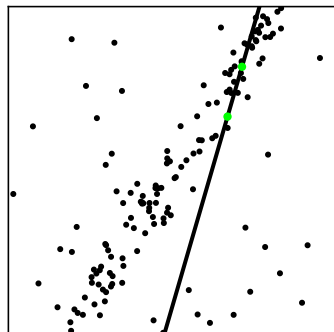
La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.



## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

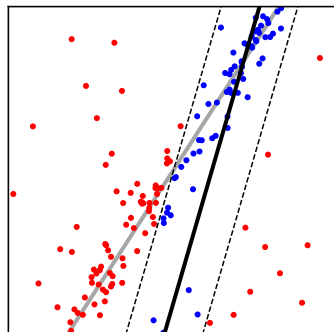
Iteración  $k = 4$



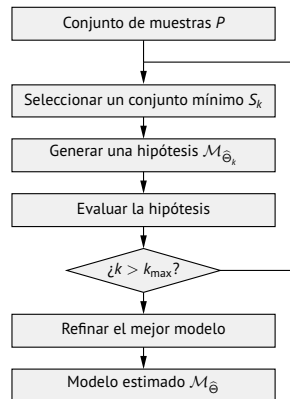
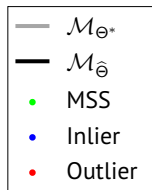
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $k = 4$



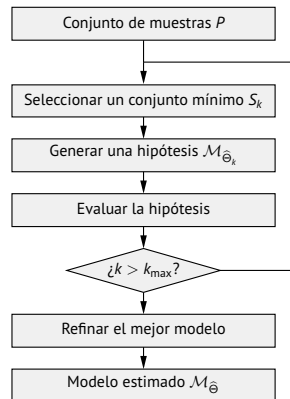
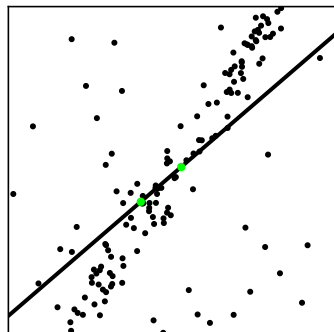
$\varphi: 42.58$



## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

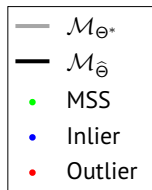
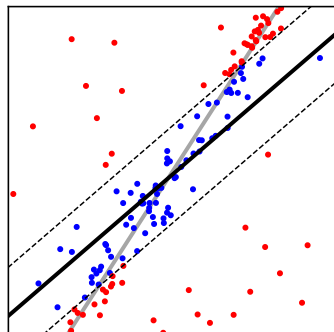
Iteración  $k = 5$



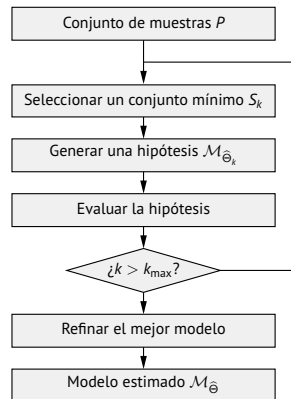
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $k = 5$



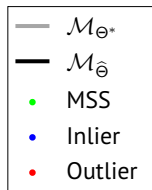
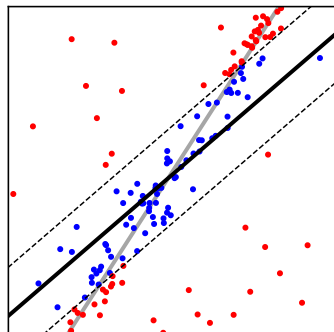
$\varphi: 45.39$



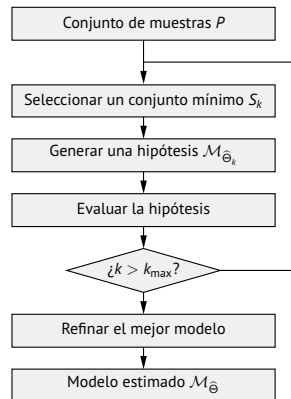
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $k = 5$



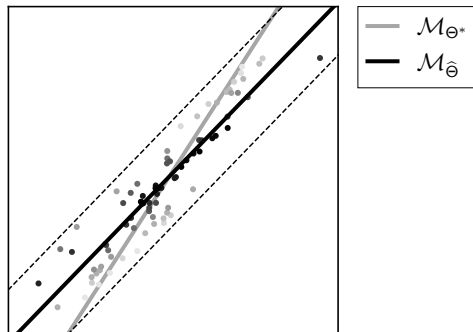
$\varphi: 45.39$



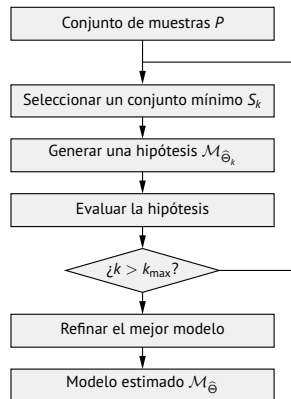
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $t = 1$



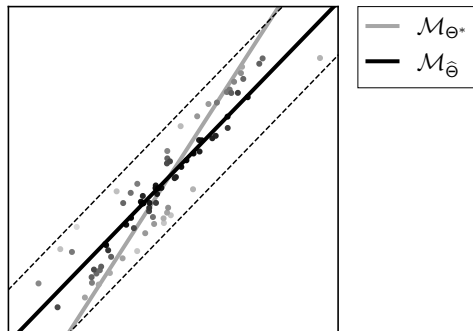
$$-0.7184x + 0.6956y - 0.0876 = 0$$



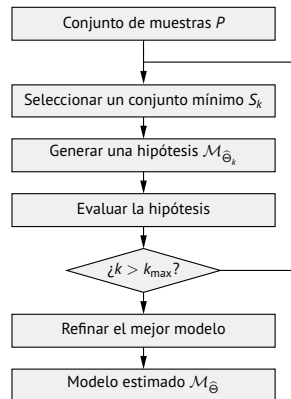
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $t = 1$



$$-0.7184x + 0.6956y - 0.0876 = 0$$

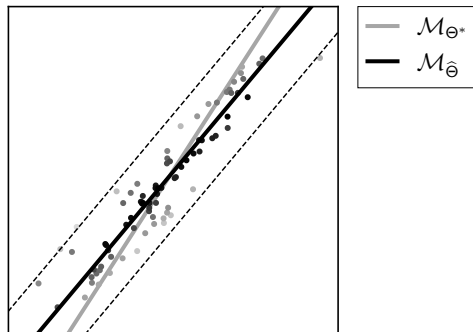




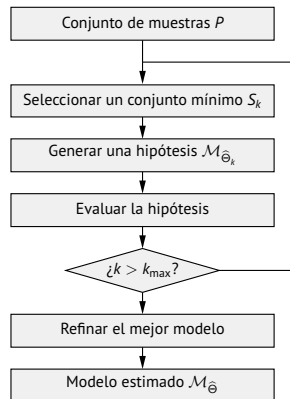
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $t = 2$



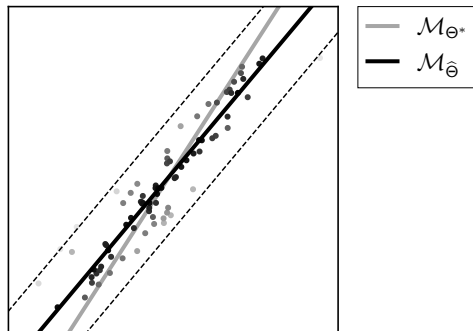
$$-0.7668x + 0.6419y - 0.0489 = 0$$



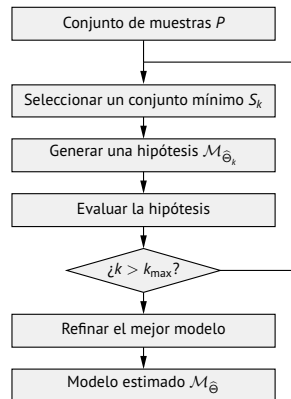
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $t = 2$



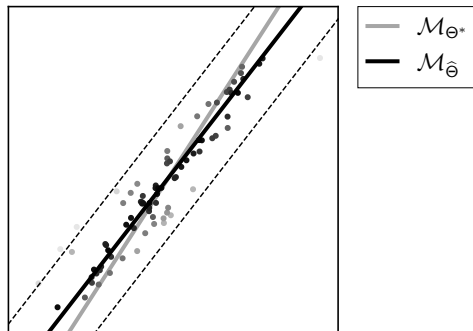
$$-0.7668x + 0.6419y - 0.0489 = 0$$



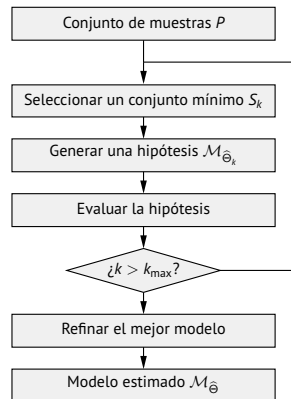
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $t = 3$



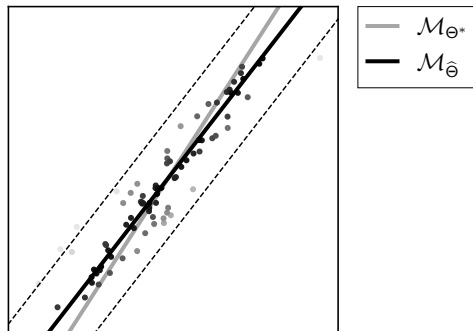
$$-0.7903x + 0.6127y - 0.0433 = 0$$



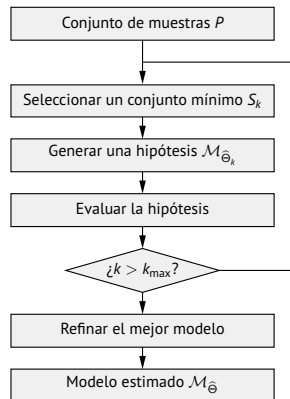
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $t = 3$



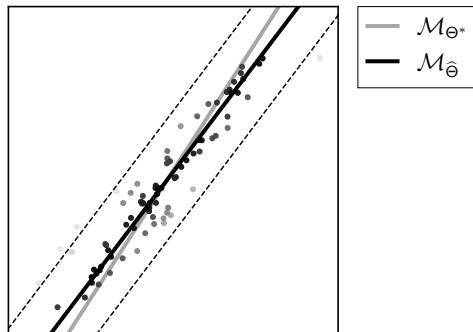
$$-0.7903x + 0.6127y - 0.0433 = 0$$



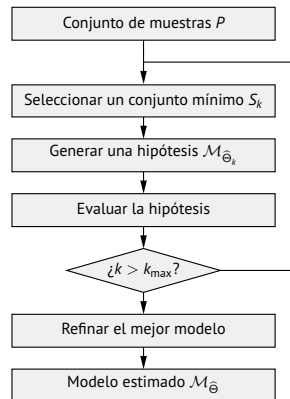
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $t = 4$



