Cours de Maths Spé

Ce document est une synthèse du cours de mathématiques dispensé par M. Jean-François Mallordy en classe préparatoire au lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand en 2022-2023. Il s'agit d'un complément au cours de Maths Spé et ne saurait en aucun cas y être un quelconque remplacement !

Paris 2024

Mis en forme par
Émile Sauvat
emile.sauvat@ens.psl.eu

Chapitres

Chapitre 1

Suites et séries

Contenu

1.1 Norme

1.1.1 Généralités

Definition 1.1.1. Une *norme* sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

— $\forall x \in E,\ N(x) = 0_{\mathbb{R}} \ \Leftrightarrow\ x = 0_E$
— $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda.x) = |\lambda|\, N(x)$
— $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Definition 1.1.2. Une *distance* sur X est une application $d : X^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :
- $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$
- $\forall x, y \in E,\ d(x,y) \ = \ d(y,x)$
- $\forall x, y, z \in E,\ d(x,z) \ \leq \ d(x,y) + d(y,z)$

Lemme 1.1.1. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé,*
Alors $\forall N \geq 0$ *(i.e. $\forall x \in E,\ N(x) \geq 0$)*

Lemme 1.1.2. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Si $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = N(x-y)$ alors d est une distance sur E.*

Definition 1.1.3. Soient $a \in E,\ r \in \mathbb{R}$ on définit
- $B(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) < r\}$
- $B_f(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) \leq r\}$

Les *boules ouverte et fermée de centre a et de rayon r.*

Definition 1.1.4. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel quelconque
-> Une partie $C \subset E$ est dite *convexe* si $\forall (a,b) \in C^2,\ [a,b] \subset C$
-> Pour $(a,b) \in E^2$ on définit le *segment* :

$$[a,b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$$

Lemme 1.1.3. *Dans E un EVN quelconque toutes les boules sont convexes.*

1.1.2 Normes euclidiennes

Ici E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire [1]

$$\Phi : \begin{pmatrix} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x, y & \longmapsto & \langle x, y \rangle \end{pmatrix}$$

On a alors par théorème [2], $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E.
On note alors

$$\boxed{\|x\|_2 = N_2(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}}$$

NB : L'inégalité triangulaire pour $\|.\|_2$ est dite inégalité de Minkovsky

Lemme 1.1.4. *Si $E = \mathbb{C}^n, z = (z_1, \ldots, z_n),\ N(z) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2}$ est une norme.*

Lemme 1.1.5. *L'espace $\left(\mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{C}\right)\right, N)$ est un EVN avec*

$$N(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}$$

1. Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive
2. Voir cours de sup.

1.1.3 Exemple de normes

Norme N_∞ :
- Dans $E = \mathbb{K}^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_\infty(x) = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$
- Dans $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$ soit $f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Norme N_1 :
- Dans $E = \mathbb{K}^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- Dans $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$ soit $f \in E$, $N_1(f) = \int_a^b |f(x)| \, dx$

Norme N_2 :
- Dans $E = \mathbb{K}^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n {x_i}^2}$
- Dans $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$ soit $f \in E$, $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 \, dx}$

1.2 Suites

Definition 1.2.1. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. On dit que u *converge vers ℓ* dans (E, d) et on note $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_0, \ d(u_n, \ell) < \varepsilon$$

Lemme : Unicité de la limite. *Soit (u_n) une suite de E telle que*

$$u_n \underset{n}{\to} \ell_1 \ \in E \text{ et } u_n \underset{n}{\to} \ell_2 \ \in E$$

Alors $\ell_1 = \ell_2$

Démonstration. Supposons $\ell_1 \neq \ell_2$.
Soit $\varepsilon = \frac{1}{2} d(\ell_1, \ell_2) > 0$ On a alors $d(u_n, \ell_1) < \varepsilon$ et $d(u_n, \ell_2) < \varepsilon$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ -> *impossible* □

Lemme 1.2.1. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$*
Alors $u_n \underset{n}{\to} \ell \ \Leftrightarrow \ \|u_n - \ell\| \underset{n}{\to} 0$

Lemme 1.2.2. *Soient u_n, $v_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ si on a*
$u_n \underset{n}{\to} \alpha$ et $v_n \underset{n}{\to} \beta$ alors $\lambda u_n + v_n \underset{n}{\to} \lambda \alpha + \beta$

Lemme : Inégalité triangulaire renversée. *Soit $x, y \in E$ alors*

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$$

Démonstration. $N(x) \leq N(x-y)+N(y) \Rightarrow \underbrace{N(x)-N(y)}_{t\in\mathbb{R}} \leq N(x-y)$

Puis on conclut avec la symétrie de la norme. □

Lemme 1.2.3. *Soit $u_n \in E^{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ on a $u_n \underset{n}{\to} \alpha \ \Rightarrow \ \|u_n\| \underset{n}{\to} \|\alpha\|$*

Attention ! La réciproque est fausse !

