Mathematic Course

This document is a synthesis of the Mathematics course given by my teacher Jean-François Mallordy in MP* preparatory class in Blaise Pascal high school, Clermont-Ferrand in 2022-2023. It remains a complement to the Math Spé course and shall never be a replacement to it. Please study your course !

Paris 2024

Redaction by
Émile Sauvat
emile.sauvat@ens.psl.eu

Table des matières - Deuxième année

1 Suites et séries **4**
1.1 Norme 4
1.1.1 Généralités 4
1.1.2 Normes euclidiennes 5
1.1.3 Exemple de normes 5
1.2 Suites 5
1.3 Normes équivalentes 7
1.3.1 Définition 7
1.3.2 Cas de espaces de dimension finie 7
1.4 Notations o, $\mathcal{O}$, $\sim$ 8
1.5 Séries dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie 8
1.6 Complément sur les séries numériques 9
1.6.1 Règle de *Dalembert* 9
1.6.2 Séries alternées 10
1.6.3 Sommation des relations de comparaisons 10
1.7 Produit de séries 10
1.8 Dualité série-suite 11

2 Limites et continuité **12**
2.1 Ouverts et fermés 12
2.1.1 Intérieurs 12
2.1.2 Ouverts 12

3 Dérivation et intégration **13**

4 Suites de fonctions **14**

5 Intégrales généralisées **15**

6 Intégrales paramétrées **16**

7 Séries entières **17**

8 Algèbre **18**

9 Réduction des endomorphismes **19**

10 Espaces préhilbertiens réels **20**

11 Espaces probabilisés **21**

12 Variables aléatoires discrètes **22**

13 Équations différentielles linéaires **23**

14 Calcul différentiel **24**

Chapitre 1

Suites et séries

1.1 Norme

1.1.1 Généralités

Definition 1.1.1. Une *norme* sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :
— $\forall x \in E,\ N(x) = 0_\mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ x = 0_E$
— $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda.x) = |\lambda|\, N(x)$
— $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Definition 1.1.2. Une *distance* sur X est une application $d : X^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :
— $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$
— $\forall x, y \in E,\ d(x,y) \ = \ d(y,x)$
— $\forall x, y, z \in E,\ d(x,z) \ \leq \ d(x,y) + d(y,z)$

Lemme 1.1.1. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé,*
Alors $\forall N \geq 0$ *(i.e. $\forall x \in E,\ N(x) \geq 0$)*

Lemme 1.1.2. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Si $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = N(x-y)$ alors d est une distance sur E.*

Definition 1.1.3. Soient $a \in E,\ r \in \mathbb{R}$ on définit
— $B(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) < r\}$
— $B_f(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) \leq r\}$
Les *boules ouverte et fermée de centre a et de rayon r.*

Definition 1.1.4. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel quelconque
-> Une partie $C \subset E$ est dite *convexe* si $\forall (a,b) \in C^2,\ [a,b] \subset C$
-> Pour $(a,b) \in E^2$ on définit le *segment* :

$$[a,b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$$

Lemme 1.1.3. *Dans E un EVN quelconque toutes les boules sont convexes.*

1.1.2 Normes euclidiennes

Ici E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire[1]

$$\Phi : \begin{pmatrix} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x, y & \longmapsto & \langle x, y \rangle \end{pmatrix}$$

On a alors par théorème[2], $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme sur E.
On note alors

$$\boxed{\|x\|_2 = N_2(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}}$$

NB : L'inégalité triangulaire pour $\|.\|_2$ est dite inégalité de Minkovsky

Lemme 1.1.4. *Si $E = \mathbb{C}^n, z = (z_1, \dots, z_n)$, $N(z) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}$ est une norme.*

Lemme 1.1.5. *L'espace $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})), N)$ est un EVN avec*

$$N(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}$$

1.1.3 Exemple de normes

Norme N_∞ :
- Dans $E = \mathbb{K}^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_\infty(x) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$
- Dans $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ soit $f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Norme N_1 :
- Dans $E = \mathbb{K}^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- Dans $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ soit $f \in E$, $N_1(f) = \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$

Norme N_2 :
- Dans $E = \mathbb{K}^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$
- Dans $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ soit $f \in E$, $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2\, \mathrm{d}x}$

1.2 Suites

Definition 1.2.1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. On dit que u *converge vers* ℓ dans (E, d) et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0,\ d(u_n, \ell) < \varepsilon$$

1. Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive
2. Voir cours de sup.

