

Peut-on entendre la forme d'un tambour ?

Jacob Chmielewski - Émile Sauvat

Encadré par Paul Laurain

Table des matières

1	Laplacien et géométrie	4
1.1	Le contexte	4
1.2	Le spectre du laplacien	4
1.3	Noyau de la chaleur	5
1.3.1	Sur \mathbf{R}^2	6
1.3.2	Sur un demi-plan	7
1.3.3	Sur un rectangle	7
1.4	Le premier terme	7
1.4.1	Le théorème de Weyl	9
1.5	Le deuxième terme	10
2	Des surfaces isospectrales	13
2.1	Préambule	13
2.2	Description des surfaces	13
2.2.1	La brique élémentaire	13
2.2.2	Recollement selon τ	14
2.2.3	Formalisation	15
2.3	Preuve de l'isospectralité	15
2.3.1	Isométrie des espaces de fonctions	16
2.3.2	Isospectralité des domaines	18

Introduction

Dans ce mémoire, nous cherchons à étudier le laplacien planaire $\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ en tant qu'opérateur, et ce en fonction du domaine Ω des applications dont on prend le laplacien. En particulier, nous nous intéresserons au spectre du laplacien sur un espace qui s'apparente à $C_0^\infty(\Omega, \mathbf{R})$, les fonctions de classe C^∞ sur Ω qui s'annulent au bord, en un certain sens. Nous chercherons des invariants de spectre pour les domaines considérés, avant de se demander s'il y a injectivité de l'application qui au domaine associe le spectre.

Nous verrons qu'il y a souvent un spectre discret pour Δ , positif et tendant vers $+\infty$, avec des vecteurs propres formant une base hilbertienne.

L'étude du laplacien concernera exclusivement l'asymptotique de son spectre. Elle fera notamment intervenir l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$$

dite équation de la chaleur, et c'est à travers les solutions de cette équation que l'on approchera l'étude du spectre, en décomposant suivant la base hilbertienne adaptée à Δ .

L'étude asymptotique du spectre donnera deux invariants importants : l'aire et le périmètre. On a en fait, si $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ sont les valeurs propres avec multiplicité, Ω le domaine borné et $\partial\Omega$ son bord de classe C^2 , en notant $|\cdot|$ les mesures de Lebesgue respectives :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} = \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{|\partial\Omega|}{4\sqrt{2\pi t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

quand $t \rightarrow 0$.

Nous verrons aussi qu'il est possible de revenir à des assertions sur la fonction de comptage du spectre elle-même, avec une démonstration de la loi de Weyl.

Ainsi, avec seulement les deux premiers termes d'un tel développement, on obtient deux informations intéressantes, qui ensemble le sont encore plus : grâce à l'inégalité isopérimétrique on sait par exemple qu'un disque ne partage son spectre avec aucun autre domaine. On peut s'attendre, en poussant le développement asymptotique, à déduire du spectre d'autres informations géométriques comme le genre de l'ouvert Ω , dont Kac conjecture dans [4] qu'il intervient dans le terme constant.

La question se pose donc de savoir si l'isospectralité implique l'isométrie, puisqu'on a la réciproque par symétrie du laplacien.

Pierre Bérard apporte une réponse négative dans [1] en construisant deux domaines non isométriques sur lesquels le laplacien a le même spectre. En s'inspirant de cet article, nous construisons un contre-exemple en assemblant

de différentes manières plusieurs exemplaires du même polygone P 2.2.1 qui fait office d'un petit domaine élémentaire permettant d'obtenir deux domaines différents, mais sur lesquels on peut trouver des liens en associant correctement des opérateurs sur P avec les bons recollement aux bords.

Cela permet de construire une isométrie entre les espaces de Sobolev considérés, sans pour autant obtenir d'isométrie entre les figures elles-mêmes. L'opérateur Δ étant symétrique, son spectre sera conservé par une isométrie, ce qu'on peut voir par exemple en considérant les quotients de Rayleigh successifs :

$$\lambda_k = \min_{W^{(k)}} \frac{\langle \Delta x, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

où λ_k est la k -ième valeur propre de Δ rangées par ordre croissant et $W^{(k)}$ est l'orthogonal aux $k - 1$ premières valeurs propres.

Les conditions de recollement amèneront à considérer différentes conditions aux bords comme celles NEUMANN ou de DIRICHLET.

On aura dans les deux cas des domaines isospectraux.

1 Laplacien et géométrie

Avant de passer au sujet de cette partie, on explique l'origine du titre de ce mémoire, de Kac [4] :

1.1 Le contexte

Physiquement, on se donne une membrane Ω dans le plan (x, y) , fixée à son bord $\partial\Omega$ en guise de tambour idéalisé.

Si on applique une force orthogonale à la membrane, son déplacement vertical $z(x, y, t)$ vérifie une équation de d'Alembert :

$$\Delta z = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Avec c la célérité des ondes sur la membrane.

On s'intéresse particulièrement aux signaux de la forme $z(x, y, t) = u(x, y) \cos(\omega t + \varphi)$, correspondant à une note pure : on peut y "entendre" ω . Or, une telle solution non nulle existe si et seulement s'il existe non nulle une solution de :

$$\Delta u = -\frac{\omega^2}{c^2} u$$

qui s'annule sur $\partial\Omega$.

En choisissant les bonnes unités, on peut donc étudier les $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tels qu'il existe une solution non nulle de :

$$\frac{1}{2} \Delta u = \lambda u$$

$u = 0$ sur $\partial\Omega$.

On peut considérer qu'on peut "entendre" cet ensemble, et on cherchera à en extraire des informations sur la forme de Ω .