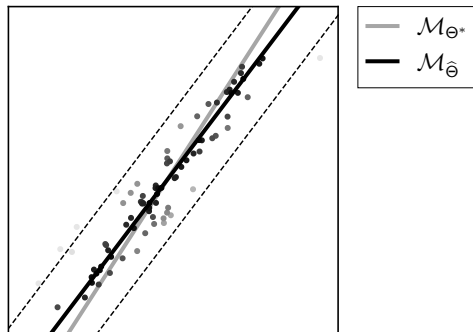
$$-0.7973x + 0.6036y - 0.0545 = 0$$



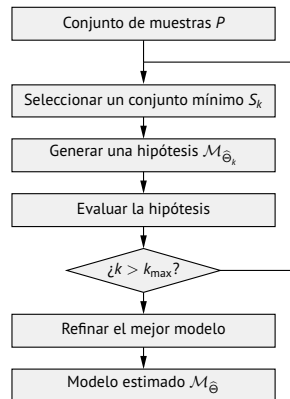
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $t = 4$



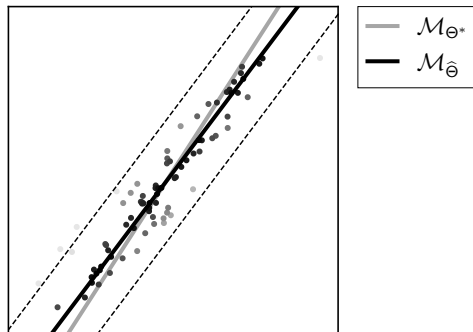
$$-0.7973x + 0.6036y - 0.0545 = 0$$



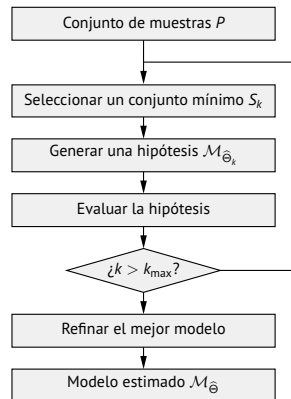
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $t = 5$



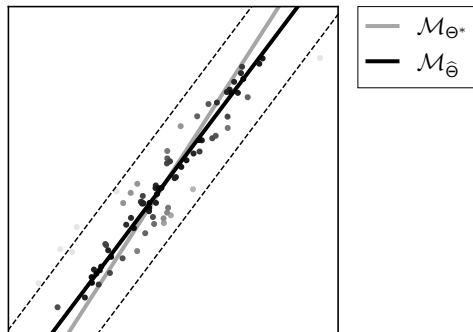
$$-0.7990x + 0.6013y - 0.0607 = 0$$



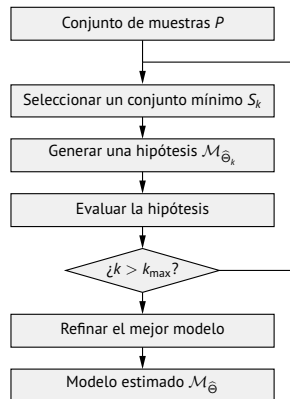
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $t = 5$



$$-0.7990x + 0.6013y - 0.0607 = 0$$

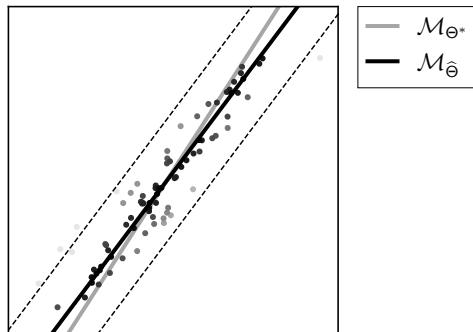




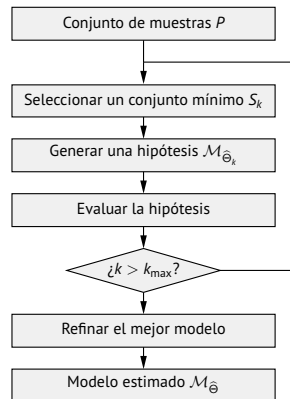
## FM-R2

La variante FM-R2 se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa final de **RP** o **RPI**.

Iteración  $t = 6$



$$-0.7994x + 0.6007y - 0.0634 = 0$$



## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

- Conjunto de *inliers*:

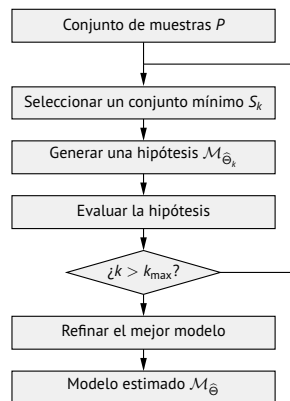
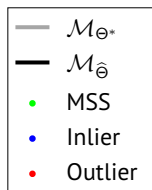
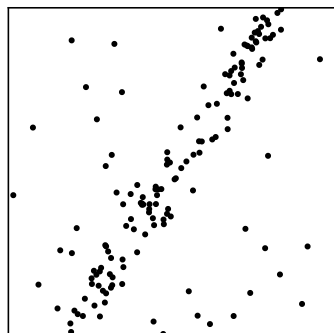
$$\mathcal{P}_{in_k} = \{p_j \in P : \phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi) \geq \sigma_\phi\}$$

- Bondad del modelo:

$$\varphi_k = \sum_j \phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi), \forall p_j \in \mathcal{P}_{in_k}$$

## FM-R3

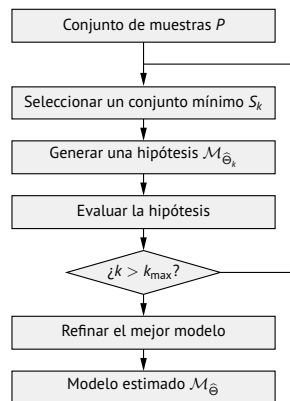
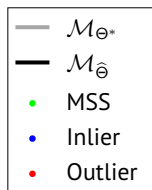
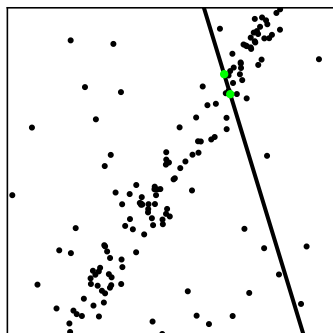
La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.



## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

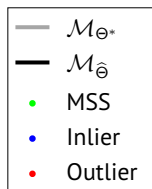
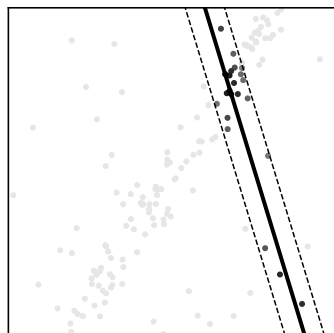
Iteración  $k = 1$



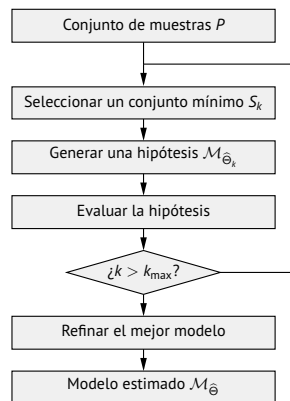
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $k = 1$



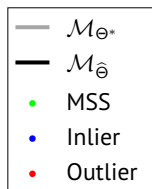
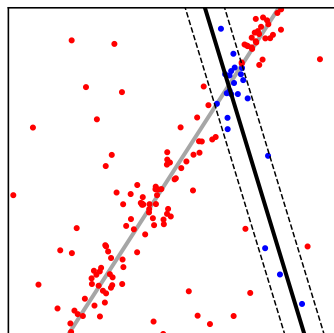
$\varphi: 16.37$



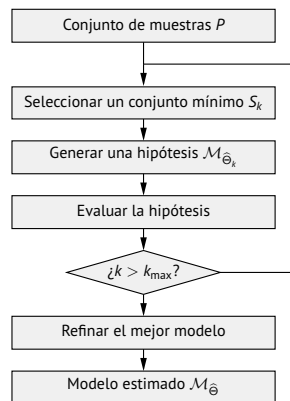
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $k = 1$



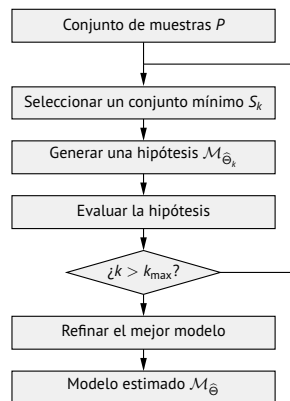
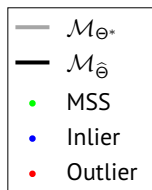
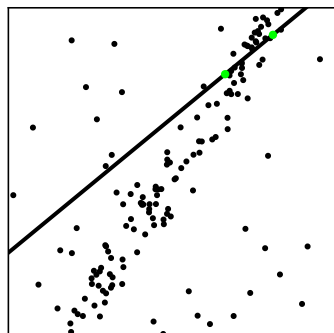
$\varphi: 16.37$



## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

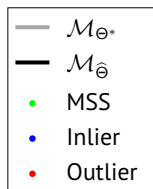
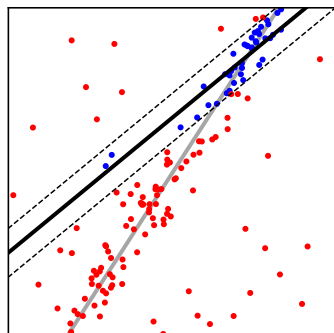
Iteración  $k = 2$



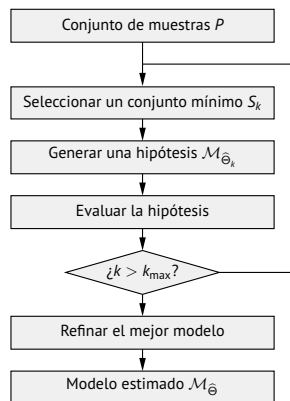
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $k = 2$



$\varphi: 32.14$

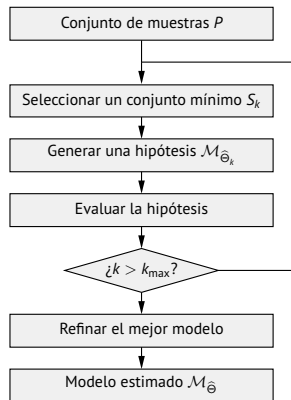
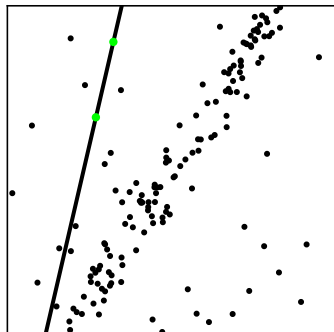




## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

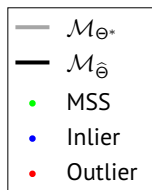
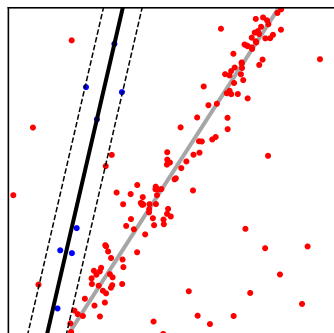
Iteración  $k = 3$



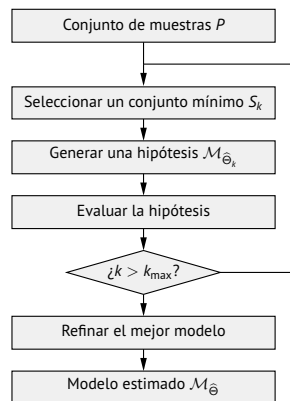
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $k = 3$