Lemme : Unicité de la limite. *Soit (u_n) une suite de E telle que*

$$u_n \underset{n}{\to} \ell_1 \ \in E \text{ et } u_n \underset{n}{\to} \ell_2 \ \in E$$

Alors $\ell_1 = \ell_2$

Démonstration. Supposons $\ell_1 \neq \ell_2$.
Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}d(\ell_1, \ell_2) > 0$ On a alors $d(u_n, \ell_1) < \varepsilon$ et $d(u_n, \ell_2) < \varepsilon$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbf{N}$ -> *impossible* □

Lemme 1.2.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$, $\ell \in E$*
Alors $u_n \underset{n}{\to} \ell \ \Leftrightarrow \ \|u_n - \ell\| \underset{n}{\to} 0$

Lemme 1.2.2. *Soient u_n, $v_n \in E^{\mathbf{N}}$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ si on a*
$u_n \underset{n}{\to} \alpha$ et $v_n \underset{n}{\to} \beta$ alors $\lambda u_n + v_n \underset{n}{\to} \lambda\alpha + \beta$

Lemme : Inégalité triangulaire renversée. *Soit $x, y \in E$ alors*

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$$

Démonstration. $N(x) \leq N(x - y) + N(y) \Rightarrow \underbrace{N(x) - N(y)}_{t\in\mathbf{R}} \leq N(x - y)$

Puis on conclut avec la symétrie de la norme. □

Lemme 1.2.3. *Soit $u_n \in E^{\mathbf{N}}$, $\alpha \in \mathbf{K}$ on a $u_n \underset{n}{\to} \alpha \ \Rightarrow \ \|u_n\| \underset{n}{\to} \|\alpha\|$*

Attention ! La réciproque est fausse !

Definition 1.2.2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ est *bornée* si $\forall n$,
$\|u_n\| \leq M$ pour un certain $M \in \mathbf{R}$.

Lemme 1.2.4. *Toute suite convergente est bornée.*

Lemme 1.2.5. *Si $\lambda_n \underset{n}{\to} \mu \in \mathbf{K}$ et $u_n \underset{n}{\to} v \in E$ alors $\lambda_n u_n \underset{n}{\to} \mu v$*

Definition 1.2.3. Soit $u \in E^{\mathbf{N}}$ on appelle <u>suite extraite</u> (ou sous-suite) de u toute suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ où $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une extractrice (injection croissante)

Note. en fait $(v_n)_{n\geq 0} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0} \ \Leftrightarrow \ v = u \circ \varphi$

Definition 1.2.4. $\ell \in E$ est une valeur d'adhérence de u s'il existe une suite extraite de u qui converge vers ℓ. On notera $\mathcal{V}_u$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.

Lemme 1.2.6. *Soit $u \in E^{\mathbf{N}}$ si u converge vers $\ell \in \mathbf{K}$ alors toute suite extraite de u converge vers ℓ*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une extractrice et $(v_n)_{n\geq 0} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$
Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbf{N}$: $\forall n \geq n_0$, $d(u_n, \ell) < \varepsilon$ donc $\varphi(n) \geq n_0$ et ainsi $d\left(u_{\varphi(n)}, \ell\right) < \varepsilon$ et $v_n \underset{n}{\to} \ell$ □

Corollaire. *Toute suite admettant au moins 2 valeurs d'adhérence est divergente*

1.3 Normes équivalentes

1.3.1 Définition

Definition 1.3.1. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, N et N' deux normes sur E. N et N' sont dites équivalentes ($N \sim N'$) si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha N \leq N' \leq \beta N$

