Mathématiques Préparatoires II

Ce document est une synthèse du cours de mathématiques dispensé par M. Jean-François Mallordy en classe préparatoire au lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand en 2022-2023. Il s'agit d'un complément au cours de Maths Spé et ne saurait en aucun cas y être un quelconque remplacement !

Paris, 2024

Mis en forme par
Émile Sauvat
emile.sauvat@ens.psl.eu

Chapitres

Chapitre 22

Suites et séries

On considèrera comme acquis en sup les cas réel et complexe : Notament :
-> Théorème des gendarmes *-> Théorème de la limite monotone*

Contenu

22.1 Norme

22.1.1 Généralités

Norme Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :
- $\forall x \in E,\ \ N(x) = 0_{\mathbb{R}} \ \Leftrightarrow\ x = 0_E$
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ N(\lambda.x) = |\lambda|\, N(x)$
- $\forall x, y \in E,\ \ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Lemme 22.1.1.
Soit (E, N) un espace vectoriel normé,
On a $N \geq 0$ (i.e. $\forall x \in E,\ N(x-y) \geq 0$)

Distance Une distance sur X est une application $d : X^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :
- $\forall x, y \in E,\ \ d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$
- $\forall x, y \in E,\ \ d(x,y) \ = \ d(y,x)$
- $\forall x, y, z \in E,\ \ d(x,z) \ \leq \ d(x,y) + d(y,z)$

Lemme 22.1.2.
Soit (E, N) un espace vectoriel normé.
Si $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = N(x-y)$ alors d est une distance sur E.

Boule ouverte et fermée Soient $a \in E,\ r \in \mathbb{R}$ On pose

$$B(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) < r\} \qquad B_f(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) \leq r\}$$

Les boules ouverte et fermée de centre a et de rayon r.

Segment et ensemble convexe Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel quelconque

-> Pour $(a,b) \in E^2$ on défini le segment : $[a,b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$
-> $C \subset E$ est dit convexe si $\forall (a,b) \in C^2,\ \ [a,b] \subset C$

Lemme 22.1.3.
Dans E un EVN quelconque les boules sont convexes

22.1.2 Normes euclidiennes

Ici E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire*

$$\Phi : \left(\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x \rangle \, y \end{array} \right)$$

On a alors par théorème † , $x \mapsto \sqrt{\langle x \rangle \, x}$ est une norme sur E. On notera

$$\boxed{\|x\|_2 = N_2(x) = \sqrt{\langle x \rangle \, x}}$$

Note. L'inégalité triangulaire pour $\|.\|_2$ est dite inégalité de Minkovsky

Lemme 22.1.4.

Si $E = \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $N(z) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}$ *est une norme*

Lemme 22.1.5.

$E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ *Soit* $f \in E$ *on pose*
$N(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}$ *alors* N *est une norme sur* E

22.1.3 Exemple de normes

Norme N_∞ :

Dans $E = K^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_\infty(x) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$

Dans $E = \mathcal{C}^0([a, b], K)$ soit $f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Norme N_1 :

Dans $E = K^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

Dans $E = \mathcal{C}^0([a, b], K)$ soit $f \in E$, $N_1(f) = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$

Norme N_2 :

Dans $E = K^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$

Dans $E = \mathcal{C}^0([a, b], K)$ soit $f \in E$, $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x}$

22.2 Suites

Suite convergente Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. On dit que u converge vers ℓ et on note

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_0, \ d(u_n, \ell) < \varepsilon$$

Lemme 1 : Unicité de la limite.

Si $\begin{array}{l} u_n \underset{n}{\to} \ell_1 \in E \\ u_n \underset{n}{\to} \ell_2 \in E \end{array}$ *Alors* $\ell_1 = \ell_2$

*. Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive

†. Voir cours de sup

Démonstration. Par l'absurde, on suppose $\ell_1 \neq \ell_2$.
Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}d(\ell_1, \ell_2) > 0$ On a alors $\begin{array}{l} n_1 \in \mathbf{N} \ : \ \forall n \geq n_1, \ d(u_n, \ell_1) < \varepsilon \\ n_2 \in \mathbf{N} \ : \ \forall n \geq n_2, \ d(u_n, \ell_2) < \varepsilon \end{array}$ et soit $p = max(n_1, n_2)$
$d(\ell_1, \ell_2) \leq d(\ell_1, u_p) + d(\ell_2, u_p) < 2\varepsilon = d(\ell_1, \ell_2)$ impossible □

