Mathématiques Préparatoires I

Ce document est une synthèse du cours de mathématiques dispensé par M. Jean-François Mallordy en classe préparatoire au lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand en 2022-2023. Il s'agit d'un complément au cours de Maths Spé et ne saurait en aucun cas y être un quelconque remplacement !

Paris, 2024

Mis en forme par
Émile Sauvat
emile.sauvat@ens.psl.eu

Chapitres

Chapitre 0

Introduction

Tout les éléments mathématiques seront déclarés et définis, les textes seront différenciés des formules mathématiques.

Contenu

0.1 Règles d'écriture

0.1.1 Quantificateurs

En écriture mathématique, on utilise les quatificateurs suivants :

$\exists$: Existence

$\forall$: Quelque soit

Exemples :

$$\forall\ y \in \mathbb{R},\ \exists\ x \in \mathbb{R}\ :\ y = x^7 - x \quad \neq \quad \exists\ x / \in \mathbb{R}\ :\ y \in \mathbb{R},\ y = x^7 - x$$

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ (n_0 \geq n \Rightarrow \mid u_n - l \mid \geq \epsilon) \quad \rightarrow \quad (u_n\ converge\ vers\ l)$$

0.1.2 Conditions Nécessaires et Suffisantes

Une condition Q est nécessaire pour avoir P si dès que P est vraie Q est vraie. $P \Rightarrow Q$
ABCD est un parrallélogramme est une condition nécessaire pour que ABCD soit un losange.

Une condition Q est suffisante pour avoir P si dès que Q est vraie P est vraie. $Q \Rightarrow P$
ABCD à 4 côtés égaux est une condition suffisante pour que ABCD soit un losange.

Si P est nécessaire et suffisante pour avoir Q alors P est nécessairement suffisante pour avoir Q. On dit aussi que P et Q sont logiquement équivalentes. $P \Leftrightarrow Q$
ABCD est un quadrilatère à 4 côtés égaux et ABCD est un losange sont logiquement équivalente.

0.2 Modes de démonstaration

0.2.1 Modus Ponen

Soit P et Q deux assertions. On démontre que P est vraie et que P est une condition suffisante pour avoir Q. On a alors Q.

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \;\; \Rightarrow \;\; Q$$

On peut utiliser la transitivité de l'implication. $P \wedge ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \;\; \Rightarrow \;\; R$

0.2.2 Contraposée

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

Pour montrer que P est une condition suffisante pour avoir Q, on peut montrer que la négation de P est une condition suffisante pour avoir la négation de Q.

0.2.3 Disjonction de cas

$$\textit{Soit P, Q et R trois assertions.} \;\; (P \vee Q) \wedge (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \;\; \Rightarrow \;\; R$$

Pour montrer qu'un condition A est suffisante pour en avoir une seconde B, on la sépare en plusieurs cas, puis on montre que chaque cas est une condition suffisante pour avoir B.

0.2.4 Absurde

$$(\neg P \Rightarrow Q \wedge \neg Q) \;\; \Rightarrow \;\; P$$

L'ensemble des nombres naturel est infini

0.2.5 Analyse Synthèse

Utilisé pour démontrer l'existence et l'unicité d'un objet mathématique.

Analyse On détermine un certain nombre de conditions nécessaires.

Synthèse On détermine une condition suffisante parmis les nécessaires.

0.2.6 Récurrence

On définit un prédicat dépendant d'une variable.
On montre alors que le prédicat est vrai pour un certain rang de la valeur.
On montre ensuie que le prédicat vraie à un certain rang (ou sur une série de rangs) est une condition suffisante pour avoir le prédicat vrai à un autre rang.

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ / $P(n_0)\wedge...\wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$ / $(P(n) \Rightarrow P(2n))\wedge(P(n+1) \Rightarrow P(n))$

Théorème : Premier principe de récurrence.

Soit P(n) un prédicat définit sur $\mathbb{N}$
Si on a $\begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases}$
alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \ P(n)$

Démonstration. On suppose au contraire $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\neg P(n_0)$.
On considère alors A=$\{k \mid \neg P(k)\}$
On a alors A$\neq \varnothing$ car n_0 $\in$A et A$\subset$ $\mathbb{N}^*$ donc d'après le principe du bon ordre dans $\mathbb{N}^*$ A admet un plus petit élément noté k_0.
Par suite $k_0 - 1$ $\in$A soit P($k_0 - 1$) puis d'après l'hérédité P(k_0). □

Corollaire : Principe de récurrence forte.

Soit P(n) un prédicat défini sur $\mathbb{N}$
Si $\begin{cases} P(n_0) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geq n_0,\ \ P(n_0) \wedge ... \wedge P(n) \ \ \Rightarrow \ \ P(n+1) \end{cases}$
Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geq n_0,\ \ P(n)$

Démonstration. On considère le prédicat Q(n) = P(n_0)$\wedge$...$\wedge$P(n)
On a alors $\begin{cases} Q(n_0) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geq n_0,\ \ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) \end{cases}$
D'où d'après le premier principe de récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0,\ \ P(n)$ □

0.2.7 Exemples

Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Preuve 1 On suppose $\exists$(p,q)$\in$ $\mathbb{N}^{*2}$: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec q minimal.
On considère alors

$$\frac{2q-p}{p-q} = \frac{2-\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$$

avec p=$\sqrt{2}$q donc p<2q donc p-q<q.

Preuve 2 On suppose $\exists$(p,q)$\in$ $\mathbb{N}^{*2}$: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, soit 2q²=p².
On a alors, d'après le théorème fondamental de l'arithmétique p² qui possède 2k fois 2 dans sa décomposition en facteurs premiers alors que 2q² le posssède 2k'+1 fois, ce qui est impossible par unicité de la décomposition.

Preuve 3 Pour i$\in$ $\mathbb{N}$ on considère

$$\epsilon_i = (\sqrt{2}-1)^i$$

On a $\frac{8}{4} < \frac{9}{4}$ donc par strcite croissance de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ donc 0<$\sqrt{2}$-1<$\frac{1}{2}$

$$Donc\ \forall i \in \mathbb{N}^*\ \epsilon_i < \frac{1}{2^i}$$

D'autre part pour tout entier i il existe des entiers a_i et b_i tels que
$(\sqrt{2}-1)^i = a_i + \sqrt{2}b_i$
Si $\exists(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ alors

$$\epsilon_i = a_i + b_i\frac{p}{q} = \frac{a_i q + b_i p}{q} = \frac{A_i}{q} \qquad A_i \in \mathbb{N}^*$$

Soit pour tout entier i $\epsilon_i \geq \frac{1}{q}$ d'où $\frac{1}{q} < \frac{1}{2^i}$

Infinité de l'ensemble des nombres premiers

Lemme Tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier
Preuve : Soit n un entier supérieur à 2 notons p le plus petit de ses diviseurs.
On a alors p premier car tout diviseur de p divise n.

Preuve d'Euclide S'il y avait un nombre fini de nombres premiers, leur produit additionné de 1 serait divisible par l'un d'entre eux (*Lemme*), qui diviserait alors la différence, 1.

Inégalité arithmético-géométrique

Lemme de Couchy Soit A un partie de $\mathbb{N}^*$ qui contient 1 et telle que $\begin{cases} (1)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A \Rightarrow 2n \in A \\ (2)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \in A \Rightarrow n \in A \end{cases}$ alors A=$\mathbb{N}^*$

Preuve : On veut démontrer Q(p) : $\begin{array}{l} 2^p \in A \\ \forall n \in [2^p, 2^{p+1}] \times \mathbb{N}, n \in A \\ \Leftrightarrow \forall n \in [0, 2^p] \times \mathbb{N}, 2^{p+1} - n \in A \end{array}$

P(k) : $2^k \in A$ avec P(0)
$2^k \in A \Rightarrow 2 \times 2^k = 2^{k+1} \in A$
D'après le principe de récurrence on a $\forall k \in \mathbb{N}, 2^k \in A$ H(n) : n>$2^p \vee 2^{p+1} - n \in A$ avec H(0)
Si H(n) et n+1$\leq 2^p$, on a 2^{p+1}-(n+1)$\in A$ d'apèrs (2)
D'après le principe de récurrence on a $\forall(p,n) \in \mathbb{N}^2, n > 2^p \vee 2^{p+1} - n \in A$

Preuve de Cauchy On considère A= $\{\ n \mid \forall(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \frac{x_1+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\dots x_n}\ \}$ avec $1 \in A$ Soit le prédicat P(n) : $\forall(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \frac{x_1+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\dots x_n}$ On a $P(1) \wedge P(2)$
Supposons $n \in A$ et considérons $(x_1,\dots,x_n,x_1',\dots,x_n') \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$

$$\frac{x_1+\dots+x_n+x_1'+\dots+x_n'}{2n} = \frac{\frac{x_1+\dots+x_n}{n} + \frac{x_1'+\dots+x_n'}{n}}{2}$$

$$\geq \sqrt{\frac{x_1+\dots+x_n}{n} \times \frac{x'1+\dots+x_n'}{n}} \geq \sqrt[2]{\sqrt[n]{x_1\dots x_n} \times \sqrt[n]{x_1'\dots x'n}}$$

$$= \sqrt[2n]{x_1\dots x_n x_1'\dots x_n'} \qquad \textit{Soit } P(n) \Rightarrow P(2n)$$

On considère maintenant $\forall(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}, \frac{x_1+\dots+x_n+x_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n]{x_1\dots x_n x_{+1}}$
Soit $\forall(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ Posons $x_{n+1} = \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$ on a alors avec $P = x_1 \cdots x_n$ et $A = x_{n+1}$:

$$\frac{x_1+\dots+x_n+\frac{x_1+\dots+x_n}{n}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{x_1\dots x_n x_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{(n+1)\frac{x_1}{n}+\dots+(n+1)\frac{x_n}{n}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{PA}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n+1]{PA} \;\Leftrightarrow\; A \geq \sqrt[n+1]{PA}$$

$$\Rightarrow A^{n+1} \geq PA \Rightarrow A^n \geq P \Rightarrow A \geq \sqrt[n]{P} \;\; \textit{donc } P(n+1) \Rightarrow P(n)$$

Preuve d'Enguel *Lemme* : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ln x \leq x - 1$ avec égalité ssi x=1
Preuve : Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ $A = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ $\forall i \in [\![i, n]\!]$, $\ln(\frac{x_i}{A}) \leq \frac{x_i}{A} - 1$
En sommant on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(\frac{x_i}{A}) = \ln(\frac{x_1 \ldots x_n}{A^n}) \leq \sum_{i=1}^{n} (\frac{x_i}{A} - 1) = 0 \quad \Rightarrow x_1 \ldots x_n \leq A^n \;\; \Rightarrow \;\; \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 1

Ensembles et applications

Contenu

1.1 Opérations sur les Parties

1.1.1 Notations

Complémentaire Le complémentaire de A dans E est $E\backslash A = \overline{A} = A^c$

$$E\backslash A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Union L'union de deux ensembles est

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Intersection L'intersection de deux ensembles est

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Différence La différence de deux ensemble est

$$A \backslash B = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

1.1.2 Propriétés

Soit A et B deux parties de E

$E \backslash (E \backslash A) \equiv A$

$A \cap (B \cap C) \equiv (A \cap B) \cap C$

$A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (B \cap C)$

$E \backslash (A \cap B) \equiv (E \backslash A) \cap (E \backslash B)$

$A \cup (B \cup C) \equiv (A \cup B) \cup C$

$A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$E \backslash (A \cup B) \equiv (E \backslash A) \cup (E \backslash B)$

1.2 Recouvrement disjoint et Partitions

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E.

Famille de parties disjointes de E (A_i) est une famille de parties disjointes de E si

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in I^2, \ i \neq j \ \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing \\ \forall i \in I, \ A_i \in \mathcal{P}(E) \end{cases}$$

Recouvrement disjoint de B (A_i) est un recouvrement disjoint de B si

les A_i sont deux à deux disjoints et $B \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$

Partition de E $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E si

$$E = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \wedge \quad \begin{cases} \forall i \in I, A_i \in \mathbb{P}(E) \\ \forall i \in I, A_i \neq \varnothing \\ \forall (i,j) \in I^2, \ i \neq j \ \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing \end{cases}$$

Propriétés : Lois de Morgan.

Soit E un ensemble, $(A_i)_{i \in I)}$ une famille de parties de E

Alors $\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right)^c \equiv \bigcap\limits_{i \in I} A_i^c$ *et* $\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)^c \equiv \bigcup\limits_{i \in I} A_i^c$

1.3 Éléments applicatifs

1.3.1 Graphe

Soit un fonction $f \in \mathcal{F}(E, F)$, son graphe est :

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in E\} \in \mathcal{P}(E \times F)$$

1.3.2 Indicatrice

Définition On définit l'indicatrice de A dans E comme

$$\mathbb{1}_A \left(\begin{array}{l} E \longrightarrow \{0;1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \ si \ x \in A \\ 0 \ si \ x \in A^c \end{cases} \end{array} \right)$$

Propriétés.

Soit A et B deux parties d'un ensemble E on a

$A \equiv B \ \Leftrightarrow \ \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ $\qquad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$

$\forall x \in E, \ \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{E\setminus A} = \mathbb{1}_E = 1$ $\qquad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$

1.4 Relations binaires

Définition Une relation binaire sur E est la donné d'une partie Γ de $E \times E$ telle que

$$\forall (x,y) \in E^2 \ , \quad x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow \ (x,y) \in \Gamma$$

Γ est appelé graphe de la relation binaire $\mathcal{R}$

-> <u>ex</u> : $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \in \Gamma \ \Leftrightarrow \ y \leq x$

Caractéristiques Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E

1) $\mathcal{R}$ est <u>réflexive</u> si $\forall x \in E \ , \ x\mathcal{R}x$
2) $\mathcal{R}$ est <u>symétrique</u> si $\forall (x,y) \in E^2 \ , \ x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow \ y\mathcal{R}x$
3) $\mathcal{R}$ est <u>antisymétrique</u> si $\forall (x,y) \in E^2 \ , \ x\mathcal{R}y \ \wedge \ y\mathcal{R}x \ \Rightarrow \ x = y$
4) $\mathcal{R}$ est <u>transitive</u> si $\forall (x,y,z) \in E^3 \ , \ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \ \Rightarrow \ x\mathcal{R}z$

Relation d'ordre Un relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si $\mathcal{R}$ est <u>réflexive, antisymétrique et transitive</u>.

-><u>ex</u> : $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$

$\Big(\Re(z) < \Re(z')\Big) \vee \Big(\Re(z) = \Re(z') \wedge \Im(z) \leq \Im(z')\Big)$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$

Caractère total Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ est dite totale si $\forall (x,y) \in E^2, \ x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$

Relation d'équivalence Un relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si $\mathcal{R}$ est <u>réflexive, symétrique et transitive</u>.

-><u>ex</u> : Si $a \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow \ \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ y - x = ka$

$\mathcal{R}$ est appelée relation de congruence modulo a et on note $x \equiv y[a]$

Classe d'équivalence Si $x \in E$ l'ensmeble $\{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$ souvent noté $Cl(x)$ est la classe d'équivalence de x

---

Propriété.

Si $E \neq \varnothing$, les classes d'équivalence forment une partition de E

$\star \quad \star \quad \star$

Chapitre 2

Calculus

Contenu

2.1 Sommes et Produits

On considère une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels.