On peut aussi l'écrire $N' \leq \beta N$ et $N \leq \frac{1}{\alpha} N'$

Lemme 1.3.1. *Soit N, N' des normes équivalentes sur E, $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$ alors*
- *$u_n \underset{n}{\to} \ell$ dans (E, N) $\Leftrightarrow$ $u_n \underset{n}{\to} \ell$ dans (E, N')*
- *u est bornée dans $(E, N) \Leftrightarrow u$ est bornée dans (E, N')*

Lemme 1.3.2. *Sur $\mathbb{K}^n$, N_1, N_2 et N_∞ sont équivalentes et plus précisément*

$$N_\infty \leq N_1 \leq \sqrt{n} N_2 \leq n N_\infty$$

1.3.2 Cas de espaces de dimension finie

Rappel. Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il existe une famille d'éléments de E libre et génératrice, c'est alors une base de E.

Théorème 1.3.3. *Sur un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Note. Sera démontré ultérieurement.

Corollaire. *Dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, la notion de convergence ne dépend pas de la norme.*

Attention ! C'est faux en dimension quelconque !

Lemme 1.3.4. *Soit E de dimension finie, $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $(x_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in E$. On écrit $\begin{cases} x_n = x_{1,n} e_1 + \dots + x_{p,n} e_p \\ \alpha = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p \end{cases}$*
On a alors $x_n \underset{n}{\to} \alpha \ \Leftrightarrow \ \forall k \in [\![1, p]\!],\ x_{k,n} \underset{n}{\to} \alpha_k$

Théorème 1.3.5. *Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ et deux suites de matrices $(A_n) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $(B_n) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$ telles que $A_n \underset{n}{\to} A$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B_n \underset{n}{\to} B$ dans $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$. Alors $A_n B_n \underset{n}{\to} AB$*

Démonstration. Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, r]\!]$
$(A_n B_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} \underbrace{(A_n)_{i,k}}_{\to a_{i,k}} \underbrace{(B_n)_{k,j}}_{\to b_{k,j}} \underset{n}{\to} \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j} = (AB)_{i,j}$

ainsi $A_n B_n \underset{n}{\to} AB$ $\square$

1.4 Notations o, $\mathcal{O}$, $\sim$

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Definition 1.4.1. On dit que u_n est négligeable devant v_n quand $n \to +\infty$ noté $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(\delta_n)_{n\geq n_0}$ tel que

— $\forall n \geq n_0,\ u_n = \delta_n v_n$
— $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Definition 1.4.2. On dit que u_n est dominée par v_n quand $n \to +\infty$ noté $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(B_n)_{n\geq n_0}$ tel que

— $\forall n \geq n_0,\ u_n = B_n v_n$
— $(B_n)_{n\geq n_0}$ est bornée.

Definition 1.4.3. On dit que u_n est équivalent à v_n quand $n \to +\infty$ noté $u_n \sim v_n$ si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$

Note. $u_n \sim v_n \;\Leftrightarrow\; u_n = v_n + o(v_n)$

1.5 Séries dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie

— *On note par abus "dim $E < \infty$*
— *Le cas scalaire est traité en première année*

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$; pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Sommes partielles La suite (U_n) est dite suite des *sommes partielles* associée à u.

Definition 1.5.1. On dit que la *série de terme général u_n* converge si (U_n) converge.

Dans ce cas on pose $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} U_n \in E$

Lemme 1.5.1. ($\sum u_n$ *converge*) $\Rightarrow$ $(u_n \to 0)$

Attention ! La réciproque est fausse ! (ex : (H_n))

Definition 1.5.2. Lorsque $u_n \underset{n}{\not\to} 0$, la série $\sum u_n$ est dite *grossièrement divergente*, noté "$\sum u_n$ DVG". On a alors logiquement ($\sum u_n$ DVG $\Rightarrow \sum u_n$ DV)

Théorème : Reste d'une série convergente. *On suppose $\sum u_n$ converge et on note $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ la "limite de la somme". Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le "reste d'ordre n".*
$\forall n \in \mathbb{N}$, *$S = U_n + R_n$ et $R_n \to 0$*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ pour $m \geq n+1$, $\sum_{k=n+1}^{m} u_k = U_m - U_n \underset{m}{\to} S - U_n$ donc R_n existe avec $R_n = S - U_n$ d'où $S = U_n + R_n$ puis $R_n = S - U_n \to S - S = 0$ □

Lemme 1.5.2. *Soit (u_n), $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors*

— $\sum \lambda u_n + v_n$ *converge*

— $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n + v_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

Definition 1.5.3. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ on dit que $\sum u_n$ *converge absolument* si $\sum \|u_n\|$ converge.

