Lycée - Entrainement prépa

RECUEIL D'EXERCICES ET APPLICATIONS MATHÉMATIQUES

Émile Sauvat

2024

Table des matières

Première partie

Seconde

Deuxième partie

Première

Chapitre 1

Continuité des fonctions

1.1 Exercices généraux

1.1.1 Vitesse d'un cycliste

Un cycliste parcours 20km en 1h. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure durant laquelle il parcours 10km.

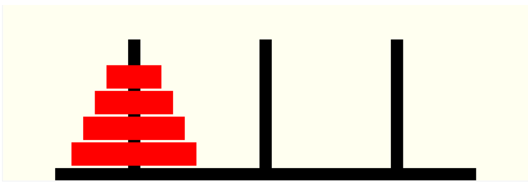
Chapitre 2

Suites

2.1 Exercices généraux

2.1.1 Tours de Hanoï

Les Tours de Hanoï est un jeu de palais composé de trois tiges verticales auquelles sont accrochés un certain nombre de palais de tailles différentes. Tout les palais sont au début empilés sur la tige de droite.



Le but du jeu est de déplacer tout les palais sur la tige de droite en sachant qu'on ne peut pas placer un palais sur un autre plus petit.

1/ En combien de coups minimum peut-on déplacer les 4 palais représentés ci-contre ? Qu'en est-il de 5 palais ?

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de coup minimum requis pour resoudre le jeu des Tours de Hanoï avec n palais. Calculer u_n.

Chapitre 3

Polynômes

3.1 Exercices généraux

3.1.1 Calcul de formes géométriques

1/ On considère un cube d'arrête a tel que si on ajoute $2cm$ à a, l'aire est augmentée de $2402cm^2$. Quelle est la longueure de a ?

2/ Calculer la longueur des arrêtes d'un rectangle dont le périmètre est $P = 34cm$ et l'aire A vaut $60cm^2$.

3.1.2 Intersection de courbes

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ et la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$.

Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$?

3.2 La vitesse des trains

Deux trains A et B partent en même temps d'une gare, l'un vers le nord, l'autre vers l'est. Le train A se déplace, en moyenne, à $25km/h$ de plus que le train B. Après $2h$, les deux trains sont éloignés de $250km$.

Quelle est la vitesse moyenne de chaque train ?

Troisième partie

Terminale

Chapitre 4

Suites

4.1 Fibonacci et le nombre d'or

On considère le réel

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

avec une infinité de 1 sous les racines. Ce réel est appelé "nombre d'or" dont la valeur approchée est $\varphi \simeq 1,618$

1. Exprimer φ^2 en fonction de φ.

2. En s'aidant d'un polynôme bien choisi, en déduire la valeur exacte de φ.

On considère la problème suivant, qui fut posé par Fibonacci en 1202 :

"Partant d'un couple venant de naitre, combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin d'un nombre donné de moi, sachant qu'un couple est fertile après 2 mois et que chaque couple fertile produit chaque mois un nouveau couple."

3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ le nombre de mois écoulés. Donner le nombre de couples de lapins pour $1 \leqslant n \leqslant 7$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ par $\left\{\begin{array}{l} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{array}\right.$

On construit alors une suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ par $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

a/ Calculer $u_3, u_4, u_5, u_6, u_7.u_8, u_9$ et u_{10}.

b/ Démontrer que (u_n) est strictement positive croissante.

c/ Démontrer que la suite (v_n) est strictement positive.

d/ Calculer les 10 premières valeurs de (v_n) et conjecturer sa limite.

e/ Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a

$$v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$$

f/ On admet que la suite (v_n) est convergente, calculer sa limite ℓ (on pourra remarquer que lorsque l'on approche de la limite on a $v_n \simeq v_{n+1} \simeq \ell$).

Chapitre 5

Probabilités

5.1 Génération de memes

Le streamer Alderiate, source intarissable de memes sur internet, joue à son jeu de cœur : League of Legend.

5.1.1 Probabilités conditionnelles

À chaque partie jouée, face à la bienveillance débordante qui émane du jeu, Alderiate risque de s'abandonner à une rage profonde. On estime qu'il reste cependant calme avec une probabilité de 0.92.