Lemme 22.2.1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$, $\ell \in E$ *Alors* $u_n \underset{n}{\to} \ell \Leftrightarrow \|u_n - \ell\| \underset{n}{\to} 0$

Démonstration. Notons $v_n = \|u_n - \ell\|$ et $\lambda = 0$ Alors $d(u_n, \ell) = \|u_n - \ell\| = v_n = \|v_n - \lambda\| = d(v_n, \lambda)$
or $u_n \underset{n}{\to} \ell$ ssi : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ : \ \forall n \geq n_0, \ d(u_n, \ell) < \varepsilon \Rightarrow d(v_n, \lambda) < \varepsilon \Rightarrow v_n \underset{n}{\to} 0$ □

Lemme 22.2.2.
Soient $u_n, \ v_n \in E^{\mathbf{N}}$ *et* $\lambda \in K$ *si on a* $u_n \underset{n}{\to} \alpha$ *et* $v_n \underset{n}{\to} \beta$
Alors $\lambda u_n + v_n \underset{n}{\to} \lambda\alpha + \beta$

Lemme : Inégalité triangulaire renversée.
Soit $x, y \in E$ *alors* $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$

Démonstration. $N(x) \leq N(x-y) + N(y) \Rightarrow \underbrace{N(x) - N(y)}_{t\in\mathbf{R}} \leq N(x-y)$

On conclut alors par agument de symétrie. □

Lemme 22.2.3.
Soit $u_n \in E^{\mathbf{N}}$, $\alpha \in K$ *on a* $u_n \underset{n}{\to} \alpha \Rightarrow \|u_n\| \underset{n}{\to} \|\alpha\|$

Attention ! La réciproque est fausse !

Suite bornée Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ on dit que (u_n) est bornée si $\exists M \in \mathbf{R} \ : \ \forall n \in \mathbf{N}, \ \|u_n\| \leq M$.

Lemme 22.2.4.
Toute suite $(u_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbf{N}}$ *convergente est bornée*

Lemme 22.2.5.
On suppose $\begin{cases} \lambda_n \underset{n}{\to} \mu \in K \\ u_n \underset{n}{\to} v \in E \end{cases}$ *Alors* $\lambda_n u_n \underset{n}{\to} \mu v$

Suite extraite Soit $u \in E^{\mathbf{N}}$ on appelle suite extraite (ou sous-suite) de u toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ où $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une extractrice (injection croissante)
NB : en fait $(v_n)_{n\geq 0} = (u_{\varphi(n)})_{n\geq 0} \Leftrightarrow v = u \circ \varphi$

Valeur d'adhérence $\ell \in E$ est une valeur d'adhérence de u s'il existe une suite extraite de u qui converge vers ℓ. On notera $\mathcal{V}_u$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.

Théorème 22.2.6.
Soit $u \in E^{\mathbf{N}}$ si u
converge vers $\ell \in K$ alors toute suite extraite de u converge vers ℓ

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une extractrice et $(v_n)_{n\geq 0} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$
Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbf{N}\ :\ \forall n \geq n_0,\ d(u_n, \ell) < \varepsilon$ donc $\varphi(n) \geq n_0$ et ainsi $d\left(u_{\varphi(n)}, \ell\right) < \varepsilon$ et $v_n \underset{n}{\to} \ell$ □

Corollaire.
Toute suite admettant au moins 2 valeurs d'adhérence est divergente

22.3 Normes équivalentes

22.3.1 Définition

Soit E un K espace vectoriel, N et N' deux normes sur E. N et N' sont dites équivalentes ($N \sim N'$) si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ :\ \alpha N \leq N' \leq \beta N$

Note. On peut aussi l'écrire $N' \leq \beta N$ et $N \leq \frac{1}{\alpha} N'$

Lemme 22.3.1.
Soit N, N' des normes équivalentes sur E, $u \in E^{\mathbf{N}},\ \ell \in E$ alors
1) $u_n \underset{n}{\to} \ell$ dans $(E, N) \Leftrightarrow u_n \underset{n}{\to} \ell$ dans (E, N')
2) u est bornée dans $(E, N) \Leftrightarrow u$ est bornée dans (E, N')

Lemme 22.3.2.
Sur K^n, N_1, N_2 et N_∞ sont équivalentes et plus précisément
$$N_\infty \leq N_1 \leq \sqrt{n} N_2 \leq n N_\infty$$

22.3.2 Cas de espaces de dimension fini

Rappel. Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il existe une famille d'éléments de E libre et génératrice, c'est alors une base de E.