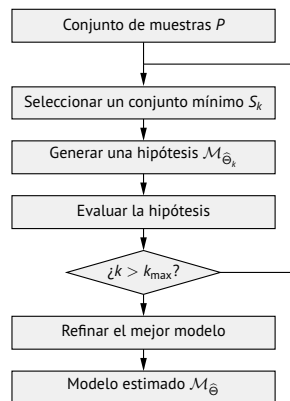
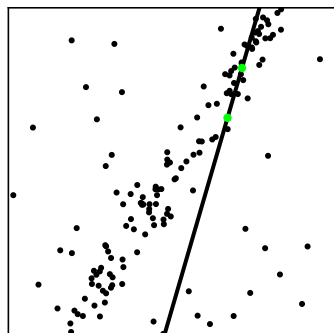
$\varphi: 6.44$



## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

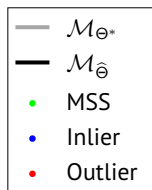
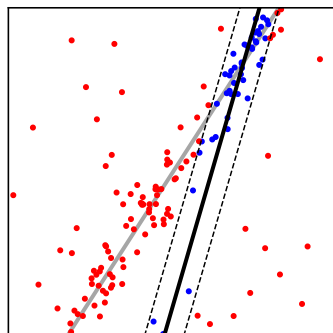
Iteración  $k = 4$



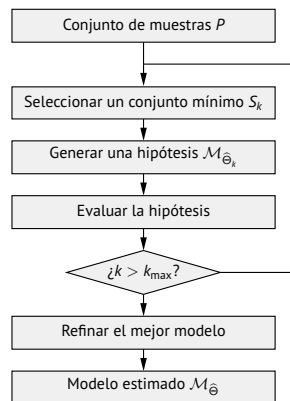
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $k = 4$



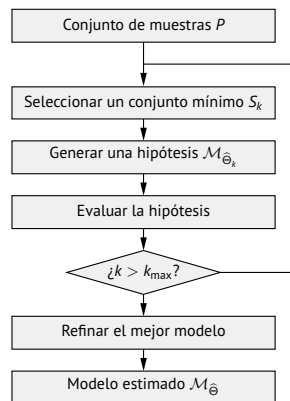
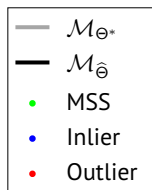
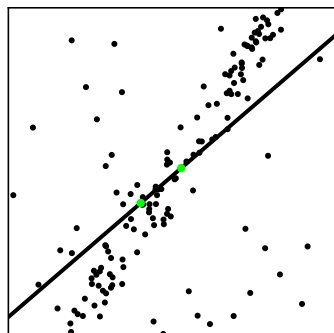
$\varphi: 36.99$



## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

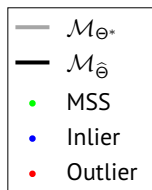
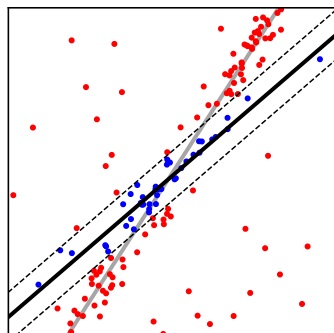
Iteración  $k = 5$



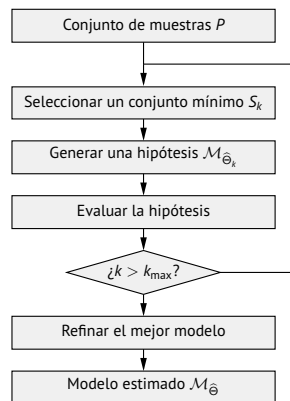
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $k = 5$



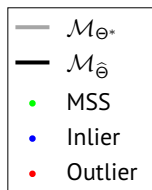
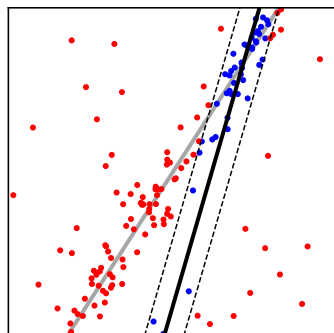
$\varphi: 35.15$



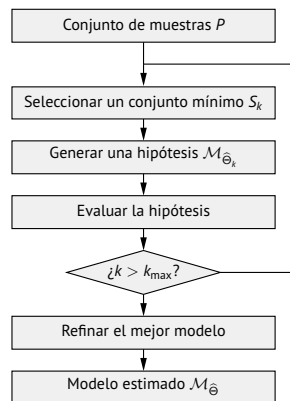
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $k = 5$



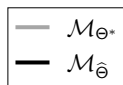
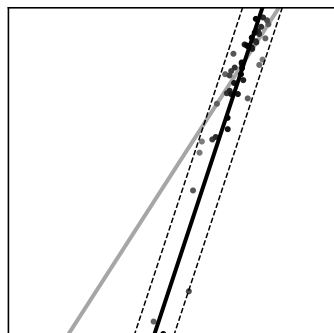
$\varphi: 36.99$



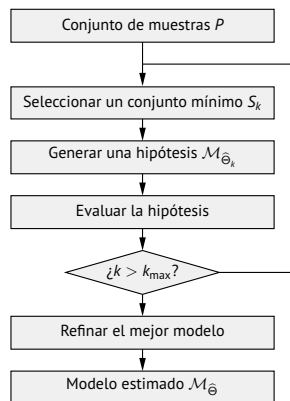
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $t = 1$



$$-0.9494x + 0.3140y - 2.0259 = 0$$

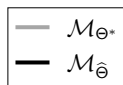
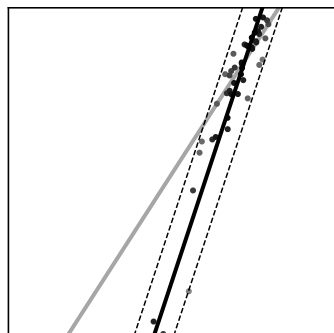




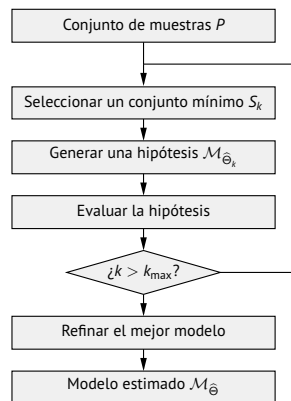
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $t = 1$



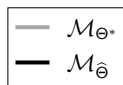
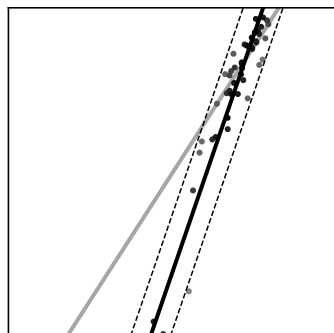
$$-0.9494x + 0.3140y - 2.0259 = 0$$



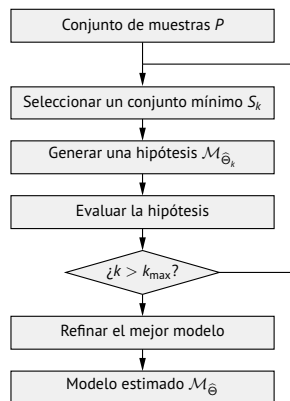
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $t = 2$



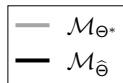
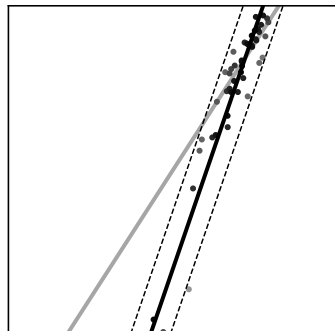
$$-0.9459x + 0.3244y - 1.9448 = 0$$



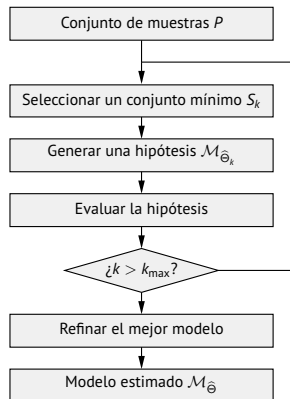
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $t = 2$



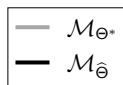
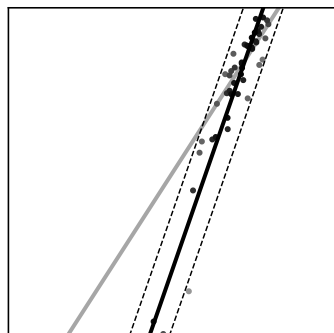
$$-0.9459x + 0.3244y - 1.9448 = 0$$



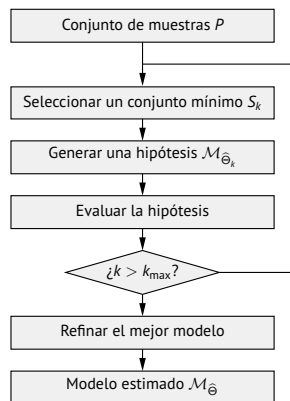
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $t = 3$



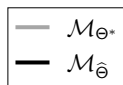
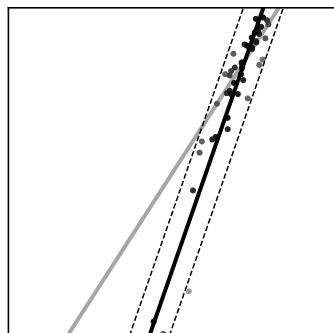
$$-0.9446x + 0.3281y - 1.9147 = 0$$



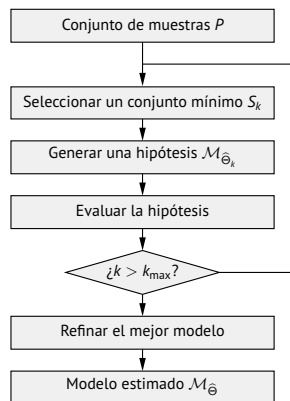
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $t = 3$



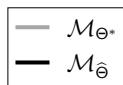
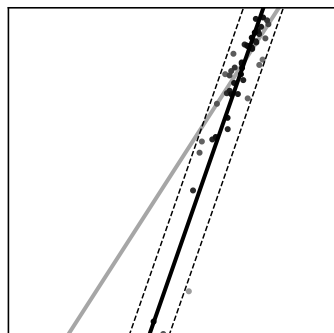
$$-0.9446x + 0.3281y - 1.9147 = 0$$



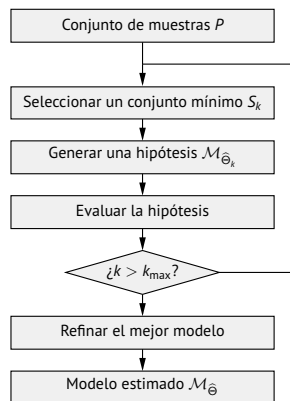
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $t = 4$



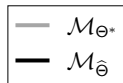
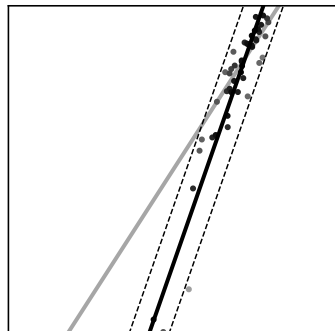
$$-0.9442x + 0.3294y - 1.9034 = 0$$