Note. Vu $\dim E < \infty$, ceci ne dépend pas du choix de la norme

Théorème 1.5.3. *Dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de <u>dimension finie</u>, toute série absolument convergente est convergente " CVA ⇒ CV "*

Attention ! Faux dans un EVN quelconque !

Lemme 1.5.4. *Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé de dimension finie On supposons que $\sum u_n$ CVA. Alors $\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$*

1.6 Complément sur les séries numériques

Rappel. Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $\sum z^n$ CV ⇒ $|z| < 1$

— Lorsque $|z| < 1$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

— On définie $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

1.6.1 Règle de *Dalembert*

Théorème : Règle de *Dalembert*. *Soit $(u_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$*
On suppose l'existence de $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $|{}^{u_{u+1}}/{}_{u_n}| \to \ell$
<u>Alors</u> : 1) $\ell < 1 \Rightarrow \sum u_n$ *CVA*
2) $\ell > 1 \Rightarrow \sum u_n$ *DVG*

Démonstration.
1) On suppose $\ell < 1$ et on note $r_n = \left|\frac{u_{u+1}}{u_n}\right|$. On pose $\theta \in [\ell, 1]$ et $\varepsilon = \theta - \ell$ On a alors
$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_0, \ |r_n - \ell| < \varepsilon$ soit en particulier $r_n < \ell + \varepsilon = \theta$ Ainsi $\forall n \geq n_0, \ |u_{n+1}| < \theta |u_n|$
et $|u_n| \leq \theta^{n-n_0} |u_{n_0}|$ (REC) On a alors $\forall n \geq n_0, \ |u_n| \leq \underbrace{\theta^{-n_0} |u_{n_0}|}_{\text{cte}} \theta^n$ or $\sum \theta^n$ converge car $\theta \in]0, 1[$
donc par théorème de comparaison $\sum |u_n|$ converge.

2) On suppose $\ell > 1$ et on fixe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \theta < \ell$, on a alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_0, \ r_n > \theta \ (\ldots)$
on obtient $|u_n| \to +\infty$ donc $u_n \underset{n}{\not\to} 0$ donc $\sum u_n$ DVG □

1.6.2 Séries alternées

Definition 1.6.1. La série réelle $\sum u_n$ est dite alternée si $\forall n \in \mathbb{N}$,
$u_n = (-1)^n |u_n|$ ou $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$

Théorème : Critère spécial des série alternées. *Soit (u_n) une suite telle que*
- $\sum u_n$ *est alternée*
- $u_n \to 0$
- $(|u_n|)_{n\geq 0}$ *décroit*

alors $\sum u_n$ converge et on a de plus, $\forall n \in \mathbb{N}$
- $|R_n| \leq |u_{n+1}|$
- *R_n et u_{n+1} ont le même signe*
- *S est compris entre U_n et U_{n+1}*

1.6.3 Sommation des relations de comparaisons

Théorème 1.6.1. *Soit $(u_n),\ (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v_n \geq 0,\ \forall n \geq n_0$. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge. Soit les restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ alors*
- $u_n = o_{n\to+\infty}(v_n) \ \Rightarrow\ R_n = o_{n\to+\infty}(R'_n)$
- $u_n = \mathcal{O}_{n\to+\infty}(v_n) \ \Rightarrow\ R_n = \mathcal{O}_{n\to+\infty}(R'_n)$
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow\ R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$

Théorème 1.6.2. *Soit $(u_n),\ (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v_n \geq 0,\ \forall n \geq n_0$*
On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ diverge. Soit les sommes partielles $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$ alors
- $u_n = o_{n\to+\infty}(v_n) \ \Rightarrow\ U_n = o_{n\to+\infty}(V_n)$
- $u_n = \mathcal{O}_{n\to+\infty}(v_n) \ \Rightarrow\ U_n = \mathcal{O}_{n\to+\infty}(V_n)$
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow\ U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$