Théorème 22.3.3.
Sur un K-ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Sera démontré ultérieurement.

Corollaire.
Dans un K espace vectoriel de dimension finie, la notion de convergence ne dépend pas de la norme.

Attention ! C'est faux en dimension quelconque !

Lemme 22.3.4.
Soit E de dimension finie et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbf{N}}$ et $\alpha \in E$. On écrit $\begin{cases} x_n = x_{1,n} e_1 + \cdots + x_{p,n} e_p \\ \alpha = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p \end{cases}$
On a alors $x_n \underset{n}{\to} \alpha \ \Leftrightarrow\ \forall k \in [\![1, p]\!],\ x_{k,n} \underset{n}{\to} \alpha_k$

Théorème 22.3.5.

Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} A_n \underset{n}{\rightarrow} A & \textit{dans } \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \\ B_n \underset{n}{\rightarrow} B & \textit{dans } \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}) \end{cases}$ *Alors* $A_n B_n \underset{n}{\rightarrow} AB$

Démonstration. Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, r]\!]$
$(A_n B_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} \underbrace{(A_n)_{i,k}}_{\rightarrow a_{i,k}} \underbrace{(B_n)_{k,j}}_{\rightarrow b_{k,j}} \underset{n}{\rightarrow} \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j} = (AB)_{i,j}$ donc $A_n B_n \underset{n}{\rightarrow} AB$ □

22.4 Comparaisons asymptotiques

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Négligeabilité On dit que u_n est négligeable devant v_n quand $n \rightarrow +\infty$ noté $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(\delta_n)_{n \geq n_0}$ tel que
- $\forall n \geq n_0, \ u_n = \delta_n v_n$
- $\delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$

Domination On dit que u_n est dominée par v_n quand $n \rightarrow +\infty$ noté $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \bigcirc(v_n)$ s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(B_n)_{n \geq n_0}$ tel que
- $\forall n \geq n_0, \ u_n = B_n v_n$
- $(B_n)_{n \geq n_0}$ est bornée

Équivalence On dit que u_n est équivalent à v_n, noté $u_n \sim v_n$ si :

$$u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$$

Note. $u_n \sim v_n \ \Leftrightarrow \ u_n = v_n + o(v_n)$

22.5 Séries dans un K espace vectoriel de dimension finie

Note. On note par abus " $dim E < \infty$ "

Le cas scalaire est abordé en MPSI.

Soit $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$; pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Sommes partielles La suite (U_n) est dite suite des sommes partielles associée à u.

Série convergente On dit que la série de terme général u_n converge si (U_n) converge.
Dans ce cas on pose $\sum_0^{+\infty} = \lim_{n\to+\infty} U_n \in E$

Lemme 22.5.1.
$(\sum u_n \text{converge}) \Rightarrow \left(u_n \underset{n}{\to} 0\right)$

Attention ! La réciproque est fausse ! (ex : (H_n))

Divergence grossière Lorsque $u_n \underset{n}{\not\to} 0$, la série $\sum u_n$ est dite grossièrement divergente "$\sum u_n$ DVG" ainsi : ($\sum u_n$DVG $\Rightarrow \sum u_n$DV)

Théorème : Reste d'une série convergente.
On suppose $\sum u_n$ converge, on note $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ la "limite de la somme" et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le "reste d'ordre n".
Alors $\left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbf{N},\ S = U_n + R_n \\ R_n \to 0 \end{array} \right.$

Démonstration. bien-fondé ?
Soit $n \in \mathbf{N}$ pour $m \geq n+1$, $\sum_{k=n+1}^{m} u_k = U_m - U_n \underset{m}{\to} S - U_n$ donc R_n existe avec $R_n = S - U_n$
d'où $S = U_n + R_n$ puis $R_n = S - U_n \to S - S = 0$ □

Lemme 22.5.2.
Soit (u_n), $(v_n) \in E^{\mathbf{N}}$ et $\lambda \in K$
On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors :
-> $\sum \lambda u_n + v_n$ *converge*
-> $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n + v_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

Convergence absolue Soit $(u_n) \in E^{\mathbf{N}}$ on dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum \|u_n\|$ converge.

