Cours de Maths Spé

Ce document est une synthèse du cours de mathématiques dispensé par M. Jean-François MALLORDY en classe préparatoire au lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand en 2022-2023. Il s'agit d'un complément au cours de Maths Spé et ne saurait en aucun cas y être un quelconque remplacement !

Paris, 2024

Mis en forme par
Émile Sauvat
`emile.sauvat@ens.psl.eu`

Chapitres

Chapitre 1

Suites et séries

On considèrera comme acquis en sup les cas réel et complexe : Notament :
-> Théorème des gendarmes *-> Théorème de la limite monotone*

Contents

1.1 Norme

1.1.1 Généralités

Norme Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbf{R}$ vérifiant :

1) $\forall x \in E,\ N(x) = 0_{\mathbf{R}} \ \Leftrightarrow\ x = 0_E$
2) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ N(\lambda.x) = |\lambda|\, N(x)$
3) $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Lemme 1.1.1.

Soit (E, N) *un espace vectoriel normé,*
On a $N \geq 0$ *(i.e.* $\forall x \in E,\ N(x-y) \geq 0$*)*

Distance Une distance sur X est une application $d : X^2 \to \mathbf{R}$ vérifiant :
1) $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = 0 \iff x = y$
2) $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = d(y,x)$
3) $\forall x, y, z \in E,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Lemme 1.1.2.

Soit (E, N) *un espace vectoriel normé.*
Si $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,) = N(-y)$ *alors* d *est une distance sur E.*

Boule ouverte et fermée Soient $a \in E,\ r \in \mathbf{R}$ On pose

$$B(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) < r\} \qquad B_f(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) \leq r\}$$

Les boules respectivement ouverte et fermée de centre a et de rayon r.

Segment et ensemble convexe Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel quelconque

-> Pour $(a,b) \in E^2$ on défini le <u>segment</u> : $[a,b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$
-> $\mathscr{C} \subset E$ est dit <u>convexe</u> si $\forall (a,b) \in \mathscr{C}^2,\ [a,b] \subset \mathscr{C}$

Lemme 1.1.3.

Dans E *un EVN quelconque les boules sont convexes*

1.1.2 Normes euclidiennes

Ici E est un $\mathbf{R}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire[1]

$$\Phi : \begin{pmatrix} E^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x \rangle\, y \end{pmatrix}$$

On a alors par théorème [2] , $x \mapsto \sqrt{\langle x \rangle\, x}$ est une norme sur E. On notera

$$\boxed{\|x\|_2 = N_2(x) = \sqrt{\langle x \rangle\, x}}$$

Note. L'inégalité triangulaire pour $\|.\|_2$ est dite inégalité de MINKOVSKY

1. Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive
2. Voir cours de sup

Lemme 1.1.4.

Si $E = \mathbf{C}^n,\ z = (z_1, \dots, z_n)\ ,\ N(z) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}$ *est une norme*

Lemme 1.1.5.

$E = \mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{C})$ *Soit* $f \in E$ *on pose*
$N(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}$ *alors* N *est une norme sur* E

1.1.3 Exemple de normes

Norme N_∞ :
Dans $E = K^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n),\ N_\infty(x) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$
Dans $E = \mathscr{C}^0([a,b], K)$ soit $f \in E,\ N_\infty(f) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Norme N_1 : Dans $E = K^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n),\ N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$
Dans $E = \mathscr{C}^0([a,b], K)$ soit $f \in E,\ N_1(f) = \int_a^b |f(x)| \, dx$

Norme N_2 : Dans $E = K^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n),\ N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n {x_i}^2}$
Dans $E = \mathscr{C}^0([a,b], K)$ soit $f \in E,\ N_2(f) = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 \, dx}$

1.2 Suites

Suite convergente Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ et $l \in E$. On dit que u converge vers l et on note

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \text{ si } \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ :\ \forall n \geq n_0,\ d(u_n, l) < \varepsilon$$

Lemme 1 : Unicité de la limite.