1.2 Le spectre du laplacien

Dans la suite, on fixe un ouvert borné Ω du plan \mathbf{R}^2 , et on suppose son bord $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ suffisamment régulier. Par exemple, $\partial\Omega$ de classe C^∞ suffit.

L'objectif de cette section est d'étudier le spectre du laplacien sur les fonctions définies sur Ω et d'en extraire quelques informations géométriques sur le domaine Ω .

Définition 1.1. On note :

$$\mathcal{H}_0^1(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbf{R})$$

où l'adhérence est prise dans l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Si $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, on note $u|_{\partial\Omega} = 0$ si $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, on donne ainsi un sens à la condition au bord de Dirichlet.

Le laplacien $\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ définit un opérateur symétrique défini positif sur l'espace d'Hilbert $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$, et en fait Δ est d'inverse compact, d'où (voir [2]) :

Théorème 1.1. *Il existe une base hilbertienne $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ainsi que des réels positifs $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ avec pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:*

$$\frac{1}{2} \Delta \psi_n = \lambda_n \psi_n .$$

Ici on s'intéresse à $\frac{1}{2} \Delta$ plutôt que Δ pour conserver les mêmes constantes que dans [4].

Ici, il suffit de s'intéresser aux propriétés asymptotiques de la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, puisqu'on se propose de montrer le développement asymptotique suivant de la série de Dirichlet :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} = \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{|\partial\Omega|}{4\sqrt{2\pi t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

quand $t \rightarrow 0$.

On démontre en fait ce résultat dans le cas d'un domaine Ω convexe : si ce n'est pas le cas, on n'aura que le premier terme du développement asymptotique.

Ici apparaissent $|\Omega|$ l'aire du domaine et $|\partial\Omega|$ son périmètre : deux domaines ayant le même spectre ont même aire et même périmètre. En particulier, puisque le disque est le seul ouvert à vérifier le cas d'égalité dans l'inégalité isopérimétrique $\frac{\text{Aire}}{\text{Périmètre}^2} \leq \frac{1}{4\pi}$, aucun autre domaine ne partage son spectre. On peut bien « entendre » un disque.

1.3 Noyau de la chaleur

Théorème 1.2. *Soit U un ouvert de \mathbf{R}^2 , on suppose son bord ∂U de classe \mathcal{C}^1 . Il existe une unique application notée $P_U : \bar{U} \times \bar{U} \times]0; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \bar{U} et \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :*

$$\frac{\partial P_U}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta P_U$$

où $\Delta P_U = \Delta_r P_U(\rho, r, t)$;

La condition au bord :

$$P_U(\rho, r, t) = 0 \text{ si } r \in \partial U$$

La condition initiale :

$$P_U(\rho, *, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{L^2(\Omega)} \delta_\rho = \delta(* - \rho) .$$

On admet ce théorème, et on admettra qu'il s'applique aussi dans le cas des rectangles.

La fonction P_U qu'on appelle noyau de la chaleur, joue un rôle important dans l'étude du spectre du laplacien, en particulier on a le lien suivant :

Théorème 1.3. *Soit U un ouvert borné de \mathbf{R}^2 de bord \mathcal{C}^1 , (λ_n, ψ_n) les couples propres donnés par le théorème 1.1. Pour $\rho \in U$, $r \in U$, $t \in]0; +\infty[$ on a :*

$$P_U(\rho, r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \psi_n(\rho) \psi_n(r) .$$

Démonstration : $f_n : r \mapsto \int_{\Omega} P_U(\rho, r, t) \psi_n(r) dr$ vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} P_U(\rho, r, t) \psi_n(r) dr &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \Delta P_U(\rho, r, t) \right) \psi_n(r) dr \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} P_U(\rho, r, t) \Delta \psi_n(r) dr = -\lambda_n \int_{\Omega} P_U(\rho, r, t) \psi_n(r) dr \end{aligned}$$

et avec la condition initiale on en déduit :

$$f_n = e^{-\lambda_n t} \psi_n(\rho) .$$

$(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une base hilbertienne donc on a l'égalité dans $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

De plus, $\int_{\Omega} P_U(\rho, \rho, t) d\rho$ converge donc $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} < +\infty$ et on peut dériver terme à terme : on a la régularité voulue sur $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \psi_n(\rho) \psi_n(r)$ qui vérifie bien la condition au bord d'où l'égalité.

La démonstration du résultat final repose sur le calcul de $P_U(\rho, r, t)$ lorsque U est un rectangle, un demi-plan, ou tout \mathbf{R}^2 , ainsi que le résultat de comparaison suivant :

Proposition 1.4. *Soit $U \subset V$ vérifiant tous deux la conclusion du théorème 1.2. Soit $\rho \in U$. Pour tous $r \in U$, $t > 0$:*

$$P_U(\rho, r, t) \leq P_V(\rho, r, t) .$$

On admet cette proposition qui résulte du principe du maximum, on peut en trouver une preuve dans [2].

1.3.1 Sur \mathbf{R}^2

Lemme 1.5. *Si $\rho, r \in \mathbf{R}^2$ $t > 0$,*

$$P_{\mathbf{R}^2}(\rho, r, t) = \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{\|r-\rho\|^2}{2t}} .$$

Démonstration : On a la régularité demandée. Fixons $\rho \in \mathbf{R}^2$,

$$f(r, t) = \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{\|r-\rho\|^2}{2t}}$$

vérifie bien l'équation différentielle, et la condition au bord est vide. Si $A \subseteq \mathbf{R}^2$ est ouvert avec $\rho \notin \overline{A}$, par convergence dominée $\int_A f(r, t) dr \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.