Note. Vu $dimE < \infty$, ceci ne dépend pas du choix de la norme

Théorème 22.5.3.
Dans un K espace vectoriel de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente " CVA $\Rightarrow$ CV "

Sera démontré ultérieurement. [*]

Attention ! Faux dans un EVN quelconque !

Lemme 22.5.4.
Soit (E, N) un K espace vectoriel normé de dimension finie
On supposons que $\sum u_n$ CVA. Alors $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$

---

*. TODO : add ref

22.6 Complément sur les séries numériques

Rappel. Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $\sum z^n$ CV $\Rightarrow |z| < 1$

-> Lorsque $|z| < 1$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

-> On définie $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

22.6.1 Règle de Dalembert

Théorème : Règle de Dalembert.

Soit $(u_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$

On suppose l'existence de $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tel que* $\left|\frac{u_{u+1}}{u_n}\right| \to \ell$

Alors : 1) $\ell < 1 \Rightarrow \sum u_n$ *CVA*

2) $\ell > 1 \Rightarrow \sum u_n$ *DVG*

Démonstration. 1) On suppose $\ell < 1$ et on note $r_n = \left|\frac{u_{u+1}}{u_n}\right|$. On pose $\theta \in [\ell, 1]$ et $\varepsilon = \theta - \ell$
On a alors
$\exists n_0 \in \mathbb{N} \;:\; \forall n \geq n_0,\; |r_n - \ell| < \varepsilon$ soit en particulier $r_n < \ell + \varepsilon = \theta$ Ainsi $\forall n \geq n_0,\; |u_{n+1}| < \theta\,|u_n|$
et $|u_n| \leq \theta^{n-n_0}\,|u_{n_0}|$ (REC) On a alors $\forall n \geq n_0,\; |u_n| \leq \underbrace{\theta^{-n_0}\,|u_{n_0}|}_{\text{cte}}\,\theta^n$ or $\sum \theta^n$ converge car $\theta \in]0, 1[$
donc par théorème de comparaison $\sum |u_n|$ converge.

2) On suppose $\ell > 1$ et on fixe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \theta < \ell$, on a alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} \;:\; \forall n \geq n_0,\; r_n > \theta$ (...)
on obtient $|u_n| \to +\infty$ donc $u_n \underset{n}{\not\to} 0$ donc $\sum u_n$ DVG ☐

22.6.2 Séries alternées

Défnition La série réelle $\sum u_n$ est dite <u>alternée</u> si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\; u_n = (-1)^n\,|u_n| \\ \forall n \in \mathbb{N},\; u_n = (-1)^{n+1}\,|u_n| \end{cases}$

Théorème : Critère spécial des série alternées.

Soit (u_n) *une suite, on suppose*

1) $\sum u_n$ *est alternée*

2) $u_n \to 0$

3) $(|u_n|)_{n \geq 0}$ *décroit.*

alors $\sum u_n$ *converge et de plus,* $\forall n \in \mathbb{N}$

-> $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

-> R_n *et* u_{n+1} *ont le même signe*

-> S *est compris entre* U_n *et* U_{n+1}

22.6.3 Sommation des relations de comparaisons

Théorème : Cas convergent.
Soit (u_n), $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* $v_n \geq 0$, $\forall n \geq n_0$. *On suppose que* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *converge et on pose* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$ *et* $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n$
Alors :
1) $u_n = o_{n\to+\infty}(v_n) \Rightarrow R_n = o_{n\to+\infty}(R'_n)$
2) $u_n = \bigcirc_{n\to+\infty}(v_n) \Rightarrow R_n = \bigcirc_{n\to+\infty}(R'_n)$
3) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$

