

Cours de Maths Spé

Ce document est une synthèse du cours de mathématiques dispensé par M. Jean-François Mallordy en classe préparatoire au lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand en 2022-2023. Il s'agit d'un complément au cours de Maths Spé et ne saurait en aucun cas y être un quelconque remplacement !

Paris, 2024

Mis en forme par
Émile Sauvat
`emile.sauvat@ens.psl.eu`

Chapitres

1	Suites et séries	3
2	Limites et continuité	14
3	Dérivation et intégration	31

Chapitre 1

Suites et séries

On considèrera comme acquis en sup les cas réel et complexe : Notamment :
-> Théorème des gendarmes -> Théorème de la limite monotone

1.1 Norme

1.1.1 Généralités

Norme Une *norme* sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant :

- $\forall x \in E, N(x) = 0_{\mathbf{R}} \Leftrightarrow x = 0_E$
 - $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, N(\lambda.x) = |\lambda| N(x)$
 - $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$
-

Lemme 1.1.1.

Soit (E, N) un espace vectoriel normé,
On a $N \geq 0$ (i.e. $\forall x \in E, N(x) \geq 0$)

Distance Une *distance* sur X est une application $d : X^2 \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant :

- $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
 - $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
 - $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
-

Lemme 1.1.2.

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.
Si $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = N(x - y)$ alors d est une distance sur E .

Boule ouverte et fermée Soient $a \in E$, $r \in \mathbf{R}$ On pose

$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\} \quad B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) \leq r\}$$

Les *boules ouverte et fermée* de centre a et de rayon r .

Segment et ensemble convexe Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel quelconque

- > Pour $(a, b) \in E^2$ on définit le *segment* : $[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$
- > $C \subset E$ est dit *convexe* si $\forall (a, b) \in C^2, [a, b] \subset C$

Lemme 1.1.3.

Dans E un EVN quelconque les boules sont convexes

1.1.2 Normes euclidiennes

Ici E est un \mathbf{R} espace vectoriel muni d'un produit scalaire¹

$$\Phi : \begin{pmatrix} E^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x \rangle y \end{pmatrix}$$

On a alors par théorème², $x \mapsto \sqrt{\langle x \rangle x}$ est une norme sur E . On notera

$$\|x\|_2 = N_2(x) = \sqrt{\langle x \rangle x}$$

Note. L'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$ est dite inégalité de *Minkovsky*

Lemme 1.1.4.

Si $E = \mathbf{C}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $N(z) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2}$ est une norme

Lemme 1.1.5.

$E = C^0([a, b], \mathbf{C})$ Soit $f \in E$ on pose

$$N(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \quad \text{alors } N \text{ est une norme sur } E$$

1. Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive

2. Voir cours de sup

1.1.3 Exemple de normes

Norme N_∞ :

Dans $E = K^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_\infty(x) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$
 Dans $E = C^0([a, b], K)$ soit $f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Norme N_1 :

Dans $E = K^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$
 Dans $E = C^0([a, b], K)$ soit $f \in E$, $N_1(f) = \int_a^b |f(x)| dx$

Norme N_2 :

Dans $E = K^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
 Dans $E = C^0([a, b], K)$ soit $f \in E$, $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}$

1.2 Suites

Suite convergente Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. On dit que u converge vers ℓ et on note

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, d(u_n, \ell) < \varepsilon$$

Lemme 1 : Unicité de la limite.

Si $\begin{matrix} u_n \xrightarrow{n} \ell_1 \in E \\ u_n \xrightarrow{n} \ell_2 \in E \end{matrix}$ Alors $\ell_1 = \ell_2$

Démonstration. Par l'absurde, on suppose $\ell_1 \neq \ell_2$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}d(\ell_1, \ell_2) > 0$ On a alors $\begin{matrix} n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1, d(u_n, \ell_1) < \varepsilon \\ n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2, d(u_n, \ell_2) < \varepsilon \end{matrix}$ et soit $p = \max(n_1, n_2)$

$d(\ell_1, \ell_2) \leq d(\ell_1, u_p) + d(u_p, \ell_2) < 2\varepsilon = d(\ell_1, \ell_2)$ impossible \square

Lemme 1.2.1.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$ Alors $u_n \xrightarrow{n} \ell \Leftrightarrow \|u_n - \ell\| \xrightarrow{n} 0$

Démonstration. Notons $v_n = \|u_n - \ell\|$ et $\lambda = 0$ Alors $d(u_n, \ell) = \|u_n - \ell\| = v_n = \|v_n - \lambda\| = d(v_n, \lambda)$

or $u_n \xrightarrow{n} \ell$ ssi : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, d(u_n, \ell) < \varepsilon \Rightarrow d(v_n, \lambda) < \varepsilon \Rightarrow v_n \xrightarrow{n} 0$ \square

Lemme 1.2.2.

Soient $u_n, v_n \in E^{\mathbf{N}}$ et $\lambda \in K$ si on a $u_n \xrightarrow[n]{} \alpha$ et $v_n \xrightarrow[n]{} \beta$
 Alors $\lambda u_n + v_n \xrightarrow[n]{} \lambda \alpha + \beta$

Lemme : Inégalité triangulaire renversée.

Soit $x, y \in E$ alors $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$

Démonstration. $N(x) \leq N(x - y) + N(y) \Rightarrow \underbrace{N(x) - N(y)}_{t \in \mathbf{R}} \leq N(x - y)$

On conclut alors par argument de symétrie. □

Lemme 1.2.3.

Soit $u_n \in E^{\mathbf{N}}$, $\alpha \in K$ on a $u_n \xrightarrow[n]{} \alpha \Rightarrow \|u_n\| \xrightarrow[n]{} \|\alpha\|$

Attention ! La réciproque est fausse !

Suite bornée Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ on dit que (u_n) est bornée si $\exists M \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N}, \|u_n\| \leq M$.

Lemme 1.2.4.

Toute suite $(u_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbf{N}}$ convergente est bornée

Lemme 1.2.5.

On suppose $\begin{cases} \lambda_n \xrightarrow[n]{} \mu \in K \\ u_n \xrightarrow[n]{} v \in E \end{cases}$ Alors $\lambda_n u_n \xrightarrow[n]{} \mu v$

Suite extraite Soit $u \in E^{\mathbf{N}}$ on appelle *suite extraite* (ou sous-suite) de u toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ où $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ est une extractrice (injection croissante)
 NB : en fait $(v_n)_{n \geq 0} = (u_{\varphi(n)})_{n \geq 0} \Leftrightarrow v = u \circ \varphi$

Valeur d'adhérence $\ell \in E$ est une valeur d'adhérence de u s'il existe une suite extraite de u qui converge vers ℓ . On notera \mathcal{V}_u l'ensemble des valeurs d'adhérence de u .

Théorème 1.2.6.

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ si u converge vers $\ell \in K$ alors toute suite extraite de u converge vers ℓ

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une extractrice et $(v_n)_{n \geq 0} = (u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, d(u_n, \ell) < \varepsilon$ donc $\varphi(n) \geq n_0$ et ainsi $d(u_{\varphi(n)}, \ell) < \varepsilon$ et $v_n \xrightarrow{n} \ell$ \square

Corollaire.

Toute suite admettant au moins 2 valeurs d'adhérence est divergente

1.3 Normes équivalentes

1.3.1 Définition

Soit E un K espace vectoriel, N et N' deux normes sur E . N et N' sont dites équivalentes ($N \sim N'$) si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha N \leq N' \leq \beta N$

Note. On peut aussi l'écrire $N' \leq \beta N$ et $N \leq \frac{1}{\alpha} N'$

Lemme 1.3.1.

Soit N, N' des normes équivalentes sur E , $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$ alors
 1) $u_n \xrightarrow{n} \ell$ dans $(E, N) \Leftrightarrow u_n \xrightarrow{n} \ell$ dans (E, N')
 2) u est bornée dans $(E, N) \Leftrightarrow u$ est bornée dans (E, N')

Lemme 1.3.2.

Sur K^n , N_1 , N_2 et N_∞ sont équivalentes et plus précisément

$$N_\infty \leq N_1 \leq \sqrt{n} N_2 \leq n N_\infty$$

1.3.2 Cas de espaces de dimension fini

Rappel. Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il existe une famille d'éléments de E libre et génératrice, c'est alors une base de E .

Théorème 1.3.3.

Sur un K -ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Sera démontré ultérieurement.

Corollaire.

Dans un K espace vectoriel de dimension finie, la notion de convergence ne dépend pas de la norme.

Attention ! C'est faux en dimension quelconque !

Lemme 1.3.4.

Soit E de dimension finie et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Soit $(x_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in E$. On écrit $\begin{cases} x_n = x_{1,n}e_1 + \dots + x_{p,n}e_p \\ \alpha = \alpha_1e_1 + \dots + \alpha_pe_p \end{cases}$

On a alors $x_n \xrightarrow[n]{} \alpha \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_{k,n} \xrightarrow[n]{} \alpha_k$

Théorème 1.3.5.

Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} A_n \xrightarrow[n]{} A & \text{dans } \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \\ B_n \xrightarrow[n]{} B & \text{dans } \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}) \end{cases}$ Alors $A_n B_n \xrightarrow[n]{} AB$

Démonstration. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$
 $(A_n B_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^q \underbrace{(A_n)_{i,k}}_{\rightarrow a_{i,k}} \underbrace{(B_n)_{k,j}}_{\rightarrow b_{k,j}} \xrightarrow[n]{} \sum_{k=1}^q a_{i,k} b_{k,j} = (AB)_{i,j}$ donc $A_n B_n \xrightarrow[n]{} AB$

□

1.4 Comparaisons asymptotiques

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Négligeabilité On dit que u_n est négligeable devant v_n quand $n \rightarrow +\infty$ noté $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(\delta_n)_{n \geq n_0}$ tel que

- $\forall n \geq n_0, u_n = \delta_n v_n$
- $\delta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Domination On dit que u_n est dominée par v_n quand $n \rightarrow +\infty$ noté $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(B_n)_{n \geq n_0}$ tel que

- $\forall n \geq n_0, u_n = B_n v_n$
- $(B_n)_{n \geq n_0}$ est bornée

Équivalence On dit que u_n est équivalent à v_n , noté $u_n \sim v_n$ si :

$$u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$$

Note. $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$

1.5 Séries dans un K espace vectoriel de dimension finie

Note. On note par abus " $\dim E < \infty$ "

Le cas scalaire est abordé en MPSI.

Soit $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$; pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

Sommes partielles La suite (U_n) est dite suite des *sommes partielles* associée à u .

Série convergente On dit que la *série de terme général* u_n converge si (U_n) converge.

Dans ce cas on pose $\sum_0^{+\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \in E$

Lemme 1.5.1.

$(\sum u_n \text{ converge}) \Rightarrow \left(u_n \xrightarrow[n]{} 0 \right)$

Attention ! La réciproque est fausse ! (ex : (H_n))

Divergence grossière Lorsque $u_n \not\xrightarrow[n]{} 0$, la série $\sum u_n$ est dite *grossièrement divergente* " $\sum u_n$ DVG" ainsi : $(\sum u_n \text{ DVG} \Rightarrow \sum u_n \text{ DV})$

Théorème : Reste d'une série convergente.

On suppose $\sum u_n$ converge, on note $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ la "limite de la somme" et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le "reste d'ordre n ".

Alors $\left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, S = U_n + R_n \\ R_n \rightarrow 0 \end{array} \right.$

Démonstration. bien-fondé ?

Soit $n \in \mathbb{N}$ pour $m \geq n+1$, $\sum_{k=n+1}^m u_k = U_m - U_n \xrightarrow[m]{} S - U_n$ donc R_n existe avec $R_n = S - U_n$

d'où $S = U_n + R_n$ puis $R_n = S - U_n \rightarrow S - S = 0$ □

Lemme 1.5.2.

Soit $(u_n), (v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in K$

On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors :

-> $\sum \lambda u_n + v_n$ converge

-> $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n + v_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

Convergence absolue Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ on dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum \|u_n\|$ converge.

Note. Vu $\dim E < \infty$, ceci ne dépend pas du choix de la norme

Théorème 1.5.3.

Dans un K espace vectoriel de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente " CVA \Rightarrow CV "

Sera démontré ultérieurement.¹

Attention ! Faux dans un EVN quelconque !

Lemme 1.5.4.

Soit (E, N) un K espace vectoriel normé de dimension finie

On suppose que $\sum u_n$ CVA. Alors $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$

1.6 Complément sur les séries numériques

Rappel. Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $\sum z^n$ CV $\Rightarrow |z| < 1$

-> Lorsque $|z| < 1$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

-> On définit $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

1.6.1 Règle de *Dalembert*

Théorème : Règle de *Dalembert*.

Soit $(u_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$

On suppose l'existence de $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow \ell$

Alors : 1) $\ell < 1 \Rightarrow \sum u_n$ CVA

2) $\ell > 1 \Rightarrow \sum u_n$ DVG

1. TODO : add ref

Démonstration. 1) On suppose $\ell < 1$ et on note $r_n = \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$. On pose $\theta \in [\ell, 1]$ et $\varepsilon = \theta - \ell$. On a alors

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |r_n - \ell| < \varepsilon$ soit en particulier $r_n < \ell + \varepsilon = \theta$. Ainsi $\forall n \geq n_0, |u_{n+1}| < \theta |u_n|$

et $|u_n| \leq \theta^{n-n_0} |u_{n_0}|$ (REC) On a alors $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \underbrace{\theta^{-n_0} |u_{n_0}|}_{\text{cte}} \theta^n$ or $\sum \theta^n$

converge car $\theta \in]0, 1[$

donc par théorème de comparaison $\sum |u_n|$ converge.

2) On suppose $\ell > 1$ et on fixe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \theta < \ell$, on a alors

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, r_n > \theta$ (..)

on obtient $|u_n| \rightarrow +\infty$ donc $u_n \not\rightarrow_n 0$ donc $\sum u_n$ DVG □

1.6.2 Séries alternées

Définition La série réelle $\sum u_n$ est dite *alternée* si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n| \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n| \end{cases}$

Théorème : Critère spécial des séries alternées.

Soit (u_n) une suite, on suppose

1) $\sum u_n$ est alternée

2) $u_n \rightarrow 0$

3) $(|u_n|)_{n \geq 0}$ décroît.

alors $\sum u_n$ converge et de plus, $\forall n \in \mathbb{N}$

-> $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

-> R_n et u_{n+1} ont le même signe

-> S est compris entre U_n et U_{n+1}

1.6.3 Sommation des relations de comparaisons

Théorème : Cas convergent.

Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v_n \geq 0, \forall n \geq n_0$. On suppose que

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge et on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

Alors :

1) $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow R_n = o_{n \rightarrow +\infty}(R'_n)$

2) $u_n = \bigcirc_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow R_n = \bigcirc_{n \rightarrow +\infty}(R'_n)$

3) $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} R'_n$

Théorème : Cas divergent.

Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v_n \geq 0, \forall n \geq n_0$. On suppose que

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ diverge et on note $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$

Alors :

1) $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow U_n = o_{n \rightarrow +\infty}(V_n)$

2) $u_n = \bigcirc_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow U_n = \bigcirc_{n \rightarrow +\infty}(V_n)$

3) $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} V_n$

Théorème de Cesàro.

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- 1) Si $u_n \rightarrow \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \rightarrow \lambda$
 2) Si $u_n \rightarrow +\infty$ alors $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \rightarrow +\infty$

Démonstration. 1) Supposons $u_n \rightarrow \lambda$ alors $u_n - \lambda = o(1)$, on pose ensuite $v_n = 1$ alors $\sum v_n$ diverge et d'après le théorème de sommation en cas divergent

$$\sum_{k=0}^n u_k - \lambda = o\left(\underbrace{\sum_{k=0}^n 1}_{=n+1}\right) \Rightarrow \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n u_k\right) - \lambda \rightarrow 0$$

2) Supposons $u_n \rightarrow +\infty$ et posons $a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ Soit $A \in \mathbb{R}$ et $A' = A + 1$ Soit $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, u_n > A'$, puis pour $n \geq n_0$:

$$a_n = \frac{1}{n+1} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k}_{=C} + \underbrace{\sum_{k=n_0}^n u_k}_{> A'(n-n_0+1)} \right) \text{ donc } a_n > \frac{C}{n+1} + A' \frac{n+1-n_0}{n+1} = A' + \frac{C-n_0 A'}{n+1}$$

Soit $n_1 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq n_1, \left| \frac{C-n_0 A'}{n+1} \right| < 1$ alors $\forall n \geq n_1, a_n > A$ d'où $a_n \rightarrow +\infty$ \square

1.7 Produit de deux séries absolument convergentes

Produit de Cauchy Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries quelconques (convergentes ou non) de nombres complexes.

On pose $\forall n \in \mathbb{N} : w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ (somme finie !)

La série $\sum w_n$ est appelée *produit de Cauchy* de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Attention !

Lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent on a pas forcément $(\sum u_n) \times (\sum v_n) = \sum w_n$

Théorème 1.7.1.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors :

- 1) $\sum w_n$ CVA
 2) $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$

Signalé :

Théorème de Mertens.

Si $\begin{cases} \sum u_n \text{ CVA} \\ \sum v_n \text{ converge} \end{cases}$
 alors $\sum w_n$ converge et $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$

1.8 Dualité série-suite

Toute suite peut-être envisagée comme une série

Ici (E, N) est un EVN de dimension finie.

On pose $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_n = a_n - a_{n-1} \end{cases}$ On a alors pour $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{k=0}^n b_k = b_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_0 + a_n - a_0 = a_n \quad \text{soit} \quad a_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

On sait ensuite que (a_n) converge si et seulement si $\sum b_k$ converge donc

$$(a_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \sum a_n - a_{n-1} \text{ converge}$$

★ ★ ★

Chapitre 2

Limites et continuité

Cadre : (E, N) est un espace vectoriel normé quelconque et $A \subset E$

2.1 Ouverts et fermés

On considère ici $A \subset E$ et $\alpha \in E$

2.1.1 Intérieurs

Point intérieur

-> α est un dit un point intérieur à A s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(\alpha, r) \subset A$

Intérieur

-> On pose $\overset{\circ}{A} = \{x \in E \mid x \text{ est intérieur à } A\}$ dit *intérieur* de A

| **Lemme 2.1.1.**

| Soit $A \subset E$ alors $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} \subset A$

| **Lemme : Croissance de l'intérieur.**

| Soit $A, B \subset E$ alors $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$

2.1.2 Ouverts

Définition Dans (E, N) on appelle *ouvert* (ou *partie ouverte*) **toute** réunion de boules ouvertes.