$\sum\limits_{i\in I}$ est la **somme** de ses termes $\prod\limits_{i\in I}$ est le **produit** de ses termes

Somme et Produit Téléscopique

$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) = a_n - a_1$ $\prod \_k = 1^{n-1}(\frac{a_{k+1}}{a_k}) = \frac{a_n}{a_1}$

Permutations Soit σ une bijection de I sur I, $\sum\limits_{i\in I} a_{\sigma(i)} = \sum\limits_{i\in I} a_i$

->ex : $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k}$

Méthode de perturbation Soit $(a_i)_{i\in I}$ on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$$\underline{S_{n+1}} = \underline{S_n} + a_{n+1} = a_1 + \sum_{\underline{k=2}}^{n+1}$$

->ex : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k$
$S_{n+1} = S_n + 2^{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} 2^k = 2 + 2 \times \sum_{k=1}^{n} 2^k \Rightarrow S_n + 2^{n+1} = 2S_n + 2$
$\Rightarrow S_n = 2^{n+1} - 2$

Sommes doubles Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ des familles de réels

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) \qquad \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \sum_{j=i+1}^{n} b_j$$

Si (a_k) et (b_k) on la même monotonie $\displaystyle\sum_{1\leq j<k\leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \geq 0$

2.2 Coefficients binomiaux

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{n}{p} = \prod \_k = 1^p \frac{n-k+1}{k} \quad = \begin{cases} 0 \ si \ p > n \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad sinon \end{cases}$$

Calculs sur les coefficients binomiaux

Relation de Pascal Si $1 \leq p \leq n$ alors $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

Propriété de symétrie $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad p \leq n \Rightarrow \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Formule d'absorbtion $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ ou $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

Binôme de Newton

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2.3 Valeur absolue

On note $a^+ = \max(a, 0)$ et $a^- = \max(-a, 0)$. On a alors
$\forall a \in \mathbb{R}, \quad a = a^+ - a^-$ et $|a| = a^+ + a^- = \begin{cases} a \ si \ a \geq 0 \\ -a \quad sinon \end{cases}$

Somme et produit $\left|\prod_{i=1}^{n} a_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |a_i|$ et $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

2.4 Trigonométrie

On défini deux fonction **sin** et **cos** par la relation :
$\mathcal{C}(0;1) = \{(\cos x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv a[2\pi] \\ x \equiv -a[2\pi] \end{cases} \qquad \sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv a[2\pi] \\ x \equiv \pi - a[2\pi] \end{cases}$$

Formules majeures

Addition
$$\left| \begin{array}{lcl} \cos(\alpha+\beta) &=& \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &=& \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \end{array} \right|$$

Duplication
$$\left| \begin{array}{lclcl} \cos(2\alpha) &=& 2\cos^2(\alpha) - 1 &=& 1 - 2\sin^2(\alpha) \\ \sin(2\alpha) &=& 2\sin\alpha\cos\alpha \end{array} \right|$$

Dérivation
$$\left|\begin{array}{lllll} \cos' x & = & -\sin x & = & \cos(x+\frac{\pi}{2}) \\ \sin' x & = & \cos x & = & \sin(x+\frac{\pi}{2}) \end{array}\right|$$

Tangente On définit $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ avec $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$ $\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$

Chapitre 3

Nombres Complexes

On définit i tel que $i^2 = -1$ Attention On ne peut pas écrire $i = \sqrt{-1}$

Contenu

3.1 Calcul dans $\mathbb{C}$

Puissances de i $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\begin{array}{lll} i^{4p} & = & 1 \\ i^{4p+2} & = & -1 \end{array} \quad \begin{array}{lll} i^{4p+1} & = & i \\ i^{4p+3} & = & -i \end{array}$

Identitées remarquables

Si $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} n+1 & si\ z = 1 \\ \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & sinon \end{cases}$

Si $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

Si $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

3.2 Conjugaison et module

3.2.1 Opération de conjugaison

On définit l'opération **involutive** de **conjugaison** :
$\forall z = a + ib \in \mathbb{C} \quad \varphi : a + ib \mapsto a - ib$ et $\varphi \circ \varphi = Id_{\mathbb{C}}$

Avec $\forall (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\overline{\sum_{k=0}^{n} z_k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{z_k}$ et $\overline{\prod \_k = 0^n z_k} = \prod \_k = 0^n \overline{z_k}$

Parties réelles et imaginaires $\forall z \in \mathbb{C}$ on a $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$

3.2.2 Module du complexe

On définit le **module** de $z \in \mathbb{C}$ comme le **réel** positif qui vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$
On a alors l'égalité $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

3.2.3 Inégalité triangulaire

Propriété préliminaire On a $\forall z \in \mathbb{C}$, $\begin{cases} |\Re(z)| \leq |z| \\ |\Im(z)| \leq |z| \end{cases}$

Inégalité Triangulaire.

$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$ *on a* $|z+z'| \leq |z|+|z'|$
Avec égalité dans l'inégalité si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $z = \lambda z'$ *ou si* $z' = 0$

Démonstration. $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$ $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\overline{z'}) + |z'|^2$
avec $\Re(z\overline{z'}) \leq \left|\Re(z\overline{z'})\right| \leq |zz'| = |z|\,|z'|$ d'où $|z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2$

avec égalité si et seulement si $\Re(z\overline{z'}) = \left|\Re(z\overline{z'})\right| = \left|z\overline{z'}\right|$ soit $z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+$

Si $z \neq 0$ alors $z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow z\frac{\overline{z'}z'}{z'} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow z\frac{|z'|^2}{z'} \in \mathbb{R}^+$
$\Leftrightarrow z = \lambda z'$ avec $\lambda = \frac{z}{z'} \in \mathbb{R}^+$ □

Seconde inégalité triangulaire.

$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\begin{cases} |z-z'| \geq |z|-|z'| \\ |z'-z| \geq |z'|-|z| \end{cases} \Rightarrow |z-z'| \geq \big||z|-|z'|\big|$

3.3 Unimodulaires et trigonométrie

Dans le plan complexe le cercle trigonométrique $\mathcal{C}(0,1)$ est l'ensemble des nombres complexes unimodulaires noté $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
-> $\mathbb{U} = \{\cos\theta + i\sin\theta \mid \theta \in [0,2\pi[\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0,1\pi[\}$

Calculs $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$ est stable par produit et quotient et $\forall z \in \mathbb{U}$, $\frac{1}{z} = \overline{z}$

Formules d'Euler $\forall z \in \mathbb{U}$, $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$

$\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

3.3.1 Technique de l'angle moitié

Angle moitié 1.

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\begin{aligned} 1+e^{it} &= 2\cos(\tfrac{t}{2})e^{i\frac{t}{2}} \\ 1-e^{it} &= 2i\sin(-\tfrac{t}{2})e^{i\frac{t}{2}} \end{aligned}$ | $\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$ $\begin{aligned} e^{ip}+e^{iq} &= 2\cos(\tfrac{p-q}{2})e^{i\frac{p+q}{2}} \\ e^{ip}-e^{iq} &= 2i\sin(\tfrac{p-q}{2}e^{i\frac{p-q}{2}} \end{aligned}$

Angle moitié 2.

$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$ | $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$

$\sin p + \sin q = 2\cos\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$ | $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

Chapitre 4

Fonctions

Toute les fonctions considéré sont des fonction d'une variable réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur $I \subset \mathbb{R}$

Contenu

4.1 Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition Si f est une fonction on défnit D_f son ensemble de définition comme la plus grande partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle f est définie.

Représentation graphique Soit f un fonction la représentation graphique de f est la partie de $\mathbb{R}^2$ $C_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$

Propriété.

Soit f une fonction à valeurs réelles on a
- *Si f est paire alors C_f admet $(\mathrm{o}x)$ comme axe de symétrie*
- *Si f est impaire alors C_f admet o comme centre de symétrie.*

Périodicité On dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall x \in D_f,\ x+T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$, on dit alors que f est T-périodique.

Rq : la périodicité n'est stable ni par somme, ni par produit.

Propriétés.

Soit f et g deux fonctions on a
1) Si f et g admettent un parité, alors $f+g$ et $f.g$ admettent la même parité.
2) Si f et g sont T-périodiques, alors $f+g$ et $f.g$ sont T- périodiques.
3) $g \circ f$ est paire si f est paire ou si f est impaire et g est paire.
4) $g \circ f$ est impaire si f et g le sont.

Fonction croissante On dit que f à valeurs réelles est croissante sur I (resp. décroissante) si

$$\forall (a,b) \in I^2,\ a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \quad \big(resp.\ a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)\big)$$

On définie de même les strictes croissance et décroissance avec des inégalités strictes.

Propriété.

f est croissante (resp. strictement) sur I si et seulement si
$\forall (a,b) \in I^2,\ a \neq b \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$ (*resp.* > 0)

4.2 Dérivation

Dérivabilité en a On dit que f est dérivable en un point a de I qui n'est pas une extremité de I si $\tau_a(f)$ admet une limite finie en a. On note alors $f'(a)$ cette limite.

Dérivabilité sur I On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. On note alors f' la fonction définie sur I qui à chaque point a associe $f'(a)$.

Propriétés.

Si f et g sont deux fonction dérivable en a on a
1) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha f + g$ est dérivable en a et $\big(\alpha f + g\big)'(a) = \alpha f'(a) + g'(a)$
2) $f.g$ est dérivable en a et $\big(f.g\big)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$
3) Si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a)-f(a)g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$

Proposition.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$
Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $\left(g \circ f\right)'(a) = \left(g' \circ f\right)(a) \times f'(a)$

Proposition : Caractérisation des fonctions constantes.

Une fonction définie sur I à valeurs réelles ou complexes est constante si et seulement si elle est dérivable sur I et sa dérivée est nulle sur I

Propriété.

Si f est dérivable sur I alors f est strictement croissante sur I

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f' \text{ est positive sur } I \\ \text{il n'existe pas d'intervalle ouvert } I \subset J \text{ tel que } f'|_J = 0 \end{cases}$$

Théorème.

Soit f dérivable qur un intervalle ouvert I strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur $f_d(I) = J$ et f^{-1} est continue et dérivable sur J avec $\forall b = f(a) \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$

Propriété.

Si f est à valeurs réelles bijectives et $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé direct Alors C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bisectrice.

Classe $\mathscr{C}^1$ On dit que <u>f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$</u> si f est dérivable sur I et so f' est continue sur I. On dit aussi que f est continuement dérivable sur I.
On note $\mathscr{C}^1\left(I, \mathbb{R}\right)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4.3 Fonctions usuelles

Logarithme népérien La fonction ln est l'unique primitive de $\begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ avec $\ln(1) = 0$.

Propriétés.

1) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ *2)* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

Théorème.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x+1) \leq x$

Exponnentielle La fonction exp est la bijection réciproque de ln, définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\exp' = \exp$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R},\ \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ a^b = \exp\left(b \times \ln(a)\right)$

Logarithme en base a Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, on appelle logarithme en base a noté $\ln_a$ la fonction $\begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln x}{\ln a} \end{pmatrix}$ et on note $\exp_a$ sa bijection réciproque.

Lemme.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, *on a* 1) $\frac{\ln x}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ 2) $x^\alpha \ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$

Corollaire.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, *on a* $\frac{x^\alpha}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Proposition.

Soit $x \in \mathbb{R}$ *alors* $\left(1 + \frac{x}{t}\right)^t \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} e^x$

Proposition.

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x + 1$ *avec égalité* $\Leftrightarrow x = 0$

Arcsinus La restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ réalise un bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. On appelle arcsinus noté arcsin cette fonction telle que $\forall (x, y) \in [-1, 1] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(y)$

Proposition.

La fonction arcsin *est continue strictement croissante sur* $[-1, 1]$
et dérivable sur $]-1, 1[$ *avec* $\forall x \in]-1, 1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Arccosinus La restriction de cos à $[0, \pi]$ réalise un bijection sur $[-1, 1]$. On appelle arccosinus noté arccos cette fonction telle que $\forall (x, y) \in [-1, 1] \times [0, \pi],\ y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$

Propriété.

$\forall x \in [-1, 1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

Théorème - Arctangente.

tan *réalise un bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$, *on appelle* arctan *cette fonction.*
arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec* $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Démonstration. tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc arctan est dérivable en tout point $a = \tan(y)$
avec $\arctan'(a) = \frac{1}{\tan'(y)} = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+a^2}$ □

Proposition.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{|x|} \times \frac{\pi}{2}$

Cosinus hyperbolique - Sinus hyperbolique On appelle cosinus hyperbolique (resp. sinus hyperbolique) noté cosh (resp. sinh) la partie paire (resp. impaire) de exp.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Ces fonctions sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ *avec* $\cosh' = \sinh$ *et* $\sinh' = \cosh$

Lemme.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) \geq 1$ *avec égalité ssi* $x = 0$

Proposition.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Propriété.

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, *on a*
$\cosh(a + b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$
$\sinh(a + b) = \sinh(a)\cosh(b) + \sinh(b)\cosh(a)$
$\cosh(a - b) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)$
$\sinh(a - b) = \sinh(a)\cosh(b) - \sinh(b)\cosh(a)$

Tangente hyperbolique La fonction tangente hyperbolique notée tanh est définie sur $\mathbb{R}$ par $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$

Propriété.

tanh *est impaire et indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec*
$\forall x \in \mathbb{R},\ \tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$

4.4 Dérivation d'une fonction complexe

On étudie ici des fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$

Dérivabilité en un point On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable en $x_0 \in I$ si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ possède une limite en x_0. (Si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$)
On note alors $f'(x_0)$ cette limite.

Proposition.

$f : I \to \mathbb{C}$ *est dérivable en* $x_0 \in I$ *si et seulement si* $\Re(f)$ *et* $\Im(f)$ *sont dérivable en* x_0.
On a alors $f'(x_0) = \big(\Re(f)\big)'(x_0) + i\big(\Im(f)\big)'(x_0)$

Proposition.

Les théorèmes opératoires sur la somme, le produit, et la fraction sont identique pour des fonctions à valeurs complexes (pas la composition !)

Proposition.

Si φ est une fonction dérivable sur I de $\mathbb{R}$ à valeurs complexes
Alors $\psi \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp\left(i\varphi(t)\right) \end{pmatrix}$ *est dérivable sur I et*

$\forall t \in I,\ \psi'(t) = i\varphi'(t)e^{i\varphi(t)}$

$\star \quad \star \quad \star$

Chapitre 5

Primitives et équations différentielles

Contenu

5.1 Calcul de primitives

Primitive Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ on dit que F est une primitive de f définie sur I à valeurs complexes si F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

Proposition.

Si F est une primitive de f sur I, alors pour toute primitive G de f il existe $C \in \mathbb{R}$ une constante telle que $G = F + C$

Proposition.

Si f est une fonction continue sur I alors f admet des primitives sur I et $\forall x_0 \in I$, $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annulle en x_0.

Exemples de référence

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$; $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$; $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; $a \in \mathbb{R}^*$ et $J \subset \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(ax+b) \neq 0\}$

f	$F\ (+C)$	I
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\tan(ax+b))$	$-\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert$	J
$\sinh(ax+b)$	$\frac{1}{a}\cosh(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\cosh(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sinh(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\tanh(ax+b)$	$\frac{1}{a}\ln\big(\cosh(ax+b)\big)$	$\mathbb{R}$

f	$F\ (+C)$	I
$\ln x$	$x\ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\mathbb{R}$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\mathbb{R}$

Notation On note $\int^x f(t)\mathrm{d}t$ une primitive de f.

Proposition : Intégration par partie.

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, $(a,b)\in I$,

$$\int_a^b u'(t)v((t)\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

Proposition : Formule du changement de variable.

Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
f une fonction continue sur J avec $\varphi_d(I)\subset J$

$$\forall(a,b)\in I^2\ ,\quad \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\times\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x$$

Règles de Bioche : *Soit f une fonction rationnelle en $\cos t$ et $\sin t$ et $\psi(t) = f(t)\mathrm{d}t$*
On effectue les changements de variable suivants :
- *Si ψ est invariante par $t\mapsto\pi-t$ alors on pose $x=\sin t$*
- *Si ψ est invariante par $t\mapsto -t$ alors on pose $x=\cos t$*
- *Si ψ est invariante par $t\mapsto t+\pi$ alors on pose $x=\tan t$*

5.2 Équations différentielles du premier ordre

Définition Une équation fonctionnelle de la forme

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ s'appelle une <u>équation différentielle linéaire d'ordre 1</u> où les <u>inconnues y</u> sont des <u>fonctions dérivables sur I à</u> <u>valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$</u>

Proposition.

Si a et b sont deux fonctions continues sur I,
$(E)\ :\ y' + a(x)y = b(x),$
Alors $(E_0)\ :\ y'+a(x)y = 0$ est l'<u>équation homogène associée à (E)</u>
de solution $\quad y = C.e^{-A(x)}$
où $A(x)$ est une primitive de a sur I et C est une constante.

Proposition.

Si a et b sont deux fonctions continues de I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{K}$,
φ_0 une solution particulière de (E) : $y' + a(x)y = b(x)$
Alors toute solution de (E) est de la forme $x \mapsto \varphi_0(x) + \psi(x)$
où ψ est solution de (E_0)

On notera $\mathscr{S}_{(E)} = \varphi_0 + \mathscr{S}_{(E_0)}$

Méthode de variation de la constante : $y' + a(x)y = b(x)$ avec a et b continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
(E_0) l'équation homogène associée à (E) admet pour solution générale $\varphi_0(x) = C.e^{-A(x)}$ avec A une primitive de $a$sur I et C une constante de $\mathbb{K}$.

On cherche une solution particulière de la forme $x \overset{\psi}{\mapsto} C(x).e^{-A(x)}$ avec C dérivable sur I

$$\forall x \in I,\ \psi'(x) + a(x)\psi(x) = b(x) \ \Leftrightarrow$$

$$C'(x)e^{-A(x)} \underbrace{-C(x)a(x)e^{-A(x)} + C(x)a(x)e^{-A(x)}}_{=0} = b(x)$$

$\Leftrightarrow$ ψ est solution de (E) si et seulement si $\forall x \in I,\ C'(x) = b(x)e^{A(x)}$

Proposition.

Sous les mêmes hypothèses et notations la solution générale de (E) est
$$\varphi(x) = \left(C + \int^x b(t)e^{A(t)}\mathrm{d}t\right).e^{-A(x)}$$
où A est une primitive de a sur I et C une constante de $\mathbb{K}$

Propriété.

Si $a \in \mathbb{K}$ et P est une fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$
Alors l'équation différentielle $y' + ay = e^{-\alpha(x)}P(x)$
admet une solution particulière de la forme $\varphi_0 : x \mapsto e^{-\alpha(x)}Q(x)$
avec $Q(x)$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$
et $\deg Q = \deg P$ si $\alpha \neq a$ et $\deg Q = \deg P + 1$ sinon.

Proposition : Principe de superposition.

Si a, b_1, b_2 sont des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$
φ_1 solution particulière de $y' + a(x)y = b_1(x)$
φ_2 solution particulière de $y' + a(x)y = b_2(x)$
Alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}$,
$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est solution particulière de $y' + a(x)y = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x)$

Proposition : Problème de Cauchy.

$\forall (x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$
Admet une unique solution
$$\varphi_0 : x \mapsto \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\right)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\mathrm{d}s}$$

5.3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On considère ici $(E)\ :\ y'' + ay' + by = f(x)$
où a, b sont des constantes de $\mathbb{K}$ et f est définie et continue sur I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{K}$

(E) s'appelle une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dans $\mathbb{K}$

Proposition.

Si $r \in \mathbb{K}$ alors $\varphi_r : x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_0)
si et seulement si $r^2 + ar + b = 0$ (équation caractéristique associée à (E) (e.c.))

Proposition.