Au contraire, si $\rho \in A$, il y a un disque $D(\rho, c) \subseteq A$, $c > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_A f(r, t) dr &= \int_{\|u\| < c} \frac{e^{-\frac{\|u\|^2}{2t}}}{2\pi t} du = \int_0^c \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{R^2}{2t}}}{2\pi t} d\theta R dR \\ &= \int_0^{\frac{c}{\sqrt{2t}}} 2s e^{-s^2} ds = 1 - e^{-\frac{c^2}{2t}} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1 \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

1.3.2 Sur un demi-plan

On note $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

Lemme 1.6. Si $\rho, r \in H$ $t > 0$, en notant $\bar{\rho}$ le symétrique de ρ par rapport à la droite $x = 0$:

$$P_H(\rho, r, t) = \frac{1}{2\pi t} \left(e^{-\frac{\|r-\rho\|^2}{2t}} - e^{-\frac{\|r-\bar{\rho}\|^2}{2t}} \right).$$

Démonstration : Avec ce qui précède, par linéarité $P_{\mathbb{R}^2}(\rho, *, *) - P_{\mathbb{R}^2}(\bar{\rho}, *, *)$ vérifie l'équation différentielle et la condition initiale car $\bar{\rho} \notin H$. De plus, si $y \in \mathbb{R}$, $\|(0, y) - \rho\| = \|(0, y) - \bar{\rho}\|$ d'où la condition au bord.

1.3.3 Sur un rectangle

On considère un rectangle R de sommets $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}), (\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}), (\frac{a}{2}, \frac{b}{2}), (-\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

Lemme 1.7. Si $\rho = (0; 0)$, $r \in R$, $t > 0$:

$$P_R(\rho, r, t) = \frac{4}{ab} \sum_{n, m \geq 0} \exp\left(-\frac{t}{2} \left(\frac{k_n^2}{a^2} + \frac{k_m^2}{b^2}\right)\right) \cos\left(\frac{k_n x}{a}\right) \cos\left(\frac{k_m y}{b}\right)$$

avec $k_n = 2\pi(n + 1/2)$.

Démonstration : C'est une conséquence du théorème 1.3, on se restreint à l'axe $y = 0$ pour avoir annulation des termes en $\sin(\frac{2\pi k y}{a})$.

On admet aussi l'égalité suivante, sous la forme dans laquelle on l'utilise dans la sous-section 1.5 :

Lemme 1.8. Si $\rho = (x; 0) \in R$, $t > 0$:

$$\begin{aligned} P_R(\rho, \rho, t) &= \\ \frac{1}{2\pi t} \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{t} ((ma)^2 + (nb)^2)\right) &+ \exp\left(-\frac{2}{t} \left((na + \frac{a}{2} - x)^2 + (nb + \frac{b}{2})^2\right)\right) \\ &- \exp\left(-\frac{2}{t} \left((ma + \frac{a}{2} - x)^2 + n^2 b^2\right)\right) - \exp\left(-\frac{2}{t} \left((ma)^2 + (nb + \frac{b}{2})^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi t} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{2}{t} (na)^2} + e^{-\frac{2}{t} (na + \frac{a}{2} - x)^2} \right) \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{2}{t} (nb)^2} + e^{-\frac{2}{t} (nb + \frac{b}{2})^2} \right) \right) \end{aligned}$$

1.4 Le premier terme

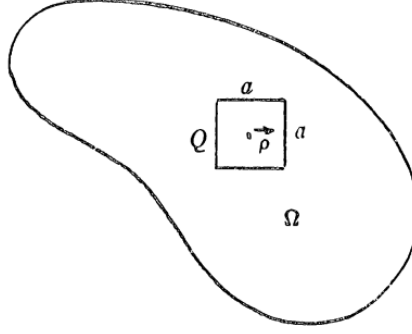
D'abord, un contrôle par le haut : $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ donc d'après la proposition 1.4, si $\rho \in \Omega$, pour tous $r \in \Omega$, $t > 0$, on a :

$$P_\Omega(\rho, r, t) \leq P_{\mathbb{R}^2}(\rho, r, t).$$

En ρ , le lemme 1.5 donne :

Proposition 1.9.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \psi_n(\rho)^2 \leq \frac{1}{2\pi t}.$$


 FIGURE 1 – Le carré Q ([3])

Maintenant, on s'intéresse à P_Q où Q est un carré centré en ρ , de côté a et inclus dans Ω .

D'après le lemme 1.7 en ρ , on a :

Lemme 1.10. Si $t > 0$:

$$P_Q(\rho, \rho, t) = \frac{4}{a^2} \sum_{n, m \geq 0} \exp \left(-\frac{2\pi^2((n + \frac{1}{2})^2 + (m + \frac{1}{2})^2)}{a^2} t \right).$$

En particulier, on a donc :

Proposition 1.11. Si $\rho \in \Omega$ est à une distance supérieure à $a\sqrt{2}$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, alors :

$$\frac{4}{a^2} \sum_{k, l \geq 1 \text{ impairs}} e^{-\frac{(k^2 + l^2)\pi^2}{2a^2} t} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \psi_n(\rho)^2.$$

En rassemblant, on a :

Théorème 1.12. $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{|\Omega|}{2\pi t}.$