Théorème : Caractérisation des ouverts.Soit $U \subset E$ alors $(U \text{ ouvert}) \Leftrightarrow (\forall x \in U, \exists r > 0 : B(x, r) \subset U)$ *Démonstration.*

\Leftarrow Pour chaque $x \in U$, on choisit r_x tel que $B(x, r_x) \subset U$ alors $U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x)$ donc par définition, U est un ouvert.

\Rightarrow On note $U = \bigcup B(x_i, r_i)$, soit $x \in U$ et $i_0 \in I$ tel que $x \in B(x_{i_0}, r_{i_0})$

Soit $r = r_{i_0} - d(x, x_{i_0}) > 0$ alors $B(x, r) \subset B(x_{i_0}, r_{i_0})$

Soit $y \in B(x, r)$ c'est-à-dire $d(x, y) < r$ alors

$$d(y, x_{i_0}) \leq d(y, x) + d(x, x_{i_0}) < r_{i_0}$$

Ainsi $\forall x \in U, \exists r > 0 : B(x, r) \subset U$

□

Corollaire.Soit $U \subset E$ alors U ouvert $\Leftrightarrow U \subset \mathring{U} \Leftrightarrow U = \mathring{U}$ Note. $\mathcal{T} = \{U \subset E \mid U \text{ est ouvert}\}$ est appelé *Topologie* de (E, N) **Théorème 2.1.2.**

1) Toute réunion d'ouvert est un ouvert.

2) Toute intersection finie d'ouvert est un ouvert.

Démonstration. On démontre la deuxième assertion-> Cas de l'intersection vide : $\bigcap \emptyset = E$

-> Cas de 2 ouverts : Soit A, B deux ouverts de E , soit $x \in A \cap B$, on a $\exists r_1, r_2 > 0$ tels que $B(x, r_1) \subset A$ et $B(x, r_2) \subset B$ alors soit $r = \min(r_1, r_2)$, $B(x, r) \subset A \cap B$ et par théorème (Page ??), $A \cap B$ est un ouvert

-> Cas de p ouverts, $p \in \mathbb{N}^*$: par récurrence sur p avec le cas $p = 2$

□

2.1.3 Fermés

Lois de Morgan : ${}^c\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} {}^c A_i$ et ${}^c\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} {}^c A_i$

Définition On appelle *fermé* tout complémentaire d'un ouvert de E
Ainsi A est fermé $\Leftrightarrow {}^c A$ est ouvert avec ${}^c A = C_E A$

Théorème 2.1.3.

1) Toute intersection de fermés est fermée.

2) Toute réunion finie de fermés est fermée.

Démonstration. 1) Soit $(\Phi_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E on a ${}^c(\bigcap_I \Phi_i) = \bigcup_I {}^c \Phi_i$ est un ouvert donc l'intersection des Φ_i est fermée. □

2.1.4 Adhérence

Point adhérent α est dit adhérent à A si $\forall r > 0, B(\alpha, r) \cap A \neq \emptyset$

Adhérence On pose $\overline{A} = \{x \in E \mid x \text{ est adhérent à } A\}$ dit adhérence de A .

Lemme : Croissance de l'adhérence.

Soit $A, B \in E$ alors $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

Théorème 2.1.4.

Soit $\alpha \in E$ alors $\alpha \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : a_n \xrightarrow[n]{} \alpha$

Démonstration.

\Leftarrow Soit $r > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0, d(a_n, \alpha) < r$ alors $B(\alpha, r) \cap A \neq \emptyset$ donc $\alpha \in \overline{A}$

\Rightarrow Soit $n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in B(\alpha, \frac{1}{n+1}) \cap A$ d'où $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ vérifie $a_n \xrightarrow[n]{} \alpha$ \square

Théorème : Caractérisation des fermés.

Soit $A \subset E, A$ est fermé si et seulement si A est stable par passage à la limite.

Démonstration. \Rightarrow Soit $B = {}^c A$ et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n]{} \alpha \in E$

Si $\alpha \in B, \exists r > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0, a_n \in B(\alpha, r)$ soit $a_{n_0} \in B(\alpha, r) \Rightarrow a_{n_0} \notin A$ (impossible !) d'où $\alpha \in A$

\Leftarrow Par contraposée, on suppose que $B = {}^c A$ n'est pas un ouvert donc $\exists \alpha \in B : \forall r > 0, \exists x \in B(\alpha, r)$ tel que $x \notin B$. On a alors $\alpha \in \overline{A}$ et $\alpha \in B$ soit $\alpha \notin A$ d'où $\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ avec $a_n \xrightarrow[n]{} \alpha$. On a donc trouvé une suite convergente d'éléments de A dont la limite n'est pas dans A . \square

Corollaire.

Soit $A \subset E$, on a : A fermé $\Leftrightarrow \overline{A} \subset A \Leftrightarrow \overline{A} = A$

Lemme 2.1.5.

Soit $A \subset E$ alors ${}^c(\overline{A}) = {}^c A$ et ${}^c({}^c A) = \overline{A}$

Lemme 2.1.6.

- 1) \mathring{A} est un ouvert
- 2) \mathring{A} est le plus grand ouvert de E inclu dans A

Lemme 2.1.7.

- 1) \overline{A} est un fermé
- 2) \overline{A} est le plus petit fermé de E contenant A

Théorème 2.1.8.

Les notions suivantes, (notions topologiques) :

- point intérieur
- ouvert
- point adhérent
- fermé

sont invariants par passage à une norme équivalente.

Démonstration. On sait que la convergence d'une suite est invariante par norme équivalente (Page 7) donc on a l'invariance des notions "point adhérent" et "adhérence" ainsi que "point intérieur" par le complémentaire de l'adhérence (Page 16) puis par caractérisation séquentielle des fermés on a l'invariance de la notion "fermé" ainsi que "ouvert" par le complémentaire. \square

Lemme 2.1.9.

- 1) Toute boule fermée est fermée
- 2) Toute sphère est fermée

Frontière Soit $A \subset E$ on définit sa *frontière* comme $F_r(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

Lemme 2.1.10.

$\forall A \subset E$, $F_r(A)$ est fermée et $F_r(A) = \overline{A} \cap \overline{{}^c A}$

Densité Soit $D \subset A \subset E$ on dit que D est *dense* dans A si tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de D soit

$$\forall a \in A, \exists (d_n) \in D^{\mathbb{N}} : d_n \xrightarrow{n} a$$

Lemme 2.1.11.

Soit $D \subset A$ alors on a : D dense dans $A \Leftrightarrow A \subset \overline{D}$

Exemple Soit $n \in \mathbf{N}^*$ alors $GL_n(K)$ dense dans $\mathcal{M}_n(K)$

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ et $r = \text{rg}(M) \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Par théorème¹ $\exists U, V \in GL_n(K) : M = UJ_r V$ posons alors pour $p \in \mathbf{N}^*$ $J_r\left(\frac{1}{p}\right) = \text{Diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right)$ puis $M_p = UJ_r\left(\frac{1}{p}\right)V$ alors $M_p \in GL_n(K) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M \quad \square$

2.2 Limites

2.2.1 Cas général

Dans toute cette partie, F est un K espace vectoriel et $f : A(\subset E) \rightarrow F$

Définition Soit $\alpha \in \overline{A}$, $b \in F$. On dit que f admet b comme limite au point α , noté $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b$ si
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in A, d(x, \alpha) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$

Lemme 2.2.1.

Soit $A(\subset E) \xrightarrow{f} B(\subset F) \xrightarrow{g} G$ et $\alpha \in \overline{A}$, $\beta \in \overline{B}$, $c \in G$
 Si on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \beta$ et $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow \beta} c$ alors $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} c$

Lemme 2.2.2.

Soit $\alpha \in \overline{A}$, $b \in F$, $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ avec $\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b \\ a_n \xrightarrow{n} \alpha \end{cases}$
 alors $f(a_n) \xrightarrow{n} b$

Théorème : Caractérisation séquentielle d'une limite.

Soit $\alpha \in \overline{A}$, $b \in F$
 Alors $\left(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b\right) \Leftrightarrow \left(\forall (a_n) \in A^{\mathbf{N}}, (a_n \xrightarrow{n} \alpha) \Rightarrow (f(a_n) \xrightarrow{n} b)\right)$

Démonstration. \Rightarrow Lemme

\Leftarrow Par contraposée on fixe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}, \exists a_n$ tel que $\begin{cases} d(a_n, \alpha) < \frac{1}{n+1} \\ d(f(a_n), b) \geq \varepsilon_0 \end{cases}$
 D'où $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow{n} \alpha$ et $f(a_n) \not\xrightarrow{n} b \quad \square$

Lemme : Unicité de la limite.

Soit $\alpha \in \overline{A}$, $b_1 \in F$, $b_2 \in F$
 Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b_1$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b_2$ alors $b_1 = b_2$

1. Voir cours de sup

Lemme 2.2.3.