Avec les mêmes notations et en notant Δ le discriminant
de l'équation caractéristique associée à (E)

- *$\Delta > 0$ et r_1, r_2 les solutions de e.c. alors la solution générale de (E_0)*
  est donnée par $x \mapsto C_1 e^{r_1(x)} + C_2 e^{r_2(x)}$

- *$\Delta = 0$ et r la solution double de e.c. alors la solution générale de (E_0)*
  est donnée par $x \mapsto (C_1 x + C_2)e^{rx}$

- *$\Delta < 0$ et $r = \rho + \imath.\omega$ $(\omega \neq 0)$ une solution de e.c. alors la solution générale de (E_0)*
  est donnée par $x \mapsto \big(C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)\big)e^{\rho x}$

Proposition.

Si f est une fonction continue sur I, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$
Alors la solution générale de $(E)\ :\ y'' + ay' + by = f(x)$
est la somme d'une solution particulière et de la solution générale
de l'équation homogène associée.

Propriété.

Soit P une fonction polynômiale sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$
L'équation $(E)\ :\ y'' + ay' + b = P(x)e^{\alpha x}$ admet une solution particulière de la forme
$x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$ avec Q une fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ et
$\deg Q = \deg P$ *si α n'est pas solution de e.c.*
$\deg Q = \deg P + 1$ *si α est racine simple de e.c.*
$\deg Q = \deg P + 2$ *si α est racine double de e.c.*

Corollaire.

L'équation différentielle $y'' + ay' + b = \cos(\omega x)e^{\alpha x}$
(respectivement $y'' + ay' + b = \sin(\omega x)e^{\alpha x}$)
Admet une solution particulière de la forme
$x \mapsto x^k\big(C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)\big)e^{\alpha x}$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$
$k = 0$ si $\alpha + \imath.\omega$ n'est pas solution de e.c.
$k = 1$ si $\alpha + \imath.\omega$ est une racine double de e.c.
$k = 2$ si $\alpha + \imath.\omega$ est une racine simple de e.c.

Propriété : Principe de superposition.

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ *et* (f_1, f_2) *deux fonctions continues sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$
φ_1 *une solution particulière de* $y'' + ay' + by = f_1(x)$
φ_2 *une solution particulière de* $y'' + ay' + by = f_2(x)$
Alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$,
$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ *est solution de* $y'' + ay' + by = (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))$

Proposition : Problème de Cauchy.

Si $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, f *une fonction continue sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$,
$x_0 \in I$, $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$ *le problème de* Cauchy $\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \ ; \ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$
admet une unique solution.

$\star \quad \star \quad \star$

Chapitre 6

Nombres réels et suites numériques

Contenu

6.1 Ensembles de nombres réels

Entiers naturels $0, 1, 2, \ldots$ avec $\leqslant$ une relation d'ordre totale

Propriété : Principe de bon ordre.

(i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
(ii) Tout partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Proposition : Division euclidienne sur $\mathbb{N}$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ \exists (q,r) \in \mathbb{N}^2$, unique tel que

$$a = bq + r \text{ avec } \underline{0 \leqslant r < b}$$

Entiers relatifs $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

La division euclidienne reste valable sur $\mathbb{Z}$

Nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\}$ On dit que $\frac{p}{q}$ est irréductible si p et q sont sans diviseurs communs.

Propriété.

$\mathbb{Q}$ est stable par somme, différence et produit.

Proposition.

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ unique telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} x_k.10^{-k} \leqslant x < \sum_{k=0}^{n} x_k.10^{-k} + 10^{-n}$$

On a de plus $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in [\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}}$ non stationnaire à 9

Approximation décimale propre Soit $x \in \mathbb{R}$, avec les même notations, on appelle approximation décimale propre de x à 10^{-n} près la somme $\sum_{k=0}^{n} x_k.10^{-k}$

On appelle approximation décimale propre de x la **limite** :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k.10^{-k} = x_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$$

Nombres décimaux On appelle nombres décimaux l'ensemble des nombres réels dont l'approximation décimale propre est **stationnaire à** 0. Leur ensemble est noté $\mathbb{D}$ avec

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ :\ x \times 10^n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}$$

Densité On dit que $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout $a < b$ de $\mathbb{R}$ on a $]a, b[\cap X \neq \varnothing$

Propriété.

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Borne supérieure Soit X un ensemble. **Sous réserve d'existence**, la borne supérieure de X, notée $\sup X$ est le plus petit éléments de l'ensemble des majorants de X.

Théorème.

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Proposition : Caractérisation de la borne supérieure.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, α est la borne supérieure de A si et seulement si $\forall x \in A,\ x \leqslant \alpha$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x' \in A$ tel que $x' > \alpha - \varepsilon$

Intervalle On appelle intervalle toute partie X de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (a,b) \in X^2 \text{ avec } a \leqslant b,\ [a,b] \subset X$$

Propriété.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$ on a $[a,b] = \{\lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in [0,1]\}$

Propriété.

L'intersection de deux intervalles est un intervalle.
Toute intersection (même infinie) d'intervalles est un intervalle.

6.2 Suites réelles

6.2.1 Généralités

Suite stationnaire Une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite stationnaire si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0})$$

Propriété.

Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $\big(|u_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Convergence Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite réelle,

- On dit que u converge vers l si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\big)$$

- On dit que u tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A\big)\ \ (resp.\ u_n \leqslant A)$$

Divergence Une suite réelle est dite <u>divergente</u> si elle ne converge pas.

Propriété : Unicité de la limite.

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ_1 et vers ℓ_2 alors $\ell_1 = \ell_2$

Propriété.

Toute suite réelle convergente est bornée.

Propriété.

Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

Propriétés.

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites réelles convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$
*Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\left(\lambda u_n + \mu v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_n v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent * avec*

- $\lim(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim u_n + \mu \lim v_n$
- $\lim(u_n v_n) = (\lim u_n)(\lim v_n)$

Propriété.

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$
Alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est non nulle à partir d'un certain rang n_0
et $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $\frac{1}{\ell} \in \overline{\mathbb{R}}$

Lemme.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle avec $u_n \underset{n}{\to} \ell$ alors $|u_n| \underset{n}{\to} |\ell|$

Théorème : Passage à la limite dans les inégalités larges.

à compléter

Démonstration. On peut noter que si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle quelconque est à termes positif à partir d'un certain rang et si (u_n) tends vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\ell \geqslant 0$, en effet : par unicité de la limite, $\ell = |\ell| \geqslant 0$

Soit donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles convergente respectivement vers ℓ et ℓ' avec $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang alors

- Si $\ell = \ell' = +\infty$ ou si $\ell = \ell' = -\infty$ alors $\ell = \ell'$ et on a le résultat
- Sinon on note $w_n = u_n - v_n$ et on a ainsi $w_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang donc vu (w_n) converge vers $\ell'' = \ell - \ell'$ alors $\ell \geqslant \ell'$ □

Propriété.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles telles que (v_n) converge vers 0.
On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que apcr $|u_n - \ell| \leqslant v_n$
Alors (u_n) converge vers ℓ

* Si la somme et/ou le produit ne sont pas des formes indéterminée de $\overline{\mathbb{R}}$

Théorème d'encadrement.

Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles telles que apcr $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.
On suppose que (v_n) et (w_n) converge vers une même limite.
Alors (u_n) converge vers cette limite commune.

Démonstration. On a à partir d'un certain rang $0 \leqslant u_n - v_n \leqslant w_n - v_n$ et $(w_n - v_n)$ converge vers 0 donc d'après la propriété précédente $(u_n - v_n)$ converge vers 0, or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (u_n - v_n) + v_n$ d'où $\lim u_n = \lim(u_n - v_n) + \lim v_n = \lim v_n$ □

Proposition.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelle, on suppose apcr $u_n \leqslant v_n$

$$\text{Alors} \begin{cases} \text{Si } u_n \underset{n}{\to} +\infty \text{ alors } v_n \underset{n}{\to} +\infty \\ \text{Si } v_n \underset{n}{\to} -\infty \text{ alors } u_n \underset{n}{\to} -\infty \end{cases}$$

Théorème de la limite monotone.

Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle, on note $X = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, on note donc ℓ sa borne supérieur (qui existe). On a alors par croissance de (u_n) et caractérisation de la borne supérieur $u_n \underset{n}{\to} \ell$. □

Suites adjacentes Deux suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont dites adjacentes si elles sont de monotonies contraires et si $\lim(u_n - v_n) = 0$

Lemme.

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
Alors $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ u_p \leqslant v_q$

Théorème des suite adjacentes.

Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

Démonstration. Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. On suppose sans perte de généralité (v_n) décroissante. D'après le lemme on a alors (u_n) croissante majorée par v_0 donc d'après le théorème de la limite monotone (u_n) converge vers $\ell \leqslant v_0$. De même (v_n) converge vers $\ell' \geqslant u_0$ puis vu $\lim(u_n - v_n) = 0$ on a $\ell = \ell'$ □

Extractrice On a appelle extractrice toute application $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Propriété.

Si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extractrice alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) \geqslant n$

Suite extraite Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles. On dit que (v_n) est extraite de (u_n) s'il existe $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un extractrice telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\sigma(n)}$$

Proposition.

Si une suite possède une limite, toute ses suites extraites possèdent la même limite.

Propriété.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle
On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une même limite ℓ.
Alors (u_n) tend vers ℓ

Théorème de Bolzano-Weierstrass .

Tout suite réelle bornée admet une suite extraite qui converge.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée.
On considère $A = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \Rightarrow u_n < u_p\}$
On construit alors une extractrice σ telle que $(u_{\sigma(n)})$ est strictement décroissante :
• Si A est infinie, on pose $\sigma(0) = \min A$ (principe de bon ordre) puis $\forall p \in \mathbb{N}$, on pose $\sigma(p+1) = \min\left(A \cap]\!]\sigma(p), +\infty[\![\right)$
On a alors $(u_{\sigma(n)}$ strictement décroissante et minorée donc convergent d'après le théorème de la limite monotone.
• Si A est fini, on pose $\sigma(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } A \text{ est vide} \\ \max A + 1 \text{ sinon} \end{cases}$
On a alors vu $\sigma(0) \notin A$, $\exists n > \sigma(0)\ :\ u_n \geqslant u_{\sigma(0)}$, ainsi on pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sigma(p+1) = \min\{n > \sigma(p) \mid u_n \geqslant u_{\sigma(p)}\}$ (qui existe vu $\sigma(p) \notin A$
$(u_{\sigma(p)})$ est donc croissante et majorée et par suite convergente. □

Convergence (cas complexe) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ on dit que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\right)$$

Proposition.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe, alors (u_n) converge ssi $\left(\Im(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\Re(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

On a alors $\begin{cases} \Re(\lim u_n) = \lim \Re(u_n) \\ \Im(\lim u_n) = \lim \Im(u_n) \end{cases}$

Théorème de Bolzano-Weierstrass : cas complexe.

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite qui converge.

Démonstration. Clair avec le théorème dans le cas réel vu $\forall z \in \mathbb{C},\ \Re z \leqslant |z|$ et $\Im z \leqslant |z|$ □

Proposition : Caractérisation séquentielle de la densité.

Un partie X de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel peut s'écrire comme une suite d'éléments de X.

6.2.2 Suites particulières

Suite arithmétique On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique si la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante appelée raison de la suite arithmétique.

Propriété.

Si u est une suite arithmétique de raison r on a

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ u_p = u_q + r(p - q)$$

Suite géométrique On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique si u est stationnaire à 0 où si u est telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bien définie constante appelée raison de la suite géométrique.

Propriété.

Si u est une suite géométrique de raison q alors

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ u_m = u_n \times q^{m-n}$$

$$\sum_{k=n}^{m} u_k = \begin{cases} (m - n + 1) \times u_n & si\ q = 1 \\ \frac{u_n - u_{m+1}}{1-q} & sinon \end{cases}$$

Suite arithmético-géométrique On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique s'il existe $a \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{K}$ tels que $u_0 \in \mathbb{K}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$

Propriété.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique, alors avec les mêmes notations

$$\forall \in \mathbb{N},\ u_n = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)\frac{b}{1-a}$$

Suite récurrente linéaire d'ordre 2 On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 si $\exists (a,b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_n + bu_n$

Propriété.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
On considère $(E)\ :\ z^2 = az + b$ l'équation caractéristique associée alors
→ Si $\Delta \neq 0,\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ les racines distinctes de (E) alors
$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$
→ Si $\Delta = 0,\ z_0$ la racine double de (E) alors
$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) z_0^n$

Rq : Si $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\Delta < 0$ alors λ et μ sont conjugué et on a en écrivant $z_1 = \rho + \imath . \omega$
$\exists(\lambda_r, \mu_r) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \big(\lambda_r \cos(n\omega) + \mu_r \sin(n\omega)\big)$

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 7

Fonctions d'une variable réelle

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point à valeur dans $\mathbb{R}$ sauf indications contraires.

Contenu

Voisinage Une propriété portant sur f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur $]a+\delta, a-\delta[$ pour un certain $\delta > 0$ si $a \in \mathbb{R}$; sur $]A, +\infty[$ ou $]-\infty, A[$ sinon.

7.1 Limites et Continuité

7.1.1 Limite d'une fonction en un point

Limite d'une fonction Soit f une fonction, f admet une limite ℓ en $a \in D_f$ notée $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon, \exists \delta < 0 : \forall x \in I, \ \big(|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\big)$$

Propriété : Unicité de la limite.

Si la limite de f en a existe alors elle est unique

Proposition : Continuité en un point.

Si f est définie en a et admet une limite en a alors

$$\lim_{x \to a} = f(a)$$

On dit alors que f est continue en a

Propriété.

Si f possède une limite finie en un point a
alors f est bornée sur un voisinage de a

Propriété : Signe au voisinage de a.

Si f admet une limite finie non nulle en a alors f est du signe (strict) de cette limite sur un voisinage de a

Théorème de caractérisation séquentielle de la limite.

f admet ℓ comme limite en $a \in I$ si, et seulement si
pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a, $f(u_n)$ tend vers ℓ.

Démonstration. Soit ℓ la limite de f en $a \in I$
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\varepsilon > 0$; soit $\delta > 0$ vérifiant la propriété de limite.
On considère $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - a| < \delta$ et on a ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow \ |f(u_n) - \ell| < \varepsilon$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposée, on considère $\varepsilon_0 > 0$ tel que
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_, \in I$ tel que $|x_n - a| \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon_0$
On a ainsi $(x_n)_{n \geqslant 0} \in I^{\mathbb{N}}$ convergente vers a avec $\big(f(x_n)\big)$ qui ne converge pas vers ℓ.

Les preuves pour pour les limites infinies et/ou en l'infini sont analogue. □

Proposition : opérations sur les limites.

L'opérateur "limite" est stable par somme, produit, quotient et composition.*

---

*. Dans ce cas seulement si la limite au dénominateur est non nulle et que le quotient n'est pas une forme indéterminée de $\overline{\mathbb{R}}$

Proposition.

> *Soit a un point de I*
> *On suppose que $f \leqslant g$ sur un voisinage de a, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$*
> *Alors $\ell \leqslant \ell'$*

Théorème d'encadrement.

> *Soit f, g, h trois fonctions telles que sur un voisinage de $a \in I$*
> *on a $h \leqslant f \leqslant g$. On suppose que h et g converge vers*
> *une même limite ℓ en a, alors f converge vers ℓ en a*

Démonstration. Clair avec la définition et en considérant le plus petit δ □

Théorème de la limite monotone.

> *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction croissante sur $]a, b[$.*
> *Alors f admet une limite à gauche et une limite à droite*
> *en tout point $x_0 \in]a, b[$ avec*
> $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$
> *Si de plus f est majorée (resp. minorée) sur $]a, b[$ alors elle admet*
> *une limite à gauche en b (resp. à droite en a)*

Démonstration. Soit $x_0 \in]a, b[$, on considère $f_d(]a, x_0[)$ et ℓ sa borne supérieure (existe). On peut ensuite montrer que $f(x) \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} \ell$ puis on fait de même avec $f_d(]x_0, b[)$ □

7.1.2 Continuité en un point

Continuité Soit f définie sur I à valeur réelles, on dit que <u>f est continue au point $a \in I$</u> si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$

Prolongement par continuité Si f admet une limite finie l en un point a de $\mathbb{R}$ et si f n'est pas définie en a, on appelle <u>prolongement par continuité de f en a</u> la fonction égale à f sur son domaine de définition et à l en a.

Proposition : caractérisation séquentielle de la continuité.

> *f est continue en $a \in I$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in I^{\mathbb{N}}$*
> *qui converge vers a, $\big(f(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(a)$*

Propriété.

> *Si f et g sont deux fonction continues en un point a de I, alors $f + g$ et fg sont continues en a. Si de plus $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.*
> *Si h est continue en $f(a)$ alors $h \circ f$ est continue en a*

7.1.3 Continuité sur un intervalle

Définition On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
On note $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continue sur I à valeur dans $\mathbb{R}$

Théorème des valeurs intermédiaires .

Si $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in I^2$
Alors f prend sur I toute les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Démonstration. On considère $\alpha = \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) < c\}$ et on a alors par continuité de f $\neg(f(\alpha) < c \vee f(\alpha) > c) \Leftrightarrow f(\alpha) = c$ □

Propriété.

Soit f une fonction continue sur un segment alors f est bornée sur ce segment et f atteint ses bornes.

Corollaire.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Proposition.