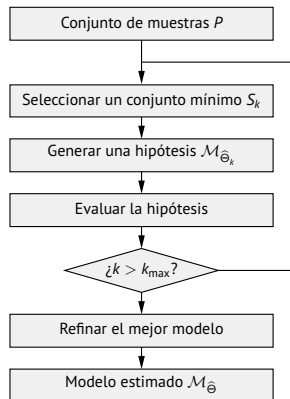
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $t = 4$



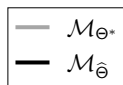
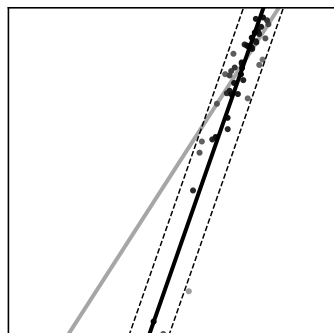
$$-0.9442x + 0.3294y - 1.9034 = 0$$



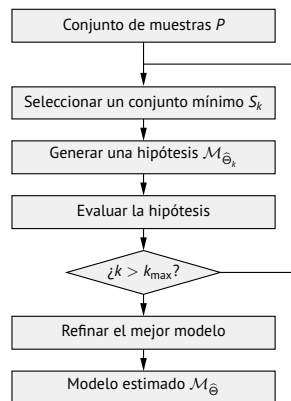
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $t = 5$



$$-0.9440x + 0.3299y - 1.8992 = 0$$

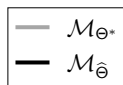
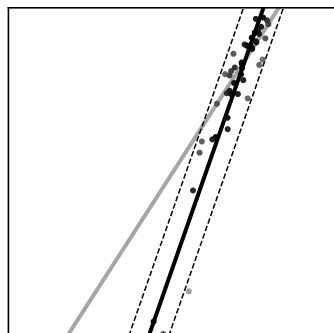




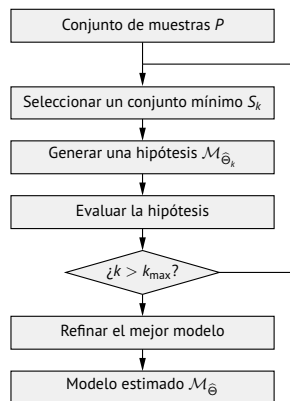
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $t = 5$



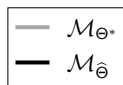
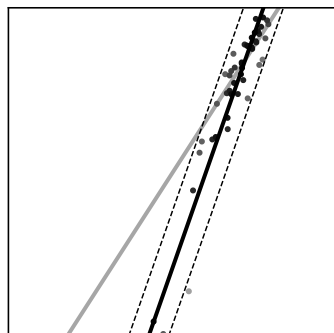
$$-0.9440x + 0.3299y - 1.8992 = 0$$



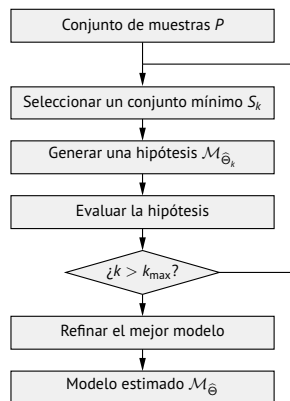
## FM-R3

La variante FM-R3 se diferencia de FM-R2 distinguiendo entre *inliers* y *outliers* en base al **grado de compatibilidad**.

Iteración  $t = 6$



$$-0.9439x + 0.3301y - 1.8977 = 0$$



## FM-R4

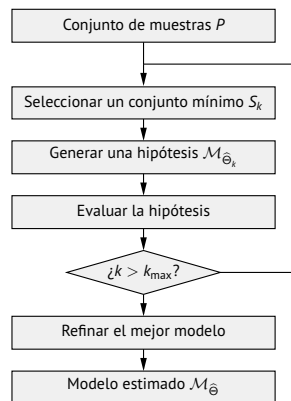
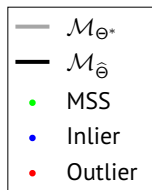
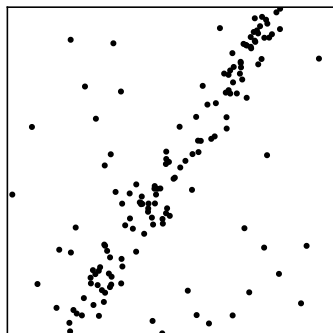
La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

- Bondad del modelo:

$$\varphi_k = \sum_j \phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi), \forall p_j \in P$$

## FM-R4

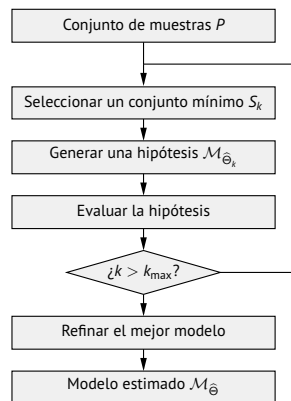
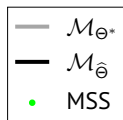
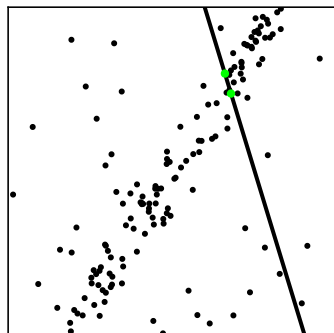
La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.



## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

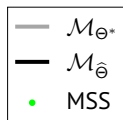
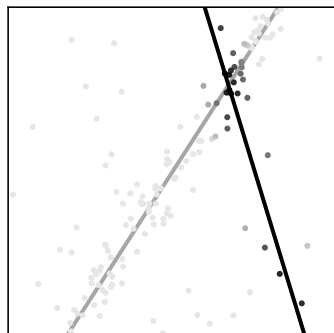
Iteración  $k = 1$



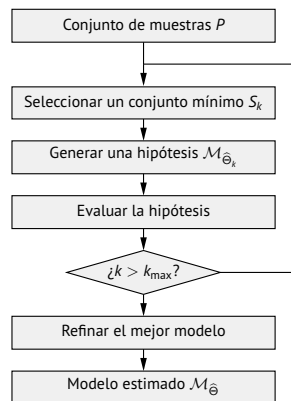
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $k = 1$



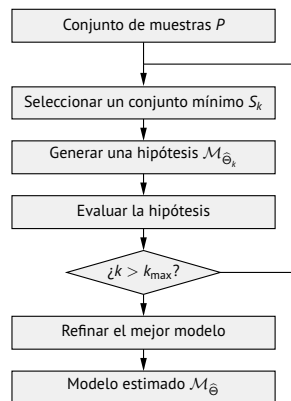
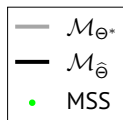
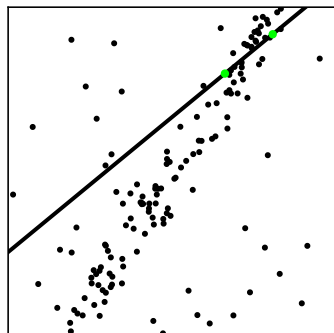
$\varphi: 19.86$



## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

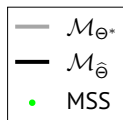
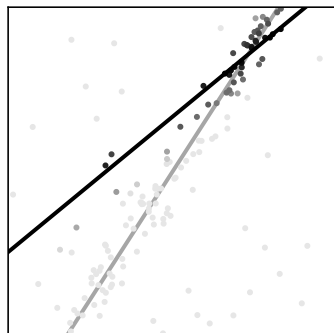
Iteración  $k = 2$



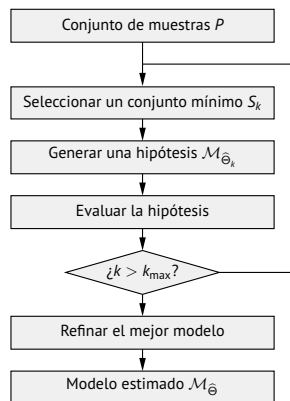
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $k = 2$



$\varphi: 36.03$

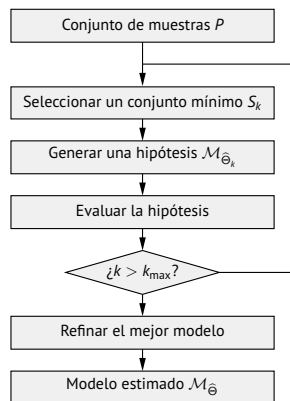
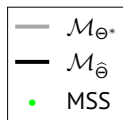
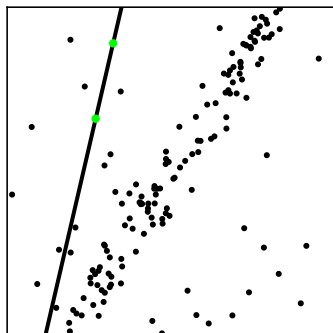




## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

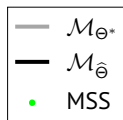
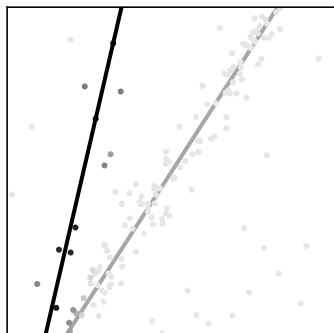
Iteración  $k = 3$



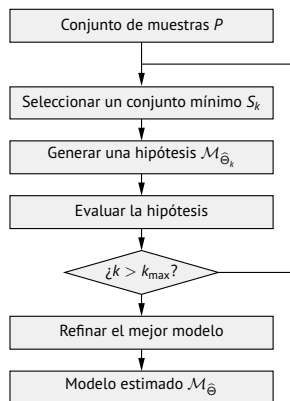
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $k = 3$



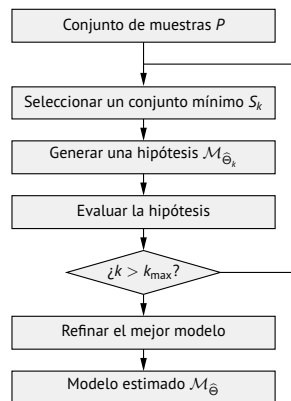
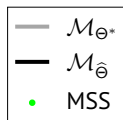
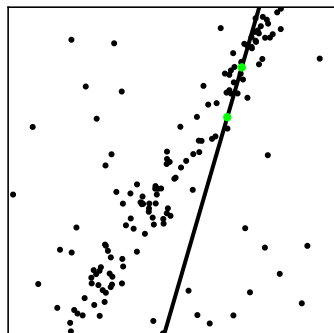
$\varphi: 10.25$



## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

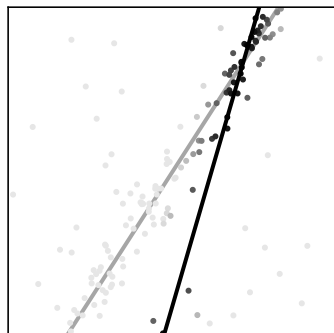
Iteración  $k = 4$



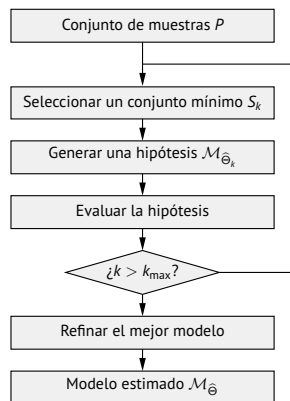
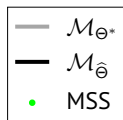
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $k = 4$