Definition 1.2.2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est *bornée* si $\forall n$, $\|u_n\| \leq M$ pour un certain $M \in \mathbb{R}$.

Lemme 1.2.4. *Toute suite convergente est bornée.*

Lemme 1.2.5. *Si $\lambda_n \underset{n}{\to} \mu \in \mathbb{K}$ et $u_n \underset{n}{\to} v \in E$ alors $\lambda_n u_n \underset{n}{\to} \mu v$*

Definition 1.2.3. Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ on appelle <u>suite extraite</u> (ou sous-suite) de u toute suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extractrice (injection croissante)

Note. en fait $(v_n)_{n\geq 0} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0} \ \Leftrightarrow \ v = u \circ \varphi$

Definition 1.2.4. $\ell \in E$ est une valeur d'adhérence de u s'il existe une suite extraite de u qui converge vers ℓ. On notera $\mathcal{V}_u$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.

Lemme 1.2.6. *Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ si u converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ alors toute suite extraite de u converge vers ℓ*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice et $(v_n)_{n\geq 0} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$

Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0,\ d(u_n,\ell) < \varepsilon$ donc $\varphi(n) \geq n_0$ et ainsi $d\left(u_{\varphi(n)},\ell\right) < \varepsilon$ et $v_n \underset{n}{\to} \ell$ □

Corollaire. *Toute suite admettant au moins 2 valeurs d'adhérence est divergente*

1.3 Normes équivalentes

1.3.1 Définition

Definition 1.3.1. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, N et N' deux normes sur E. N et N' sont dites équivalentes ($N \sim N'$) si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha N \leq N' \leq \beta N$

On peut aussi l'écrire $N' \leq \beta N$ et $N \leq \frac{1}{\alpha} N'$

Lemme 1.3.1. *Soit N, N' des normes équivalentes sur E, $u \in E^{\mathbf{N}}$, $\ell \in E$ alors*
- $u_n \underset{n}{\rightarrow} \ell$ *dans* (E, N) $\Leftrightarrow$ $u_n \underset{n}{\rightarrow} \ell$ *dans* (E, N')
- u *est bornée dans* $(E, N) \Leftrightarrow u$ *est bornée dans* (E, N')

Lemme 1.3.2. *Sur $\mathbf{K}^n$, N_1, N_2 et N_∞ sont équivalentes et plus précisément*

$$N_\infty \leq N_1 \leq \sqrt{n} N_2 \leq n N_\infty$$

1.3.2 Cas de espaces de dimension finie

Rappel. Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il existe une famille d'éléments de E libre et génératrice, c'est alors une base de E.

Théorème 1.3.3. *Sur un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Note. Sera démontré ultérieurement.

Corollaire. *Dans un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie, la notion de convergence ne dépend pas de la norme.*

Attention ! C'est faux en dimension quelconque !

Lemme 1.3.4. *Soit E de dimension finie, $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $(x_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbf{N}}$ et $\alpha \in E$. On écrit* $\begin{cases} x_n = x_{1,n} e_1 + \cdots + x_{p,n} e_p \\ \alpha = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p \end{cases}$
On a alors $x_n \underset{n}{\rightarrow} \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![1, p]\!],\ x_{k,n} \underset{n}{\rightarrow} \alpha_k$

Théorème 1.3.5. *Soient $p, q, r \in \mathbf{N}^*$ et deux suites de matrices $(A_n) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$, $(B_n) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{R})$ telles que $A_n \underset{n}{\rightarrow} A$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ et $B_n \underset{n}{\rightarrow} B$ dans $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{R})$. Alors $A_n B_n \underset{n}{\rightarrow} AB$*

Démonstration. Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, r]\!]$
$(A_n B_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} \underbrace{(A_n)_{i,k}}_{\rightarrow a_{i,k}} \underbrace{(B_n)_{k,j}}_{\rightarrow b_{k,j}} \underset{n}{\rightarrow} \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j} = (AB)_{i,j}$ ainsi $A_n B_n \underset{n}{\rightarrow} AB$ $\square$

1.4 Notations o, $\mathcal{O}$, $\sim$

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$

Definition 1.4.1. On dit que u_n est négligeable devant v_n quand $n \to +\infty$ noté $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ s'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ et $(\delta_n)_{n\geq n_0}$ tel que

- $\forall n \geq n_0,\ u_n = \delta_n v_n$
- $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Definition 1.4.2. On dit que u_n est dominée par v_n quand $n \to +\infty$ noté $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ s'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ et $(B_n)_{n\geq n_0}$ tel que

- $\forall n \geq n_0,\ u_n = B_n v_n$
- $(B_n)_{n\geq n_0}$ est bornée.