Si $\begin{array}{l} u_n \underset{n}{\to} l_1 \ \in E \\ u_n \underset{n}{\to} l_2 \ \in E \end{array}$ *Alors* $l_1 = l_2$

Démonstration. Par l'absurde, on suppose $l_1 \neq l_2$.
Soit $\varepsilon = \frac{1}{2} d(l_1, l_2) > 0$ On a alors $\begin{array}{l} n_1 \in \mathbf{N}\ :\ \forall n \geq n_1,\ d(u_n, l_1) < \varepsilon \\ n_2 \in \mathbf{N}\ :\ \forall n \geq n_2,\ d(u_n, l_1) < \varepsilon \end{array}$ et soit $p = max(n_1, n_2)$

$d(l_1, l_2) \leq d(l_1, u_p) + d(l_2, u_p) < 2\varepsilon = d(l_1, l_2)$ IMPOSSIBLE □

Lemme 1.2.1.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}},\ l \in E$ *Alors* $u_n \underset{n}{\to} l \ \Leftrightarrow\ \|u_n - l\| \underset{n}{\to} 0$

Démonstration. Notons $v_n = \|u_n - l\|$ et $\lambda = 0$ Alors $d(u_n, l) = \|u_n - l\| = v_n = \|v_n - \lambda\| = d(v_n, \lambda)$
or $u_n \underset{n}{\to} l$ ssi : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ :\ \forall n \geq n_0,\ d(u_n, l) < \varepsilon \ \Rightarrow\ d(v_n, \lambda) < \varepsilon \ \Rightarrow\ v_n \underset{n}{\to} 0$ □

Lemme 1.2.2.

Soient $u_n,\ v_n \in E^{\mathbf{N}}$ *et* $\lambda \in K$ *si on a* $u_n \underset{n}{\to} \alpha$ *et* $v_n \underset{n}{\to} \beta$
Alors $\lambda u_n + v_n \underset{n}{\to} \lambda\alpha + \beta$

Lemme : Inégalité triangulaire renversée.

Soit $x, y \in E$ *alors* $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$

Démonstration. $N(x) = N((x-y)+y) \leq N(x-y) + N(y) \Rightarrow \underbrace{N(x) - N(y)}_{t \in \mathbf{R}} \leq N(x-y)$
Symétriquement $\underbrace{N(y) - N(x)}_{-t} \leq N(y - x) = N(x - y)$. On a alors $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ □

Lemme 1.2.3.

Soit $u_n \in E^{\mathbf{N}},\ \alpha \in K$ *on a* $u_n \underset{n}{\to} \alpha \ \Rightarrow\ \|u_n\| \underset{n}{\to} \|\alpha\|$

Attention ! La réciproque est fausse !

Suite bornée Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ on dit que (u_n) est bornée si $\exists M \in \mathbf{R} \ :\ \forall n \in \mathbf{N},\ \|u_n\| \leq M$.

Lemme 1.2.4.

Toute suite $(u_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbf{N}}$ *convergente est bornée*

Lemme 1.2.5.

On suppose $\begin{cases} \lambda_n \underset{n}{\to} \mu \in K \\ u_n \underset{n}{\to} \nu \in E \end{cases}$ *Alors* $\lambda_n u_n \underset{n}{\to} \mu\nu$

Suite extraite Soit $u \in E^{\mathbf{N}}$ on appelle <u>suite extraite</u> (ou sous-suite) de u toute suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ où $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une extractrice (injection croissante)
NB : en fait $(v_n)_{n\geq 0} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0} \ \Leftrightarrow\ v = u \circ \varphi$

Valeur d'adhérence $l \in E$ est une valeur d'adhérence de u s'il existe une suite extraite de u qui converge vers l. On notera $\mathscr{V}_u$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.

Théorème 1.2.6.

Soit $u \in E^{\mathbf{N}}$ *si* u
converge vers $l \in K$ *alors toute suite extraite de* u *converge vers* l

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une extractrice et $(v_n)_{n\geq 0} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$
Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbf{N}\ :\ \forall n \geq n_0,\ d(u_n, l) < \varepsilon$ donc $\varphi(n) \geq n_0$ et ainsi $d\left(u_{\varphi(n)}, l\right) < \varepsilon$ et $v_n \underset{n}{\to} l$ □

Corollaire.