Démonstration : Si on note $\Omega(a) = \{r \in \Omega \mid d(r, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega) > a\sqrt{2}\}$, le domaine Ω est l'union croissante des $\Omega(a)$ quand a décroît vers 0. En intégrant la proposition 1.9 sur $\Omega(a)$ et la proposition 1.7 sur Ω , par normalisation on a :

$$\frac{4|\Omega|}{a^2} \sum_{k, l \geq 1 \text{ impairs}} e^{-\frac{(k^2 + l^2)\pi^2}{2a^2} t} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \leq \frac{|\Omega|}{2\pi t}.$$

pour conclure il suffit de montrer que si $a > 0$,

$$\frac{4}{a^2} \sum_{k, l \geq 1 \text{ impairs}} e^{-\frac{(k^2 + l^2)\pi^2}{2a^2} t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\pi t}.$$

or si $A > 0$, par comparaison série-intégrale sur $x \mapsto e^{-Atx^2}$ on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-Akt^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4At}} + O(1)$$

et on conclut avec :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1 \text{ impair}} e^{-Bk^2} &= \sum_{k \in \mathbf{N}^*} e^{-Bk^2} - \sum_{k \geq 1 \text{ pair}} e^{-Bk^2} = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} e^{-Bk^2} - \sum_{k \geq 1} e^{-4Bk^2} \\ &= \sum_{k, l \geq 1 \text{ impairs}} e^{-B(k^2+l^2)} = \left(\sum_{k \geq 1 \text{ impair}} e^{-Bk^2} \right)^2. \end{aligned}$$

1.4.1 Le théorème de Weyl

Définition 1.2. On note $N(\lambda)$ le cardinal de $\{n \in \mathbf{N}^*, \lambda_n \leq \lambda\}$.

Dans cette section, on se propose de montrer l'équivalence entre le premier développement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} = \frac{|\Omega|}{2\pi t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

et le résultat de Weyl :

Théorème 1.13. (Loi de Weyl) Quand $\lambda \rightarrow +\infty$, $N(\lambda) \sim \frac{|\Omega|}{2\pi} \lambda$.

Cette équivalence repose sur le résultat suivant :

Proposition 1.14. Si $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite croissante de réels, C un réel,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-a_n t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C}{t} \iff \sum_{a_k \leq n} 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} Cn.$$

Démonstration : Le sens direct est une conséquence du théorème taubérien d'Hardy-Littlewood-Karamata, on suit ici l'idée de Karamata. Supposons $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-a_n t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C}{t}$. Etudions l'ensemble des fonctions continues par morceaux $g : [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant :

$$t \sum_{n=1}^{+\infty} g(e^{-a_n t}) e^{-a_n t} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} C \int_0^{+\infty} g(e^{-x}) e^{-x} dx.$$

Si $g(x) = x^k, k \geq 0$, on a bien cette limite :

$$t \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-a_n (k+1)t} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{C}{k+1} = C \int_0^{+\infty} e^{-(k+1)x} dx.$$

Par linéarité c'est donc le cas de tous les polynômes. De plus, si on a une convergence uniforme $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ de fonctions f_n avec cette propriété :

$$t \left| \sum_{n=1}^{+\infty} [f(e^{-a_n t}) - f_k(e^{-a_n t})] e^{-a_n t} \right| \leq \|f - f_k\|_{\infty} t \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-a_n t}.$$

$t \mapsto t \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-a_n t}$ étant bornée au voisinage de 0, et puisque

$$e \int_0^{+\infty} f_n(e^{-x}) e^{-x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(e^{-x}) e^{-x} dx,$$
 f vérifie aussi la propriété. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, cet ensemble contient $\mathcal{C}([0;1])$ et même, par convergence dominée et continuité au voisinage de 0, la fonction :

$$g : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ si } \frac{1}{e} \leq x \leq 1, 0 \text{ sinon.}$$

Cela conclut, car on a donc :

$$t \sum_{a_n \leq \frac{1}{t}} 1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} C.$$

Supposons $\sum_{a_n \leq x} 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} Cn$. Par croissance, on en déduit $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{C}$.

En notant $\varepsilon_n = a_n - \frac{n}{C}$, pour tout $0 < \delta < \frac{1}{C}$:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-a_n t} - \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n}{C} t} \right| &\leq \sum_{|\varepsilon_n| \leq \delta n} e^{-\frac{n}{C} t} (e^{\delta n t} - 1) + \sum_{|\varepsilon_n| > \delta n} e^{-\frac{n}{C} t} |e^{\varepsilon_n t} - 1| \\
 &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-(\frac{1}{C}-\delta)nt} - e^{-\frac{n}{C}t}) + \sum_{|\varepsilon_n| > \delta n} e^{-\frac{n}{C}t} |e^{\varepsilon_n t} - 1| \\
 &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{C}{1-C\delta} - C \right) \frac{1}{t}
 \end{aligned}$$

d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-a_n t} = \frac{C}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$ ce qui conclut.

1.5 Le deuxième terme

Dans cette sous-section, on suppose de plus Ω convexe.

On procède comme dans la sous-section précédente : on cherche à encadrer $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t}$ en se servant du résultat de croissance $U \subseteq V \Rightarrow P_U \leq P_V$.

D'abord la majoration : on affine en passant de $P_{\mathbb{R}^2}$ à P_D où D est un bon demi-plan contenant Ω .

Pour $\rho \in \Omega$, on note $\pi(\rho) \in \partial\Omega$ le point de $\partial\Omega$ à distance minimale de ρ et $l(\rho)$ la droite tangente à $\partial\Omega$ en $\pi(\rho)$.