Soit f est continue sur I à valeurs réelles, on suppose f est injective sur I
Alors f est strictement monotone sur I

Démonstration. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, on suppose sans perte de généralité que $f(a) < f(b)$ alors f est strictement croissante sur $[a, b]$, en effet :

Par l'absurde, soit $(x, y) \in]a, b[^2$ tel que $a < x < y < b$ et $f(x) > f(y)$
On considère alors $g \begin{pmatrix} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f\big((ta + (1 - t)x\big) - f\big(tb + (1 - t)y\big) \end{pmatrix}$ continue sur $[0, 1]$

Vu $g(0) = f(x) - f(y) > 0$ et $g(1) = f(a) - f(b) < 0$ par le TVI g s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$ donc f prend deux fois la même valeur en deux points distincts de $[a, b]$ ce qui est impossible d'où cqfd □

Théorème de la bijection réciproque.

Toute fonction réelle définie et continue strictement monotone sur un intervalle admet une fonction réciproque de même monotonie sur l'intervalle image.

Démonstration. Soit f strictement croissante et continue sur I alors f réalise un bijection de I sur $J = f_d(I)$. On considère alors f^{-1}
D'après le théorème de la limite monotone f^{-1} est continue à droite et à gauche en tout point de l'intervalle ouvert et par injectivité ces limites sont égales donc f^{-1} est continue sur l'intervalle ouvert puis fermé donc strictement monotone avec les monotonie clairement identiques. □

7.1.4 Fonctions à valeurs complexes

$f : I \to \mathbb{C}$ et x_0 un point ou une extrémité de I. f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x \in I,\ \big(|x - x_0| \leqslant \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big)$$

Si $x_0 \in I$ alors $f(x_0) = \ell$ et f est continue en x_0. On note $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Théorème : caractérisation des limites par les parties réelles et imaginaires.

$f : I \to \mathbb{C}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en x_0 si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ admettent des limites $(\ell_r, \ell_i) \in R^2$.
On a alors $\ell = \ell_r + \imath \ell_i$

Démonstration. Clair vu $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant |\Re(z)| + |\Im(z)|$ et $\max\big(|\Re(z)|, |\Im(z)|\big) \leqslant |z|$ □

7.2 Dérivabilité

Dérivabilité en un point f est dérivable en un point a de I si

$$\tau_a(f) \begin{pmatrix} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{pmatrix}$$

le taux d'accroissement de f en a admet une une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a. On note $f'(a)$ cette limite.

Proposition.

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Propriété.

f est dérivable en a si et seulement si il existe une fonction ε définie sur un voisinage de 0 telle que

$$f(a+h) = f(a) + h \times \ell + h\varepsilon(h)$$

où $\ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. On a alors $\ell = f'(a)$

Dérivabilité sur un intervalle On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. On note alors f' sa fonction dérivée qui à tout point a de I associe $f'(a)$

Propriétés.

Soit f, g deux fonction dérivables en a alors
- *$f + g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$*
- *fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$*
- *Si $g'(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$*

Soit h dérivable en $f(a)$
Alors $h \circ f$ est dérivable en a et $(h \circ f)'(a) = f'(a) \times h'\big(f(a)\big)$

Proriété.

Si f est bijective de I sur J dérivable en $a \in I$
Alors f^{-1} est dérivable en $f(a) = b$ si et seulement si $f(a) \neq 0$.
On a alors $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$

7.2.1 Extremum local et point critique

Extremum local

Maximum On dit que f présente un maximum local en $a \in I$ s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I, \ \ f(x) \leqslant f(a)$$

Minimum La définition est analogue

Point critique Un point critique est un zéro de la dérivée.

Propriété.

Soit a est un point intérieur à I et f dérivable en a.
On suppose que f présente un extremum local en a, alors a est un point critique.

Rq : Si a un point intérieur à I est un point critique et si f ne présente pas d'extremum local en a, on dit que a est un point d'inflexion de f.

7.2.2 Théorèmes de Michel Rolle et des accroissements finis

Théorème de Michel Rolle.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ à valeurs réelles. On suppose $f(a) = f(b)$
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Démonstration. Si f est constante sur $[a, b]$ c'est vrai.
Sinon l'image continue de $5a, b]$ par f est un segment $[M, m]$ avec M ou m différent de $f(a) = f(b)$ atteint en $c \in]a, b[$ qui est alors un point critique de f d'où cqfd □

Théorème des accroissements finis.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f continue sur $[a, b]$
à valeurs réelles et dérivable sur $]a, b[$
Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Démonstration. On considère $h_{a,b}$ la corde à $\mathcal{C}_f$ joignant les points d'abscisse b et a. Soit ensuite

$$g : x \mapsto f(x) - h_{a,b}(x) = f(x) - \left(f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$$

On a alors g continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $g(a) = 0 = g(b)$ soit donc d'après le théorème de Michel Rolle né à Ambert en 1652 $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ or $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ d'où cqfd □

Corollaire : Inégalité des accroissements finis.

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
On suppose $\exists k \in R$ tel que $\forall x \in]a, b[, \ |f'(x)| \leqslant k$
Alors $|f(b) - f(a)| \leqslant k\,|b - a|$

Fonction lipschitzienne On dit que <u>f est k-lipschitzienne sur I</u> si

$$\forall x \in]x, y[\in I^2, \ |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$$

On dit que <u>f est lipschitzienne sur I</u> s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que f est k-lipschitzienne

---

Propriété.

Si f est lipschitzienne sur I alors f est continue sur I

Propriété.

Si f est dérivable sur I telle que $\forall x \in I, \ |f'(x)| \leqslant k$
Alors f est k-lipschitzienne sur I

Propriété.

Soit f dérivable sur I à valeurs réelles
(1) f est constante sur I si et seulement si f' est identiquement nulle sur I.[*]
(2) f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
(3) f est strictement croissante sur I si et seulement si

$$\begin{cases} f' \text{ est positive sur } I \\ \text{Il n'existe pas } J \subset I \text{ contenant deux points distincts avec } f' \text{ nulle sur } J \end{cases}$$

Théorème de la limite de la dérivée.

Soit $a \in I$. Si f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$
On suppose $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$

Démonstration. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, il existe par le théorème des accroissements finis c_x strictement compris entre x et a tel que $f(x) - f(a) = f'(c_x) \times (x - a)$.
Si x tend vers a alors par encadrement c_x tend vers a et par composition de limites $f(c_x)$ tend vers ℓ.
Ainsi $\tau_a(f)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell = f'(a)$ □

Corollaire.

Si f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ avec $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = +\infty$
Alors f n'est pas dérivable en a et C_f admet une tangente verticale en a

7.2.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, $(k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\})$

---

[*]. Ceci reste vrai si f est définie sur I à valeurs complexes

Définitions Une fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^0$ sur I si elle est continue sur I. Elle est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si elle est k fois dérivable sur I et si sa dérivée k-ième est continue sur I. Elle est dite de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$

Propriété.

(1) Les fonction polynômiales sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
(2) Les fonction rationnelles (quotient de fonctions polynômiales) sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.
(3) Les fonctions sin *et* cos *sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$*
(4) Les fonction exponentielles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$
(5) Les fonction logarithme et puissances sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$

Proposition.

Soit f une fonction et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$
Alors f est de classe $\mathscr{C}^{p+q}$ sur I si et seulement si $f^{(p)}$ est de classe $\mathscr{C}^q$ sur I

$$\text{On a alors } \left(f^{(p)}\right)^{(q)} = f^{(p+q)}$$

Proposition.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $f, g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$
Alors $f + g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ et $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$

Théorème : Formule de Leibniz.

Soit $n \in \mathbb{N}$; soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I
Alors fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n)} g^{(n-k)}$$

Démonstration. Clair par récurrence sur n. □

Proposition : Formule de Faa Di Bruno.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I à valeur dans un intervalle J non trivial, g est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J
Alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$

Corollaire.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I avec $0 \notin g_d(I)$

$$\text{Alors } \frac{1}{g} \text{ et } \frac{f}{g} \text{ sont de classe } \mathscr{C}^n \text{ sur } I$$

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si f est bijective de I sur J de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et si f ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

7.3 Convexité

7.3.1 Généralités

Fonction convexe Soit f une fonction à valeurs réelles. On dit que f est convexe sur I si

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda - f(y)$$

Fonction concave On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I

Théorème : Inégalité de Jensen.

Si f est convexe sur I alors $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$
$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in I^n,\ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ avec $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$

$$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration. On a le résultat par récurrence en barycentrant en divisant par $1 - \lambda_{n+1}$ (cas $\lambda_n + 1 = 1$ trivial) puis en appliquant la propriété au rang 2 (inégalité de convexité) □

Propriété : Lemme des pentes.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ on a équivalence entre les propriétés suivantes :
(1) f convexe sur I
(2) $\forall (a,b,c) \in I^3$ avec $a < b < c$, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$
(3) $\forall x_0 \in I,\ \tau_{x_0}(f)$ est croissant

7.3.2 Fonctions convexes dérivables et deux fois dérivables

Proposition : Caractérisation des fonctions convexes dérivables.

Soit f un fonction dérivable sur I alors
f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.

Corollaire.

Si f est convexe sur I alors C_f est située au-dessus de ses tangentes.

Proposition.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I alors
f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 8

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Contenu

8.1 Relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$

8.1.1 Principe de bon ordre

Théorème : Pincipe de bon ordre dans $\mathbb{N}$.

*Toute partie **non vide** de $\mathbb{N}$ aadmet un plus petit élément.*

Corollaire : Propriété archimédienne.

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a \times n \geq b$.

8.1.2 Multiples et partie $a\mathbb{Z}$

Notation Si $a \in \mathbb{Z}$ alors on note $a\mathbb{Z} = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$
Si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ alors $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ka + lb \mid (k, l) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Propriété.
Toute partie de $\mathbb{Z}$ stable par somme est une partie de la forme $m\mathbb{Z}$ avec $m \in \mathbb{N}$.

Multiple Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ on dite que b est un multiple de a (ou a divise b) et on note $a|b$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}\ :\ b = ka$.

Propriété.
Si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ alors on a $a|b \Leftrightarrow b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$

8.2 Algorithme de division euclidienne

Théorème.
Soit $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*$ alors il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ unique tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$
On appelle q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

Démonstration. Unicité : claire
Existence : On considère $S = \{a - bk \mid k \in \mathbb{Z} \wedge a - bk \geq 0\}$ on a alors $S \neq \varnothing$ puis on pose $r = \min(S)$ avec $r < b$ sinon $r - b = a - b(k_0 + 1) \geq 0$ donc $0 \leq r < b$ □

8.3 pgcd et ppcm

8.3.1 Egalité de Bézout

Lemme.
Si $a|b$ et $b \neq 0$ Alors $|a| \leq |b|$

pgcd Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}^*$, le plus grand commun diviseur de a et b est l'entier naturel d vérifiant les conditions suivantes : $\begin{cases} {}_{(1)}\ d|a \text{ et } d|b \\ {}_{(2)}\ \forall c \in \mathbb{Z},\ c|a \text{ et } c|b \ \Rightarrow\ c \leq d \end{cases}$

Propriété.
Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$ il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = a \wedge b$

Propriétés.
Soit $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ et $m \in \mathbb{Z}$ Alors
-> $a \wedge (b + ma) = a \wedge b = a \wedge (-b)$
-> $ma \wedge mb = |m|\,(a \wedge b)$
-> si $d = a \wedge b$, $\frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = 1$
-> si $g \in \mathbb{Z}^*$, $g|a$ et $g|b \ \Rightarrow\ \frac{a}{g} \wedge \frac{b}{g} = \frac{1}{|g|}(a \wedge b)$

8.3.2 Algorithme d'Euclide

Lemme.

Soit (q,r) le quotient et le reste de la division euclidienne de $a \in \mathbb{Z}$ par $b \in \mathbb{N}^*$
Alors $a \wedge b = b \wedge r$

Démonstration. $a \wedge b = (a - bq) \wedge b = r \wedge b$ □

Algorithme Soit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ On pose $r_0 = a$, $r_1 = b$ et r_2 le reste de la division euclidienne de r_0 par r_1.
-> Si $r_n = 0$ alors $a \wedge b = r_{n-1}$ sinon on considère r_{n+1} le reste de la division euclidienne de r_{n-1} par r_n avec $r_{n-1} \wedge r_n = r_{n-2} \wedge r_{n-1} = \cdots = a \wedge b$

Algorithme d'Euclide étendu
Si on souhaite obtenir les coefficients de Bézout en même temps que le pgcd, on détermine à chaque étape $(u_k, v_k) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $r_k = au_k + bv_k$ avec

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_{n-1} - q_n u_n \\ v_{n+1} = v_{n-1} - q_n v_n \end{cases}$$

---

ppcm Soit $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ le plus petit commun multiple de a et b est l'entier naturel m vérifiant les conditions suivantes : $\begin{cases} {}_{(1)}\ a|m \text{ et } b|m \\ {}_{(2)}\ \forall c \in \mathbb{Z},\ a|c \text{ et } b|c \ \Rightarrow\ m \leq c \end{cases}$

Propriété.

Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$ Alors $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$

Propriété.

Soit $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ Alors $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$

8.4 Entiers premiers entre eux

Définition Deux entiers $a, b \in \mathbb{Z}^*$ sont dits premiers entre eux si $a \wedge b = 1$

Proposition.

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ deux entiers alors
a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$

Lemme de Gauss.

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ on a
Si c divise ab et c est premier avec a alors c divise b.

Propriété.

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ on a
Si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, a_i est premier avec c alors $\prod_{i=1}^{n} a_i$ est premier avec c

Lemme.

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ Alors $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b \wedge c$

Entiers premiers entre eux dans leur ensemble Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{Z}^*)^n$ On dit que $(a_1, \ldots, a_n)$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = 1$,
Ceci équivaut à l'existence de $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} u_i a_i = 1$

8.5 Nombres premiers

Définition On dit qu'un entier naturel p est (un nombre) premier si $p \geq 2$ et si les seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ de p sont 1 et lui-même

---

Un nombre qui n'est pas premier est dit composé.

Lemme.

Tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier

Corollaire.

L'ensemble des nombres premiers est inifini.

Lemme.

Si p est un nombre premier et $a \in \mathbb{N}$
Alors $a \wedge p = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p \not| a$

Lemme d'Euclide.

Soit p un nombre premier et $a, b \in \mathbb{Z}$
Si $p | ab$ alors $p | a$ ou $p | b$

Théorème fondamental .

Tout nombre entier supérieur à 2 s'écrit comme produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Démonstration. Existence : Par récurrence forte avec l'existence d'un diviseur premier
Unicité : Si $p = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^{l} q_j^{\beta_j}$ avec p_i, q_j premiers distincts
On pose $i_0 \in [\![1, m]\!]$ et on a alors $p_{i_0} | \prod_{j=1}^{l} q_j^{\beta_j}$ donc il existe j_0 tel que $p_{i_0} | q_{j_0}^{\beta_{j_0}}$ soit $p_{i_0} = q_{j_0}$ Ainsi $\{p_1, \ldots, p_m\} = \{q_1, \ldots, q_l\}$ et $m = l$
On suppose $p_k = q_k$ et $\alpha_k < \beta_k$ avec $k \in [\![1, m]\!]$ alors $q_k^{\beta_k - \alpha_k} | \prod_{i=i \in [\![1,m]\!] \setminus \{k\}} p_i^{\alpha_k}$ soit $q_k | p_i$; $q_k = p_i$ avec $k \neq i$ impossible □

Valuation p-adique Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle valuation p-adique de n l'exposant de p dans la décomposition de n en produits de facteurs premiers.

Lemme.

$\forall(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *on a* $m|n \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}$ *premier,* $v_p(m) \leq v_p(n)$

Proposition.

$\forall(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$a \wedge b = \prod_{p \text{ premier}} p^{\min\left(v_p(a), v_p(b)\right)}$ *et* $a \vee b = \prod_{p \text{ premier}} p^{\min\left(v_p(a), v_p(b)\right)}$

Propriété.

$\forall(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, $\forall p$ *premier,* $v_p\Big(\prod_{i=1}^n a_i\Big) = \sum_{i=1}^n v_p(a_i)$

8.6 Congruences

Définition Soit $n \in \mathbb{Z}$ la relation de congruence modulo n est définie par $a \equiv b[n] \Leftrightarrow n|a-b$
a est congru à b modulo n.

Propriétés.

$\forall(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$, $n \in \mathbb{N}$ *on a*
1) $a \equiv b[n]$ *et* $c \equiv d[n] \quad \Rightarrow \quad ac \equiv bd[n]$
2) $a \equiv b[n]$ *et* $c \equiv d[n] \quad \Rightarrow \quad a+c \equiv b+d[n]$
3) $a \equiv b[n] \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ ka \equiv kb[n]$
3) $a \equiv b[n] \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ a^k \equiv b^k[n]$

Lemme.

Si $p \in \mathbb{N}$ *est un nombre premier et* $k \in [\![1, p-1]\!]$ *Alors* $p \mid \binom{p}{k}$

Petit théorème de Fermat.

Soit $p \in \mathbb{N}$ *un nombre premier*
Alors *1)* $\forall a \in \mathbb{Z},\ a^p \equiv a[p]$
2) Si $a \wedge p = 1$ *alors* $a^{p-1} \equiv 1[p]$

Démonstration. 1) si $p=2$: $\forall a \in \mathbb{Z}$, a^2 et a on la même parité d'où $a^2 \equiv a[2]$
$p \geq 3$ (impair) : Par récurrence sur $a \in \mathbb{N}$ vu $(a+1)^p \equiv a^p + 1[p]$
2) $\forall a \in \mathbb{Z},\ p \mid a^p - a = a(a^{p-1}-1)$ donc si $a \wedge p = 1$ on a $a^{p-1} \equiv 1[p]$ (Lemme de Gauss) □

Entier inversible On dit que $a \in \mathbb{Z}^*$ est inversible modulo n ($n \in \mathbb{Z}^*$) s'il existe $a' \in \mathbb{Z}$ tel que $a \times a' \equiv 1[n]$

Propriété.