Soit $\alpha \in \bar{A}$ et $b \in F$

On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b$ alors ceci reste vrai si

- On remplace $\|\cdot\|_E$ par une norme équivalente
- On remplace $\|\cdot\|_F$ par une norme équivalente

Limite en $\pm\infty$ On dit que $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} b$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\|x\| > M \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$

Limite infinie Ici $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in \bar{A}$

On dit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} +\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in A, d(x, \alpha) < \delta \Rightarrow f(x) > M$

Voisinage Soit (E, N) un espace vectoriel normé quelconque et $\alpha \in E$
 Soit $V \subset E$ alors V est un *voisinage* de α si $\exists r > 0$ tel que $B(\alpha, r) \subset V$
 On peut noter $\mathcal{V}_\alpha = \{V \subset E \mid V \text{ est } v(\alpha)\}$

Note. $V \in \mathcal{V}_\alpha \Leftrightarrow \alpha \in \mathring{V}$

Lemme 2.2.4.

On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b \in F$

Alors f est bornée localement au voisinage de α (noté $v(\alpha)$)

2.2.2 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Norme produit Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_r, N_r)$ des K espaces vectoriels normés.

On note $W = \prod_{i=1}^r E_i = E_1 \times \dots \times E_r$ et $x = (x_1, \dots, x_r) \in W$

On pose $\forall x \in W, N(x) = \max_{1 \leq i \leq r} \{N_i(x_i)\}$ alors $\begin{cases} N \text{ est dite norme produit} \\ (E, N) \text{ est dit EVN produit} \end{cases}$

Lemme 2.2.5.

Soient U_1 ouvert de (E_1, N_1)

\vdots

U_r ouvert de (E_r, N_r)

alors $U_1 \times \dots \times U_r$ est un ouvert de W

Un produit fini d'ouvert est un ouvert

Lemme 2.2.6.

Un produit fini de fermé est un fermé

Lemme 2.2.7.

Soit $u = (u_n) \in W^{\mathbb{N}}$, $b \in W$ où $W = \prod_{i=1}^r E_i$
 On note $u_n = (u_{1,n}, \dots, u_{r,n})$ et $b = (b_1, \dots, b_r)$
 alors $u_n \xrightarrow[n]{} b \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, u_{i,n} \xrightarrow[n]{} b_i$

Lemme 2.2.8.

Soit $f : A(\subset E) \rightarrow W = \prod_{i=1}^r E_i$, $\alpha \in \overline{A}$ et $b = (b_1, \dots, b_r) \in W$
 On note $\forall x \in A$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x))$
 alors $\left(f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} b \right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, f_i(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} b_i \right)$

Lemme 2.2.9.

$f_1 : A \rightarrow F$
 $f_2 : A \rightarrow F$, $\alpha \in \overline{A}, \lambda \in K$ et $b_1, b_2 \in F$
 On suppose que $\begin{cases} f_1(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} b_1 \\ f_2(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} b_2 \end{cases}$ alors $(\lambda f_1 + f_2)(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} (\lambda b_1 + b_2)$

Lemme 2.2.10.

Soit $f : A(\subset E) \rightarrow F$ avec $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F
 On écrit $f(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x) \varepsilon_i$ et $b = \sum_{i=1}^p b_i \varepsilon_i$
 alors $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} b \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} b_i$

2.3 Continuité

2.3.1 Cas général

Continuité en un point Soit $f : A(\subset E) \rightarrow F$ et $a \in A$ alors
 f est dite C^0 en a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall x \in A, d(a, x) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Lemme 2.3.1.

$f C^0$ en $a \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} f(a)$

Lemme 2.3.2.

$f C^0$ en $a \Leftrightarrow (f \text{ admet une limite finie au point en } a)$

Théorème : Caractérisation séquentielle de la continuité.

Soit $f : A(\subset E) \rightarrow F$ et $a \in A$ alors
 f est continue au point a si et seulement si
 $\left(\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow{n} a \Rightarrow f(a_n) \xrightarrow{n} f(a) \right)$

Démonstration. Caractérisation séquentielle d'une limite Page 18 et Lemme. \square

Continuité f est dite continue si $\forall a \in A$, f est continue au point a .

Fonction lipschitzienne Soit $f : A(\subset E) \rightarrow F$ et $k \in \mathbb{R}^+$

- • f est dite k -lipschitzienne si $\forall (x, y) \in A^2, d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y)$
 - • f est dite lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que f est k -lipschitzienne.
-

Lemme 2.3.3.

f est lipschitzienne $\Rightarrow f$ est continue

Attention ! La réciproque est fausse !

Lemme 2.3.4.

$A(\subset E) \xrightarrow{f_1} B(\subset F) \xrightarrow{f_2} G$.

On suppose f_1 k_1 -lipschitzienne et f_2 k_2 -lipschitzienne alors $f_2 \circ f_1$ est $k_1 \times k_2$ -lipschitzienne

Distance à un ensemble Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$ et $x \in E$

$$d(x, A) = \inf\{d(x, \alpha) \mid \alpha \in A\}$$

Théorème 2.3.5.

Toute partie de \mathbb{R} non vide et minorée admet une borne inférieure

Théorème 2.3.6.

Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$ alors $\delta : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$ Soit $\alpha \in A$, $d(x, \alpha) \leq d(x, y) + d(y, \alpha)$ ainsi $\forall \alpha \in A, \underbrace{d(x, A) - d(x, y)}_{\mu} \leq d(y, \alpha)$ donc μ est un minorant de $\{d(y, \alpha) \mid \alpha \in A\}$ donc $\mu \leq d(y, A)$ d'où $\underbrace{d(x, A) - d(y, A)}_{\theta} \leq d(x, y)$ et on a de même pour le couple (y, x) , $-\theta \leq d(y, x) = d(x, y)$
 En bref : $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ □

Lemme 2.3.7.

La composée de deux applications continues est continue

Lemme 2.3.8.

Pour $f : A(\subset E) \rightarrow F$ et $B \subset F$ on note $f|_B$ la restriction $\begin{matrix} B \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{matrix}$
 Alors f continue $\Rightarrow f|_B$ continue

Lemme 2.3.9.

- Une combinaison linéaire d'applications continues est continue
- Soit $a \subset E$ et $\begin{cases} f : A \rightarrow F \text{ } \mathcal{C}^0 \\ \lambda : A \rightarrow K \text{ } \mathcal{C}^0 \end{cases}$ Alors $\begin{matrix} A \rightarrow F \\ x \mapsto \lambda(x)f(x) \end{matrix}$ est \mathcal{C}^0

Lemme 2.3.10.

Soit $f, g \in \mathcal{C}^0(A, F)$, E, F des espaces vectoriels normés
 Soit $D \subset A$ dense dans A et $f|_D = g|_D$ alors $f = g$

2.3.2 Cas des applications linéaires

Théorème 2.3.11.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $u \in \mathcal{C}^0(E, F) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in E, \|u(x)\| \leq C\|x\| \Leftrightarrow u$ est lipschitzienne.

Démonstration. (1) \Rightarrow (2) : Si $u \in \mathcal{C}^0(E, F)$ alors u est \mathcal{C}^0 en 0 et avec $\varepsilon = 1$, soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\| < \delta \Rightarrow \|u(x)\| < 1$. Soit alors $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $x' = \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}$ donc $\|u(x')\| < 1$ et ainsi $\|u(x)\| \leq \frac{2}{\delta} \|x\|$

(2) \Rightarrow (3) : On suppose $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq C\|x\|$ puis soit $(x, y) \in E^2$ on a $\|u(x - y)\| \leq C\|x - y\|$ donc u est C -lipschitzienne □

Notation On note $\mathcal{L}_c(E, F) = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid u \text{ est continue}\}$

Norme subordonnée

- Soit (E, N) et (F, N') des K espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on pose $\|u\| = \sup\{N'(u(x)) \mid x \in E \text{ et } N(x) \leq 1\} = \sup_{N(x) \leq 1} N'(u(x))$
 - $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un K espace vectoriel et $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. On l'appelle *norme subordonnée* à N et N' ou encore *norme d'opérateur* notée $\|\cdot\|_{\text{op}}$
-

Démonstration.

- Si $u = 0$ alors $\|u\| = 0$, réciproquement si $\|u\| = 0$, $\forall x \in B_f(0, 1)$, $u(x) = 0$ Soit $x \in E \setminus \{0\}$ en posant $x' = \frac{x}{\|x\|}$ on a $\frac{1}{\|x\|} u(x) = 0$ donc $u(x) = 0$
- $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $\forall k \in K$ on a $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
- Soit $(u, v) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on pose $w = u + v$, soit $x \in B_f(0, 1)$ on a $\|w(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq \|u\| + \|v\|$ et ainsi $\|u\| + \|v\|$ est un majorant de $X = \{\|w(x)\| \mid x \in B_f(0, 1)\}$ or $\|w\|$ est le plus petit majorant de X donc $\|w\| \leq \|u\| + \|v\|$

□

Lemme 2.3.12.

(E, N) , (F, N') des espaces vectoriels normés et $E \neq \{0\}$
 Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ Alors $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

Note. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ Si $E \neq \{0\}$, $\|u\|$ est le plus petit $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq k \|x\|$ (c'est vrai même si $E = \{0\}$) ainsi $\|u\|$ est la plus petite constante de Lipschitz de u

On a donc $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $\forall x \in E$, $\boxed{\|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|}$

Théorème 2.3.13.