Théorème : Cas divergent.
Soit (u_n), $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* $v_n \geq 0$, $\forall n \geq n_0$. *On suppose que* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *diverge et on note* $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ *et* $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$
Alors :
1) $u_n = o_{n\to+\infty}(v_n) \Rightarrow U_n = o_{n\to+\infty}(V_n)$
2) $u_n = \bigcirc_{n\to+\infty}(v_n) \Rightarrow U_n = \bigcirc_{n\to+\infty}(V_n)$
3) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$

Théorème de Cesàro.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
1) Si $u_n \to \lambda$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \to \lambda$
2) Si $u_n \to +\infty$ *alors* $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \to +\infty$

Démonstration. 1) Supposons $u_n \to \lambda$ alors $u_n - \lambda = o(1)$, on pose ensuite $v_n = 1$ alors $\sum v_n$ diverge et d'après le théorème de sommation en cas divergent

$$\sum_{k=0}^{n} u_k - \lambda = o(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{=n+1}) \Rightarrow \frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{n} u_k) - \lambda \to 0$$

2) Supposons $u_n \to +\infty$ et posons $a_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ Soit $A \in \mathbb{R}$ et $A' = A + 1$
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$, $u_n > A'$, puis pour $n \geq n_0$:

$$a_n = \frac{1}{n+1}(\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k}_{=C} + \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} u_k}_{>A'(n-n_0+1}) \text{ donc } a_n > \frac{C}{n+1} + A'\frac{n+1-n_0}{n+1} = A' + \frac{C-n_0A'}{n+1}$$

Soit $n_1 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq n_1$, $\left|\frac{C-A'n_0}{n+1}\right| < 1$ alors $\forall n \geq n_1$, $a_n > A$ d'où $a_n \to +\infty$ □

22.7 Produit de deux séries absolument convergentes

Produit de Cauchy Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries quelconques (convergentes ou non) de nombres complexes.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}$: $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ (somme finie !)
La série $\sum w_n$ est appelée produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Attention !
Lorsque $\sum u_n$ **et** $\sum v_n$ **convergent on a pas forcément** $(\sum u_n) \times (\sum v_n) = \sum w_n$

Théorème 22.7.1.
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors :
1) $\sum w_n$ CVA
2) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$

Signalé :
Théorème de Mertens.
Si $\begin{cases} \sum u_n \text{ CVA} \\ \sum v_n \text{ converge} \end{cases}$
alors $\sum w_n$ converge et $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$

22.8 Dualité série-suite

Toute suite peut-être envisagée comme une série
Ici (E, N) est un EVN de dimension finie.

On pose $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_n = a_n - a_{n-1} \end{cases}$ On a alors pour $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = b_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_0 + a_n - a_0 = a_n \quad \text{soit} \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

On sait ensuite que (a_n) converge si et seulement si $\sum b_k$ converge donc

$$(a_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \sum a_n - a_{n-1} \text{ converge}$$

$\star \quad \star \quad \star$

Chapitre 23

Limites et continuité

Cadre : (E, N) est un espace vectoriel normé quelconque et $A \subset E$

Contenu

23.1 Ouverts et fermés

On considère ici $A \subset E$ et $\alpha \in E$

23.1.1 Intérieurs

Point intérieur
-> α est un dit un point intérieur à A s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(\alpha, r) \subset A$

Intérieur
-> On pose $A = \{x \in E \mid x$ est intérieur à $A\}$ dit <u>intérieur</u> de A

Lemme 23.1.1.
Soit $A \subset E$ alors $A \subset A$

Lemme : Croissance de l'intérieur.
Soit $A, B \in E$ alors $A \subset b \Rightarrow A \subset B$

23.1.2 Ouverts

Définition Dans (E, N) on appelle <u>ouvert</u> (ou <u>partie ouverte</u>) **toute** réunion de boules ouvertes.