Soit $a \in \mathbb{Z}^*$ *alors* a *est inverible si et seulement si* $a \wedge n = 1$

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 9

Structures algébriques usuelles

Contenu

9.1 Lois de composition interne

Définition Une loi de composition interne sur un ensemble E est une application

$$* \begin{pmatrix} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \mapsto & x * y \end{pmatrix}$$

→ $*$ est associative si $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x * y) * z = x * (y * z)$
→ $*$ est commutative si $\forall (x, y) \in E^2,\ x * y = y * x$
→ $*$ admet un élément neutre e si $\forall x \in E,\ e * x = x * e = x$
→ $x \in E$ est dit inversible s'il existe e un élément neutre
et $x' \in E\ :\ x * x' = x' * x = e$

Sous réserve d'existence, l'élément neutre et l'inverse sont uniques et on note $x' = x^{-1}$

Exemple $\times$ sur $\mathbb{Z}$ est une loi de composition interne associative et commutative de neutre 1.
Les seuls éléments inversible pour $\times$ sur $\mathbb{Z}$ sont 1 et -1.

Propriété.
Soit E muni d'une loi de composition interne associative $*$.
Si x et y sont deux éléments inversibles de E
Alors $x * y$ est inversible et $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

Partie stable Soit E muni d'une loi de composition interne $*$. On dit que $F \in \mathcal{P}(E)$ est stable pour $*$ si

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ x * y \in F \text{ et } y * x \in F$$

9.2 Structure de groupe

Groupe Soit un ensemble G muni d'un loi de composition interne $*$, on dit que $(G, *)$ est un groupe si $*$ est associative ; $e \in G$ est un élément neutre pour $*$ et tout élément $x \in G$ est inversible.

Groupe abélien On dit que $(G, *)$ est un groupe abélien (ou commutatif) si $(G, *)$ est un groupe et $*$ est commutative sur G.

Groupe produit Soit $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes on appelle groupe produit de G_1 et G_2 l'ensemble $G_1 \times G_2$ muni de la loi $*$ définie par

$$\forall \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \in G_1^2 \times G_2^2,\ (x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 *_1 y_1, x_2 *_2 y_2)$$

Propriété.
$G_1 \times G_2, *)$ est un groupe.

Sous-groupe Soit $(G, *)$ un groupe. On dit que $F \subset G$ est un sous-groupe de G si $F \neq \varnothing$; F est stable par $*$ et $\forall x \in F,\ x^{-1} \in F$.

Propriété.
Si F est un sous-groupe de $(G, *)$ alors $(F, *)$ est un groupe.

Propriété.
Soit $F \subset G$ alors
F est un sous-groupe de $G \Leftrightarrow\ F \neq \varnothing$ et $\forall (x, y) \in F^2,\ x * y^{-1} \in F$

Morphisme de groupe Soit $(G_1, * - 1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupe et $f : G_1 \to G_2$. On dit que f est un morphisme de groupe si

$$\forall (x, y) \in G_1^2, \ f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)$$

Propriété.

Soit $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes et $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupe
Alors $\begin{cases} \forall F_1 \subset G_1 \text{ sous-groupe de } G_1, \ f(F_1) \text{ est un sous-groupe de } G_2 \\ \forall F_2 \subset G_2 \text{ sous- groupe de } G_2, \ f^{-1}(F_2) \text{ est un sous-groupe de } G_1 \end{cases}$

Image et noyau Soit $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes et $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupe, on défini l'image et le noyau de f et on note respectivement $Im(f) = f(G_1)$ et $Ker(f) = f^{-1}(\{e_2\})$ ($Im(f)$ *et* $Ker(f)$ *sont des sous-groupes respectifs de* G_2 *et* G_1)

Proposition.

Soit $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes et $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupe
Alors $\begin{cases} f \text{ est surjectif} \Leftrightarrow \ Im(f) = G_2 \\ f \text{ est injectif} \Leftrightarrow \ Ker(f) = \{e_1\} \end{cases}$

Isomorphisme de groupe Soit $f : (G_1, *_1) \to (G_2, *_2)$ un morphisme de groupe. On suppose que f est bijectif, alors $f^{-1} : (G_2, *_2) \to (G_1, *_1)$ est un morphisme de groupe bien défini.
On appelle isomorphisme un tel morphisme.

Démonstration. Soient $x', y' \in G_2$; soient $x, y \in G_1$ tels que $x = f^{-1}(x')$ et $y = f^{-1}(y')$, on a $f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y) = x' *_2 y'$ donc $f^{-1}(x' *_2 y') = x *_1 y = f^{-1}(x') *_1 f^{-1}(y')$ d'où cqfd □

9.3 Structure d'anneau et de corps

9.3.1 Structure d'anneau

Loi distributive Soit E un ensemble muni de deux lois de composition interne $\oplus$ et $\otimes$. On dit que $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$ si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \ \begin{cases} x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \\ (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z) \end{cases}$$

Anneau Soit A un ensemble muni de deux lois de composition internes $\oplus$ et $\otimes$. On dit que $(A, \oplus, \otimes)$ est un anneau si

- $(A, \oplus)$ est un groupe abélien
- $\otimes$ est associative et distributive par rapport à $\oplus$
- Il existe un élément neutre 1_A pour $\otimes$

On notera maintenant de manière équivalente $\otimes$, $\times$ et . ainsi que $\oplus$ et $+$

Propriété.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau, si on note A^* l'ensemble des éléments inversible de A alors $(A, \times)$ est un groupe.

Anneau intègre Soit $(A, +, .)$ un anneau, on dit que $(A, +, .)$ est intègre si

$$\forall (a, b) \in A^2,\ ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ ou\ b = 0$$

Sous-anneau Soit $A(+, \times)$ un anneau et $B \subset A$ alors B est un sous-anneau de A si B est un sous-groupe de A pour $+$, $1_A \in B$ et B est stable par $\times$.

Propriété.

Un sous-anneau est un anneau pour les lois induites.

Morphisme d'anneau Soit $(A_1, +_1, \times_1)$ et $(A_2, +_2, \times_2)$ deux anneaux et $f : A_1 \to A_2$, Alors f est un morphisme d'anneaux si

$$\forall (x, y) \in A_1^2, \quad \begin{array}{l} f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y) \\ f(x \times_1 y) = f(x) \times_2 f(y) \\ f(1_{A_1}) = 1_{A_2} \end{array}$$

Propriétés.

Soit $(A_1, +_1, \times_1)$ et $(A_2, +_2, \times._2)$ deux anneaux et $f : A_1 \to A_2$ un morphisme d'anneaux Alors $\forall a \in A_1^*,\ f(a) \in A_2^*$ avec $\big(f(a)\big)^{-1} = f\big(a^{-1}\big)$

9.3.2 Structure de corps

Corps Soit K un ensemble muni de deux lois de compositions interne $+$ et $\times$ on dit que $(K, +, \times)$ est un corps si

- $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif
- Tout élément de K différent de 0_K est inversible ($K^* = K \backslash \{0\}$)

Sous-corps Soit $(K,+,\times)$ un corps et $P \subset K$ alors P est un sous-corps si P est un sous-anneau de K, $P^* = P\backslash\{0\}$ et $\forall x \in P^*,\ x^{-1} \in P$

Propriété.

Soit $(K,+,\times)$ un corps et $P \subset K$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :
1) P est un sous-corps de K *2) $(P,+,\times)$ est un corps*
3) P est un sous-groupe de K pour $+$ et $P\backslash\{0\}$ est un sous groupe de K^* pour $\times$

Propriété.

Soit $(K,+_1,\times_1)$ un corps et $(A,+_2,\times_2)$ un anneau
Soit $f : K \to A$ un morphisme d'anneaux, alors f est injectif

$\star \quad \star \quad \star$

Chapitre 10

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Contenu

10.1 Opérations sur les matrices

Définition d'une matrice *Soit* $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$
Une matrice à n lignes et p colonnes est une application

$$M\begin{pmatrix} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \to \mathbb{K} \\ (i,j) \mapsto M_{i,j} & \end{pmatrix}$$

$$\textit{On note} \qquad M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & \ddots & \vdots \\ \ddots & m_{i,j} & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

10.1.1 Somme et Produit matriciel

Somme $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}^2(\mathbb{K})$,
$$A + B = C \iff \forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad a_{i,j} + b_{i,j} = c_{i,j}$$

Structure.

$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ *est un groupe abélien et* $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = 0_{n,p}$

Combinaison linéaire Si $l \in \mathbb{N}^*$, $(A_i)_{i\in[\![1,l]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}^l(\mathbb{K})$, $(\lambda_i)_{i\in[\![1,l]\!]} \in \mathbb{K}^l$

$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i A_i$ est une combinaison linéaire de $(A_i)_{i\in[\![1,l]\!]}$

Produit On peut effectuer le produit matriciel de A et B si A a autant de colonnes que B a de lignes. Soit donc $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C = A.B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$
$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!] \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Note Le produit matriciel est bilinaire et associatif.
$$\forall (A, A') \in \mathcal{M}_{n,p}^2(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2 \qquad (\lambda A + \lambda' A').B = \lambda AB + \lambda' A' B$$
$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,l}(\mathbb{K}) \qquad ((A.B).C) = (A.(B.C)$$

10.1.2 Matrice élémentaire

Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont les matrices $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ dont tout le coefficients sont nuls celui en ligne i et colonne j qui vaut 1.
$$\forall (k, l) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!] \qquad E_{i,j}(k, l) = \delta_{i,k}\delta_{j,l}$$

Propriété.

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une combinaison linéaire de matrices élémentaires. De plus, cette décomposition est unique.

Démonstration. $A = (a_{i,j}))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donc $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}$ et $(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} E_{i,j})(k, l) = m_{k,l}$ donc $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a'_{i,j} E_{i,j}$ si et seulement si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ on a $a_{i,j} = a'_{i,j}$ $\square$

Produit de matrices élémentaires Si $(E_{i,j}^{n,p})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ sont les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(E_{k,l}^{p,q})_{(k,l)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,p]\!]}$ celles de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

$$E_{i,j}^{n,p} \times E_{k,l}^{p,q} = \delta_{j,k} E_{i,l}^{n,q}$$

10.1.3 Matrices colonnes

Une matrice colonne est $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Produit matriciel AX.

Si $(A, X) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$
Alors AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Démonstration.

$$A = (C_1 \quad \cdots \quad C_2) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (C_1 \quad \cdots \quad C_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Y$$

avec $\forall j \in [\![1,n]\!],\ y_j = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{j,k} x_k$ donc $Y = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k C_k$ □

10.1.4 Matrice transposée

Définition Le transposée de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée A^T est la matrice $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ a_{i,j} = b_{j,i}$$

Calculs.

→ $\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$
→ $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad (AB)^T = B^T A^T$

Démonstration.

→ Si $\begin{matrix} A = (a_{i,j}) & A^T = (a'_{i,j}) \\ B = (b_{i,j}) & B^T = (b'_{i,j}) \end{matrix} \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$

$$\begin{aligned} (\lambda A + \mu B)^T(i,j) &= (\lambda A + \mu B)(j,i) = \lambda A(j,i) + \mu B(j,i) \\ &= \lambda(a'_{i,j}) + \mu(b'_{i,j}) = \lambda A^T(i,j) + \mu B^T(i,j) \end{aligned}$$

→ $A = (a_{i,j}),\ B = (b_{i,j}),\ C = AB = (c_{i,j}) \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$

$$C^T(i,j) = c_{j,i} = \sum_{k=1}^{p} a_{k,i} b_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} b'_{i,k} a'_{i,j} = B^T A^T(i,j)$$

□

10.2 Opérations élémentaires

Pour $i \neq j$ des indices de lignes ou colonnes on considère les 4 opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{array}{cc} L_i \leftrightarrow L_j & L_i \leftarrow L_i + L_j \\ L_i \leftarrow \lambda L_i (\lambda \neq 0) & L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \end{array}$$

Proposition.

Chacunes des opérations ci-dessus sur les lignes (resp. les colonnes) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ se traduit par la multiplication à gauche (resp. à droite) par la matrice obtenue en effectuant cette opération sur I_n (resp. I_p)

<u>ex</u> :

$$L_i \leftrightarrow L_j \ : \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} C_1 & & C_i & & C_j & & C_p \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ \\ L_i \\ \\ L_j \\ \\ L_n \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \\ & \ddots & 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \ : \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} C_1 & & C_i & & C_j & & C_p \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ \\ L_i \\ \\ L_j \\ \\ L_n \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \\ & \ddots & 1 & & \lambda & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Lemme.

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall (B, C) \in \left(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\right)^2$ *on a* $A(B + C) = AB + AC$

10.3 Systèmes linéaires

On considère le système linéaire d'inconnues $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ suivant :

$$(S) \ = \ \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

En notant $A = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;
$B = \left(b_i\right)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$; $X = \left(x_j\right)_{j \in [\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ on a

$$(S) \Leftrightarrow AX = B$$

Système homogène Le système homogène associé à (S) est :

$$(S_0) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow AX = 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Système compatible Un système est dit compatible s'il admet au moins une solution.

Propriété.

Si (S) s'écrit matriciellement $AX = B$
Alors (S) est compatible si B est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Structure le l'ensemble des solutions d'un système compatible.

Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les matrices $X_0 + Y$ où X_0 est une solution particulière du système et Y décrit l'ensemble des solutions du système associé.

10.4 Anneau des matrices carrées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrée d'ordre n

Propriété.

Cet anneau n'est pas intègre.

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un anneau non commutatif si $n \geq 2$

Matrice scalaire On appelle matrice scalaire d'ordre n toute matrice de la forme

$$A = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

Matrice symétrique On appelle matrice symétrique d'ordre n toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^T = A$ et on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n

Matrice antisymétrique On appelle matrice antisymétrique d'ordre n toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^T = -A$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n

Propriété.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exists (U, V) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ unique tel que $A = U + V$

Proposition.

$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{K})$ tel que $A.B = B.A$ Alors on a
1) $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p - B^p = (A - B)\sum_{k=1}^{p-1} A^k B^{p-k}$
2) $\forall p \in \mathbb{N},\ (A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$

Lemme.

Les matrices scalaires commuttent avec toutes les matrices.

Matrice diagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow A(i, j) = 0$

Propriété.

Le produit de deux matrices diagonales d'ordre n est une matrice diagonale d'ordre n ; en particulier,

si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix};\ \forall p \in \mathbb{N},\ A^p = \begin{pmatrix} {d_1}^p & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & {d_n}^p \end{pmatrix}$

Matrice triangulaire On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure)
si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i > j \Rightarrow A(i, j) = 0$ (resp. $i < j \Rightarrow A(i, j) = 0$)
On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures)

Propriété.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont stable par produit matriciel.

Matrice inversible On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A.B = B.A = I_n$ et on note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles d'ordre n.

Propriété.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A^T \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

Propriété.

Les matrices correspondantes aux opérations élémentaires sont inversibles.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 ;\ \begin{matrix} P_n(i, j) = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} \\ T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} \\ D_n(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i} \end{matrix} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$$

Corollaire.

Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

Théorème.

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tout ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Démonstration. → voir Chapitre 15 □

Propriété.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \Big(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ (AX = O \Rightarrow X = 0)\Big)$

Corollaire.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Son inverse est alors la matrice diagonale des inverses des coefficients diagonnaux de A.

Propriété.

Si une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible alors son inverse est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure)

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 11

Polynômes et fractions rationnelles

Contenu

11.1 Anneau des polynômes à 1 indéterminée

Anneau des polynômes $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ Soit $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ sationnaires nulles.

$$\forall u \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, (n \leq n_0 \Rightarrow u_n = 0)$$

On définit une addition et une multiplication :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)(n) = u_n + v_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (uv)(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k)v(n-k)$$

On considère la suite $X = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ et on a alors $X^n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ et $X^0 = 1_{\mathbb{K}} = (1, 0, 0, \ldots)$ On peut noter $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$) comme $\mathbb{K}[X]$.
$P = (a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n,\ 0, \ldots) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \in \mathbb{K}[X]$
$(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}[X],\ +,\ \times)$ est l'anneau des polynômes.

Utilisation $(1+X)^{n+m} = (1+X^n(1+X)^m$
$\sum\limits_{l=0}^{n+m} \binom{n+m}{l} X^l = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k = \sum\limits_{j=0}^{m} \binom{m}{j} X^j$ Qui donne

$$\binom{n+m}{l} = \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k}\binom{m}{l-k}$$

11.1.1 Degré d'un polynôme

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$ on appelle degré de P noté deg(P) ou d°(P) :

$$deg(P) = max\{n \in \mathbb{N} | a_n \neq 0\} \quad (P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k)$$

avec par convention le polynôme nul de degré $-\infty$.

Degré de la somme et du produit Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$

$$deg(P+Q) \leq max\{deg(P), deg(Q)\}$$

égalité si $deg(P) \neq deg(Q)$

$$deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$$

Ensemble Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid deg(P) \leq n\}$$

Remarque $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (P, Q) \in (\mathbb{K}_n[X])^2 \qquad \lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$$

Intégrité de l'anneau ($\mathbb{K}[X], +, \times$) $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$

$$PQ = 0 \quad \begin{array}{ll} \Leftrightarrow & deg(PQ) = -\infty \\ \Leftrightarrow & deg(P) + deg(Q) = -\infty \\ \Leftrightarrow & deg(P) = -\infty \text{ ou } deg(Q) = -\infty \\ \Leftrightarrow & P = 0 \text{ ou } Q = 0 \end{array}$$

11.1.2 Composition de polynômes

Si $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$

$$P \circ Q \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k$$

Degré du polynôme composé Si $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \backslash \mathbb{K}_0[X]$

$$deg(P \circ Q) = deg(P) \times deg(Q)$$

Coefficient dominant Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$
a_{degP} s'appelle le coefficient dominant de P. Si il vaut 1 P est dit unitaire.