(E, N) , (F, N') , (G, n'') des espaces vectoriels normés quelconques
 avec $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$
 Alors $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et $\|v \circ u\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

Démonstration. $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$ car linéaire et continue puis u est $\|u\|$ -lipschitzienne et v est $\|v\|$ -lipschitzienne donc $v \circ u$ est $\|u\| \cdot \|v\|$ -lipschitzienne du coup $\|v \circ u\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ □

Note. $\forall u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E)$ et $\|v \circ u\| \leq \|u\| \times \|v\|$

On dit aussi que $\|\cdot\|$ est une norme *sous-multiplicative* ou une *norme d'algèbre*

Lemme 2.3.14.

Lorsque $E \neq \{0\}$, $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F)$
 $u \in \mathcal{C}^0(E, F) \Leftrightarrow u$ bornée sur $B_f(0, 1)$
 $\Leftrightarrow u$ est bornée sur $S(0, 1)$

Lemme 2.3.15.

Soit $X \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée et $\mu \in \mathbb{R}^+$ Alors $\sup(\mu X) = \mu(\sup X)$

Théorème 2.3.16.

E_1, \dots, E_n des espaces vectoriels normés
 $\varphi : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ une application n -linéaire,
 $W = E_1 \times \dots \times E_n$ muni de la norme produit
Alors $(\varphi \text{ est continue}) \Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}^+ : \forall (x_1, \dots, x_n) \in W, \|\varphi(x_1, \dots, x_n)\| \leq M \times \|x_1\| \times \dots \times \|x_n\|)$

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ On fixe $M \geq 0$ vérifiant la propriété.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in W$ et $y \in W \cap B_f(x, 1)$

$$\begin{aligned} \varphi(y) - \varphi(x) &= \varphi(y_1, \dots, y_n) - \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) - \varphi(x_1, y_2, \dots, y_n) + \varphi(x_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\quad - \varphi(x_1, x_2, y_3, \dots, y_n) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) - \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i - x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \end{aligned}$$

ainsi $\|\varphi(y) - \varphi(x)\| \leq \sum_{i=1}^n M \|x_1\| \dots \|x_{i-1}\| \cdot \|y_i - x_i\| \cdot \|y_{i+1}\| \dots \|y_n\|$
or $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|y_i - x_i\| \leq \|y - x\|$ et $\forall j$, $\|y_j\| \leq \|x_j\| + \|y_j - x_j\| \leq \|x\| + 1$
donc $\|\varphi(y) - \varphi(x)\| \leq nM(\|x\| + 1)^{n-1} \cdot \|y - x\|$ du coup $\varphi(y) \xrightarrow{y \rightarrow x} \varphi(x)$ donc φ est continue

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\varphi \in \mathcal{C}^0(W, F)$ alors φ est \mathcal{C}^0 en 0 donc soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in B(0, \delta)$, $\|\varphi(x)\| < 1$ Soit $x \in W$

• Si $\forall i$, $x_i \neq 0$, posons $x'_i = \frac{x_i}{\|x_i\|} \frac{\delta}{2}$ et $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ donc $\|\varphi(x')\| < 1$ or
 $\varphi(x') = \frac{\delta^n}{2^n \|x_1\| \dots \|x_n\|} \varphi(x)$

donc $\|\varphi(x)\| \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \prod_{i=1}^n \|x_i\| = M \prod_{i=1}^n \|x_i\|$

• Si $\exists i_0$ tel que $x_{i_0} = 0$ alors $\varphi(x) = 0$ donc $\|\varphi(x)\| \leq M \prod_{i=1}^n \|x_i\|$ \square

2.4 Image réciproque et continuité

L'idée générale est ici de travailler dans A munie de la distance induite par la norme de E .

Note. Soit $a \in A$ et $r \in \mathbb{R}_+$ alors on note $B^A(a, r) = \{x \in A, d(x, a) < r\} = A \cap B(a, r)$

Voisinage relatif Soit $a \in A$ et $V \subset A$ alors V est dit voisinage relatif de a s'il existe $r > 0$ tel que $B^A(a, r) \subset V$

Ouvert relatif Soit $U \subset A$ alors U est dit ouvert relatif de A s'il est voisinage relatif de chacun de ses points. i.e. $\forall x \in U, \exists r > 0 : B^A(x, r) \subset U$

Théorème : Caractérisation des ouverts relatifs.

Soit $U \subset A$ alors :

U ouvert relatif de $A \Leftrightarrow \exists U'$ ouvert de E tel que $U = A \cap U'$

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ Soit U' ouvert de E tel que $A \cap U' = U$ alors

Soit $x \in U = A \cap U'$ alors $\exists r > 0$ tel que $A \cap B(x, r) \subset U$
donc U est un voisinage relatif de x

Par définition, U est un ouvert relatif sur A

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall x \in U$ ouvert relatif $\exists r_x > 0$ tel que $A \cap B(x, r_x) \subset U$,
alors $U' = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x)$ est un ouvert de E et $U = A \cap U'$ \square

Fermé relatif Soit $\Phi \subset A$ alors Φ est dit fermé relatif de A si $A \setminus \Phi$ est un ouvert relatif de A .

Théorème : Caractérisation des fermés relatifs.

Soit $\Phi \subset A$ alors :

Φ fermé relatif de $A \Leftrightarrow \exists \Phi'$ fermé de E tel que $\Phi = A \cap \Phi'$

Démonstration. Clair en considérant $U = A \setminus \Phi$ \square

Théorème 2.4.1.

Soit $X \subset A$ alors X est un fermé relatif de $A \Leftrightarrow$

Pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in A$ on a $a \in X$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \xrightarrow{n} a \in A$

Si $a \in A \setminus X$ alors $\exists r > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0, x_n \in B(x_n, a) \cap A$ du coup $x_{n_0} \in A \setminus X$ (impossible!) donc $a \in X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposée on suppose $\exists \xi_0 \in A \setminus X : \forall r > 0 \exists x \in A \cap B(\xi_0, r)$ tel que $x \notin X$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n$ tel que $d(x_n, \xi_0) < \frac{1}{n+1}$ d'où $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \xrightarrow{n} \xi_0$ mais $\xi_0 \notin X$ \square

Théorème 2.4.2.

Soit $A \subset E$ et E, F des espaces vectoriels normés
 $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$ et $Y \subset F$ alors

1) Y fermé $\Rightarrow f^{-1}(Y)$ fermé relatif de A

2) Y ouvert $\Rightarrow f^{-1}(Y)$ ouvert relatif de A

Démonstration.

- 1) Soit $f^{-1}(Y) = \{x \in A, f(x) \in Y\}$ et soit $(x_n) \in (f^{-1}(Y))^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow{n} a \in A$. Comme f est \mathcal{C}^0 on a $f(x_n) \xrightarrow{n} f(a) \in A$ car $a \in f^{-1}(Y)$ donc par théorème $f^{-1}(Y)$ est un fermé relatif.
- 2) Clair avec $F \setminus Y$ ouvert de F □

Cas particulier Lorsque $A = E$ alors $\forall Y \subset F, \begin{cases} Y \text{ fermé} \Rightarrow f^{-1}(Y) \text{ fermé} \\ Y \text{ ouvert} \Rightarrow f^{-1}(Y) \text{ ouvert} \end{cases}$

2.5 Compacité

2.5.1 Compacité dans un espace vectoriel normé quelconque

Partie compacte On dit que A est une partie compacte de E (ou compact de E) si toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui converge vers un élément de A .

Lemme 2.5.1.

A est compacte $\Rightarrow A$ est fermée et bornée

Lemme 2.5.2.

Soit A un compact et X fermé alors $A \cap X$ est compact

Théorème 2.5.3.

Soit A un compact et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ alors :
 (a_n) converge $\Leftrightarrow (a_n)$ admet au plus une valeur d'adhérence

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ Vu A compact, $\exists (a_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ qui converge vers $\alpha \in A$.

Supposons $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 : d(a_n, \alpha) \geq \varepsilon_0$ ainsi $\{n \in \mathbb{N} \mid d(a_n, \alpha) \geq \varepsilon_0\}$ est infini donc $\exists \varphi' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, d(a_{\varphi'(k)}, \alpha) \geq \varepsilon_0$ donc par compacité $\exists \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $a_{\varphi'(\psi(n))} \xrightarrow{n} \beta \in A$ et comme (a_n) admet au plus une valeur d'adhérence, $\beta = \alpha$ impossible !
 Donc $a_n \xrightarrow{n} \alpha$ □

Théorème 2.5.4.

Soit E_1, \dots, E_r des espaces vectoriels normés et
 $A_1 \subset E_1, \dots, A_r \subset E_r$ des compacts
 Alors $A_1 \times \dots \times A_r$ est un compact de $E_1 \times \dots \times E_r$

Continuité uniforme Si E, F est un espace vectoriel normé et $f : A \rightarrow F$ alors f est dite *uniformément continue* si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in A^2, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Théorème 2.5.5.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$ alors si A est compact $f(A)$ est compact.
 "L'image continue d'un compact est un compact."

Démonstration. Soit $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n]{} \alpha \in A$ alors $f(a_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n]{} f(\alpha) \in f(A)$ □

Théorème de Heine.

Toute application continue sur un compact est uniformément continue.

Démonstration. Par l'absurde :

On suppose $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \exists (x, y) \in A^2 : d(x, y) < \delta$ et $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$
 On pose alors (x_n) et (y_n) vérifiant ces propriétés avec $\delta_n = \frac{1}{n+1}$ et $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n]{} \alpha \in A$ puis on a $\|f(x_n) - f(y_n)\| \xrightarrow[n]{} 0$ d'où la contradiction. □

Lemme 2.5.6.