Definition 1.4.3. On dit que u_n est équivalent à v_n quand $n \to +\infty$ noté $u_n \sim v_n$ si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$

Note. $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$

1.5 Séries dans un K espace vectoriel de dimension finie

- *On note par abus "*$\dim E < \infty$
- *Le cas scalaire est traité en première année*

Soit $u \in E^{\mathbf{N}}$; pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Sommes partielles La suite (U_n) est dite suite des *sommes partielles* associée à u.

Definition 1.5.1. On dit que la *série de terme général* u_n converge si (U_n) converge.

Dans ce cas on pose $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \in E$

Lemme 1.5.1. ($\sum u_n$ *converge*) $\Rightarrow$ $(u_n \to 0)$

Attention ! La réciproque est fausse ! (ex : (H_n))

Definition 1.5.2. Lorsque $u_n \underset{n}{\not\to} 0$, la série $\sum u_n$ est dite *grossièrement divergente*, noté "$\sum u_n$ DVG". On a alors logiquement ($\sum u_n$ DVG $\Rightarrow \sum u_n$ DV)

Théorème : Reste d'une série convergente. *On suppose* $\sum u_n$ *converge et on note* $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *la "limite de la somme". Pour* $n \in \mathbf{N}$ *on pose* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *le "reste d'ordre* n*".*
$\forall n \in \mathbf{N}$, $S = U_n + R_n$ *et* $R_n \to 0$

Démonstration. Soit $n \in \mathbf{N}$ pour $m \geq n+1$, $\sum_{k=n+1}^{m} u_k = U_m - U_n \underset{m}{\rightarrow} S - U_n$ donc R_n existe avec $R_n = S - U_n$ d'où $S = U_n + R_n$ puis $R_n = S - U_n \rightarrow S - S = 0$ $\square$

Lemme 1.5.2. *Soit* (u_n), $(v_n) \in E^{\mathbf{N}}$ *et* $\lambda \in \mathbf{K}$. *On suppose que* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent alors*
- $\sum \lambda u_n + v_n$ *converge*
- $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n + v_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

Definition 1.5.3. Soit $(u_n) \in E^{\mathbf{N}}$ on dit que $\sum u_n$ *converge absolument* si $\sum \|u_n\|$ converge.

Note. Vu dim $E < \infty$, ceci ne dépend pas du choix de la norme

Théorème 1.5.3. *Dans un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel de* dimension finie, *toute série absolument convergente est convergente " CVA ⇒ CV "*

Attention ! Faux dans un EVN quelconque !

Lemme 1.5.4. *Soit* (E, N) *un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel normé de dimension finie*
On supposons que $\sum u_n$ *CVA. Alors* $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$

1.6 Complément sur les séries numériques

Rappel. Soit $z \in \mathbf{C}$ alors $\sum z^n$ CV $\Rightarrow |z| < 1$

- Lorsque $|z| < 1$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$
- On définie $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

1.6.1 Règle de *Dalembert*

Théorème : Règle de *Dalembert*. *Soit* $(u_n) \in (\mathbf{C}^*)^{\mathbf{N}}$
On suppose l'existence de $\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ *tel que* $|u_{u+1}/u_n| \rightarrow \ell$
Alors : 1) $\ell < 1 \Rightarrow \sum u_n$ *CVA*
2) $\ell > 1 \Rightarrow \sum u_n$ *DVG*

Démonstration.
1) On suppose $\ell < 1$ et on note $r_n = \left|\frac{u_{u+1}}{u_n}\right|$. On pose $\theta \in [\ell, 1]$ et $\varepsilon = \theta - \ell$ On a alors
$\exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \geq n_0, |r_n - \ell| < \varepsilon$ soit en particulier $r_n < \ell + \varepsilon = \theta$
Ainsi $\forall n \geq n_0, |u_{n+1}| < \theta |u_n|$
et $|u_n| \leq \theta^{n-n_0} |u_{n_0}|$ (REC) On a alors $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \underbrace{\theta^{-n_0} |u_{n_0}|}_{\text{cte}} \theta^n$
or $\sum \theta^n$ converge car $\theta \in]0, 1[$

donc par théorème de comparaison $\sum |u_n|$ converge.