11.2 Divisibilité et Division Euclidienne

11.2.1 Divisibilité des polynômes

Si $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$
On dit que A divise B si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = AQ$
On note alors $A|B$ (sinon $A \nmid B$)

Propriété Soit $A \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ $A|B \Rightarrow$ degA $\leq$ degB

Preuve $A = BQ \Rightarrow$ degA = degB + degQ $\geq$ degB

11.2.2 Polynômes associés

$(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ est un couple de polynômes associés si

$$A|B \quad B|A$$

$\rightarrow$ (A, B) est un couple de polynômes associés si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}* \ : \ A = \lambda B$$

11.2.3 Division euclidienne polynômiale

Si $B \neq 0$, $B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ avec $b_m \neq 0$

Si $A \in \mathbb{K}[X] \backslash \mathbb{K}_{m-1}[X]$ *il existe* $(Q_0, R_0) \in (\mathbb{K}[X])^2 \ : \ A = BQ_0 + R_0$ *et* $degR_0 < degA$

(Si $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ il suffit de considérer $Q_0 = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}$)

Théorème de la division euclidienne polynômiale.
Si $B \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$ *alors pou tout* $A \in \mathbb{K}[X]$

$$\exists (Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2 \ : \ \left| \begin{array}{l} A = BQ + R \\ degR < degB \end{array} \right.$$

De plus Q et R sont uniques appelés quotient et reste de la division euclidienne de A par B.

Démonstration. Existence Récurence sur degA

Initialisation Si degA < degB

$$A = B \times 0 + A = BQ + R$$

Hérédité On suppose la propriété vraie pour tout polynôme de degré $k < n$ avec $n \geq$ degB. D'après la remarque préliminaire on a :

$$\exists (Q_0, R_0) \in (\mathbb{K}[X])^2 \ : \ A = BQ_0 + R_0 \qquad degR_0 < degA = n$$

d'après l'hyspothèse de récurrence $\exists (Q_1, R_1) \in (\mathbb{K}[X])^2$
$R_0 = BQ_1 + R_1$ avec $degR_1 < degB$ soit

$$A = B(Q_0 + Q_1) + R_1$$

Unicité
Supposons $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ avec $degR_1, degR_2 < degB$
alors $B(Q_1 - Q_2) = R_1 - R_2$ donc

$$degB + deg(Q_1 - Q_2) = deg(R_1 - R_2) \leq max\{degR_1, degR_2\} < degB$$

d'où $deg(Q_1 - Q_2) = -\infty$ soit $Q_1 = Q_2$ puis $R_1 = R_2$ □

11.3 Fonctions polynômiales et racines

11.3.1 Fonction polynômiale associée

À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ on peut associer la fonction polynômiale

$$\widetilde{P} \begin{pmatrix} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{pmatrix}$$

Calculs $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$

$$\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda \widetilde{P} + \mu \widetilde{Q}$$

$$\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q} \qquad \widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$$

11.3.2 Racines du polynôme

$a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si

$$\widetilde{P}(a) = 0$$

On notera ensuite $\mathcal{Z}(P)$ l'ensemble des racines (ou zéros) de P.

Divisibilité par $(X - a)$ **1.** $\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \forall (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ *distincts*

$$\{a_1, \cdots, a_n\} \subset \mathcal{Z}(P) \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} (X - a_i) | P$$

Démonstration. Récurrence sur n : P(n)(1)
Initialisation $(x - a)|P$ si et seulement si $\exists Q : P = (X - a)Q$ alors

$$\widetilde{P}(a) = \widetilde{(X - a)}(a)\widetilde{Q}(a) = 0$$

Si $a \in \mathcal{Z}(P)$ et $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$

$$P = P - P(a) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X^k - a^k)$$

$$= (X - a) \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sum_{l=0}^{k-1} a^{k-1-l} X^l = (X - a)Q$$

Hérédité Supposons P(n) et considérons $\{a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}\} \in \mathbb{K}^{n+1}$ distincts
Par l'hypothèse de récurrence on a

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X] \; : \; P = (\prod_{i=1}^{n}(X - a_i))Q$$

$$a_{n+1} \in \mathcal{Z}(P) \;\Leftrightarrow\; \widetilde{P}(a_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow \; (\prod_{i=1}^{n}(a_n + 1 - a_i))\widetilde{Q}(a_{n+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; a_{n+1} \in \mathcal{Z}(Q) \;\Leftrightarrow\; X - a_{n+1}|Q$$

□

Nombre de racines Le nombres de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

dem. Par récurrence si $deg(\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)) = n$ et $P \neq O$

$$\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)|P \implies n \leq P$$

Corollaire : Caractérisation du polynôme nul Le seul polynôme admettant une infinité de racines ou $n + 1$ racines est le polynôme nul.

appli. Soit $E = \{P \in \mathbb{K}[X] | \exists T \in \mathbb{K}* : \forall x \in \mathbb{K}, \; \widetilde{P}(x + T) = \widetilde{P}(x)\}$, déterminons E.
$\mathbb{K}_0[X] \subset E$
Réciproquement si ¶ $\in E$ $T - périodique$ $(T \neq 0)$ et $Q = P - \widetilde{P}(0)$ on a $T\mathbb{Z} \subset \mathcal{Z}(P)$ d'où $P - \widetilde{P}(0) = 0$ donc $P = \widetilde{P}(0) \in \mathbb{K}_0[X]$
En conclusion on a $E = \mathbb{K}_0[X]$.

11.3.3 Ordre de multiplicité

$\forall P \in \mathbb{K}[X]$
Si $a \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$ et $(X - a)^n|P$ on dit que a est une racine de P d'ordre de multiplicité au moins n.
Si de plus $(X - a) \not| P$ alors a est une racine de P d'ordre de multiplicité exactement n.

→ a est une racine de P d'ordre de multiplicité k si et seulement si $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - a)^k Q \;\; et \;\; a \notin \mathcal{Z}(P)$$

11.3.4 Méthode de Horner pour l'évaluation polynômiale

Soit $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $x_0 \in \mathbb{K}$ on veut déterminer $\widetilde{P}(x_0)$.
On considère la suite $\begin{cases} u_0 = a_n \\ u_{k+1} = u_k x_0 + a_{n+1-k} \end{cases}$

$$u_k = a_n x_0^k + \;\cdots\; + a_{n_k} \;\; et \;\; u_n = \widetilde{P} x_0$$

11.3.5 Polynôme scindé

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est <u>scindé</u> s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1.

Formule de Viete.

> <u>*Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé*</u>
>
> *Soit P un polynôme scindé,* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$
>
> $$\left.\begin{array}{l} n \geq 2 \\ a_n \neq 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \lambda \\ a_{n-l} = \lambda \prod_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq n} \sum_{r=1}^{l} (-x_{i_r}) \end{cases}$$
>
> $$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \lambda \\ \prod_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq n} \sum_{r=1}^{l} x_{i_r} = \frac{(-1)^l a_{n-l}}{a_n} \end{cases}$$

Démonstration. Faire arbre □

11.4 Dérivation

Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ on appelle polynôme dérivé de P

$$P' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} X^k$$

puis par récurrence avec $\forall n \in \mathbb{N} \quad P^{(n++1)} = (P^{(n)})' \; P^{(n)} = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k X^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+n)(k+n-1)\cdots(k+1) a_{k+n} X^k = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k X^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n} X^k$

<u>**Calcul :**</u> $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$

$$\rightarrow \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \; (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$$

$$\rightarrow \quad (PQ)' = P'Q + PQ' \qquad \rightarrow \quad (P \circ Q)' = P' \circ Q \times Q$$

Démonstration. $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \quad Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$

$\rightarrow \quad (\lambda P + \mu Q)' = (\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k)' = \sum_{k=1}^{+\infty} k(\lambda a_k + \mu b_k) X^{k-1}$

$= \lambda(\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1}) + \mu(\sum_{k=1}^{+\infty} k b_k X^{k-1}) = \lambda P' + \mu Q'$

$\rightarrow \quad PQ = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k \quad c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \quad$ *donc* $\quad (PQ)' = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) c_{k+1} X^k$

avec $\quad P' = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} X^k \quad$ *et* $\quad Q' = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) b_{k+1} X^k$

$PQ' = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k X^k \quad d_k = \sum_{l=0}^{k} a_l (k+1-l) b_{k+1-l}$

$P'Q = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k X^k \delta_k = \sum_{l=0}^{k} (l+1) a_{l+1} b_{k-l}$

$d_k + \delta_k = \sum_{l=0}^{k} a_l (k+1-l) b_{k+1-l} + \sum_{l=0}^{k} (l+1) a_{l+1} b_{k-l}$

$= a_0 (k+1) b_{k+1} + (k+1) a_{k+1} b_0 + \sum_{l=1}^{k} a_l (k+1-l) b_{k+1-l} + \sum_{l=1}^{k} l a_l b_{k+1-l}$

$= (k+1) \sum_{l=0}^{k+1} a_l b_{k+1} = (k+1) c_{k+1}$ □

Chapitre 12

Analyse asymptotique

Chapitre 13

Espaces vectoriels et applications linéaires

Chapitre 14

Matrices II

Contenu

14.1 Matrices et applications linéaires

14.1.1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Matrice représenntative d'un vecteur Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On considère $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$. La matrice représentative de x dans la base B est la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Mat_B(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Matrice représentative d'une famille Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On considère $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E. La matrice représentative de cette famille dans cette base est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée $Mat_B(x_1, \ldots, x_p)$ dont la j^{e} colonne est donnée par $Mat_B(x_j)$, $\forall j \in [\![1, p]\!]$

Matrice représentative d'une application linéaire Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n avec $\begin{array}{l} e = (e_1, \ldots, e_p) \text{ une base de } E \\ f = (f_1, \ldots, f_n) \text{ une base de } F \end{array}$
On considère $u \in \mathscr{L}(E, F)$. La matrice représentative de u dans les bases e et f est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée $Mat_{e,f}(u)$ définie par $Mat_{e,f}(u) = Mat_f\big(u(e_1), \ldots, u(e_p)\big)$
Si $u \in \mathscr{L}(E)$ *on note* $Mat_e(u) = Mat_{e,e}(u) = Mat_e\big(u(e_1, \ldots, u(e_n)\big)$

Proposition.

Si E et F sont des $\mathbb{K}$-ev de dimensions p et n rapportés à des bases e et f, alors $\Phi \begin{pmatrix} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & Mat_{e,f}(u) \end{pmatrix}$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Corollaire.

Le choix d'une base B sur E induit un iomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{pmatrix} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & Mat_B(u) \end{pmatrix}$$

Proposition.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions p et n rapportés à des bases e et f
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$; $x \in E$, on considère $y = u(x) \in F$ et on note
$X = Mat_e(x)$; $Y = Mat_f(y)$; $A = Mat_{e,f}(u)$ Alors $Y = AX$

Proposition.

E de dimension p et $e = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.
F de dimension q et $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une base de F.
G de dimension n et $g = (g_1, \ldots, g_n)$ une base de G.
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$; $A = Mat_{e,f}(u)$, $B = Mat_{f,g}(v)$
Alors $C = Mat_{e,g}(v \circ u) = AB$

Théorème.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n rapportés à des bases e et f
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ on a $(u$ est un isomorphisme$)$ $\Leftrightarrow$ $(Mat_{e,f}(u)$ est inversible$)$
Dans ce cas on a $\big(Mat_{e,f}(u)\big)^{-1} = Mat_{e,f}\big(u^{-1}\big)$

14.1.2 Application linéaire canoniquement associée

Définition Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on appelle Application linéaire canoniquement associée à A l'unique application linéaire, notée u_A telle que $Mat_{C(\mathbb{K}^p),C(\mathbb{K}^n)}(u_A) = A$

Noyau, image et rang Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on appelle

- noyau de A noté $Ker(A)$ défini par $Ker(A) = Ker(u_A)$
- image de A notée $Im(A)$ définie par $Im(A) = Im(u_A)$
- rang de A noté $rg(A)$ défini par $rg(A) = rg(u_A)$

Propriété.

Les colonnes de A engendre $Im(A)$ et ses lignes donnent un système d'équation de $Ker(A)$

Proposition.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow$
$Ker(A) = \{0\} \Leftrightarrow \mathbb{K}^n = Vect\big(C_1(A), \ldots, C_n(A)\big) \Leftrightarrow rg(A) = n$

Corollaire.

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonnaux sont tous non nuls.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{T}^+(\mathbb{K})$
$\boxed{\Leftarrow}$ Si les coefficients $(a_j j)_{1 \leq j \leq n}$ sont tous non nuls alors $(C_1, \ldots, C_n)$ est une famille libre donc une base de $\mathbb{K}^n$ d'où $A \in \mathcal{GL}_n\mathbb{K}$
$\boxed{\Rightarrow}$ Par contraposée si $\exists k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{k_0,k_0} = 0$ alors $\dim\big(Vect(C_1, \ldots, C_{k_0})\big) \leq k_0 - 1$ donc $\dim A \leq n - 1$ d'où $A \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ □

Propriété.

Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n rapporté à une base B
Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E
Alors $rg(x_1, \ldots, x_p) = \dim\Big(Vect\big(Mat_B(x_1), \ldots, Mat_B(x_p)\big)\Big)$
$= \dim\Big(Im\big(X_1 \cdots X_p\big)\Big) = rg(u_A)$ *Où* $A = \big(X_1\ X_2 \cdots X_p\big) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Propriété.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible à gauche ou à droite est inversible.

14.1.3 Systèmes linéaires

$$(S) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right. \Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Résoudre le système homogène associé à (S) c'est déterminer le noyau de A
Par le théorème du rang, la dimension de l'espace des solutions du système homogène est donnée par $p - rg(A)$ $(\geq p - n)$

L'ensemble des solution de (S) à une structure de sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ si il est compatible, soit si X_0 est une solution particulière

$$S = X_0 + Ker(A) \ \subset \mathbb{K}^p$$

Système de Cramer Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors le systèle (S) est compatible et admet une unique solution $A^{-1} \times B$.

14.2 Changement de bases

Matrice de passage On appelle matrice de passage d'une base e à un base e' d'un même espace vectoriel E et on note $P_e^{e'}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ représentative des vecteurs de e' dans la base e

$$P_e^{e'} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \forall j \in [\![1, n]\!], \ e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

Propriété.

Si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de passage de e à e' alors P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de e' à e.

Propriété.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev rapporté successivement à des bases e et e'
On considère $x \in E$ avec $X = Mat_e(x)$; $X' = Mat_{e'}(x)$ et $P = P_e^{e'}$
Alors $X = P \times X'$

Théorème.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies p et n
rapporté successivement à des bases e, e' et f, f'. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$
On note $A = Mat_{e,f}(u)$; $A' = Mat_{e',f'}(u)$ et $Q = P_f^{f'}$; $P = P_e^{e'}$
Alors $A' = Q^{-1} \times A \times P$

Démonstration. Soit $(x, y) \in E \times F$ tel que $y = u(x)$ alors on a $Y = AX \Leftrightarrow Y' = A'X'$
avec $Y = QY'$; $X = PX'$
Ainsi $Y = AX \Leftrightarrow QY' = APX' \Leftrightarrow Y' = Q^{-1}APX' \Leftrightarrow A' = Q^{-1}AP$ □

Corollaire.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n rapporté à deux bases e et e'
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $A = Mat_e(u)$; $A' = Mat_{e'}(u)$ et $P = P_e^{e'}$
Alors $A' = P^{-1} \times A \times P$

14.3 Équivalence et similitude

14.3.1 Matrices équivalentes et rang

Proposition.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions p et n et $u \in \mathscr{L}(E, F)$
Soit $r \in [\![1, n]\!]$, si $rg(u) = r$ alors il existe un couple de base (e, f)
tel que $Mat_{e,f}(u) = J_r \ \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Démonstration. D'après la forme géométrique du théorème du rang u induit un isomorphisme de S sur $Im(u)$ où S est un supplémentaire de $Ker(u)$
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E adaptée à $Ker(u) \oplus S$ avec $(e_1, \ldots, e_r)$ base de S. On a alors $\big(f_1 = u(e_1), \ldots, f_r = u(e_r)\big)$ une base de $Im(u)$ que l'on complète en une base de F □

Équivalence Deux matrice $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes
si il existe $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ tels que $B = Q^{-1}AP$. On note $A \sim B$

Proposition.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement $A \sim J_r$.

Théorème.

Le rang d'une matrice est invariant par transposition.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; ${}^t\big(J_r^{n,p}\big) = J_r^{p,n}$
On a alors $rg(A) = r \Leftrightarrow \exists (Q, P) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}) \ : \ A = Q^{-1} J_r^{n,p} P$
$\Leftrightarrow {}^tA = \underbrace{{}^tP}_{\in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})} \times {}^t\big(J_r^{n,p}\big) \times \underbrace{{}^t\big(Q^{-1}\big)}_{\in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})} = Q'^{-1} J_r^{p,n} P' \Leftrightarrow rg({}^tA = r$ □

Matrice extraite Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on appelle matrice extraite de A toute matrice obtenue à partir de A par suppression de lignes et/ou colonnes de A.
$\Big(\ A' = \big(a_{i,j}\big)_{(i,j) \in I \times J}$ où $I \subset [\![1, n]\!]$ et $J \subset [\![1, p]\!] \ \Big)$

Propriété.

Si A' est extraite de A alors on a $rg(A') \leq rg(A)$

Proposition.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors
$rg(A) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid A' \in \mathcal{GL}_k(\mathbb{K})$ *et A' extraite de A*$\}$

Propriété.