Soit $X \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré alors $\sup(X) \in \overline{X}$

Théorème 2.5.7.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$
 Si A est un compact non vide alors f admet un maximum sur A

Note. PG -> On dit que " f est bornée et atteint ses bornes"

Démonstration. Soit $B = f(A) \neq \emptyset$, B est borné comme image continue d'un compact.

Soit alors $\beta = \sup(B)$. On a donc $\beta \in \overline{B} = B$ donc $\begin{cases} \beta \text{ majore } B \\ \beta \in B \end{cases}$ d'où $\beta = \max(B)$ □

2.5.2 Compacité en dimension finie

Rappel :

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Dans \mathbb{R} , tout segment $[a, b]$ est compact.

Corollaire.

Sur un K -ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration. Voir la fin du chapitre. \square

Théorème 2.5.8.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $A \subset E$ alors
 A compact $\Leftrightarrow A$ fermé et borné

Démonstration. On démontre le cas où $K = \mathbf{R}$ avec N_∞ pour se ramener à $[-M, M]$ puis on en déduit le cas où $K = \mathbf{C}$ \square

Théorème 2.5.9.

Soit E un espace vectoriel normé quelconque si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel avec $\dim F < \infty$ alors F est fermé

Démonstration. On montre la stabilité par passage à la limite en considérant M un majorant des x_n et le compact $Bf(0, M)$ \square

Théorème 2.5.10.

Soit E, F des espaces vectoriels normés avec E de dimension finie, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors u est continue.

Démonstration. Soit $e = (e_1, \dots, e_p)$ base de E , on choisit $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq p} |x_k|$ où $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$. Soit $x \in E$, $\|u(x)\| = \left\| \sum_{k=1}^p x_k u(e_k) \right\| \leq \sum_{k=1}^p |x_k| \|u(e_k)\|$
 Posons alors $C = \sum_{k=1}^p \|u(e_k)\|$ alors $\|u(x)\| \leq C\|x\|$ et comme u est linéaire, $u \in \mathcal{C}^0(E, F)$ \square

Corollaire.

E est un K espace vectoriel de dimension $p \in \mathbf{N}^*$ et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on pose $e_i^* : E \rightarrow K$ $x \mapsto x_i$ alors e_i^* est linéaire donc \mathcal{C}^0

Théorème 2.5.11.

E_1, \dots, E_r, F des espaces vectoriels de dimensions finies et $\varphi : E_1 \times \dots \times E_r \rightarrow F$ r -linéaire alors $\varphi \in \mathcal{C}^0(E_1 \times \dots \times E_r, F)$

2.5.3 Applications aux séries en dimension finie

Théorème 2.5.12.

En dimension finie, la convergence absolue entraîne la convergence

Démonstration. Soit E un K espace vectoriel normé de dimension finie et $(u_n) \in E^{\mathbf{N}}$. On note $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $a_n = \|u_n\|$. On suppose alors que $\sum a_n$ converge en on note $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- $\forall n \in \mathbf{N}$, $\|U_n\| \leq \sum_{k=0}^n a_k \leq \alpha$ donc $U_n \in Bf(0, \alpha)$ compact
- (U_n) admet au plus 1 valeur d'adhérence car $\forall (n, p) \in \mathbf{N}^2$,
 $\|U_p - U_n\| \leq |A_p - A_n|$ donc $\|U_{\varphi(n)} - U_{\psi(n)}\| \leq |A_{\varphi(n)} - A_{\psi(n)}| \xrightarrow{n} 0$ \square

Séries de matrices Soit $E = \mathcal{M}_p(K)$ muni d'une *norme d'algèbre* (tq $\forall(A, B) \in E^2, \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$)

- Si $A \in E$ alors $\sum \frac{1}{n!} A^n$ converge et on pose $\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$
 - Si $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$ alors $\sum A^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$
-

2.6 Connexité par arcs

Chemin Pour $A \subset E$,

- Soit $x, y \in A$ on appelle *chemin* (ou chemin continu) de x à y dans A toute application $\gamma \in C^0([u, v], A)$ où $u < v$ réels tels que $\gamma(u) = x$ et $\gamma(v) = y$.
 - On définit une relation binaire \mathcal{R} sur A par $\forall(x, y) \in A^2 : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$ il existe un chemin de x à y .
-

Lemme 2.6.1.

\mathcal{R} est une relation d'équivalence sur A

Composantes connexes On appelle *composante connexes par arcs* les classes d'équivalences dans A par \mathcal{R} .

Rappel. $\forall x \in A, Cl\{x\} = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$

Connexité par arcs A est dite *connexe par arcs* si $\forall(x, y) \in A^2, x\mathcal{R}y$
 A est connexe par arcs si pour tout $x, y \in A$ il existe un chemin de x à y dans A .

Lemme 2.6.2.

A convexe $\Rightarrow A$ connexe par arcs

Partie étoilée $A \subset E$ est dite *étoilée* s'il existe $\alpha \in A$ tel que $\forall b \in A, [\alpha, b] \subset A$

Lemme 2.6.3.

A étoilée $\Rightarrow A$ connexe par arcs

Cas de \mathbb{R} : $\forall A \subset \mathbb{R}$, A convexe $\Leftrightarrow A$ intervalle

Théorème 2.6.4.

Dans \mathbb{R} , les parties connexes par arcs sont exactement les intervalles.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Soient $a, b \in A$ avec $a \leq b$ et $c \in [a, b]$ alors par TVI $\exists \theta \in [0, 1]$ et $\gamma \in \mathcal{C}^0([0, 1], A)$ tels que $c = \gamma(\theta)$ donc $c \in A$. \square

Théorème 2.6.5.

L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs
Autrement dit soit $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$ avec F un espace vectoriel normé
alors A connexe par arcs $\Rightarrow f(A)$ connexe par arcs

Démonstration. Soit $x, y \in f(A)$ avec $x' \in A$ tel que $x = f(x')$ $y' \in A$ tel que $y = f(y')$ on pose $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow f(A)$
 alors $\tilde{\gamma}$ est \mathcal{C}^0 et $\tilde{\gamma}(0) = x$ et $\tilde{\gamma}(1) = y$ donc par définition $f(A)$ est connexe par arcs. \square

★ ★ ★

Chapitre 3

Dérivation et intégration

Cadre : Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction à valeur dans E un K espace vectoriel de dimension finie et I un intervalle réel non trivial (i.r.n.t.)

3.1 Dérivée

Définition Soit $a \in I$, f est *dérivable* en a s'il existe $\ell \in E$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow{x \rightarrow a; x \leq a} \ell$. On pose alors

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a; x \leq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Note. On note $\mathcal{T}_f(x, a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ le "taux d'accroissement"

Rq : $\mathcal{T}_f(x, a) = \mathcal{T}_f(a, x)$

Lemme 3.1.1.

Soit $a \in I$, (f dérivable au point a) \Rightarrow (f continue au point a)

Fonction dérivable $f : I \rightarrow E$ est dite *dérivable* (sur I) si $\forall a \in I$, f est dérivable au point a

Dans ce cas on pose $f' : \begin{matrix} I \rightarrow E \\ a \mapsto f'(a) \end{matrix}$ la *dérivée* de f .

Fonction continuellement dérivable $f : I \rightarrow E$ est dite *continuellement dérivable* ou de *classe* \mathcal{C}^1 si f est dérivable et $f' \in \mathcal{C}^0(I, E)$.
On note $\mathcal{C}^1(I, E)$ l'ensemble de ces fonctions.

Lemme 3.1.2.

Soient deux fonctions $f, g : I \rightarrow E$, $\lambda \in K$, $a \in I$. Si f et g sont dérivables au point a alors

- (1) $\lambda f + g$ est dérivable au point a
- (2) $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$

Lemme 3.1.3.

On considère la composition $I \xrightarrow{f} E \xrightarrow{u} F$ et $a \in I$ avec E et F des espaces vectoriels normés de dimensions finies. On suppose $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et f dérivable au point a alors

- (1) $u \circ f$ est dérivable au point a
- (2) $(u \circ f)'(a) = u(f'(a))$

Lemme 3.1.4.

Soit $a \in I$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de E . Notons $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x) \varepsilon_k$. On a alors
 f est dérivable en $a \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k$ est dérivable en a

Dans ce cas $f'(a) = \sum_{k=1}^p f'_k(a) \varepsilon_k$

Lemme

$\mathcal{C}^1(I, E)$ est un K espace vectoriel comme sous-espace vectoriel de E^I

Deri-

Théorème

Soit $\Phi : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ p -linéaire avec E_1, \dots, E_p de dimensions finies et $a \in I$. Soit $f_1 : I \rightarrow E_1, \dots, f_p : I \rightarrow E_p$ dérivables au point a

On pose $g : I \rightarrow F$
 $g : x \mapsto \Phi(f_1(x), \dots, f_p(x))$ alors

- (1) g est dérivable au point a
- (2) $g'(a) = \Phi(f'_1(a), \dots, f'_p(a))$

Démonstration. Cas $p = 2$ scalaire : Soit $x \in I \setminus \{a\}$

$$\mathcal{T}_g(x, a) = \frac{1}{x-a} [B(f_1(x), f_2(x)) - B(f_1(a), f_2(a))] = B(\mathcal{T}_{f_1}(x, a), f_2(x)) + B(f_1(a), \mathcal{T}_{f_2}(x, a))$$

Puis comme B est bilinéaire, B est \mathcal{C}^0 donc $\mathcal{T}_g(x, a) \xrightarrow{x \rightarrow a; x \neq a} B(f'_1(a), f_2(a)) + B(f_1(a), f'_2(a))$

d'où g est dérivable au point a

On a ensuite le résultat pour une application p -linéaire par récurrence puis dans le cas vectoriel en décomposant selon toutes les bases. \square

DerivCompoScal \xrightarrow{u}

Théorème(rappel)

$J \xrightarrow{v} K$, I, J i.r.n.t.