Toute suite admettant au moins 2 valeurs d'adhérence est divergente

1.3 Normes équivalentes

1.3.1 Définition

Soit E un K espace vectoriel, N et N' deux normes sur E. N et N' sont dites équivalentes ($N \sim N'$) si $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}\ :\ \alpha N \leq N' \leq \beta N$

Note. On peut aussi l'écrire $N' \leq \beta N$ et $N \leq \frac{1}{\alpha} N'$

Lemme 1.3.1.

Soit N, N' *des normes équivalentes sur* E, $u \in E^{\mathbf{N}},\ l \in E$ *alors*
1) $u_n \underset{n}{\to} l$ *dans* $(E, N) \Leftrightarrow u_n \underset{n}{\to} l$ *dans* (E, N')
2) u *est bornée dans* $(E, N) \Leftrightarrow u$ *est bornée dans* (E, N')

Lemme 1.3.2.

Sur K^n, N_1, N_2 *et* N_∞ *sont équivalentes et plus précisément*
$$N_\infty \leq N_1 \leq \sqrt{n} N_2 \leq n N_\infty$$

1.3.2 Cas de espaces de dimension fini

Rappel. Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il existe une famille d'éléments de E libre et génératrice, c'est alors une base de E.

Théorème 1.3.3.

Sur un K*-ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Sera démontré ultérieurement.

Corollaire.

Dans un K *espace vectoriel de dimension finie, la notion de convergence ne dépend pas de la norme.*

ATTENTION ! C'est faux en dimension quelconque !

Lemme 1.3.4.

Soit E *de dimension finie et* $e = (e_1, \ldots, e_p)$ *une base de* E.
Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbf{N}}$ *et* $\alpha \in E$. *On écrit* $\begin{cases} x_n = x_{1,n} e_1 + \cdots + x_{p,n} e_p \\ \alpha = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p \end{cases}$
On a alors $x_n \underset{n}{\to} \alpha \ \Leftrightarrow\ \forall k \in [\![1, p]\!],\ x_{k,n} \underset{n}{\to} \alpha_k$

Théorème 1.3.5.

Soient $p, q, r \in \mathbf{N}^*$ $\begin{cases} A_n \underset{n}{\to} A & \text{dans } \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R}) \\ B_n \underset{n}{\to} B & \text{dans } \mathscr{M}_{q,r}(\mathbf{R}) \end{cases}$ *Alors* $A_n B_n \underset{n}{\to} AB$

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$ $(A_n B_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} \underbrace{(A_n)_{i,k}}_{\to a_{i,k}} \underbrace{(B_n)_{k,j}}_{\to b_{k,j}} \underset{n}{\to} \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j} =$ $(AB)_{i,j}$
soit $A_n B_n \underset{n}{\to} AB$ □

1.4 Notations $\circ$, $\bigcirc$, $\sim$

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$

Négligeabilité On dit que u_n est négligeable devant v_n quand $n \to +\infty$ noté $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \circ(v_n)$

s'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ et $(\delta_n)_{n \geq n_0}$ tel que $\begin{cases} 1)\ \forall n \geq n_0,\ u_n = \delta_n v_n \\ 2)\ \delta_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

Domination On dit que u_n est dominée par v_n quand $n \to +\infty$ noté $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \bigcirc(v_n)$

s'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ et $(B_n)_{n \geq n_0}$ tel que $\begin{cases} 1)\ \forall n \geq n_0,\ u_n = B_n v_n \\ 2)\ (B_n)_{n \geq n_0} \text{ est bornée} \end{cases}$

Équivalence On dit que u_n est équivalent à v_n quand $n \to +\infty$ noté $u_n \sim v_n$ si :

$$u_n - v_n \underset{n \to +\infty}{=} \circ(v_n)$$

Note. $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + \circ(v_n)$

1.5 Séries dans un K espace vectoriel de dimension finie

Note. On note par abus " $\dim E < \infty$ "

Le cas scalaire est abordé en MPSI.

Soit $u = (u_n) \in E^{\mathbf{N}}$; pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Sommes partielles La suite (U_n) est dite suite des sommes partielles associée à u.

Série convergente On dit que la série de terme général u_n converge si (U_n) converge.

Dans ce cas on pose $\sum_0^{+\infty} = \lim_{n\to+\infty} U_n \in E$

Lemme 1.5.1.