Dans un quart des cas où Alderiate rage, il finit "clipé" par sa communauté et devient un nouveau classique d'internet. Même quand il reste calme, le vocal avec ses mates est lui même à l'origine d'un meme avec une probabilité de 0.01.

On note alors les évènements R : "Alderiate rage" et C : "Il devient un classique d'internet".

1. Représenter la situation par un arbre de probabilités.

2. Quelle est la probabilité qu'il ne rage et qu'il crée un meme ?

3. a/ Calculer $P(R \cap C)$.

3. b/ Vérifier que la probabilité qu'un nouveau meme soit créé est de 0.0292.

3. c/ Les événements R et C sont-ils indépendants ?

4. Sachant que X s'extasie sur un nouveau meme d'Alderiate, quelle est la probabilité que ce dernier n'ait pas ragé ?

5. a/ Démontrer la formule de Bayes : pour A et B deux événements,

$$P_B(A)P(B) = P_A(B)P(A)$$

5. b/ En déduire $P_{\overline{C}}(\overline{R})$. Le résultat obtenu semble-t-il cohérent ?

5.1.2 Loi binomiale

Alderiate décide de lancer un marathon LoL, durant lequel il joue n games. On admet que la probabilité qu'il soit devenu un meme à l'issue d'un game est $p = 0.0292$.

On note X la variable aléatoire associée au nombre de memes créés au cours des n games. On suppose qu'il y a indépendance entre chaque partie : la rage ne s'accumule pas ; Alderiate "reset mental" après chaque game.

1. Donner la loi de X en justifiant soigneusement.

2. Que penser de l'hypothèse d'indépendance ?

Alderiate décide de jouer 12 games pendant le stream.

3. Quelle est la probabilité qu'il crée exactement un meme.

4. Calculer la probabilité qu'il crée au moins 2 memes durant le stream.

5. a/ En moyenne, combien de memes va-t-il générer pendant le stream.

5. b/ Ses amis lui lance un défie : à chaque fois qu'un clip de lui devient viral, il doit donner 130€à un viewer. À raison de trois streams de 12 games par semaines, combien d'argent dépense-t-il en moyenne par an ?

6. Calculer $\mathbb{V}(X)$ et interpréter le résultat.

7. La probabilité de se faire frapper deux fois par la foudre est de l'ordre de 10^{-15}. Alderiate affirme avec certitude que vous avez plus de chance de vous faire frapper par la foudre que de le voir créer 12 memes en un stream. A-t-il raison ?

On suppose désormais qu'Alderiate joue un nombre n inconnu de game.

8. Combien doit-il jouer de partie pour être sur à 99% de créer au moins un meme.

9. On estime qu'un stream a des répercussions irréversibles sur le mental d'Alderiate si on peut espérer voir au moins un nouveau meme par stream. Calculer à partir de combien de game un stream est dangereux. Ce résultat vous semble-t-il justifié ?

5.1.3 Inégalités célèbres

Pour i allant de 1 à $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_i la variable aléatoire qui à un échantillon de k stream LoL associe le nombre de clavier détruit lors du i-ème stream. On admet que les S_i sont indépendants et suivent tous la loi de X.

On par du principe qu'Alderiate joue 20 games par stream, on note alors la moyenne

$$M_k = \frac{S_1 + \cdots + S_k}{k}$$

1. a/ Vérifier que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\mathbb{E}(S_i) = 0.584$.

1. b/ En déduire l'espérance de M_k.

1. c/ Que vaut $\mathbb{V}(M_k)$?

2. a/ Soit X un variable aléatoire positive et a un réel strictement positif. Montrer que

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

On pourra considérer Y la variable aléatoire telle que :

$$\begin{cases} Y = a & si\ X \geqslant a \\ Y = 0 & si\ X < a \end{cases}$$

2. b/ En déduire alors une majoration de la probabilité que M_k soit supérieure ou égale à 6.

3. a/ Pour quelles valeurs de k a-t-on l'écart-type de M_k strictement inférieur à 0.2 ?

3. b/ Pour de telles valeurs de k, montrer que la probabilité que $M_k \leqslant 2$ est strictement supérieure à 0.95. Interprétez.