Théorème : Caractérisation des ouverts.
Soit $U \subset E$ alors
$(U$ *ouvert*$) \Leftrightarrow (\forall x \in U, \ \exists r > 0 \ : \ B(x, r) \subset U)$

Démonstration.
$\boxed{\Leftarrow}$ Pour chaque $x \in U$, on choisit r_x tel que $B(x, r_x) \subset U$ alors $U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x)$ donc par définition, U est un ouvert.
$\boxed{\Rightarrow}$ On note $U = \bigcup B(x_i, r_i)$, soit $x \in U$ et $i_0 \in I$ tel que $x \in B(x_{i_0}, r_{i_0})$
Soit $r = r_{i_0} - d(x, x_{i_0}) > 0$ alors $B(x, r) \subset B(x_{i_0}, r_{i_0})$
Soit $y \in B(x, r)$ c'est-à-dire $d(x, y) < r$ alors
$d(y, x_{i_0}) \leq d(y, x) + d(x, x_{i_0}) < r_{i_0}$
Ainsi $\forall x \in U, \ \exists r > 0 \ : \ B(x, r) \subset U$ $\square$

Corollaire.
Soit $U \subset E$ alors U ouvert $\Leftrightarrow$ $U \subset U$ $\Leftrightarrow$ $U = U$

Note. $\mathcal{T} = \{U \subset E \mid U \text{ est ouvert}\}$ est appelé Topologie de (E, N)

Théorème 23.1.2.
1) Toute réunion d'ouvert est un ouvert.
2) Toute intersection finie d'ouvert est un ouvert.

Démonstration. On démontre la deuxième assertion
-> Cas de l'intersection vide : $\bigcap_{\emptyset} = E$
-> Cas de 2 ouverts : Soit A, B deux ouverts de E , soit $x \in A \cap B$, on a $\exists r_1, r_2 > 0$ tels que $B(x, r_1) \subset A$ et $B(x, r_2) \subset B$ alors soit $r = \min(r_1, r_2)$, $B(x, r) \subset A \cap B$ et par le théorème de caractérisation des ouverts, $A \cap B$ est un ouvert
-> Cas de p ouverts, $p \in \mathbb{N}^*$: par récurrence sur p avec le cas $p = 2$ $\square$

23.1.3 Fermés

Lois de Morgan : $\quad {}^c\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} {}^cA_i$ et ${}^c\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I} {}^cA_i$

Définition On appelle fermé tout complémentaire d'un ouvert de E
Ainsi A est fermé $\Leftrightarrow$ ${}^cA$ est ouvert avec ${}^cA = C_E A$

Théorème 23.1.3.
1) Toute intersection de fermés est fermée.
2) Toute réunion finie de fermés est fermée.

Démonstration. 1) Soit $(\Phi_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E on a ${}^c\left(\bigcap_I \Phi_i\right) = \bigcup_I {}^c\Phi_i$ est un ouvert donc l'intersection des Φ_i est fermée. $\square$

23.1.4 Adhérence

Point adhérent α est dit adhérent à A si $\forall r > 0,\ B(\alpha, r) \cap A \neq \emptyset$

Adhérence On pose $\overline{A} = \{x \in E \mid x \text{ est adhérent à } A\}$ dit adhérence de A.

Lemme : Croissance de l'adhérence.
Soit $A, B \in E$ alors $A \subset b$ $\Rightarrow$ $\overline{A} \subset \overline{B}$

> **Théorème 23.1.4.**
> *Soit $\alpha \in E$ alors $\alpha \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbf{N}} : a_n \underset{n}{\to} \alpha$*

Démonstration.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $r > 0$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que $\forall n \geq n_0,\ d(a_n, \alpha) < r$ alors $B(\alpha, r) \cap A \neq \emptyset$ donc $\alpha \in \overline{A}$
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $n \in \mathbf{N},\ \exists a_n \in B(\alpha, \frac{1}{n+1}) \cap A$ d'où $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ vérifie $a_n \underset{n}{\to} \alpha$ □

> **Théorème : Caractérisation des fermés.**
> *Soit $A \subset E$, A est fermé si et seulement si A est stable par passage à la limite.*