$(\sum u_n \text{converge}) \Rightarrow \left(u_n \underset{n}{\to} 0\right)$

ATTENTION ! La réciproque est fausse ! (ex : (H_n))

Divergence grossière Lorsque $u_n \underset{n}{\not\to} 0$, la série $\sum u_n$ est dite grossièrement divergente "$\sum u_n$ DVG" Ainsi : $(\sum u_n \text{DVG} \Rightarrow \sum u_n \text{DV})$

Théorème : Reste d'une série convergente.

On suppose $\sum u_n$ *converge et on note* $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *"limite de la somme".*
Pour $n \in \mathbf{N}$ *on pose* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *"reste d'ordre* n*".* $\forall n \in \mathbf{N}, S = U_n + R_n$; $R_n \to 0$

Démonstration. bien-fondé ?
Soit $n \in \mathbf{N}$ pour $m \geq n+1$, $\sum_{k=n+1}^{m} u_k = U_m - U_n \underset{m}{\to} S - U_n$ donc R_n existe avec $R_n = S - U_n$
d'où $S = U_n + R_n$ puis $R_n = S - U_n \to S - S = 0$ □

Lemme 1.5.2.

Soit (u_n), (v_n) $\in E^{\mathbf{N}}$ *et* $\lambda \in K$
On suppose que $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent alors :*
-> $\sum \lambda u_n + v_n$ *converge*
-> $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n + v_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

Convergence absolue Soit (u_n) $\in E^{\mathbf{N}}$ on dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum \|u_n\|$ converge.

Note. Vu $\dim E < \infty$, ceci ne dépend pas du choix de la norme

Théorème 1.5.3.

Dans un K espace vectoriel de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente " CVA $\Rightarrow$ CV "

Sera démontré ultérieurement. [1]

ATTENTION ! Faux dans un EVN quelconque !

Lemme 1.5.4.

Soit (E, N) un K espace vectoriel normé de dimension finie
On supposons que $\sum u_n$ CVA. Alors $\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$

1.6 Complément sur les séries numériques

Rappel. Soit $z \in \mathbf{C}$ alors $\sum z^n$ CV $\Rightarrow |z| < 1$

-> Lorsque $|z| < 1$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

-> On définie $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

1.6.1 Règle de DALEMBERT

Théorème : Règle de DALEMBERT.

Soit $(u_n) \in (\mathbf{C}^*)^{\mathbf{N}}$
On suppose l'existence de $l \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $\left|\frac{u_{u+1}}{u_n}\right| \to l$
Alors : 1) $l < 1 \Rightarrow \sum u_n$ CVA
2) $l > 1 \Rightarrow \sum u_n$ DVG

Démonstration. 1) On suppose $l < 1$ et on note $r_n = \left|\frac{u_{u+1}}{u_n}\right|$. On pose $\theta \in [l, 1]$ et $\varepsilon = \theta - l$
On a alors
$\exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \geq n_0, \ |r_n - l| < \varepsilon$ soit en particulier $r_n < l + \varepsilon = \theta$ Ainsi $\forall n \geq n_0, \ |u_{n+1}| < \theta |u_n|$
et $|u_n| \leq \theta^{n-n_0} |u_{n_0}|$ (REC) On a alors $\forall n \geq n_0, \ |u_n| \leq \underbrace{\theta^{-n_0} |u_{n_0}|}_{\text{cte}} \theta^n$ or $\sum \theta^n$ converge car $\theta \in]0, 1[$
donc par théorème de comparaison $\sum |u_n|$ converge.

2) On suppose $l > 1$ et on fixe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $1 < \theta < l$, on a alors $\exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \geq n_0, \ r_n > \theta$ (...)
on obtient $|u_n| \to +\infty$ donc $u_n \underset{n}{\not\to} 0$ donc $\sum u_n$ DVG □

1.6.2 Séries alternées

1.

Défnition La série réelle $\sum u_n$ est dite <u>alternée</u> si $\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (-1)^n |u_n| \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (-1)^{n+1} |u_n| \end{cases}$

Théorème : Critère spécial des série alternées.