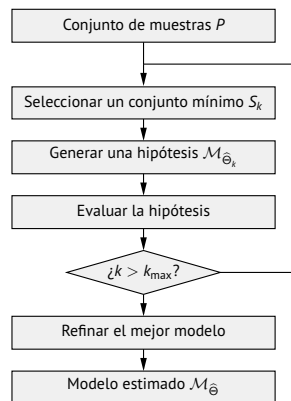
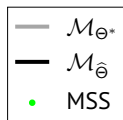
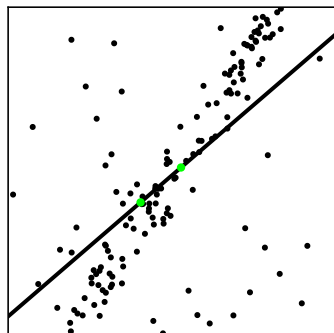
$\varphi: 42.58$



## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

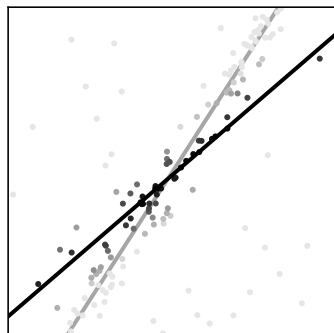
Iteración  $k = 5$



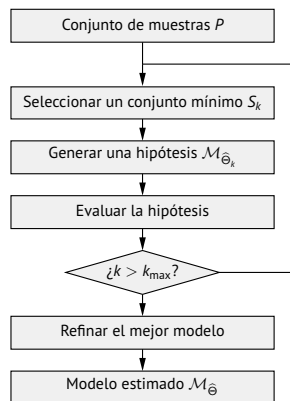
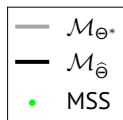
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $k = 5$



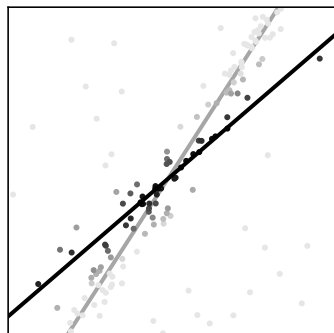
$\varphi: 45.39$



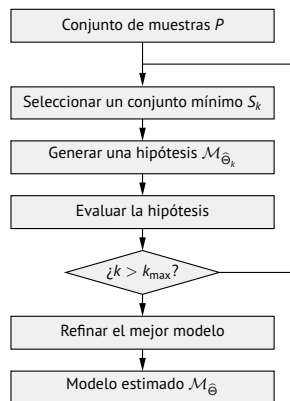
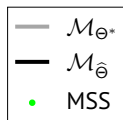
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $k = 5$



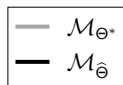
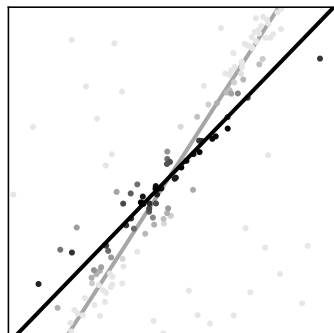
$\varphi: 45.39$



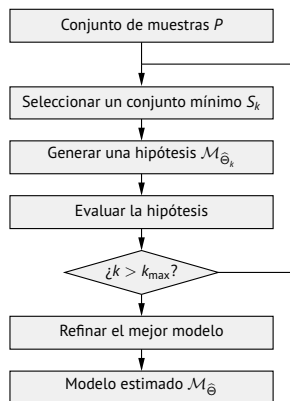
# FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $t = 1$



$$-0.7184x + 0.6956y - 0.0876 = 0$$

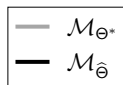
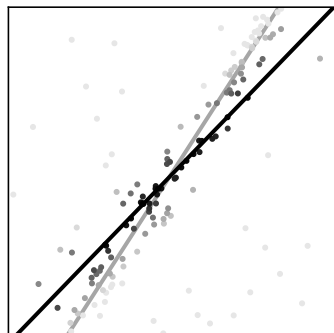




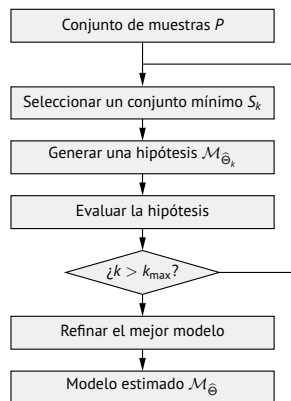
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $t = 1$



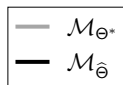
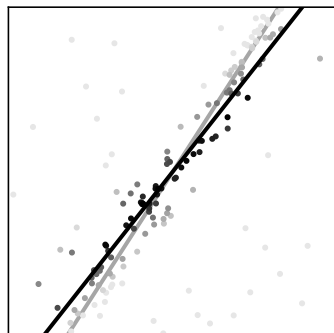
$$-0.7184x + 0.6956y - 0.0876 = 0$$



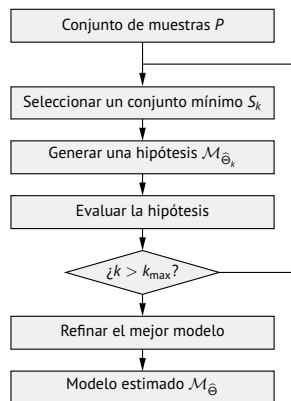
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $t = 2$



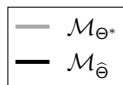
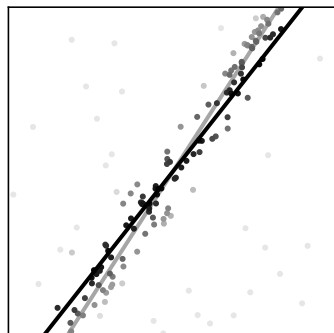
$$-0.7856x + 0.6187y - 0.0023 = 0$$



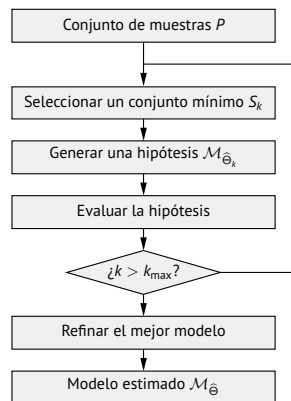
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $t = 2$



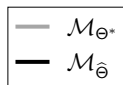
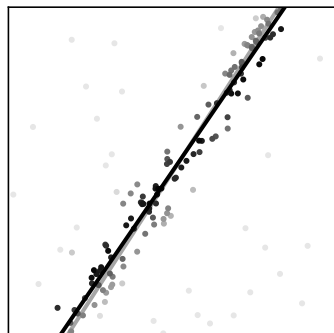
$$-0.7856x + 0.6187y - 0.0023 = 0$$



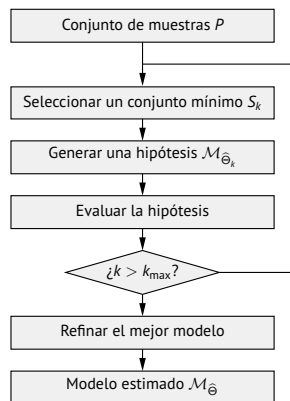
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $t = 3$



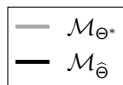
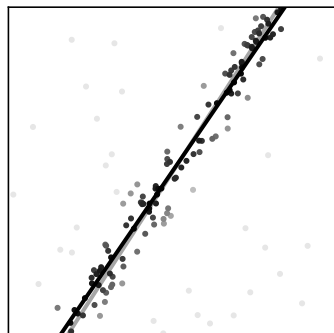
$$-0.8250x + 0.5651y + 0.0313 = 0$$



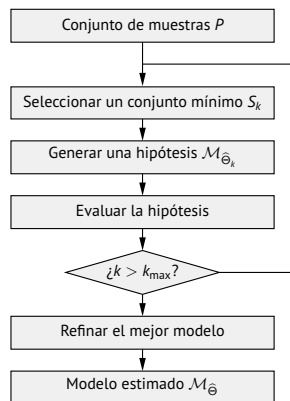
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $t = 3$



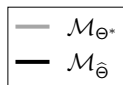
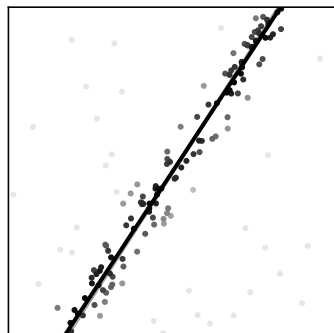
$$-0.8250x + 0.5651y + 0.0313 = 0$$



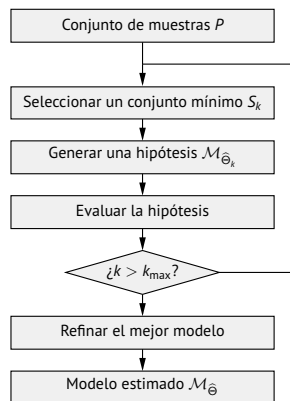
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $t = 4$



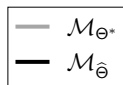
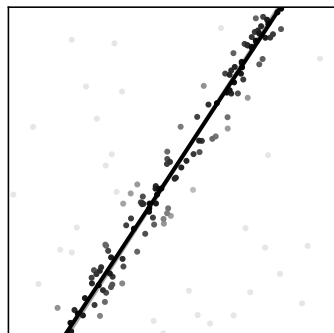
$$-0.8355x + 0.5495y + 0.0201 = 0$$



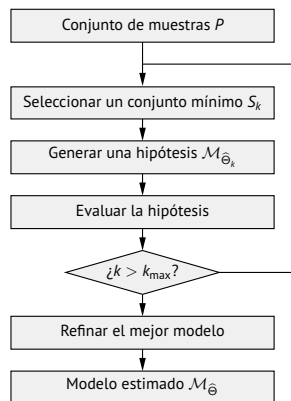
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $t = 4$



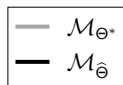
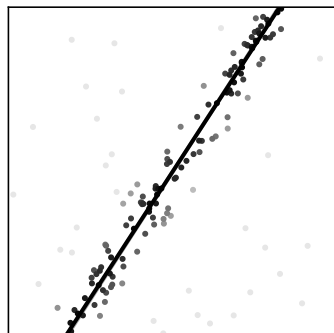
$$-0.8355x + 0.5495y + 0.0201 = 0$$



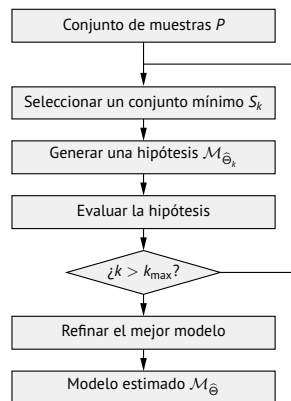
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $t = 5$



$$-0.8382x + 0.5454y + 0.0106 = 0$$

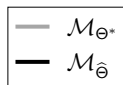
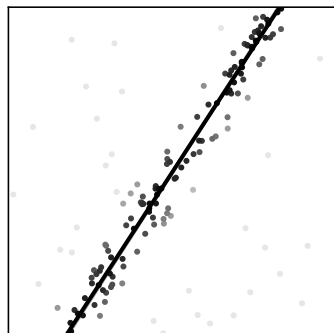