$a \in I$, $b = u(a) \in J$ Si u dérivable au point a et v dérivable au point b

alors ⁽¹⁾ $v \circ u$ est dérivable au point a

⁽²⁾ $(v \circ u)'(a) = v'(u(a)) \times u'(a)$

Composition vers un espace vectoriel de dimension finie

DerivCompoI $\xrightarrow{\varphi}$

Corollaire

$J \xrightarrow{f} K$, I, J i.r.n.t., E un K espace vectoriel de dimension finie

$a \in I$, $b = \varphi(a) \in J$ Si φ dérivable au point a et f dérivable au point b

alors ⁽¹⁾ $f \circ \varphi$ est dérivable au point a

⁽²⁾ $(f \circ \varphi)'(a) = f'(\varphi(a)) \times \varphi'(a)$

3.2 Dérivées successives

- On pose $f^{(0)} = f$
- Si f' est dérivable sur I on pose $f^{(1)} = f'$
- Pour $k \in \mathbb{N}$, si $f^{(k)}$ est bien définie et dérivable sur I on pose $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$

Classe \mathcal{C}^k Soit $k \in \mathbb{N}$, f est dite k fois dérivable si $f^{(k)}$ existe.

Dans ce cas f est dite de classe \mathcal{C}^k si $\begin{cases} f^{(k)} \text{ existe} \\ f^{(k)} \in \mathcal{C}^0(I, E) \end{cases}$

Classe \mathcal{C}^∞ f est dite de classe \mathcal{C}^∞ si $\forall k \in \mathbb{N}$ on a f est de classe \mathcal{C}^k

Lemme
3-16 Soit $f : I \rightarrow E$ alors $f \in \mathcal{C}^\infty \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, f est k fois dérivable

Leib-

Théorème : Formule de Leibniz

Soit $f, g : I \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^n

alors fg est de classe \mathcal{C}^n et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Démonstration. Rappel : voir cours de sup □

Plus généralement : Soit $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ bilinéaire avec E_1, E_2, F de dimensions finies

Soit $(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, E_1) \times \mathcal{C}^n(I, E_2)$ alors la formule à l'ordre n avec B reste valable.

CoordCk-

Lemme

Soit $f : I \rightarrow E$ et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E
 Soit $f(x) = f_1(x)e_1 + \dots + f_n(x)e_n$, $\forall x \in I$
 alors $f \in \mathcal{C}^k(I, E) \Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_j \in \mathcal{C}^k(I, E)$

| Com-
 Lemme

poCk Soit $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} F$, I, J i.r.n.t.
 Si φ et f sont de classe \mathcal{C}^k alors $\varphi \circ f \in \mathcal{C}^k(I, F)$

3.3 Fonctions convexes

Barycentre (HP) Soit E un espace vectoriel et $x_1, \dots, x_p \in E$. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^p \alpha_k \leq 0$. On note $S = \sum_{k=1}^p \alpha_k$. On appelle *barycentre du système* $((x_1, \alpha_1), \dots, (x_p, \alpha_p))$ le point $\sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{S} x_k$. On parle d'*isobarycentre* si $\alpha_1 = \dots = \alpha_p$.

NB : On peut se ramener à $\sum_{k=1}^p \alpha_k = 1$ en posant $\alpha'_k = \frac{\alpha_k}{S}$.

Théorème

Tout ensemble convexe est stable par barycentration à coefficients positifs

Démonstration. Soit $X \subset E$ convexe. On démontre la propriété par récurrence avec $\mathcal{A}(n)$ le prédicat correspondant à la propriété pour n vecteurs de X .

On a $\mathcal{A}(1)$ et $\mathcal{A}(2)$. On suppose $\mathcal{A}(n)$ et on considère $n+1$ vecteurs de X et $n+1$ scalaires quelconques. On pose x le barycentre du système.

- Si $S = \sum_{k=1}^n \alpha_k \leq 0$ alors on pose y le barycentre du système composé des n premiers termes et on a $x = \text{Bar}((y, S), (x_{n+1}, \alpha_{n+1})) \in X$ d'après $\mathcal{A}(2)$
- Si $S = 0$ alors $\alpha_{n+1} = 1$ et $x = x_{n+1} \in X$

D'où $\mathcal{A}(n+1)$ □

Fonction convexe Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I i.r.n.t. alors f est dite convexe si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1] f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Interprétation géométrique : "L'arc reste sous la corde"

Épigraphe Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on appelle *épigraphe de f* l'ensemble

$$E(f) = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} ; f(x) \leq y\}$$

Théorème
 FConvEpiFConv Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ alors f est convexe $\Leftrightarrow E(f)$ est convexe

Démonstration. \Rightarrow Clair avec la définition de la convexité de f

\Leftarrow On suppose $E(f)$ convexe

Soit $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$ avec $x \leq y$

On pose $z = (1 - \lambda)x + \lambda y \in [x, y]$ et on a $(x, f(x)), (y, f(y)) \in E(f)$

donc $c = (z, (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) \in E(f)$ ainsi $f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$

Par définition, f est convexe. \square

Jensen-

Théorème : Inégalité de *Jensen*

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe

Soit $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration. On pose $a_i = (x_i, f(x_i)) \in E(f)$ donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \in E(f)$

car $E(f)$ est stable par barycentrage donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$ et $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ \square

Lem-

Lemme des pentes

Pentes Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application alors

f convexe $\Leftrightarrow (\forall (a, b, c) \in I^3 \text{ tels que } a < b < c, p(a, b) \leq p(a, c) \leq p(b, c))$

où $p(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

FConvF'Crois-

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I

alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I

Démonstration. \Rightarrow On suppose f convexe, soient $x, y \in I$ alors

$\forall t \in]x, y[, p(x, t) \leq p(x, y)$ puis en passant à la limite $f'(x) \leq p(x, y)$ d'où $f'(x) \leq f'(y)$ par symétrie

\Leftarrow On suppose f' croissant et $a < b < c \in I$ par le théorème des accroissements finis on a

$p(a, b) = f'(x)$ et $p(b, c) = f'(y)$ avec x et y dans les segments respectifs $]a, b[$ et $]b, c[$

On a $f'(x) \leq f'(y)$ d'où f est convexe par le Lemme des pentes (??) \square

FConvF''Pos-

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$ alors f est convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0$

Fonction concave Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I un i.r.n.t. alors f est dite *concave* si $-f$ est convexe.

Théorème
 Graphe > Tang Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et convexe alors

$$\forall x_0, x \in I, f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

"Le graphe de f est au dessus de ses tangentes"

Démonstration. Soit $x, x_0 \in I$

- Si $x = x_0$ on a le résultat.
- Si $x > x_0$ alors $p(x, x_0) = f'(\theta)$ où $\theta \in]x_0, x[$ donc $f'(\theta) \geq f'(x_0)$
- Si $x < x_0$ même raisonnement.

□

3.4 Intégration sur un segment

Cadre : $f : I \rightarrow E$ avec I intervalle réel non trivial et E de dimension finie.

3.4.1 Fonctions continues par morceaux

Subdivision Soit $a < b$ réels et $f : [a, b] \rightarrow E$

On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute suite finie $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \sigma$ telle que $a = \alpha_0 < \dots < \alpha_n = b$

Continuité par morceaux

Définition 1 Soit $a < b$ réels et $f : [a, b] \rightarrow E$

f est dite *continue par morceaux* si il existe une subdivision $\sigma = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ de $[a, b]$ telle que $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ la restriction $f|_{[\alpha_k, \alpha_{k+1}[}$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$

Définition 2 Soit I i.r.n.t. et $f : I \rightarrow E$

On dit que f est continue par morceaux (\mathcal{C}_{pm}^0) si sa restriction à tout segment de I est continue par morceaux

| Lemme
 $\text{CpmKev}\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E)$ et $\mathcal{C}_{pm}^0(I, E)$ sont des K espaces vectoriels

| Lemme Cpm-

CoordSoit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de E . On note $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)\varepsilon_k$
 alors f est continue par morceaux $\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, K)$

Intégrale Soit $a < b$ réels et $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E)$

On fixe $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de E et on note $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)\varepsilon_k$, $\forall x \in [a, b]$ On a alors

$$\int_a^b f = 1p \left(\int_a^b f_k \right) \varepsilon_k$$

3.4.2 Propriétés de l'intégrale

| Théorème IntLinI :

$\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E) \rightarrow E$ est linéaire
 $f \mapsto \int_a^b f$

Démonstration. On se ramène au cas scalaire en écrivant $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)\varepsilon_k$ □

| Lemme IntE-

galesSoit $a < b$ réels et $f, g \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E)$ tels que
 $\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq g(x)\}$ est fini alors $\int_a^b f = \int_a^b g$

Notations Soit I i.r.n.t. , $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, E)$ et $(a, b) \in I^2$

- Si $a < b$ on a $\int_a^b f(t)dt \in E$
- Si $a > b$ on pose $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$
- Si $a = b$ on pose $\int_a^b f(t)dt = 0$

Chas-

Théorème : Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, E)$ $(a, b, c) \in I^3$ alors

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$

Démonstration. Connu sur les coordonnées □

3.4.3 Inégalités

Ineg-

Théorème

Soit $a \leq b$, $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E)$ avec E un espace vectoriel normé de dimension finie

$$\text{Alors } \left\| \int_a^b f(x)dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|dx$$

Démonstration. $\forall u \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \left\| f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\|$, d'après les résultats sur les sommes de *Riemann* comme les inégalités larges passent à la limite on a $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$ □

PosA-

Théorème de positivité amélioré

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \in \mathcal{C}^0([a, b], E)$, $f \geq 0$ sur $[a, b]$ et $a < b$

$$\text{Alors } \int_a^b f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b], f(x) = 0$$

Démonstration. \Rightarrow Clair par linéarité.