Les opérations élémentaires sur les colonnes préservent l'image.
Celles sur les lignes préservent le noyau.

Corollaire.

Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A conservent le rang de A.

Matrice échelonnée Une matrice échelonnée en ligne est une matrice $A = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ telle que si on note $l_i(A) = \min\{j \in [\![1,p]\!] \mid a_{i,j} \neq 0\}$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$ (par convention $\min\varnothing = +\infty$)
Alors $\left(l_i(A)\right)_{1\leq i\leq n}$ est une suite croissante.

14.3.2 Matrices semblables et trace

Matrices semblables Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
Deux matrices semblables sont équivalentes.

Propriété.

Deux matrices A et B sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie dans deux bases différentes.

Trace Si $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on appelle trace de A le scalaire $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

Propriété.

$tr \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^*$ *avec* $\forall(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2,\ tr(AB) = tr(BA)$

Théorème.

La trace est invariante par similitude. $\Big(\forall(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2,$
$\left(\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } B = P^{-1}AP\right) \Rightarrow \left(tr(B) = tr(A)\right) \Big)$

Démonstration. Soit un tel couple $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$
Alors $tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(APP^{-1}) = tr(A)$ □

Trace d'un endomorphisme Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E, on appelle trace de u le scalaire $tr(u) = tr\left(Mat_e(u)\right)$ où e est une base de E.

Propriété.

$tr \in \left(\mathscr{L}(E)\right)^*$ *avec* $\forall(u,v) \in \left(\mathscr{L}(E)\right)^2,\ tr(uv) = tr(vu)$

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et p un projecteur de E
Alors $tr(p) = rg(p)$

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 15

Groupe symétrique et déterminant

Chapitre 16

Intégration

Contenu

Dans tout le chapitre, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$

16.1 Continuité uniforme

Définition Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$, f est dite uniformément continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in I^2,\ \big(|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Propriété.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ on a
1) Si f est lipschitzienne sur I alors f est uniformément continue sur I
2) Si f est uniformément continue sur I alors f est continue sur I

Théorème de Heine .

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$
Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration. Par l'absurde :
On suppose $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (x_n, y_n) \in [a,b]^2$ tq $\left(|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}\right.$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extractrices tels que $x_{\varphi(n)} \underset{n}{\to} l \in [a,b]$ et $y_{\varphi(\psi(n))} \underset{n}{\to} l' \in [a,b]$ donc $\left|x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\varphi(\psi(n))}\right| \leq \frac{1}{\varphi(\psi(n))} \leq \frac{1}{n}$
d'où $l = l'$
Ainsi par continuité de f on a $f(x_{\varphi(\psi(n))}) - f(y_{\varphi(\psi(n))}) \underset{n}{\to} f(l) - f(l') = 0 > \varepsilon > 0$ □

16.2 Intégrations des fonctions en escalier

On note $\mathcal{E}\int\rfloor([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

16.2.1 Subdivision d'un segment

Définition Une subdivision de $[a,b]$ est une suite finie strictement croissante $\sigma = (c_0 = a < c_1 < \cdots < c_n = b)$.
On note $\delta(\sigma)$ le pas de σ définit par $\delta(\sigma) = \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} (c_{i+1} - c_i)$.
On dit que σ est à pas constant si la suite $(c_i)_{0 \leq i \leq n}$ est arithmétique.

Soit σ' une subdivision de $[a,b]$, on dit que σ' est plus finie que σ si tout point de σ est un point de σ'. On notera ici $\sigma \subset \sigma'$.

Subdivision adaptée Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur $[a,b]$, on considère $\sigma = (c_0, \ldots, c_n)$ une subdivision de $[a,b]$. On dit que σ est adaptée à f si

$$\forall i \in [\![0, -1]\!],\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R}\ :\ f|_{]c_i, c_{i+1}[} = \widetilde{\lambda_i}$$

Proposition.
$\mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ est stable par somme, produit et passage à la valeur absolue.

Intégrale d'une fonction en escalier Soit $f \in \mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$; soit $\sigma = (c_0, \ldots, c_n)$ une subdivision adaptée à f.
On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le scalaire

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (c_{i+1} - c_i)$$

Propriétés.
Soit f et g des fonctions en escalier sur $[a,b]$
1) Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_[a,b]f \geq 0$
2) Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq g(x)$ alors $\int_[a,b]f \geq \int_[a,b]g$
3) $\left|\int_[a,b]f\right|$ leq $\int_[a,b]\,|f| \leq (b-a)\sup\limits_{[a,b]}|f|$

Proposition.
Soit $f \in \mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $c \in [a,b]$ alors $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f|_{[a,c]} + \int_{[c,b]} f|_{[c,b]}$

16.3 Fonctions continues par morceaux

16.3.1 Généralités

Définition Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe $\sigma = (c_0, \ldots, c_n)$ une subdivision de $[a, b]$ telle que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $f|_{]c_i, c_{i+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité en c_i et c_{i+1}.

On note $\mathscr{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Propriété.

Si $f \in \mathscr{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ alors f est bornée sur $[a, b]$

Lemme.

Si $f \in \mathscr{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ alors $\forall \varepsilon > 0, \exists (\varphi, \psi) \in \Big(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})\Big)^2$ telles que $\forall x \in [a, b],\ \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x)\ leq \varepsilon$

Propriété.

$\mathscr{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ est stable par produit, combinaison linéraire et valeur absolue.

16.3.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition Soit $f \in \mathscr{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{R})$
On note $\mathcal{I}^+(f) = \Big\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \psi$ en escalier sur $[a, b]$ et $f \leq \psi \Big\}$
Alors $\inf\big(\mathcal{I}^+(f)\big)$ existe, on appelle intégrale de f sur $[a, b]$ notée $\int_{[a,b]} f$ cette valeur.

Rq : $\int_{[a,b]} f = \inf\big(\mathcal{I}^+(f)\big) = \sup\big(\mathcal{I}^-(f)\big)$

Propriété.

Soit $(f, g) \in \Big(\mathscr{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{R})\Big)^2$; $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ alors
$\int_{[a,b]} \alpha f + \beta g = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g$

Théorèmes opératoires.

Soit $f, g \in \Big(\mathscr{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{R})\Big)^2$ on a
1) Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$
2) Si $\forall x \in [a, b],\ g(x) \geq f(x)$ alors $\int_{[a,b]} g \geq \int_{[a,b]} f$
3) $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f| \leq \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Démonstration. Clair d'après le lemme . □

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwartz.

Soient $f, g \in \mathscr{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ alors $\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leq \int_{[a,b]} f^2 \times \int_{[a,b]} g^2$

Démonstration. On pose $P(\lambda) = \int_{[a,b]} (\lambda f + g)^2 = \lambda^2 \int_{[a,b]} f^2 + 2\lambda \int_{[a,b]} fg + \int_{[a,b]} g^2 \geq 0$
Si $\int_{[a,b]} f^2 = 0$ alors $2\int_{[a,b]} fg = 0$ et l'inégalité est vrai
Sinon $\int_{[a,b]} f^2 > 0$ et $\Delta = 4\Big(\big(\int_{[a,b]} fg\big)^2 - \int_{[a,b]} f^2 \times \int_{[a,b]} g^2 \leq 0$ □

Valeur moyenne Soit $f \in \mathscr{C}^0_{pm}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ on appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le scalaire

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$$

Proposition.

Soit f une fonction continue sur $[ab]$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$
On suppose $\int_{[a,b]} f = 0$ alors $f = 0$

Propriété.

Soit $f, g \in \mathscr{C}^0_{pm}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ alors
$\big(\int_{[a,b]} fg\big)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \times \int_{[a,b]} g^2 \;\Leftrightarrow\; (f,g)$ *sont liées.*

Propriété.

Soit $f \in \mathscr{C}^0_{pm}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $\forall u \in \mathbb{R}$ on pose $f_u \begin{pmatrix} [a+u, b+u] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x-u) \end{pmatrix}$

alors $\int_{[a+u,b+u]} f_u = \int_{[a,b]} f$

Théorème : Relation de Chasles.

Soit f continue par morceaux sur un segment S de $\mathbb{R}$ et $(a,b,c) \in S^3$
alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

Propriété.

Soit $a \in \mathbb{R}$; $f \in \mathscr{C}^0_p m\big([-a,a],\mathbb{R}\big)$, on suppose que f est paire (resp. impaire)
alors $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ $\big($*resp.* $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0\big)$

Propriété.

Soit f continue par morceaux sur $I \subset \mathbb{R}$, on suppose que f est T- périodique
alors $\forall a \in I$, $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = cte$ (ne dépend pas de a)

16.4 Sommes de Riemman

Définition Si f est continue sur $[a,b]$ et $\sigma = (c_0,\dots,c_n)$ est une subdivision de $[a,b]$, on appelle somme de Riemman associée à f sur $[a,b]$ l'expression

$$\sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i) \times f(\xi_i) \text{ avec } \xi_i \in [c_i, c_{i+1}]$$

Somme de Riemman associée Soit $f \in \mathscr{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ et $\sigma = (c_0, \dots c_n)$ une subdivision adaptée à f sur $[a,b]$ on pose pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi_i = f|_{]c_i, c_{i+1}[}$ que l'on prolonge par continuité sur $[c_i, c_{i+1}]$.
On appelle <u>somme de Riemmann associée</u> une somme de sommes de Riemman associées aux φ_i

---

Propriété.

Soit $f \in \mathscr{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ alors $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n}{\to} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

16.5 Lien entre intégrales et primitives

Théorème fondamental du calcul intégral .

Soit f un fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$,
Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annulle en a.

Démonstration. F est bien définiesur I, on considère alors $c \in I$; soit $x \in I\backslash\{c\}$
Il existe alors ξ_x compris entre x et c tel que $\frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(\xi_x) \underset{x\to c}{\longrightarrow} f(c)$ par $\mathscr{C}^0$ de f en c
Donc F est dérivable en c et $f'(c) = f(c)$ □

Corollaire.

Pour toute primitive F de f sur I on a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$

Corollaire.

Soit f continue sur I et $a \in I$, on suppose $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$
alors $\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$

16.6 Formules de Taylor globales

Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$, $a \in I$

Alors $\forall x \in I$, $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. Par récurrence sur n :
<u>Initialisation</u> : $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ d'après le corollaire précédant
<u>Hérédité</u> : On suppose la propriété vraie au rang n et on considère $f \in \mathscr{C}^{n=2}(I,\mathbb{R})$.
Comme $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ on a $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$
$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$
$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$ par IPP □

Corollaire : Inégalité de Taylor-Lagrange.

> *Soit* $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ *et* M *un majorant de* $\left|f^{(n+1)}\right|$ *sur* I
> *Alors* $\forall x \in I$, $\left|f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leq M \times \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 17

Dénombrement

Contenu

17.1 Cardinal d'un ensemble

17.1.1 Généralités

Équipotence On dit que deux ensembles E et F sont équipotents s'il existe une bijection de E sur F. On note alors $E \sim F$

Ensemble fini - Cardinal Soit E un ensemble, on dit que E est fini s'il est **vide** ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $E \sim [\![1, n]\!]$
On appelle alors n le cardinal de E noté $|E|$ (ou $\text{Card}(E)$) dont on admet l'unicité, sous réserve d'existence avec par convention $|\varnothing| = 0$

Lemme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; soit $F \subset [\![1, n]\!]$
Alors F est fini et $|F| \leqslant n$

Corollaire.

Si E et F sont des ensembles avec F fini et $E \subset F$
Alors E est fini et $|E| \leqslant |F|$
avec égalité si et seulement si $E = F$

Remarque : Définition avec l'indicatrice Soit $A \in \mathcal{P}(E)$

$$\mathbb{1}_A \ : \ \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 \ si \ x \in A \\ 0 \ si \ x \in \mathcal{C}_E A \end{cases} \end{pmatrix} \text{ et si } E \text{ est fini alors } |A| = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Proposition.

Si E et F sont deux ensembles finis et $f : E \to F$ alors
1) Si f injective $|f(E)| = |E|$ et $|E| \leq |F|$
2) Si f surjective $|F| \leq |E|$
3) Si $|F| = |E|$ alors f est injective si et seulement si f est surjective.

Propriété.

Soit E un ensemble fini et $A \in \mathcal{P}(E)$ alors $|\mathcal{C}_E A| = |E| - |A|$

Corollaire.

Si A et B sont finis alors $A \setminus B$ est fini et $|A \setminus B| = |A| - |B|$

Proposition.

Si A et B sont finis alors $A \cup B$ est fini et $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

17.1.2 Lemme des Bergers et principe des Tirroirs

Proposition.

Si P est une partition de E (cf -> 1.2) alors $|E| = \sum_{X \in P} |X|$

Lemme des Bergers.

Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ telle que
$\exists p \in \mathbb{N}^* \ : \ \forall y \in F \ , \ \left|f_r^{-1}(\{y\})\right| = p$ *alors* $|E| = p\,|F|$

Démonstration. $\left(f_r^{-1}(\{y\})\right)_{y \in F}$ est une partition de E et on a alors
$|E| = \sum_{y \in F} \left|f_r^{-1}(\{y\})\right| = \sum_{y \in F} p = p\,|F|$ □

Principe des Tirroirs de Dirichlet.

Soit E et F deux ensemble finis de cardinaux respectifs n et $p \in \mathbb{N}^*$
$f : E \to F$ *telle que s'il existe* $k \in \mathbb{N} \ : \ n > kp$ *alors* $\exists y \in F \ : \ \left|f_r^{-1}(\{y\})\right| > k$

Démonstration. On suppose que $\forall y \in F \ , \ \left|f_r^{-1}(\{y\})\right| \leq k$
alors d'après le Lemme des Bergers $|E| \leq kp$ □

17.1.3 Calcul sur les cardinaux

Proposition.

Soit E et F deux ensembles finis alors

$$\rightarrow \quad |E \times F| = |E| \times |F|$$

Propriété.

Soit E et F deux ensemble de même cardinal n alors

- *$By(E, F)$ l'ensemble des bijections de E sur F est de cardinal $n!$*
- *$\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini de cardinal 2^n*

Corollaire.

Le cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble à n éléments es $n!$

17.2 Listes et Combinaisons

Arrangement On appelle arrangement de k éléments parmi n toute **application injective** de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ soit une **k-liste** d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.

On note $A_{k,n}$ l'ensemble des arrangements de k éléments parmis n.

Propriété.

Le nombre d'arrangement de k éléments parmis n, noté A_n^k vérifie

$$A_n^k = |A_{k,n}| = \begin{cases} 0 & si\ k > n \\ \frac{n!}{(n-k)!} & si\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

Combinaison On appelle combinaison de k objets parmis n toute **partie** à k éléments d'un ensemble à n objets et on note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des combinaisons à k éléments de E.

Propriété.

Le nombre de combinaisons de k éléments parmis n est $\binom{n}{k}$

Formule de Vandermonde

$$(1+X)^n(1+X)^m = (1+X)^{n+m} \Rightarrow \binom{n+m}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j}$$

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 18

Probabilités

On désigne par expérience aléatoire toute expérience dont le résultat est soumis au hasard.

Contenu

18.1 Univers, évènements et variables aléatoires

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience ε trois objets mathématiques : Ω un univers fini (des possibles), $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des évènements associés à ε et P une probabilité.

$\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ est un espace probabilisé.

Ensemble des évènements On appelle ensemble des évènements associés à ε toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

(1) $\Omega \in \mathscr{A}$ et $\varnothing \in \mathscr{A}$

(2) $\forall A \in \mathscr{A},\ \overline{A} \in \mathscr{A}$

(3) Soit I un ensemble fini ou dénombrable et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements alors

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{A} \text{ et } \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$$

Dans le cas où $|\Omega| < +\infty$ on prend $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

Système complet d'événements

(1) $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$

(2) On appelle système complet d'événements toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements deux à deux incompatibles et dont la réunion est l'événement certain

---

Probabilité Si $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace probabilisable, on appelle probabilité sur $\mathscr{A}$ toute application telle que

(1) $\mathcal{P}(\Omega) = 1$

(2) $\forall (A, B) \in \mathscr{A}^2,\ A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas fini, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé fini.

Propriétés.

(1) $P(\varnothing) = 0$

(2) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(3) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2(\mathscr{A}),\ P(A \setminus B) = P(A) - P(A\cup)B$

(4) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2(\Omega),\ A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$

(5) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2(\Omega),\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Variable aléatoire On appelle variable aléatoire toute application définie sur Ω à valeurs dans un ensemble E. Si $E \subset \mathbb{R}$ on dit que $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire réelle.

Notations Si X est une variable aléatoire, on note

- Pour $A \in \mathcal{P}(E),\ X_r^{-1}(A) = (X \in A)$
- Si $e \in E,\ X_r^{-1}(\{e\}) = (X = e)$
- Si $E = \mathbb{R},\ X_r^{-1}([a, b[) = (a \leqslant X < b)$

18.2 Espaces probabilisés finis, probabilité uniforme

18.2.1 Équiprobabilités

Si $|\Omega| < +\infty$, une hypothèse classique est de considérer une probabilité P telle que $\forall \omega \in \Omega,\ P(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|}$ C'est bien une probabilité, dite équiprobabilité car tout les événement réduits à une issue on la même probabilité

18.2.2 Probabilités conditionnelles

Définition Si A et B sont deux événements de $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de probabilités non nulles, on défini

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propriété.

Si B est un événement de probabilité non nulle dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{A}, P)$

$$\text{Alors } \forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & P(A|B) \end{pmatrix}$$

est une probabilité

Proposition ♡.

Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ alors

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Propriété : Formule des probabilités totales.