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $B = {}^cA$ et $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ telle que $a_n \underset{n}{\to} \alpha \in E$
Si $\alpha \in B$, $\exists r > 0$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que $\forall n \geq n_0,\ a_n \in B(\alpha, r)$ soit $a_{n_0} \in B(\alpha, r) \ \Rightarrow\ a_{n_0} \notin A$ (<u>impossible !</u>) d'où $\alpha \in A$
$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposée, on suppose que $B = {}^cA$ n'est pas un ouvert donc $\exists \alpha \in B\ :\ \forall r > 0, \exists x \in B(\alpha, r)$ tel que $x \notin B$. On a alors $\alpha \in \overline{A}$ et $\alpha \in B$ soit $\alpha \notin A$ d'où $\exists\ (a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ avec $a_n \underset{n}{\to} \alpha$. On a donc trouvé une suite convergente d'éléments de A dont la limite n'est pas dan A. □

> **Corollaire.**
> *Soit $A \subset E$, on a : A femré $\Leftrightarrow \overline{A} \subset A \Leftrightarrow \overline{A} = A$*

> **Lemme 23.1.5.**
> *Soit $A \subset E$ alors* $\quad {}^c(\overline{A}) = \widehat{{}^cA} \quad$ *et* $\quad {}^c(A) = \overline{{}^cA}$

> **Lemme 23.1.6.**
> *1) A est un ouvert*
> *2) A est le plus grand ouvert de E inclu dans A*

> **Lemme 23.1.7.**
> *1) $\overline{A}$ est un fermé*
> *2) $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A*

> **Théorème 23.1.8.**
> *Les notions suivantes, (notions topologiques) :*
> - *point intérieur* • *ouvert*
> - *point adhérent* • *fermé*
>
> *sont invariants par passage à une norme équivalente.*

Démonstration. On sait que la convergence d'une suite est invariante par norme équivalente donc on a l'invariance des notions "point adhérent" et "adhérence" ainsi que "point intérieur" par le complémentaire de l'adhérence (Page 16) puis par caractérisation séquentielle des fermés on a l'invariance de la notion "fermé" ainsi que "ouvert" par le complémentaire. □

> **Lemme 23.1.9.**
> *1) Toute boule fermée est fermée*
> *2) Toute sphère est fermée*

Frontière Soit $A \subset E$ on définie sa <u>frontière</u> comme $\boxed{F_r(A) = \overline{A} \backslash A}$

Lemme 23.1.10.
$\forall A \subset E$, $F_r(A)$ *est fermée et* $\boxed{F_r(A) = \overline{A} \cap \overline{{}^cA}}$

Densité Soit $D \subset A \subset E$ on dit que D est dense dans A si tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de D soit

$$\forall a \in A,\ \exists\ (d_n) \in D^{\mathbf{N}}\ :\ d_n \underset{n}{\to} a$$

Lemme 23.1.11.
Soit $D \subset A$ *alors on a :* D *dense dans* $A \Leftrightarrow A \subset \overline{D}$

Exemple Soit $n \in \mathbf{N}^*$ alors $GL_n(K)$ dense dans $\mathcal{M}_n(K)$

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ et $r = \text{rg}(M) \in [\![1, n]\!]$
Par théorème[*] $\exists U, V \in GL_n(K)$: $M = UJ_rV$ posons alors pour $p \in \mathbf{N}^*$ $J_r\left(\frac{1}{p}\right) = \text{Diag}\big(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \frac{1}{p}, \ldots, \frac{1}{p}\big)$ puis $M_p = UJ_r\left(\frac{1}{p}\right)V$ alors $M_p \in GL_n(K) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} M$ □

23.2 Limites

23.2.1 Cas général

Dans toute cette partie, F est un K espace vectoriel et $f : A(\subset E) \to F$

Définition Soit $\alpha \in \overline{A}$, $b \in F$. On dit que f admet b comme limite au point α, noté $f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} b$ si
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in A,\ d(x, \alpha) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$

Lemme 23.2.1.
Soit $A(\subset E) \overset{f}{\to} B(\subset F) \overset{g}{\to} G$ *et* $\alpha \in \overline{A}$, $\beta \in \overline{B}$, $c \in G$
Si on a $f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} \beta$ *et* $g(y) \underset{y\to\beta}{\longrightarrow} c$ *alors* $g(f(x)) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} c$

Lemme 23.2.2.
Soit $\alpha \in \overline{A},\ b \in F,\ (a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ *avec* $\begin{cases} f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} b \\ a_n \underset{n}{\to} \alpha \end{cases}$
alors $f(a_n) \underset{n}{\to} b$