4. Démontrer que $\forall t > 0$, $\lim\limits_{k \to +\infty} P\big(|M_k - \mathbb{E}(M_k)| > t\big) = 0$. Quelle loi illustre ce résultat ? Appliqué à Alderiate, quelle fatalité cela implique ¿

Chapitre 6

Géométrie

6.1 Exercices guidés

6.1.1 Bicoin

On considère un plan $\mathcal{P}$ contenant un triangle ABC rectangle en A. Soit d la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$ passant par B. On considère un point D de d distinct de B.

1/ Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

On appelle *bicoin* un tétraèdre dont les 4 faces sont des triangles rectangles.

2/ Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est un bicoin.

3/a. Justifier que l'arête $[CD]$ est la plus longue de bicoin $ABCD$.

3/b. On note I le milieu de l'arête $[CD]$. Montrer que I est équidistant des 4 sommets du bicoin.

Chapitre 7

Dénombrement

7.1 Exercices généraux

7.1.1

Combien y a-t-il de série de 5 entiers impairs consécutifs dont la somme est inférieure à 100 ?

7.2 Taille d'un jeu (d'après Concours Général 1990)

Un jeu est composé de pièces en forme de tétraèdres d'arrête de taille 1, dont les faces sont peintes à l'aide d'une palette de n couleurs. Sachant qu'un tétraèdre peut avoir plusieurs faces de la même couleur et qu'aucune pièces ne sont identiques, combien y a-t-il, au maximum, de pièces dans le jeu ?

7.3 Colliers et perles

On dispose d'un très grand nombre de perles blanches, grises et noires. On les prélèves par *séquence* de trois perles : une blanche, une grise et une noire, dans cet ordre.

On note n le nombre de *séquences* enfilées sur un collier.

7.3.1 Cas général

1. Représenter le colliere dans le cas où $n = 8$.

2. Dans le cas $n = 4$, on obtient un carré reliant les 4 perles noires.

a/ Est-ce possible si $n = 6$? Et si $n = 8$?

En déduire quels sont les valeurs de n pour lesquelles on peut construire un carré reliant 4 perles noires.

b/ En fonction du nombre de séquences, combien de carrés aux sommets noirs peut-on obtenir ?

7.3.2 Cas $n = 4$

3/ Chaque séquence est désormais mélangée, c'est-à-dire qu'on mélange chaque ensemble de 3 perles BGN avant de les glisser sur le collier.

On peut, par exemple, obtenir la configuration qu'on peut coder par : BGN-GBN-NBG-BGN.

a/ Déterminer le nombre de colliers différents que l'on peut constituer.

b/ Parmi tous ces colliers, combien d'entre eux permettent de représenter un carré aux sommets noirs ?

Chapitre 8

Divisibilité et congruences

8.1 Exercices généraux

8.1.1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit : $\begin{cases} u_0 = 15 \quad \text{et} \quad u_1 = 57 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

Déterminer $k \in \mathbb{N}$ maximal tel que $3^k | u_{2017}$.

8.1.2

Quels sont les entiers naturels n tels que $2^n + 12^n + 2011^n$ soit un carré parfait ?

8.1.3

Déterminer (x, y, z) tel que $x^2 + y^2 = 3 \times 2016^z + 77$.

Chapitre 9

Nombres Complexes

9.1 Exercices d'application

9.1.1

Déterminer le conjugué de chaque nombre complexe et donner sa forme algébrique.

1. $z = (3+i)(-13-2i)$

2. $z = i(1-i)^3$

3. $z = \frac{2-3i}{8+5i}$

4. $z = \frac{2}{i+1} - \frac{3}{1-i}$

9.1.2

Mettre chaque nombre complexe sous sa forme algébrique.

1. $z = \frac{2+i}{3+i}$

2. $z = \frac{(2+i)(1-4i)}{i+1}$

9.1.3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $2z^2 - 6z + 5 = 0$

2. $z^2 + z + 1 = 0$

3. $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$

9.1.4

1. On considère un réel b. Développer $(z^2 + bz + 4)(z^2 - bz + 4)$.

2. En déduire les solutions complexes de l'équation $z^4 + 16 = 0$.