\Leftarrow Comme f est \mathcal{C}^0 on sait que $\int_{[a,b]} f = 0 \Leftrightarrow \int_{]a,b[} f = 0$ puis on suppose

$\exists x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \leq 0$

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0) > 0$ on considère $\delta > 0$ tel que $a \leq x_0 - \delta < x_0 + \delta \leq b$ et

$\forall x \in [a, b], |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ du coup $\int_a^b f \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f \geq 2\delta\varepsilon > 0$

donc $\int_a^b f > 0$ □

PosAm-

Corollaire

Sous les même hypothèse on a

si f n'est pas identiquement nulle sur $[a, b]$ Alors $\int_a^b f(x)dx > 0$

3.5 Théorème fondamental

ThFon-

Théorème fondamental de l'analyse

dAnalyse Soit I i.r.n.t. , $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$ On pose $\forall x \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$
Alors $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$ et $x \in I \setminus \{x_0\}$

Posons $\Delta(x) = \frac{1}{x-x_0}(F(x)-F(x_0))$ alors si $x_0 < x$, $\|\Delta(x) - f(x_0)\| \leq \frac{1}{|x-x_0|} \int_{x_0}^x \|f(t) - f(x_0)\| dt$

Soit $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ alors

$$\|\Delta(x) - f(x_0)\| \leq \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x \varepsilon dt = \varepsilon$$

On a de même pour $x_0 > x$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$

c'est à dire $\delta(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0; x \leq x_0} f(x_0)$ donc F dérivable au point x_0 avec $F'(x_0) =$

$f(x_0)$

□

IntPrim-

Corollaire

Soit $h \in \mathcal{C}^1(I, E)$ et $(a, b) \in I^2$ Alors $\int_a^b h'(x)dx = [h]_a^b$

NB : Si $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, E)$, $a \in I$ alors $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ bien définie $\forall x \in I$ et $F \in \mathcal{C}^0(I, E)$

InegAc-

Théorème : Inégalité des accroissements finis

croissFini Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], E)$, $a < b$ et $M \in \mathbb{R}^+$ On suppose $\forall x \in [a, b]$, $\|f'(x)\| \leq M$

Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M|b - a|$

Démonstration. $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$ car f est \mathcal{C}^1 donc $\|f(b) - f(a)\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq M(b - a)$

□

IntAp-

Théorème

pLin Soit $a < b$ réels et $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E)$

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E, F de dimension finie. Alors $\int_a^b u \circ f = u \left(\int_a^b f \right)$

Démonstration. Cas 1 : soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], E)$ Posons $\forall [a, b]$

$$G(x) = \int_a^x u \circ f , \quad \Phi(x) = \int_a^x f \text{ et } \Delta(x) = G(x) - u(\Phi(x))$$

Δ est dérivable et $\forall x \in [a, b]$, $\Delta'(x) = (u \circ f)(x) - u(\Phi'(x)) = 0$ donc $\Delta(x) =$

cte = $\Delta(a) = 0$

Cas 2 : soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E)$ Soit $\sigma = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ une subdivision adaptée

$\forall i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $f|_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}[} = \varphi_i|_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}[}$ où $\varphi_i \in \mathcal{C}^0([\alpha_i, \alpha_{i+1}], E)$

alors $u \left(\int_a^b f \right) = 0p - 1 u \left(\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \varphi_i \right) = 0p - 1 \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} u \circ \varphi_i = 0p - 1 \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} u \circ f = \int_a^b u \circ f$ d'où le résultat.

□

3.6 Formules de Taylor

Form-

Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral

TaylorRestInt Soit $n \in \mathbf{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ et $(a, x) \in I^2$ avec I i.r.n.t. et $\dim E < \infty$

Alors $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathcal{R}_n(a, x)$

où $\mathcal{R}_n(a, x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) dt$

Démonstration. On montre $T(n)$ le théorème au rang n par récurrence :

- $T(0)$: Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$ alors $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$
- Soit $n \in \mathbf{N}$ On suppose $T(n)$ et on considère $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, E)$

d'après $T(n)$: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathcal{R}_n(a, x)$

avec $\mathcal{R}_n(a, x) = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)$

d'où $T(n+1)$ □

Ineg-

Corollaire : Inégalité de Taylor-Lagrange

TaylorLagr Sous les mêmes hypothèses on a

$$f(x) \leq \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [a, x]} \|f^{(n+1)}(x)\|$$

Négligeabilité Soit $f : I \rightarrow E$; $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$; $a \in \bar{I}$

On dit que $f(x) = o_{x \rightarrow a}(\varphi(x))$ s'il existe $r > 0$ et $\delta : V = I \cap]a-r, a+r[\setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$ tels que

- $\forall x \in V, \|f(x)\| = \delta(x) \times \varphi(x)$
- $\delta(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

Théorème d'intégration des DL

IntegrDL Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$; $x_0 \in I$; I i.r.n.t.

E un EVN de dimension finie. On suppose que f admet un DL en x_0

$$f(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + \cdots + (x - x_0)^n a_n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Soit g une primitive de f sur I . Alors

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)a_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2} a_1 + \cdots + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} a_n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{n+1})$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n \in E$

Démonstration. On note $r(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n (x - x_0)^k a_k$ ($\in \mathcal{C}^0(I, E)$)

$$g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} a_k + R(x) \text{ où } R(x) = \int_{x_0}^x r(t) dt$$

Soit $\varepsilon > 0$; soit $\delta > 0$ tel que $\forall t \in I, |t - x_0| < \delta \Rightarrow \|r(t)\| \leq \varepsilon |t - x_0|^n$

Soit $x \in I$, on suppose $|x - x_0| < \delta$ et $x \leq x_0$ alors $\|R(x)\| \leq \int_{x_0}^x \varepsilon (t - x_0)^n dt =$

$$\varepsilon \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} \leq \varepsilon (x - x_0)^{n+1}$$

Ainsi $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{\|R(x)\|}{|x - x_0|^{n+1}} \leq \varepsilon$ donc $R(x) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{n+1})$ \square

DLTY+

| Théorème : Développement limité de *Taylor-Young*

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$; $x_0 \in I$ alors

$$f(x) = o_n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Démonstration. On démontre $T(n)$ le théorème au rang n par récurrence :

- $T(0)$: $\forall f \in \mathcal{C}^0(I, E), f(x) = f(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)$
- : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $T(n)$ et on considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$

on a $f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} (f')^{(k)}(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$

On applique alors le théorème précédent à f' qui est bien continue sur I

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{n+1}) \quad \square$$

★ ★ ★

Table des matières

1	Suites et séries	3
1.1	Norme	3
1.1.1	Généralités	3
1.1.2	Normes euclidiennes	4
1.1.3	Exemple de normes	5
1.2	Suites	5
1.3	Normes équivalentes	7
1.3.1	Définition	7
1.3.2	Cas de espaces de dimension fini	7
1.4	Comparaisons asymptotiques	8
1.5	Séries dans un K espace vectoriel de dimension finie	9
1.6	Complément sur Les séries numériques	10
1.6.1	Règle de <i>Dalembert</i>	10
1.6.2	Séries alternées	11
1.6.3	Sommation des relations de comparaisons	11
1.7	Produit de deux séries absolument convergentes	12
1.8	Dualité série-suite	13
2	Limites et continuité	14
2.1	Ouverts et fermés	14
2.1.1	Intérieurs	14
2.1.2	Ouverts	14
2.1.3	Fermés	15
2.1.4	Adhérence	16
2.2	Limites	18
2.2.1	Cas général	18
2.2.2	Produit fini d'espaces vectoriels normés	19
2.3	Continuité	20
2.3.1	Cas général	20
2.3.2	Cas des applications linéaires	22
2.4	Image réciproque et continuité	24
2.5	Compacité	26
2.5.1	Compacité dans un espace vectoriel normé quelconque	26
2.5.2	Compacité en dimension finie	27
2.5.3	Applications aux séries en dimension finie	28
2.6	Connexité par arcs	29

3	Dérivation et intégration	31
3.1	Dérivée	31
3.2	Dérivées successives	33
3.3	Fonctions convexes	35
3.4	Intégration sur un segment	37
3.4.1	Fonctions continues par morceaux	37
3.4.2	Propriétés de l'intégrale	38
3.4.3	Inégalités	39
3.5	Théorème fondamental	40
3.6	Formules de <i>Taylor</i>	41