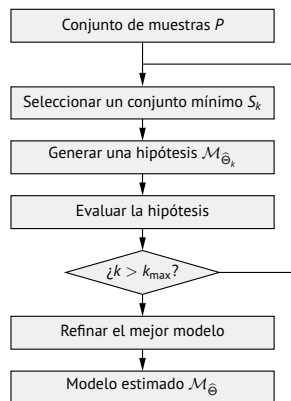
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $t = 5$



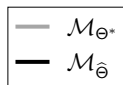
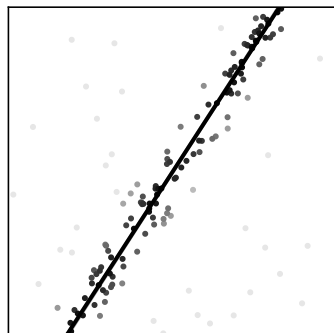
$$-0.8382x + 0.5454y + 0.0106 = 0$$



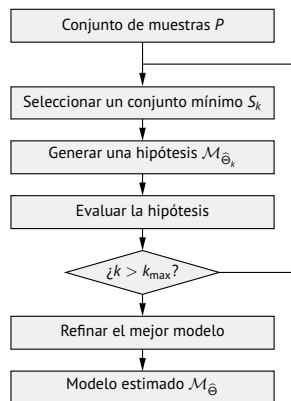
## FM-R4

La variante FM-R4 se diferencia de FM-R2 al no distinguir entre *inliers* y *outliers*.

Iteración  $t = 6$



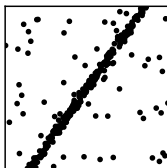
$$-0.8389x + 0.5443y + 0.0059 = 0$$



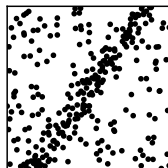
# Análisis de comportamiento de los algoritmos FM-R

## Problema de estimación considerado

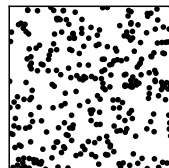
Para analizar el comportamiento de las variantes propuestas presentamos estimaciones de **rectas 2D** donde los **inliers** están afectados por **ruido Gaussiano** y los **outliers** están distribuidos de forma **uniforme**.



$$(\sigma, \omega) = (0.25, 0.2)$$



$$(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$$



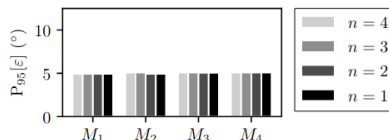
$$(\sigma, \omega) = (2, 0.6)$$

La **medida de error de estimación** es el ángulo  $\varepsilon$  entre modelo original  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  y estimado  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$ .

# Caracterización de las métricas difusas

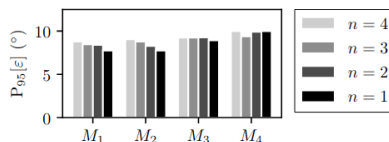
## ■ Dependencia del parámetro $n$ .

$n$	$P_{95}[\varepsilon] (^{\circ})$			
	FM-R1			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
4	4.94	5.08	5.08	5.08
3	4.94	5.08	5.08	5.08
2	4.94	4.94	5.06	5.08
1	4.94	4.94	5.06	5.08



Proporción de outliers  $\omega = 0.40$

$n$	$P_{95}[\varepsilon] (^{\circ})$			
	FM-R1			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
4	8.79	9.04	9.24	9.99
3	8.46	8.79	9.24	9.39
2	8.40	8.27	9.24	9.92
1	7.75	7.75	8.92	9.99

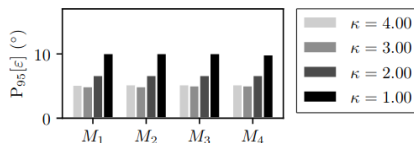


Proporción de outliers  $\omega = 0.60$

# Caracterización de las métricas difusas

- Dependencia del umbral de ruido  $\kappa$ , donde  $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ .

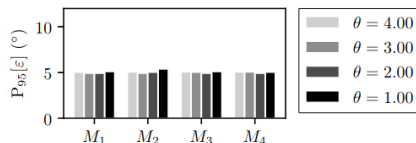
$\kappa$	$P_{95}[\varepsilon] (^{\circ})$			
	FM-R1			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
4.00	5.16	5.24	5.24	5.24
3.00	4.94	4.94	5.06	5.08
2.00	6.69	6.69	6.69	6.69
1.00	10.08	10.08	10.08	9.90



# Caracterización de las métricas difusas

- Dependencia entre el umbral de ruido  $\tau$  y el parámetro  $\theta$ .

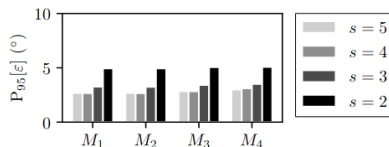
$\theta$	$P_{95}[\varepsilon] (^{\circ})$			
	FM-R1			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
4.00	5.06	5.08	5.08	5.08
3.00	4.94	4.94	5.06	5.08
2.00	4.94	5.06	4.94	4.94
1.00	5.13	5.40	5.13	5.06



# Caracterización de las métricas difusas

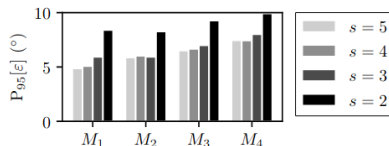
## ■ Dependencia del tamaño del conjunto mínimo $s$ .

$s$	$P_{95}[\varepsilon] (^{\circ})$			
	FM-R1			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
5	2.69	2.68	2.84	3.00
4	2.66	2.66	2.84	3.11
3	3.27	3.25	3.41	3.52
2	4.94	4.94	5.06	5.08



Proporción de outliers  $\omega = 0.4$

$s$	$P_{95}[\varepsilon] (^{\circ})$			
	FM-R1			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
5	4.87	5.88	6.52	7.46
4	5.08	6.03	6.66	7.44
3	5.94	5.93	7.00	8.01
2	8.40	8.27	9.27	9.92



Proporción de outliers  $\omega = 0.6$



# Caracterización de las métricas difusas

**Conclusiones** de la caracterización de las métricas difusas incorporadas en FM-R1:

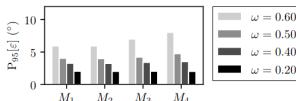
- Seleccionando valores de  $\tau = 3\sigma$  y  $s = 3$  la calidad de la **estimación mejora** incorporando cualquier métrica difusa.
- Con valores de  $n = 2$  la calidad de la **estimación mejora ligeramente**.
- Se ha podido observar que valores de  $\theta \neq \tau$  **no mejoran ni empeoran** la calidad de la estimación.

En adelante, se establecen valores de  $\tau = 3\sigma$ ,  $s = 3$  y  $(n, \theta) = (2, \tau)$ , si no se indica lo contrario.

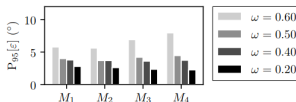
# Comparación entre los algoritmos FM-R

- Incorporando una etapa de **reestimación ponderada** (RP).

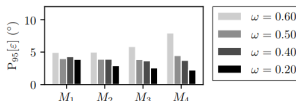
$\omega$	$P_{95}[\varepsilon] \text{ (}^\circ\text{)}$			
	FM-R1			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	5.94	5.93	7.00	8.01
0.50	4.03	4.00	4.23	4.75
0.40	3.27	3.25	3.41	3.52
0.20	2.04	2.01	2.04	2.01



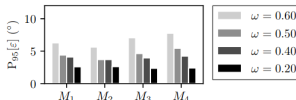
$\omega$	FM-R2 con RP			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	5.79	5.63	6.92	7.96
0.50	4.00	3.71	4.22	4.47
0.40	3.80	3.70	3.62	3.74
0.20	2.80	2.61	2.37	2.26



$\omega$	FM-R3 con RP			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	4.96	5.01	5.86	7.96
0.50	4.02	3.93	3.88	4.47
0.40	4.31	3.92	3.68	3.74
0.20	3.91	2.94	2.58	2.26



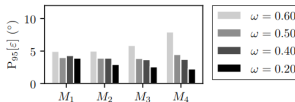
$\omega$	FM-R4 con RP			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	6.29	5.63	7.07	7.76
0.50	4.41	3.71	4.64	5.44
0.40	4.11	3.70	3.96	4.24
0.20	2.59	2.61	2.36	2.42



# Comparación entre los algoritmos FM-R

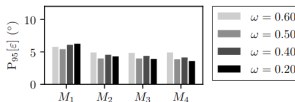
- Incorporando una etapa de **reestimación ponderada** (RP).

$\omega$	$P_{95}[\varepsilon] \text{ (}^\circ\text{)}$			
	FM-R3 con RP			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	4.96	5.01	5.86	7.96
0.50	4.02	3.93	3.88	4.47
0.40	4.31	3.92	3.68	3.74
0.20	3.91	2.94	2.58	2.26



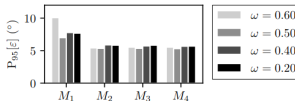
Valor umbral  $\sigma_\phi = 0.50$

$\omega$	$P_{95}[\varepsilon] \text{ (}^\circ\text{)}$			
	FM-R3 con RP			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	5.85	4.99	4.92	4.99
0.50	5.51	4.06	4.06	3.95
0.40	6.17	4.65	4.47	4.24
0.20	6.33	4.40	3.99	3.68



Valor umbral  $\sigma_\phi = 0.75$

$\omega$	$P_{95}[\varepsilon] \text{ (}^\circ\text{)}$			
	FM-R3 con RP			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	10.07	5.41	5.53	5.54
0.50	7.00	5.34	5.35	5.30
0.40	7.78	5.88	5.72	5.67
0.20	7.68	5.83	5.83	5.69

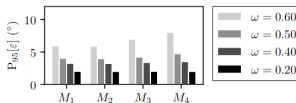


Valor umbral  $\sigma_\phi = 0.90$

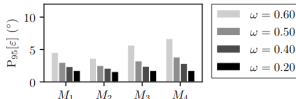
# Comparación entre los algoritmos FM-R

- Incorporando una etapa de **reestimación ponderada iterativa (RPI)**.