Théorème de *Cesàro*. *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*
- *Si $u_n \to \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \to \lambda$*
- *Si $u_n \to +\infty$ alors $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \to +\infty$*

Démonstration. 1) Supposons $u_n \to \lambda$ alors $u_n - \lambda = o(1)$, on pose ensuite $v_n = 1$ alors $\sum v_n$ diverge et d'après le théorème de sommation en cas divergent $\sum_{k=0}^{n} u_k - \lambda = o(\sum_{k=0}^{n} 1) \ \Rightarrow\ \frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{n} u_k) - \lambda \to 0$
2) Supposons $u_n \to +\infty$ et posons $a_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ Soit $A \in \mathbb{R}$ et $A' = A + 1$
Soit $n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0,\ u_n > A'$, puis pour $n \geq n_0$:
$a_n = \frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=0}^{n} u_k)$ donc $a_n > \frac{C}{n+1} + A'\frac{n+1-n_0}{n+1} = A' + \frac{C-n_0A'}{n+1}$
Soit $n_1 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq n_1,\ \left|\frac{C-A'n_0}{n+1}\right| < 1$ alors $\forall n \geq n_1,\ a_n > A$ d'où $a_n \to +\infty$ □

1.7 Produit de séries

Definition 1.7.1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries quelconques (convergentes ou non) de nombres complexes.

On pose $\forall n \in \mathbf{N}$: $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ (somme finie !)
La série $\sum w_n$ est appelée *produit de Cauchy* de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Attention !
Lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent on a pas forcément

$$\left(\sum u_n\right) \times \left(\sum v_n\right) = \sum w_n$$

Théorème 1.7.1. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors :*
1) $\sum w_n$ CVA *2) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$*

Signalé :

Théorème de *Mertens*. *Si $\sum u_n$ CVA et $\sum v_n$ converge alors $\sum w_n$ converge et $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$*

1.8 Dualité série-suite

Toute suite peut-être envisagée comme une série

Ici (E, N) est un EVN de dimension finie.
On définit les suites (a_n) et (b_n) par $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $b_0 = a_0$ et $b_n = a_n - a_{n-1}$. On a alors pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = b_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_0 + a_n - a_0 = a_n \text{ soit } a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

On sait ensuite que (a_n) converge si et seulement si $\sum b_k$ converge donc

$$\boxed{(a_n) \text{ converge } \Leftrightarrow \sum a_n - a_{n-1} \text{ converge}}$$

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 2

Limites et continuité

Cadre : (E, N) est un EVN quelconque et $A \subset E$

2.1 Ouverts et fermés

2.1.1 Intérieurs

Soit $A \subset E$ et $\alpha \in E$

Definition 2.1.1. Soit un point $\alpha \in A$ on dit que α est un point intérieur à A si $B(\alpha, r) \subset A$ pour un certain réel $r > 0$.

Definition 2.1.2. On appelle intérieur de A l'ensemble des points intérieurs de A

$$\mathring{A} = \{x \in E \mid x \text{ est intérieur à } A\}$$

Lemme 2.1.1. *Soit $A \subset E$ alors $\mathring{A} \subset E$*

Lemme 2.1.2. *Le passage à l'intérieur est une opération croissante pour l'inclusion. (i.e. $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$)*

2.1.2 Ouverts

Definition 2.1.3. Dans (E, N) on appelle *ouvert* (ou *partie ouverte*) **toute** réunion de boules ouvertes.

Théorème : Caractérisation des ouverts. *Soit $U \subset E$ alors*

Chapitre 3

Dérivation et intégration

Chapitre 4

Suites de fonctions

Chapitre 5

Intégrales généralisées

Chapitre 6

Intégrales paramétrées

Chapitre 7

Séries entières

Chapitre 8

Algèbre

Chapitre 9

Réduction des endomorphismes

Chapitre 10

Espaces préhilbertiens réels

Chapitre 11

Espaces probabilisés

Chapitre 12

Variables aléatoires discrètes

Chapitre 13

Équations différentielles linéaires

Chapitre 14

Calcul différentiel