On suppose $\left| \begin{array}{l} 1)\ \sum u_n \text{ est alternée} \\ 2)\ u_n \to 0 \\ 3)\ (|u_n|)_{n\geq 0} \text{ décroit} \end{array} \right.$ *alors* $\sum u_n$ *converge*

De plus, $\forall n \in \mathbf{N}$

-> $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

-> R_n *et* u_{n+1} *ont le même signe*

-> S *est compris entre* U_n *et* U_{n+1}

1.6.3 Sommation des relations de comparaisons

Théorème : Cas convergent.

Soit $(u_n),\ (v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ *et* $v_n \geq 0,\ \forall n \geq n_0$. *On suppose que* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *converge et on poe* $R_n = \sum k = n+1^{+\infty} u_n$ *et* $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n$

Alors :
$$\begin{array}{l} 1) u_n = o_{n\to+\infty}(v_n) \ \Rightarrow\ R_n = o_{n\to+\infty}(R'_n) \\ 2) u_n = O_{n\to+\infty}(v_n) \ \Rightarrow\ R_n = O_{n\to+\infty}(R'_n) \\ 3) u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow\ R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n \end{array}$$

Théorème : Cas divergent.

Soit $(u_n),\ (v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ *et* $v_n \geq 0,\ \forall n \geq n_0$

On suppose que $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *diverge et on note* $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ *et* $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$

Alors :
$$\begin{array}{l} 1) u_n = o_{n\to+\infty}(v_n) \ \Rightarrow\ U_n = o_{n\to+\infty}(V_n) \\ 2) u_n = O_{n\to+\infty}(v_n) \ \Rightarrow\ U_n = O_{n\to+\infty}(V_n) \\ 3) u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow\ U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n \end{array}$$

Théorème de Cesàro.

Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$

1) Si $u_n \to \lambda$ *avec* $\lambda \in \mathbf{R}$, *alors* $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \to \lambda$

2) Si $u_n \to +\infty$ *alors* $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \to +\infty$

Démonstration. 1) Supposons $u_n \to \lambda$ alors $u_n - \lambda = o(1)$, on pose ensuite $v_n = 1$ alors $\sum v_n$ diverge et d'après le théorème de sommation en cas divergent

$$\sum_{k=0}^{n} u_k - \lambda = o(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{=n+1}) \ \Rightarrow\ \frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{n} u_k) - \lambda \to 0$$

2) Supposons $u_n \to +\infty$ et posons $a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k$ Soit $A \in \mathbf{R}$ et $A' = A + 1$

Soit $n_0 \in \mathbf{N}\ :\ \forall n \geq n_0,\ u_n > A'$, puis pour $n \geq n_0$:

$$a_n = \frac{1}{n+1}(\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k}_{=C} + \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} u_k}_{>A'(n-n_0+1}) \text{ donc } a_n > \frac{C}{n+1} + A'\frac{n+1-n_0}{n+1} = A' + \frac{C-n_0A'}{n+1}$$

Soit $n_1 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq n_1,\ \left|\frac{C-A'n_0}{n+1}\right| < 1$ alors $\forall n \geq n_1,\ a_n > A$ d'où $a_n \to +\infty$ □

1.7 Produit de deux séries absolument convergentes

Produit de Cauchy Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries quelconques (convergentes ou non) de nombres complexes.
On pose $\forall n \in \mathbf{N} : w_n = \sum\limits_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ (somme finie !)
La série $\sum w_n$ est appelée produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Attention !
Lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent on a pas forcément $(\sum u_n) \times (\sum v_n) = \sum w_n$

Théorème 1.7.1.
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors :
1) $\sum w_n$ CVA *2)* $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$

Signalé :

Théorème de Mertens.
Si $\begin{cases} \sum u_n \text{ CVA} \\ \sum v_n \text{ converge} \end{cases}$
alors $\sum w_n$ converge et $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$

1.8 Dualité série-suite

Toute suite peut-être envisagée comme une série
Ici (E, N) est un EVN de dimension finie.

On pose $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_n = a_n - a_{n-1} \end{cases}$ On a alors pour $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = b_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_0 + a_n - a_0 = a_n \quad \text{soit} \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

On sait ensuite que (a_n) converge si et seulement si $\sum b_k$ converge donc

$$(a_n) \text{ converge } \Leftrightarrow \sum a_n - a_{n-1} \text{ converge}$$

⋆ ⋆ ⋆

Table des matières - Première année

Table des matières - Deuxième année