2) On suppose $\ell > 1$ et on fixe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \theta < \ell$, on a alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0,\ r_n > \theta\ (\ldots)$
on obtient $|u_n| \to +\infty$ donc $u_n \underset{n}{\not\to} 0$ donc $\sum u_n$ DVG □

1.6.2 Séries alternées

Definition 1.6.1. La série réelle $\sum u_n$ est dite <u>alternée</u> si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n\,|u_n|$ ou $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1}\,|u_n|$

Théorème : Critère spécial des série alternées. *Soit (u_n) une suite telle que*

- *$\sum u_n$ est alternée*
- *$u_n \to 0$*
- *$(|u_n|)_{n\geq 0}$ décroit*

alors $\sum u_n$ converge et on a de plus, $\forall n \in \mathbb{N}$

- *$|R_n| \leq |u_{n+1}|$*
- *R_n et u_{n+1} ont le même signe*
- *S est compris entre U_n et U_{n+1}*

1.6.3 Sommation des relations de comparaisons

Théorème 1.6.1. *Soit $(u_n),\ (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v_n \geq 0,\ \forall n \geq n_0$. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge. Soit les restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ alors*

- *$u_n = o_{n\to+\infty}(v_n) \Rightarrow R_n = o_{n\to+\infty}(R'_n)$*
- *$u_n = \mathcal{O}_{n\to+\infty}(v_n) \Rightarrow R_n = \mathcal{O}_{n\to+\infty}(R'_n)$*
- *$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$*

Théorème 1.6.2. *Soit $(u_n),\ (v_n)\ \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v_n \geq 0,\ \forall n \geq n_0$*
On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ diverge. Soit les sommes partielles $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$ alors

- *$u_n = o_{n\to+\infty}(v_n) \Rightarrow U_n = o_{n\to+\infty}(V_n)$*
- *$u_n = \mathcal{O}_{n\to+\infty}(v_n) \Rightarrow U_n = \mathcal{O}_{n\to+\infty}(V_n)$*
- *$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$*

Théorème de *Cesàro*. *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*

- *Si $u_n \to \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \to \lambda$*
- *Si $u_n \to +\infty$ alors $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \to +\infty$*

Démonstration. 1) Supposons $u_n \to \lambda$ alors $u_n - \lambda = o(1)$, on pose ensuite $v_n = 1$ alors $\sum v_n$ diverge et d'après le théorème de sommation en cas divergent
$\sum_{k=0}^{n} u_k - \lambda = o(\sum_{k=0}^{n} 1) \Rightarrow \frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{n} u_k) - \lambda \to 0$
2) Supposons $u_n \to +\infty$ et posons $a_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ Soit $A \in \mathbb{R}$ et $A' = A + 1$

Soit $n_0 \in \mathbf{N}\ :\ \forall n \geq n_0,\ u_n > A'$, puis pour $n \geq n_0$:
$a_n = \frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=0}^{n} u_k)$ donc $a_n > \frac{C}{n+1} + A'\frac{n+1-n_0}{n+1} = A' + \frac{C-n_0A'}{n+1}$
Soit $n_1 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq n_1,\ \left|\frac{C-A'n_0}{n+1}\right| < 1$ alors $\forall n \geq n_1,\ a_n > A$
d'où $a_n \to +\infty$ □

1.7 Produit de séries

Definition 1.7.1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries quelconques (convergentes ou non) de nombres complexes.
On pose $\forall n \in \mathbf{N}$: $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ (somme finie !)
La série $\sum w_n$ est appelée *produit de Cauchy* de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Attention !
Lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent on a pas forcément

$$\left(\sum u_n\right) \times \left(\sum v_n\right) = \sum w_n$$

Théorème 1.7.1. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors :*
1) $\sum w_n$ CVA *2) $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$*

Signalé :

Théorème de *Mertens*. *Si $\sum u_n$ CVA et $\sum v_n$ converge alors $\sum w_n$ converge et $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$*

1.8 Dualité série-suite

Toute suite peut-être envisagée comme une série

Ici (E, N) est un EVN de dimension finie.
On définit les suites (a_n) et (b_n) par $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $b_0 = a_0$ et $b_n = a_n - a_{n-1}$. On a alors pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = b_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_0 + a_n - a_0 = a_n \text{ soit } a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

On sait ensuite que (a_n) converge si et seulement si $\sum b_k$ converge donc

$$(a_n) \text{ converge } \Leftrightarrow \sum a_n - a_{n-1} \text{ converge}$$

⋆ ⋆ ⋆

Table des Matières - Première année

Table des Matières - Deuxième année