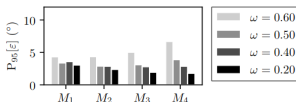
$\omega$	$P_{95}[\varepsilon] \text{ (}^\circ\text{)}$			
	FM-R1			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	5.94	5.93	7.00	8.01
0.50	4.03	4.00	4.23	4.75
0.40	3.27	3.25	3.41	3.52
0.20	2.04	2.01	2.04	2.01



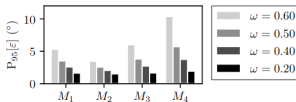
$\omega$	$P_{95}[\varepsilon] \text{ (}^\circ\text{)}$			
	FM-R2 con RPI			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	4.57	3.66	5.70	6.69
0.50	3.03	2.55	3.26	3.88
0.40	2.38	2.13	2.44	2.87
0.20	1.78	1.62	1.78	1.79



$\omega$	$P_{95}[\varepsilon] \text{ (}^\circ\text{)}$			
	FM-R3 con RPI			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	4.32	4.36	5.02	6.69
0.50	3.38	2.90	3.11	3.88
0.40	3.58	2.86	2.81	2.87
0.20	3.05	2.38	1.94	1.79



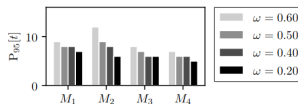
$\omega$	$P_{95}[\varepsilon] \text{ (}^\circ\text{)}$			
	FM-R4 con RPI			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	5.29	3.47	6.00	10.37
0.50	3.51	2.55	3.82	5.71
0.40	2.59	2.04	2.73	3.73
0.20	1.63	1.51	1.66	1.94



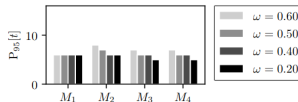
# Comparación entre los algoritmos FM-R

- Incorporando una etapa de **reestimación ponderada iterativa** (RPI).

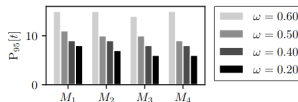
$\omega$	$P_{95}[t]$			
	FM-R2 con RPI			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	9.00	12.00	8.00	7.00
0.50	8.00	9.00	7.00	6.00
0.40	8.00	8.00	6.00	6.00
0.20	7.00	6.00	6.00	5.00



$\omega$	FM-R3 con RPI			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	6.00	8.00	7.00	7.00
0.50	6.00	7.00	6.00	6.00
0.40	6.00	6.00	6.00	6.00
0.20	6.00	6.00	5.00	5.00



$\omega$	FM-R4 con RPI			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
0.60	15.00	15.00	14.00	15.00
0.50	11.00	10.00	10.00	9.00
0.40	9.00	9.00	8.00	8.00
0.20	8.00	7.00	6.00	6.00



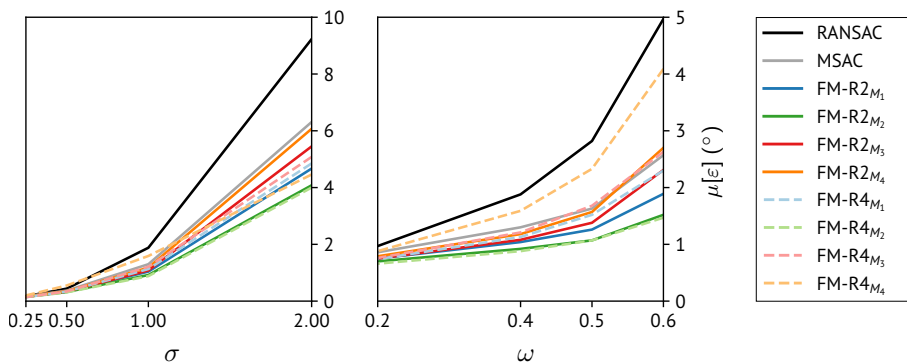
# Comparación entre los algoritmos FM-R

**Conclusiones** de la comparación entre los algoritmos FM-R:

- Se ha podido comprobar que las **estimaciones** con los algoritmos **FM-R** que incorporan una etapa de **RPI** son significativamente **mejores** en términos de precisión.
- A pesar de realizar un mayor número de iteraciones  $t$ , **FM-R4** <sub>$M_2$</sub>  consigue **mejorar ligeramente** la precisión obtenida con **FM-R2** <sub>$M_2$</sub> .
- El hecho de que las estimaciones incorporando las métricas  $M_1$  y  $M_2$  sean mejores en comparación con incorporar  $M_3$  y  $M_4$  indica que, a pesar de que su uso sea conveniente, es **necesario atenuar** el efecto de los **outliers**.

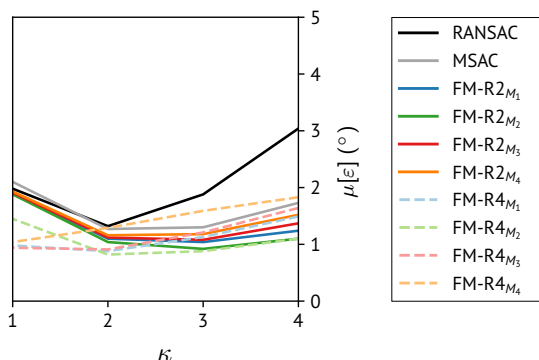
# Comparación entre RANSAC, MSAC, FM-R2 y FM-R4

Comparación de la precisión de **estimación** de **rectas 2D** con diferentes valores de la **magnitud** del ruido aleatorio  $\sigma$ , **proporción** de *outliers*  $\omega$  y valores de **umbral** de ruido  $\kappa$  ( $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ ).



# Comparación entre RANSAC, MSAC, FM-R2 y FM-R4

Comparación de la precisión de **estimación** de **rectas 2D** con diferentes valores de la **magnitud** del ruido aleatorio  $\sigma$ , **proporción** de *outliers*  $\omega$  y valores de **umbral** de ruido  $\kappa$  ( $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ ).





## Comparación entre RANSAC, MSAC, FM-R2 y FM-R4

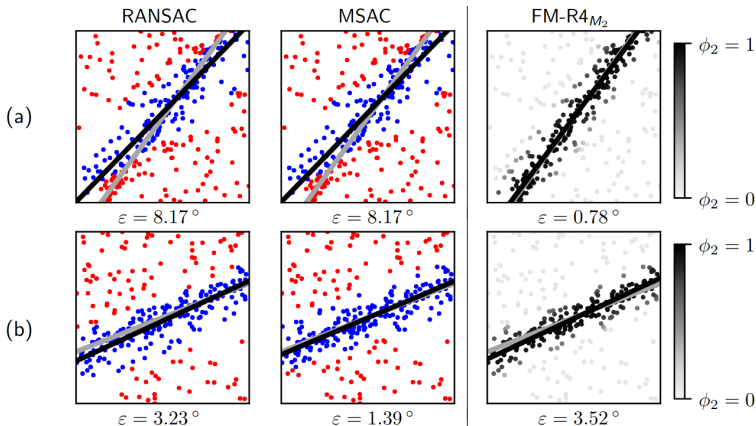
Comparación de la precisión de **estimación** de **rectas 2D** con diferentes valores de la **magnitud** del ruido aleatorio  $\sigma$ , **proporción** de *outliers*  $\omega$  y valores de **umbral** de ruido  $\kappa$  ( $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ ).

### Conclusiones:

- **FM-R2** y **FM-R4** pueden proporcionar una **mejor** calidad de **estimación** en comparación con los algoritmos originales **RANSAC** y **MSAC**.
- En general, incorporar las métricas  $M_1$  y  $M_2$  tiene como resultado **estimaciones más precisas** en comparación con incorporar  $M_3$  y  $M_4$ .
- **FM-R4** **tolera mejor** las **variaciones del umbral** de ruido  $\theta$ .

# Comparación entre RANSAC, MSAC y FM-R4

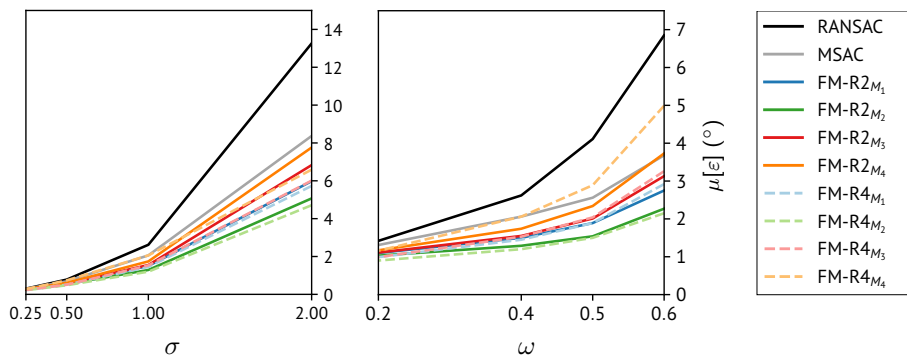
**Mejor** (a) y **peor** (b) estimación de **FM-R4**<sub>M<sub>2</sub></sub> en comparación con **MSAC** entre 500 estimaciones donde  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$ .



# Otros problemas de estimación

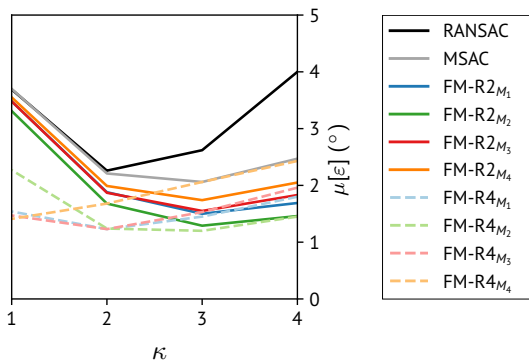
# Estimación de hiperplanos

Comparación de la precisión de **estimación** de **hiperplanos 3D** con diferentes valores de la **magnitud** del ruido aleatorio  $\sigma$ , **proporción** de *outliers*  $\omega$  y valores de **umbral** de ruido  $\kappa$  ( $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ ).



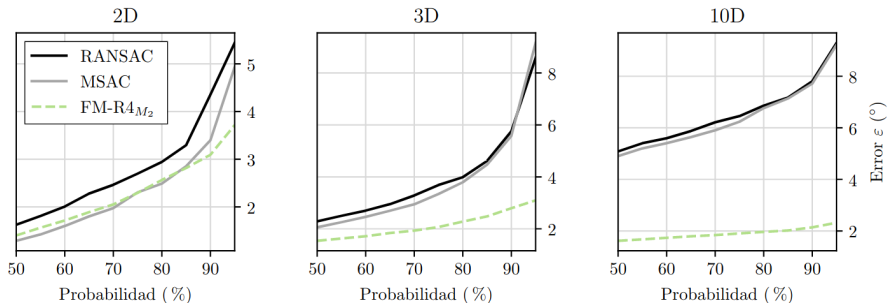
# Estimación de hiperplanos

Comparación de la precisión de **estimación** de **hiperplanos 3D** con diferentes valores de la **magnitud** del ruido aleatorio  $\sigma$ , **proporción** de *outliers*  $\omega$  y valores de **umbral** de ruido  $\kappa$  ( $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ ).



# Estimación de hiperplanos

Comparación de la precisión de **estimación** de **hiperplanos** con **RANSAC**, **MSAC** y **FM-R4<sub>M<sub>2</sub></sub>** fijando valores de  $(\sigma, \omega = 1, 0.4)$ .



# Estimación de hiperplanos

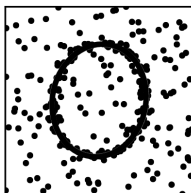
## Conclusiones:

- Las **tendencias** son **similares** a las observadas en las estimaciones de **rectas 2D**.
- Las **diferencias** entre **RANSAC/MSAC** y **FM-R2/FM-R4** son **mayores** a medida que aumenta el número de **dimensiones** del hiperplano.

# Estimación de elipses

Comparación de la precisión de **estimación** de **elipses** con diferentes valores de la **magnitud** del ruido aleatorio  $\sigma$ , **proporción** de *outliers*  $\omega$  y valores de **umbral** de ruido  $\kappa$  ( $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ ).