Par convexité, Ω est inclus dans le demi-plan contenant ρ de frontière $l(\rho)$, donc d'après le lemme 1.6 :

Proposition 1.15. Si $\rho \in \Omega$, $t > 0$:

$$P_\Omega(\rho, \rho, t) \leq \frac{1}{2\pi t} \left(1 - e^{-\frac{\|\rho - \pi(\rho)\|^2}{2t}} \right).$$

Pour la borne inférieure, on va définir une famille de rectangles $R(\rho, d)$ dans Ω : pour d assez petit pour qu'un tel rectangle existe, $R(\rho, d)$ sera un rectangle tel que la droite passant par ρ et $\pi(\rho)$ soit un de ses axes de symétrie, tel qu'il soit à distance d de $\pi(\rho)$ et tel que $\rho \in R(\rho, d)$.

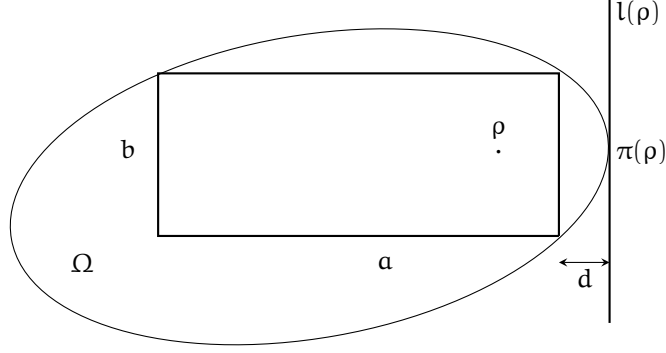


FIGURE 2 – Le rectangle $R(\rho, d)$

On note alors : $a = a(\rho, d)$ la longueur des côtés perpendiculaires à $l(\rho)$, $b = b(\rho, d)$ l'autre longueur, et $\delta = \delta(\rho, d) = \|\rho - \pi(\rho)\| - d$

Par croissance de P et d'après le lemme 1.8 :

Proposition 1.16. *Si $\rho \in \Omega$, $t > 0$, pour $d > 0$ assez petit :*

$$P_{\Omega}(\rho, \rho, t) \geq \frac{1}{2\pi t} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{2}{t}(na)^2} + e^{-\frac{2}{t}(na+\delta)^2} \right) \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{2}{t}(nb)^2} + e^{-\frac{2}{t}(nb+\frac{b}{2})^2} \right) \right)$$

Lemme 1.17. *Il existe des constantes $C > 0$, $D > 0$ avec, pour tout $\rho \in \Omega$:*

$$Cd \leq b(\rho, d)^2 \leq Dd.$$

Ce lemme, qu'on admet, correspond à contrôler la courbure de Ω en $\pi(\rho)$.

On considère maintenant, pour $\rho \in \Omega$, $t > 0$ assez petit, $R(\rho, \sqrt{t})$, on note toujours $a = a(\rho, \sqrt{t})$, $b = b(\rho, \sqrt{t})$, $\delta = \delta(\rho, \sqrt{t})$.

On déduit du lemme 1.17 :

Lemme 1.18. *Il existe une constante $A > 0$ avec, pour tout $\rho \in \Omega$, quand $t \rightarrow 0$:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{2}{t}(nb)^2} + e^{-\frac{2}{t}(nb+\frac{b}{2})^2} \right) \geq 1 + o(\sqrt{t})$$

Puisqu'on peut minorer a uniformément :

Lemme 1.19. *Si $\rho \in \Omega$, quand $t \rightarrow 0$:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{2}{t}(na)^2} + e^{-\frac{2}{t}(na+\delta)^2} \right) \geq 1 - e^{-\frac{2\delta^2}{t}} + O\left(\sqrt{t}e^{-\frac{2\delta^2}{t}}\right)$$

Et les termes dominés sont bien uniformes en ρ .

Pour contrôler le périmètre, on définit :

$$\Omega(d) = \{r \in \Omega \mid d(r, \partial\Omega) > d\}$$

Et on va considérer $\Omega(\sqrt{t})$.

On a l'égalité suivante :

Lemme 1.20. *Quand $t \rightarrow 0$:*

$$|\Omega| - |\Omega(\sqrt{t})| \sim |\partial\Omega|\sqrt{t}.$$

Démonstration : $|\partial\Omega(x)| \rightarrow |\partial\Omega|$ quand $x \rightarrow 0$, et :

$$|\Omega| - |\Omega(\sqrt{t})| = \int_{\Omega \setminus \Omega(\sqrt{t})} 1 = \int_0^{\sqrt{t}} |\partial\Omega(x)| dx.$$

On en déduit finalement le résultat :

Théorème 1.21. *Quand $t \rightarrow 0$:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} = \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{|\partial\Omega|}{4\sqrt{2\pi t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Démonstration : D'après la proposition 1.15 :

$$\int_{\Omega(\sqrt{t})} P_{\Omega}(\rho, \rho, t) \leq \frac{|\Omega(\sqrt{t})|}{2\pi t} - \sqrt{\frac{t}{2}} \int_2^{+\infty} |\partial\Omega\left(\sqrt{\frac{t}{2}}u\right)| e^{-u^2} du \leq \frac{|\Omega(\sqrt{t})|}{2\pi t} - \frac{|\partial\Omega|}{4\sqrt{2\pi t}}.$$

De même, en intégrant les estimations sur la borne inférieure, on obtient :

$$\int_{\Omega(\sqrt{t})} P_{\Omega}(\rho, \rho, t) \geq \frac{1 + o(\sqrt{t})}{2\pi t} \left(|\Omega| - \frac{|\partial\Omega|}{2\sqrt{2\pi}} \sqrt{t} + o(\sqrt{t}) \right)$$

et on conclut avec le lemme 1.20.