Si B est un événement et $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complets d'événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

Alors $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \times P(A_i)$

Proposition : Formule de Bayes.

Soit A un événement de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ tel que $P(A) \neq 0$
Si $(B_1, \dots, B_n)$ est un système complet d'événements

$$\text{Alors } \forall i \in [\![1, n]\!], \ P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)}$$

18.3 Loi d'une variable aléatoire

Loi de probabilité Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ à valeur dans E on appelle loi de probabilité de la variable X (ou distribution) l'application

$$P_X \begin{pmatrix} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & [0, 1] \\ A & \mapsto & P(X \in A) \end{pmatrix}$$

Propriété.

Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$
Alors P_X est une probabilité sur E

Notation Si X est Y sont deux variables aléatoire définies sur un même espace probabilisé fini à valeurs dans E on note $X \sim Y$ si $P_X = P_Y$

Propriété.

Soit $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire et $f : E \to F$
Alors $f(X) = f \circ X : \Omega \to F$ est une variable aléatoire avec
$\forall B \in \mathcal{P}(F), \ P_{f(X)}(B) = P(f(X) \in B) = P(X \in f_r^{-1}(B)) = P_X(f_r^{-1}(B))$

18.3.1 Variable uniforme sur une ensemble fini non vide

Soit E un ensemble fini non vide.

Loi uniforme On dit que X variable aléatoire suit une loi uniforme sur E si

$$\begin{cases} X(\Omega) = E \\ \forall x \in E,\ P(X = x) = \frac{1}{|E|} \end{cases}$$

On écrit alors $X \sim \mathcal{U}(E)$

On prend un objet au hasard parmi $|E|$ objets qui on tous la même probabilité d'être choisis et on note X cet objet.

18.3.2 Variable de Bernoulli

On appelle expérience de Bernoulli une expérience aléatoire à deux issues. On appelle succès l'une des issues et échec l'autre. On peut donc lui associer une variable aléatoire réelle qui prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.

Loi de Bernoulli On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ P(X = 1) = p \end{cases}$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$

18.3.3 Loi binomiale

Si on répète n fois une expérience de Bernoulli, la variable aléatoire associée au nombre de succès suit une loi de Bernoulli de paramètres n et p.

Chapitre 19

Espaces préhilbertiens réels

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Contenu

19.1 Produit scalaire

Définition Un produit scalaire $\langle x, y\rangle$ est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que

1) φ est bilinéaire $\left|\begin{array}{lcl}\varphi(\lambda x + \lambda' x', y) & = & \lambda\varphi(x, y) + \lambda'\varphi(x', y)\\ \varphi(x, \mu y + \mu' y') & = & \mu\varphi(x, y) + \mu'\varphi(x, y')\end{array}\right.$

2) φ est symétrique $\forall (x, y) \in E^2 , \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

3) φ est définie positif $\varphi(x, x) \geqslant 0 \ \wedge\ \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

Espace euclidien Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace préhilbertien réel, on dit que $(E, \langle ., .\rangle)$ est un espace euclidien si E est de **dimension finie**.

Produit scalaires canoniques

Sur $\mathbb{R}^n$ $\quad \langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$

Sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ $\quad \langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}\big(X \times {}^T Y\big) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}.b_{ki}$

Sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ $(a < b)$ $\quad \langle f, g\rangle = \int_a^b f(t).g(t)\mathrm{d}t$

On a aussi sur $\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k).Q(k)$ et $\psi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0).Q^{(k)}(0)$

19.2 Norme associée à un produit scalaire

Norme Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel on dit que $N : E \to \mathbb{R}^+$ est une norme si
(1) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| . N(x)$
(2) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
(3) $\forall (x,y) \in E^2,\quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$

Distance Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel on dit que $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est une distance si
(1) $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = d(y,x)$
(2) $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(3) $\forall (x,y,z) \in E^3,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Rq : Si (E, N) est un espace normé alors $d\begin{pmatrix} E \times E & \longrightarrow & R \\ (x,y) & \mapsto & N(x-y)\end{pmatrix}$ est une distance.

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwartz.

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ *un espace préhilbertien réel alors*
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle$$
Avec égalité si et seulement si x *et* y *sont liés (égaux à un scalaire près)*

Démonstration. On pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \geqslant \in \mathbb{R}[X]$
On a alors $P(\lambda) = \lambda^2 \langle y,y\rangle + 2\lambda \langle x,y\rangle + \langle x,x\rangle$
- Si $\langle y,y\rangle = 0$ alors $y = 0$ et on a l'égalité.
- Sinon vu $p(\lambda) \leqslant 0$ on a $\Delta = 4\big(\langle x,y\rangle^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle\big) \leqslant 0$

Si on a égalité alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda_0) = 0 \Rightarrow x + \lambda_0 y = 0$
Réciproquement si $x = \lambda y$ alors $\langle x,y\rangle^2 = \lambda\langle y,y\rangle \times \lambda\langle y,y\rangle = \langle \lambda y, \lambda y\rangle\langle x,x\rangle = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$
$\square$

Proposition.

Si $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace préhilbertien réel
Alors $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E dite norme euclidienne ($\|.\|$)

Propriété.

$\forall (x,y) \in E^2$ si N est la norme euclidienne associée à $\langle .,. \rangle$
$N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ avec égalité si et seulement si
il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$

Propriété.

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
On a les identités remarquables suivantes :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \end{cases}$$

On en déduit les formules de polarisation suivantes :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \begin{cases} \langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big) \\ \langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\big) \\ \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) \end{cases}$$

Rq : $N : E \to \mathbb{R}^+$ est une norme euclidienne sur E si et seulement si
$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\big(N^2(x+Y) - N^2(x-y)\big)$ est un produit scalaire.

19.3 Orthogonalité

19.3.1 Résultats théoriques

Vecteur orthogonal Si $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace préhilbertien réel, x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$

Ensemble orthogonal Si $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace préhilbertien réel et $F \in \mathcal{P}(E)$ on appelle orthogonal de F noté $F^\perp$ l'ensemble

$$\{y \in E \mid \forall x \in F,\ y \perp x\}$$

Proposition.

$\forall F \in \mathcal{P}(E)$, $F^\perp$ est un sous-espace de E

Propriété.

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel,
(1) $\forall (F,G) \in \mathcal{P}^2(E)$, $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$
(2) $F^\perp = \big(\mathrm{Vect}(F)\big)^\perp$
(3) $F \subset \big(F^\perp\big)^\perp$ avec égalité si et seulement si F est une sous-espace vectoriel.

Famille orthogonale Soit I un ensemble, $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale si

$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \ \Rightarrow\ x_i \perp x_j$$

On dit de plus que la famille est orthonormée (ou orthonormale) si les vecteurs sont **normés** (ou unitaires), càd

$$\forall i \in I,\ \|x_i\| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall (i,j) \in I^2,\ \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Proposition.

*Toute famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace préhilbertien réel **orthogonale** et ne contenant pas le vecteur nul est libre.*
*Toute famille **orthonormée** est libre.*

Théorème de Pythagore.

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel
(1) $x \perp y \ \Leftrightarrow\ \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
(2) Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale alors

$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^{(I)},\ \|\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\|^2 = \sum_{i\in I} \lambda_i^2 \|x_i\|^2$$

Démonstration. $\forall (x,y) \in E^2$
(1) $x \perp y \ \Leftrightarrow\ \langle x, y\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = 0 \ \Leftrightarrow\ \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
(2) $\| \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \|^2 = \left\langle \sum_{i\in I} \lambda_i x_i\ ,\ \sum_{j\in I} \lambda_j x_j \right\rangle = \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} \lambda_i \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i^2 \|x_i\|^2$ □

19.3.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Objectif : Transformer par un algorithme une famille $(e_i))_{i\in [\![1,n]\!]}$ libre en une famille $(\varepsilon > 0)_{i\in [\![1,n]\!]}$ orthonormée de telle sorte que

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ F_k = \mathrm{Vect}(\{e_1,\ldots,e_k\}) = \mathrm{Vect}(\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\}) = F'_k$$

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on pose $u_k = \sum_{i=1}^{k-1} \langle \varepsilon_i, e_k \rangle\, \varepsilon_i$

Construction par récurrence

Initialisation $\{e_1\}$ est libre car $e_1 \neq 0$ on pose donc $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ qui convient.

Hérédité Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{k-1})$ vérifie les contraintes et on considère $u'_k = e_k - u_k$. On peut vérifier que $u'_k \in F'^{\perp}_{k-1}$; en effet :

$$\forall l \in [\![1,k-1]\!]\ ,\quad \langle u'_k, \varepsilon_k \rangle = \left\langle e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \varepsilon_i, e_k \rangle\, \varepsilon_i\ ,\ \varepsilon_l \right\rangle = \langle e_k, \varepsilon_l \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \langle \varepsilon_i, , e_l \rangle \langle \varepsilon_i, \varepsilon_l \rangle}_{=\langle \varepsilon_k, e_l \rangle} = 0$$

On a par contraposée $u'_k \neq 0$ (sinon $e_k \in F_{k-1}$), on peut donc considérer $\boxed{\varepsilon_k = \dfrac{u'_k}{\|u'_k\|}}$.

Vérifions que ε_k convient :
On a déjà $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ est orthonormée vu $\varepsilon_k \in F'^{\perp}_{k-1}$. De plus $u'_k \in F_k$ d'où $\varepsilon_k \in F_k$ donc $F'_k \subset F_k$. Réciproquement $F'_{k-1} = F_{k-1}$ et $e_k \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, u'_k)$ d'où $F_k \subset F'_k$

On a ainsi une famille $\left(\varepsilon_i\right)_{i \in I}$ orthonormée vérifiant les contraintes.

19.4 Bases orthonormées

Théorème.

Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

Démonstration. Tout espace E euclidien admet une base (dimension finie) donc on peut construire avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt une famille orthonormée génératrice de E donc une base orthonormée de E □

Théorème de la base orthonormée incomplète.

Si $(E, \langle ., . \rangle)$ est un espace euclidien de dimension n,
pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille orthonormée de vecteurs de E
Alors cette famille peut être complétée en une base orthonormée de E.

Démonstration. Comme $(e_1, \dots, e_k)$ est orthonormée elle est libre, on peut donc la compléter en une base de E à laquelle on pourra appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E. □

Propriété.

Si $(E, \langle ., . \rangle)$ est un espace euclidien muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormée on a

$$\text{(1) } \forall x \in E \ , \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle .e_i$$

$$\text{(2) } \forall (x, y) \in E^2 \ , \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$$

Corollaire 1.

Si $(E, \langle ., . \rangle)$ est un espace euclidien rapporté à une base orthonormée e

Alors $\varphi \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix} \end{array} \right)$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriel tel que* $(\langle x, y \rangle) = \varphi(x) \times {}^T\varphi(y)$

Corollaire 2.

Si $x \in E$, E euclidien rapporté à une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée

$$\textit{Alors } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, e_i \rangle^2$$

19.5 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Proposition.

Si F est un sous-espace de dimension finie de $(E, \langle ., . \rangle)$ espace préhilbertien réel Alors $f^\perp$ est un supplémentaire de F dans E appelé supplémentaire orthogonal de F dans E. On note $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$

Corollaire.

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace $(E, \langle ., . \rangle)$ euclidien

$$\textit{Alors } \dim F^\perp = \dim E - \dim F$$

*En particulier si H est un hyperplan de E tout vecteur **non nul** de $H^\perp$ est dit vecteur normal à H*

Projection orthogonale Si F est un sous-espace de dimension finie d'une espace préhilbertien réel $(E, \langle ., . \rangle)$ rapporté à une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$, alors $\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$ est la projection de x sur F parallèlement à $F^\perp$ autrement appelée projection orthogonale de x sur F parfois notée $p_F^\perp(x)$

Distance à un ensemble Si F est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle ., . \rangle)$, pour $x \in E$, on appelle distance de x à F et on note $d(x, F)$ le réel définit par

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \{\|x - y\|\}$$

Propriété.

Si F est rapporté à une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$

$$\textit{Alors } \boxed{d(x, F) = \|x - p_F^\perp(x)\| = \|p_{F^\perp}^\perp(x)\|} = \|x - \textstyle\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i\|$$

Proposition.

Si u est un vecteur non nul d'un espace euclidien $(E, \langle ., . \rangle)$ on a :

$$\forall x \in E, \ p^\perp_{(\mathrm{Vect(u)})^\perp}(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle u}{\|u\|^2}$$

$$\textit{et} \quad d\big(x, (\mathrm{Vect}(u))^\perp\big) = \frac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|}$$

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 20

Procédés sommatoires discrets

Chapitre 21

Fonctions de deux variables

Contenu

21.1 Continuité

21.1.1 Notion d'ouvert

Rappel :
Si la norme $\|.\|$ dérive d'un produit scalaire on a :
(1) $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| \geqslant 0 = (0,0)$ (2) $x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(3) $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda.x\| = |\lambda|\,\|x\|$
(4) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
avec égalité si et seulement si $\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\lambda x + \mu y = 0$
(5) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ \|x-y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$

Propriété.

Si $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ *avec* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
Alors $\|x\| \geqslant |x_1|$, $\|x\| \geqslant |x_2|$ *et* $\|x\| \leqslant |x_1| + |x_2|$

Boules Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ on appelle

- Boule ouvert de centre x_0 et de rayon R l'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| < r\}$$

- Boule fermée de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| \leqslant r\}$$

Ouvert Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est dit ouvert lorsque

$$\forall x \in U, \ \exists r > 0 \ : \ B(x, r) \subset U$$

Rq : Un partie de $\mathbb{R}^2$ est dite fermée si son complémentaire dans $/R^2$ est un ouvert.

Propriétés.

(1) *$\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$*
(2) *Une union d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$*
(3) *Une intersection **finie** d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$*

21.1.2 Fonctions de deux variables

Définition Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ toute application $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables réelles.

Continuité Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$ on dit que f est continue en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists r > 0 \ : \ \forall x \in U, \ \big(x \in B(x_0, r) \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| \leqslant \varepsilon\big)$$

Propriété.

Toute fonction polynômiale en x et y est continue sur $\mathbb{R}^2$

Proposition.

Soit f et g définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles
Soit $x_0 \in U$, on suppose que f et g sont continues en x_0, alors
(1) *$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0*
(2) *Si de plus $g(x_0) \neq 0$, il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in B(x_0, r)$, $g(x) \neq 0$ et $\frac{f}{g}$ est continue en x_0*

Applications partielles Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $x = (x_1, x_2) \in U$ on définit les fonctions d'une variable réelle f_1 et f_2

$$f_1(t) = f(x_1, t) \quad et \quad f_2(t) = f(t, x_2)$$

f_1 et f_2 sont dites applications partielles de f au point $x = (x_1, x_2)$

Propriété.

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est continue en $(x_1, x_2) \in U$
Alors f_1 et f_2 sont continues respectivement en X_2 et x_1

21.2 Dérivation

21.2.1 Dérivée partielles

Fonction différentiable Soit $f : U \to \mathbb{R}$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $x = (x_1, x_2) \in U$
On dit que f est différentiable en x par rapport à la première variable si

$$t \mapsto \frac{f(x_1 + t, x_2) - f(x_1, x_2)}{t}$$

admet une limite en 0, notée $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ sous réserve d'existence.

On considère une définition analogue en x_2

Dérivées partielles Soit $f : U \to \mathbb{R}$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on note $\mathscr{D}_f$ l'ensemble des points x de U tels que f soit différentiable en x selon la première variable.
On définie la dérivée partielle de f selon la première variable

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$$

qui à tout x de $\mathscr{D}_f$ associe $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$

On définit de même la dérivée partielle de f selon la deuxième variable.

Si f est différentiable en x selon la première variable, on dit aussi que
f admet une dérivée partielle selon la première variable.
On a de même pour la deuxième variable.

Dérivabilité selon un scalaire Si $f : U \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^2$ et $x \in U$ on dit que f est dérivable en x selon h lorsque

$$\frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

admet une limite finie quand $t \to 0$, notée $\mathrm{d}_{f_x}(h)$

Classe $\mathscr{C}^1$ On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ sont définies et continues sur U

Propriétés.

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ alors

(1) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U avec

$$\forall x \in U,\ \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial x_i}(x) = \lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \mu\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

(2) fg est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U avec

$$\forall x \in U,\ \frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(x) = f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) + g(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

(3) Si g ne s'annule pas sur U alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U avec

$$\forall x \in U,\ \frac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x) - f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)}{g^2(x)}$$

21.2.2 Différentielle

Fonction négligeable Soit $f : U \to \mathbb{R}$ avec $(0,0) \in U$ on dit que $f(h)$ est négligeable devant $\|h\|$ au voisinage de $(0,0)$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall h \in U,\ \big(\|h\| \leqslant \eta \Rightarrow |f(h)| \leqslant \varepsilon\|h\|\big)$$

On note alors $f(h) \underset{h\to(0,0)}{=} o\big(\|h\|\big)$

Rq : ~~Si $f(h)$ est négligeable devant $\|h\|$ au voisinage de $(0,0)$ alors $f(h) \underset{h\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$~~ et f admet des dérivées selon tout vecteur en $(0,0)$ nulles.

Théorème : Développement limité à l'ordre 1 en (x_0, y_0).

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $(x_0, y_0) \in U$

Alors pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_1) \underset{h\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o\big(\|h\|\big)$$

Démonstration. Ce résultat est admis. □

Corollaire.

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f est continue sur U.

Proposition.

Si $f : U \to R$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, $x \in U$

Alors pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, f admet une dérivée en x selon h donnée par

$$\mathrm{d}_{f_x}(h) = h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$$

⋆ ⋆ ⋆

Table des matières - Première année

Table des matières - Deuxième année