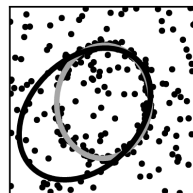
- La medida de error  $\varepsilon$  es el **error relativo máximo** calculado componente a componente entre vectores de parámetros del modelo original  $\Theta^*$  y del modelo estimado  $\hat{\Theta}$ .
- El vector de parámetros está formado por los coeficientes de la ecuación general de la elipse  $\Theta = (a, b, c, d, f, g)$ .



$$\varepsilon = 0.86 \%$$



$$\varepsilon = 20.57 \%$$

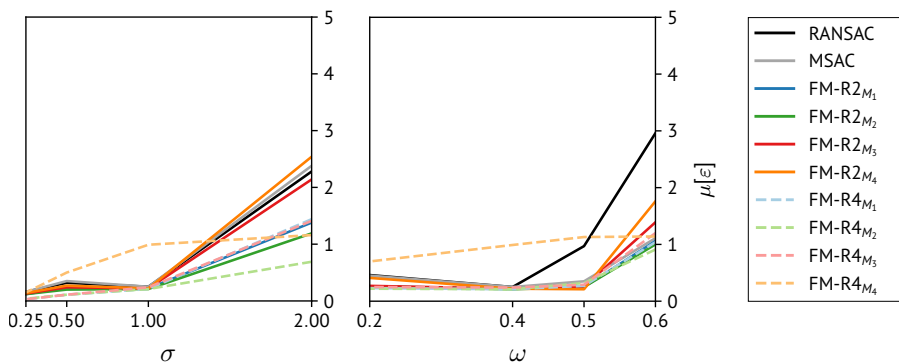


$$\varepsilon = 43.70 \%$$



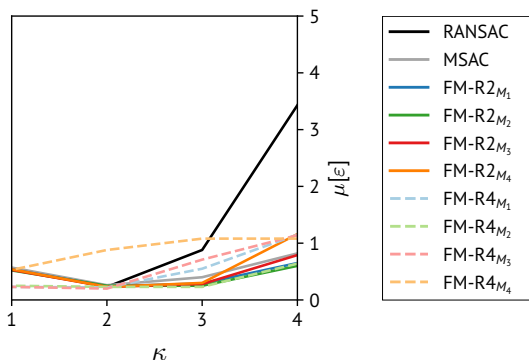
# Estimación de elipses

Comparación de la precisión de **estimación** de **elipses** con diferentes valores de la **magnitud** del ruido aleatorio  $\sigma$ , **proporción** de *outliers*  $\omega$  y valores de **umbral** de ruido  $\kappa$  ( $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ ).



# Estimación de elipses

Comparación de la precisión de **estimación** de **elipses** con diferentes valores de la **magnitud** del ruido aleatorio  $\sigma$ , **proporción** de *outliers*  $\omega$  y valores de **umbral** de ruido  $\kappa$  ( $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ ).



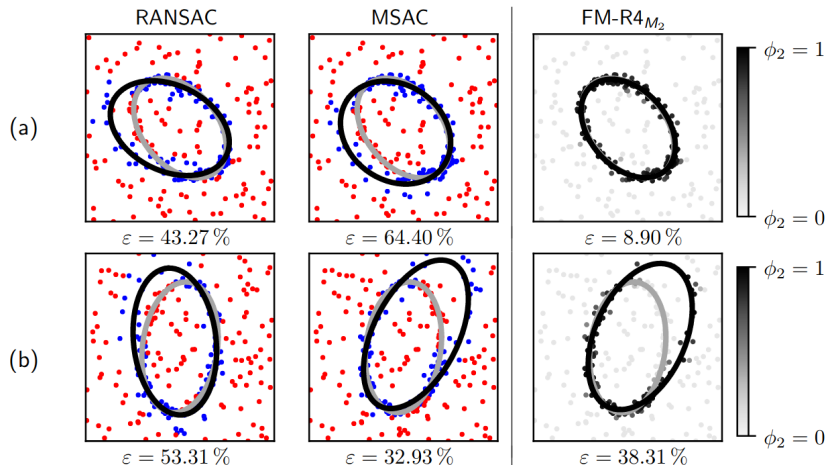
# Estimación de elipses

## Conclusiones:

- **FM-R2** y **FM-R4** pueden proporcionar una **mejor** calidad de **estimación** en comparación con los algoritmos originales **RANSAC** y **MSAC**.
- En general, incorporar las métricas  $M_1$  y  $M_2$  tiene como resultado **estimaciones más precisas** en comparación con incorporar  $M_3$  y  $M_4$ .
- **FM-R4** **tolera mejor** las **variaciones del umbral** de ruido  $\theta$ .

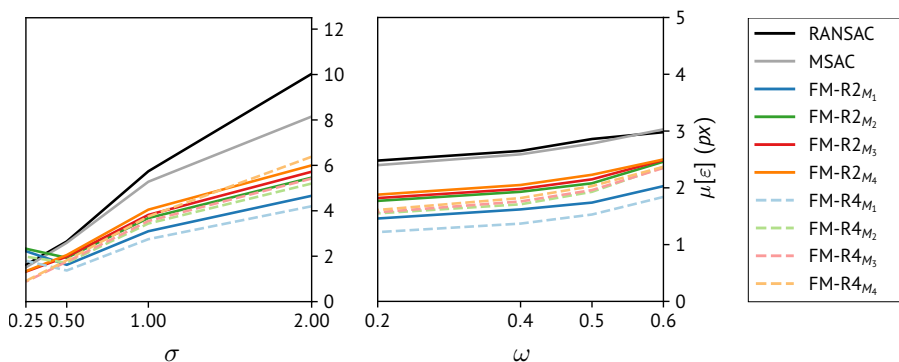
# Estimación de elipses

**Mejor** (a) y **peor** (b) estimación de **FM-R4<sub>M<sub>2</sub></sub>** en comparación con **MSAC** entre 500 estimaciones donde  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$ .



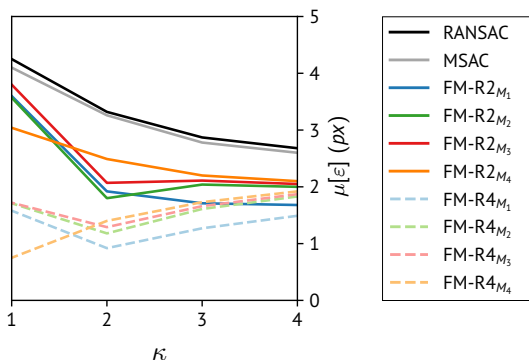
# Estimación de homografías de similitud

Comparación de la precisión de **estimación** de **homografías de similitud** con diferentes valores de la **magnitud** del ruido aleatorio  $\sigma$ , **proporción** de *outliers*  $\omega$  y valores de **umbral** de ruido  $\kappa$  ( $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ ).



# Estimación de homografías de similitud

Comparación de la precisión de **estimación** de **homografías de similitud** con diferentes valores de la **magnitud** del ruido aleatorio  $\sigma$ , **proporción** de *outliers*  $\omega$  y valores de **umbral** de ruido  $\kappa$  ( $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ ).



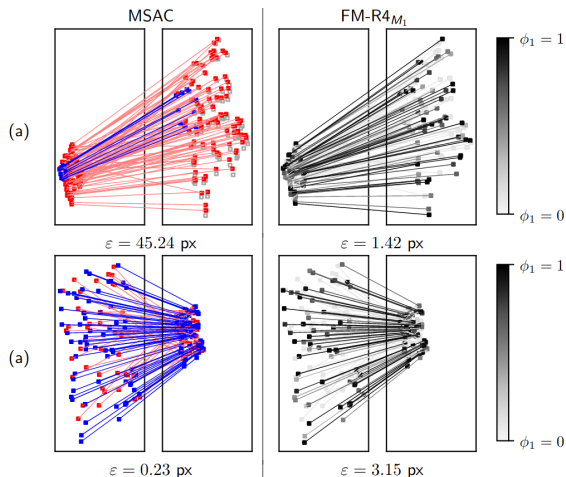
# Estimación de homografías de similitud

## Conclusiones:

- **FM-R2** y **FM-R4** pueden proporcionar una **mejor** calidad de **estimación** en comparación con los algoritmos originales **RANSAC** y **MSAC**.
- En general, incorporar las métricas  $M_1$  y  $M_2$  tiene como resultado **estimaciones más precisas** en comparación con incorporar  $M_3$  y  $M_4$ .
- **FM-R4** **tolera mejor** las **variaciones del umbral** de ruido  $\theta$ .

# Estimación de homografías de similitud

**Mejor** (a) y **peor** (b) estimación de **FM-R4<sub>M<sub>1</sub></sub>** en comparación con **MSAC** entre 500 estimaciones donde  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$ .





# Conclusiones y trabajo futuro

## Conclusiones

Se han propuesto diversas **variantes** para incorporar **métricas difusas** en el algoritmo RANSAC.

- **Evaluación de hipótesis**: pasamos de minimizar una función de coste a maximizar el sumatorio de las compatibilidades entre cada muestra y el modelo.
- **Refinamiento** del modelo: etapas de **RP** y **RPI**.

Se han **implementado** y, posteriormente, se ha **analizado** su comportamiento:

- Se han **caracterizado** las **métricas difusas** incorporadas en las variantes propuestas.
- Se ha **analizado** el **comportamiento** de las variantes propuestas mediante la estimación de **rectas 2D**.
- Finalmente, se ha evaluado el resultado para **diferentes problemas de estimación**.

## Conclusiones

Comparando las **variantes propuestas** entre sí:

- **FM-R2** y **FM-R4** proporcionan resultados **similares**.
- El algoritmo **FM-R4** consigue una **mayor precisión** de estimación con  $M_1$  y  $M_2$  a expensas de una **mayor coste computacional**.
- Es necesario **atenuar** el efecto de **outliers**.
- El algoritmo **FM-R4 tolera** mejor las **variaciones** del valor del **umbral** de ruido ( $\tau$ ,  $\theta$ ).

## Conclusiones

Comparando las **variantes propuestas** con **RANSAC/MSAC** abordando estimaciones de hiperplanos, elipses y homografías:

- Con los algoritmos **FM-R2** y **FM-R4** se puede obtener una **mayor precisión**, en mayor medida cuando la magnitud del ruido  $\sigma$  y/o la proporción de *outliers*  $\omega$  son elevadas.
- El algoritmo **FM-R4 tolera** mejor las **variaciones** del valor del **umbral** de ruido ( $\tau$ ,  $\theta$ ).

## Trabajo futuro

- Los *datasets* han sido generados de forma sintética y es necesario **evaluar** el uso de los algoritmos **FM-R** con *datasets* obtenidos en el mundo **real**.
- El uso de **FM-R4** resultaría **adecuado** en situaciones donde se **desconoce** las características del **ruido** ( $\sigma, \omega$ ). Recordemos que:
  - FM-R4 **tolera** variaciones del **umbral** de ruido  $\theta$  en torno al valor óptimo  $\theta \approx 3\sigma$ .
  - El número de **iteraciones**  $N(p, s, \omega)$  podría establecerse de forma **dinámica** al no tener información de  $\omega$  de forma previa (cálculo dinámico de  $\omega$  a partir de  $\varphi$  p.e.  $\omega = 1 - \frac{\varphi}{n_p}$ ).
- Incorporar una estrategia de **guiado de la selección del conjunto mínimo** (PROSAC, NAPSAC).



**Universitat**  
de les Illes Balears