2 Des surfaces isospectrales

2.1 Préambule

On a précédemment montré que la donnée du spectre de l'opérateur Laplacien Δ sur une surface Ω permettait d'obtenir, par analyse asymptotique, les données de l'aire et du périmètre de cette même surface.

Si cela est suffisant pour reconnaître un cercle, il n'est pas évident de savoir si, dans le cas général, une surface peut être entièrement déterminée par la donnée du spectre du Laplacien sur cette surface.

En réalité, rien ne sert de garder le suspense, la réponse est non : il existe des surfaces isospectrales dont les caractéristiques géométriques diffèrent. Nous allons nous attacher dans cette partie, en s'appuyant sur les travaux de Pierre Bérard dans [1], à construire un tel couple de domaines.

2.2 Description des surfaces

2.2.1 La brique élémentaire

L'idée générale de la construction est de s'appuyer sur une surface bien définie, que l'on appellera « brique élémentaire », et dont on recollera plusieurs exemplaires dans différents sens et ordre, mais un même nombre à chaque fois, afin de préserver un même spectre sur les deux surfaces que l'on obtiendra, mais avec des caractéristiques géométriques différentes.

Définition 2.1. On appelle « brique élémentaire » le domaine P 2.2.1 dont on appelle explicitement A , B et τ les trois côtés opposés.

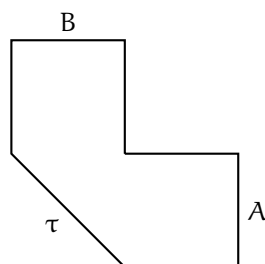
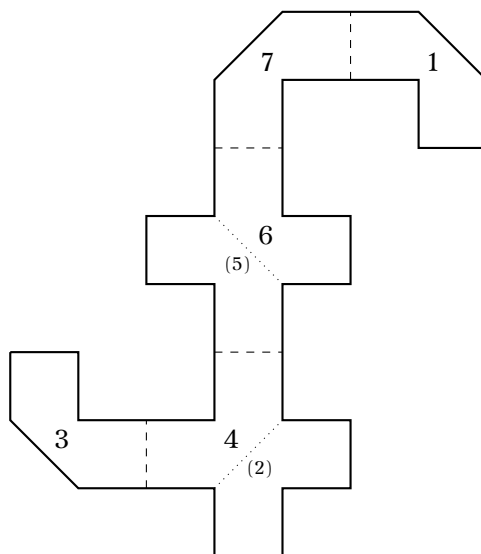
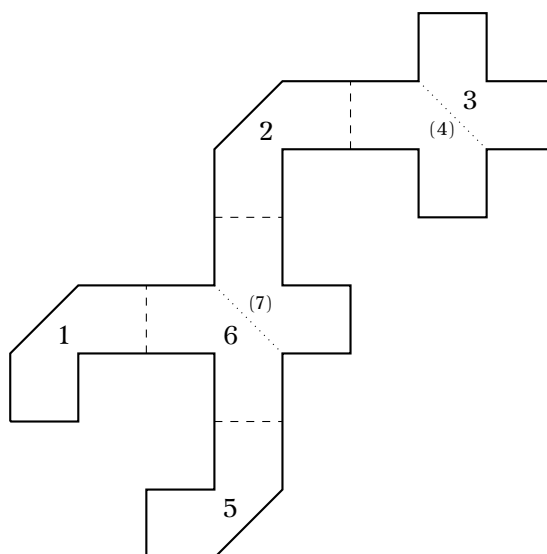


FIGURE 3 – Brique élémentaire P

On recolle 7 exemplaires de P pour obtenir les domaines suivants :


FIGURE 4 – Domaine D_1

FIGURE 5 – Domaine D_2

2.2.2 Recollement selon τ

Dans le cas d'un recollement le long du bord τ , par exemple entre les briques 5 et 6 dans le domaine I, on considérera une seconde « brique élémentaire » \mathcal{B} constituée d'une première brique \mathcal{P} et d'une seconde, recollée le long de τ après application de la symétrie hyperplane dont le plan est celui de représentation.

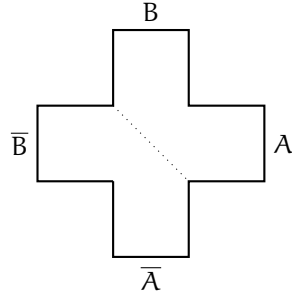


FIGURE 6 – Brique élémentaire B

2.2.3 Formalisation

Ainsi on a construit deux domaines non isométriques à partir d'une brique élémentaire P selon les graphes suivants :

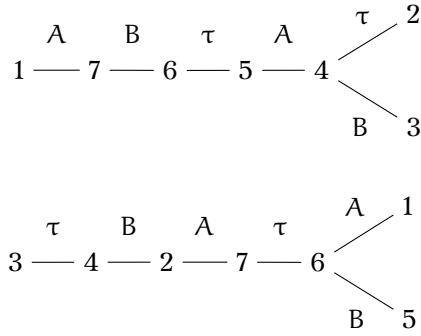


FIGURE 7 – Graphes de recollement

2.3 Preuve de l'isospectralité

On va dans cette partie démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Les domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont isospectraux.*

Pour cela on considère une application Φ sur \mathcal{D}_1

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_7 \end{pmatrix}$$

où les applications φ_i sont les restrictions de Φ à la i -ème brique élémentaire.

Pour qu'une telle fonction soit correctement définie et suffisamment régulière pour que l'on puisse en considérer le laplacien sur les bons espaces fonctionnels, il faut imposer sur Φ des conditions de recollement le long des bords de chaque brique P.

Definition 2.2. Les conditions au bord de NEUMANN et de DIRICHLET sont définies comme suit :

Soit (E) une équation différentielle et u une solution de (E) sur un ouvert Ω

- u respecte la condition au bord de NEUMANN si $\partial u / \partial n = g$ sur $\partial\Omega$ avec n le vecteur normal au bord pour une certaine application g
- u respecte la condition au bord de DIRICHLET si $u|_{\partial\Omega} = 0$

Pour avoir une régularité intéressante, il faut de plus la continuité sur tout le domaine et la dérivabilité presque partout.

On se restreint ici aux conditions aux limites de NEUMANN sur les bords sans recollement. Le cas des conditions de DIRICHLET requiert un peu de calcul supplémentaire. Des éléments de réflexion seront donnés à la fin.

2.3.1 Isométrie des espaces de fonctions

On commence par établir un premier lien d'isométrie entre les espaces de Sobolev de degré 1 sur les domaines.

Definition 2.3. Soit Ω un ouvert et m un entier naturel, on définit les espace de Sobolev sur Ω suivants :

$$\mathcal{H}^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \forall \alpha \text{ multi-indice, } |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

$$\mathcal{H}_0^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{H}^m(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

C'est un espace de HILBERT pour la norme

$$\|u\|_{\mathcal{H}^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_2^2 \right)^{1/2}$$

Il peut être noté que la définition de l'espace $\mathcal{H}_0^m(\Omega)$ est ambiguë car elle sous-entend la présence d'un opérateur compact afin d'assurer l'égalité demandée sur le bord. On pourra lui préférer la définition suivante, plus rigoureuse et définissant bien le même espace :

Proposition 2.2.

$$\mathcal{H}_0^m(\Omega) = \text{Adh}(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega))$$

Afin de lier les espaces de fonctions on cherche une matrice T^N et son application induite

$$T^N : \begin{pmatrix} L^2(\mathcal{D}_1) & \rightarrow & L^2(\mathcal{D}_2) \\ \Phi & \mapsto & \Psi = T^N \Phi \end{pmatrix}$$

telle que T^N soit une isométrie de $\mathcal{H}^1(\mathcal{D}_1)$ dans $\mathcal{H}^1(\mathcal{D}_2)$.

Lemme 2.3. Soit a et b deux nombres réels vérifiant les propriétés suivantes :

$$4a^2 + 3b^2 = 1$$

$$2a^2 + 4ab + b^2 = 0$$

alors la matrice

$$T^N = \begin{pmatrix} a & a & a & a & b & b & b \\ a & b & a & b & a & a & b \\ a & a & b & b & b & a & a \\ a & b & b & a & a & b & a \\ b & a & b & a & a & a & b \\ b & a & a & b & a & b & a \\ b & b & a & a & b & a & a \end{pmatrix}$$

induit une isométrie de $\mathcal{H}^1(\mathcal{D}_1)$ dans $\mathcal{H}^1(\mathcal{D}_2)$

Démonstration. Avec les relations imposés sur a et b , la matrice est orthogonale, en effet, si on appelle $A = T^N \cdot {}^tT^N$ alors on a

$$\forall i \in \llbracket 1, 7 \rrbracket, A_{i,i} = 4a^2 + 3b^2$$

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq 7, A_{i,j} = 2a^2 + 4ab + b^2$$

ainsi l'application T^N est une isométrie de $\mathcal{H}^1(P)$.

Montrons maintenant que $T^N\Phi$ est bien définie sur \mathcal{D}_2 , i.e. qu'on a bien un recollement sur les bords de chaque brique.

En notant φ_i^A (resp. ψ_i^A) la restriction de φ_i (resp. ψ_i) au bord A de la brique P (idem pour les bords B et τ), les conditions de recollement imposent les égalités suivantes sur Φ :

$$\begin{aligned} \varphi_1^A &= \varphi_7^A & \varphi_2^\tau &= \varphi_4^\tau \\ \varphi_3^B &= \varphi_4^B & \varphi_4^A &= \varphi_5^A \\ \varphi_5^\tau &= \varphi_6^\tau & \varphi_6^B &= \varphi_7^B \end{aligned}$$

ainsi avec ces formules et l'expression des ψ_i en fonction des φ_j , on vérifie que l'on a bien les conditions de recollement du domaine \mathcal{D}_2 :

$$\begin{aligned} \psi_1^A &= \psi_6^A & \psi_2^B &= \psi_4^B \\ \psi_2^A &= \psi_7^A & \psi_3^\tau &= \psi_4^\tau \\ \psi_5^B &= \psi_6^B & \psi_6^\tau &= \psi_7^\tau \end{aligned}$$

En exemple, on vérifie pour la première égalité :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= a(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + b(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7) \\ \psi_6 &= a(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_5 + \varphi_7) + b(\varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_6) \\ \Rightarrow \psi_1 - \psi_6 &= a(\varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_5 - \varphi_7) + b(\varphi_5 + \varphi_7 - \varphi_1 - \varphi_4) \\ \Rightarrow \psi_1^A - \psi_6^A &= (a - b) \times \underbrace{(\varphi_1^A - \varphi_7^A)}_{=0} + \underbrace{(\varphi_4^A - \varphi_5^A)}_{=0} \end{aligned}$$

Ainsi l'application T^N préserve les conditions aux bords et induit l'isométrie recherchée. \square

2.3.2 Isospectralité des domaines

Dans cette partie on va montrer le résultat du théorème 2.3 à l'aide de l'isométrie des espaces de Sobolev.

Le théorème suivant, du quotient de RAYLEIGH [5], permet de caractériser le spectre d'un opérateur par la norme de ses images.

On considère ici T un opérateur auto-adjoint compact positif sur un espace H . Soit le résultat préliminaire suivant :

Lemme 2.4. *Soit (e_n) une suite des vecteurs propres de T , il existe une base de $\ker T$, notée B , telle que $B \cup \{e_n\}$ est une base Hilbertienne de H . Autrement dit, on a le résultat suivant :*

— *Il existe une base hilbertienne de H de vecteurs propres de T*

Ce lemme est admis.

Definition 2.4. Le quotient de RAYLEIGH de l'opérateur T est

$$\mathcal{R} : x \mapsto \frac{\langle Tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

Théorème 2.5. *On note $\{\lambda_n\}_n$ les valeurs propres de T rangées dans l'ordre décroissant et pour tout n , e_n le vecteur propre associé à λ_n . Alors, on a les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \mathcal{R}(e_k) \\ \lambda_k &= \min_{V_k} (\mathcal{R}(x)) \\ \lambda_k &= \max_{V_{k-1}^\perp} (\mathcal{R}(x)) \end{aligned}$$

où V_k est l'espace engendré par les k premières valeurs propres.

Démonstration. On déjà la première égalité par calcul.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$, alors on a $\forall x \in V_k, x = \sum \alpha_i e_i \neq 0$

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\sum \lambda_i \alpha_i^2}{\sum \alpha_i^2} \leq \lambda_k$$

Soit $x \in V_{k-1}^\perp, x \neq 0$, d'après le lemme on a $x = \sum_{i \geq k} \alpha_i e_i$ alors

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\sum_{i \geq k} \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{j \geq k} \alpha_j^2} \leq \lambda_k$$

On a vu que les cas d'égalité étaient assurés pour des vecteurs propres. \square

Corollaire. *Les domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont isospectraux pour le Laplacien de NEUMANN.*

Démonstration. On considère $T = \Delta^{-1}$, c'est un opérateur compact auto-adjoint positif sur $\mathcal{H}^1(\mathcal{D}_i), i \in \{1, 2\}$. Ainsi avec le quotient de RAYLEIGH, les domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont isospectraux pour T . Or on a

$$\text{Spec}(\Delta) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \text{Spec}(T)\}$$

D'où le résultat recherché. \square

Annexe : Conditions de Dirichlet

Si on choisit de considérer le problème de DIRICHLET, il faudra en plus assurer que toutes les restrictions ψ_i s'annulent sur les bords du domaine \mathcal{D}_2 qui ne correspondent pas à un recollement.

Formellement, en plus des conditions déjà exprimées avec les conditions de NEUMANN on a sur les φ_i :

$$\begin{aligned} \varphi_1^B &= 0 & \varphi_1^\tau &= 0 & \varphi_2^A &= 0 \\ \varphi_2^B &= 0 & \varphi_3^A &= 0 & \varphi_3^\tau &= 0 \\ \varphi_5^A &= 0 & \varphi_6^B &= 0 & \varphi_7^\tau &= 0 \end{aligned}$$

Et on doit vérifier sur les ψ_i :

$$\begin{aligned} \psi_1^B &= 0 & \psi_1^\tau &= 0 & \psi_2^\tau &= 0 \\ \psi_3^A &= 0 & \psi_4^A &= 0 & \psi_4^B &= 0 \\ \psi_5^A &= 0 & \psi_5^\tau &= 0 & \psi_7^B &= 0 \end{aligned}$$

Lemme 2.6. Soit a, b deux réels respectant les conditions du lemme 2.3 et tels que

$$4a + 3b = 1$$

alors la matrice

$$T^N = \begin{pmatrix} -a & a & a & -a & b & -b & b \\ a & -b & -a & b & -a & a & -b \\ a & -a & -b & b & -b & a & -a \\ -a & b & b & -a & a & -b & a \\ -b & a & b & -a & a & -a & b \\ b & -a & -a & b & -a & b & -a \\ -b & b & a & -a & b & -a & a \end{pmatrix}$$

Induit une isométrie de $\mathcal{H}_0^1(\mathcal{D}_1)$ dans $\mathcal{H}_0^1(\mathcal{D}_2)$

On peut donc conclure :

Corollaire. Les domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont isospectraux pour le Laplacien de DIRICHLET

Bibliographie

- [1] Pierre BÉRARD. « Domaines plans isospectraux à la Gordon-Webb-Wolpert : une preuve terre à terre ». In : *Séminaire de Théorie spectrale et géométrie* 10 (1991), p. 131-142. URL : http://archive.numdam.org/article/TSG_1991-1992__10__131_0.pdf.
- [2] Haïm BRÉZIS. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunod, 1994.
- [3] Yves COLIN DE VERDIÈRE. « Le Spectre du laplacien : survol partiel depuis le berger-gauduchon-mazet et problèmes ». In : Institut universitaire de France, Institut Fourier. 1996. URL : <http://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~ycolver/All-Articles/96a.pdf>.
- [4] Marc KAC. « Can One Hear the Shape of a Drum ? » In : *The American Mathematical Monthly* 73.4 (1966), p. 1-23. URL : <https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/m207b/kac.pdf>.
- [5] Marc LENOIR. *Introduction à la théorie spectrale*. 2016-2017. ENSTA UMA. URL : https://perso.ensta-paris.fr/~ciarlet/AMS300/Poly_AMS300-Lenoir.pdf.