Théorème : Caractérisation séquentielle d'une limite.
Soit $\alpha \in \overline{A},\ b \in F$
Alors $\Big(f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} b\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall (a_n) \in A^{\mathbf{N}},\ (a_n \underset{n}{\to} \alpha) \Rightarrow (f(a_n) \underset{n}{\to} b)\Big)$

[*] Voir cours de sup

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Lemme

$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposée on fixe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N},\ \exists a_n$ tel que $\begin{cases} d(a_n, \alpha) < \frac{1}{n+1} \\ d(f(a_n), b) \geq \varepsilon_0 \end{cases}$

D'où $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ telle que $a_n \underset{n}{\to} \alpha$ **et** $f(a_n) \underset{n}{\not\to} b$ □

Lemme : Unicité de la limite.

Soit $\alpha \in \overline{A}$, $b_1 \in F$, $b_2 \in F$
Si $f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} b_1$ et $f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} b_2$ alors $b_1 = b_2$

Lemme 23.2.3.

Soit $\alpha \in \overline{A}$ et $b \in F$
On suppose que $f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} b$ alors ceci reste vrai si

- *On remplace $\|\|_E$ par une une norme équivalente*
- *On remplace $\|\|_F$ par une une norme équivalente*

Limite en $\pm\infty$ On dit que $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} b$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbf{R}$ tel que $\|x\| > M \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$

Limite infinie Ici $f : A(\subset E) \to \mathbf{R}$ et $\alpha \in \overline{A}$
On dit que $f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} +\infty$ si $\forall M \in \mathbf{R},\ \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in A,\ d(x, \alpha) < \delta \Rightarrow f(x) > M$

Voisinage Soit (E, N) un espace vectoriel normé quelconque et $\alpha \in E$
Soit $V \subset E$ alors V est un voisinage de α si $\exists r > 0$ tel que $B(\alpha, r) \subset V$
On peut noter $\mathcal{V}_\alpha = \{V \subset E \mid V \text{ est } v(\alpha)\}$

Note. $V \in \mathcal{V}_\alpha \Leftrightarrow \alpha \in V$

Lemme 23.2.4.

On suppose que $f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} b \in F$
Alors f est bornée localement au voisinage de α (noté $v(a)$)

23.2.2 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Norme produit Soient $(E_1, N_1), \ldots, (E_r, N_R)$ des K espaces vectoriels normés.
On note $W = \prod_{i=1}^{r} E_i = E_1 \times \cdots \times E_r$ et $x = (x_1, \ldots, x_r) \in W$
On pose $\forall x \in W,\ N(x) = \max_{1\leq i\leq r}\{N_i(x_i)\}$ alors $\begin{cases} N \text{ est dite norme produit} \\ (E, N) \text{ est dit EVN produit} \end{cases}$

Lemme 23.2.5.

Soient U_1 ouvert de (E_1, N_1)
$\vdots$
U_r ouvert de (E_r, N_r)
alors $U_1 \times \cdots \times U_r$ est un ouvert de W
Un produit fini d'ouvert est un ouvert

Lemme 23.2.6.

Un produit fini de fermé est un fermé

Lemme 23.2.7.

Soit $u = (u_n) \in W^{\mathbb{N}}$, $b \in W$ *où* $W = \prod_{i=1}^{r} E_i$
On note $u_n = (u_{1,n}, \ldots, u_{r,n})$ *et* $b = (b_1, \ldots, b_r)$
alors $u_n \underset{n}{\to} b \;\Leftrightarrow\; \forall i \in [\![1, r]\!],\; u_{i,n} \underset{n}{\to} b_i$

Lemme 23.2.8.

Soit $f : A(\subset E) \to W = \prod_{i=1}^{r} E_i$, $\alpha \in \overline{A}$ *et* $b = (b_1, \ldots, b_r) \in W$
On note $\forall x \in A$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x))$
alors $\left(f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} b\right) \;\Leftrightarrow\; \left(\forall i \in [\![1, r]\!],\; f_i(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} b_i\right)$

Lemme 23.2.9.

$\begin{matrix} f_1 : A \to F \\ f_2 : A \to F \end{matrix}$, $\alpha \in \overline{A}, \lambda \in K$ *et* $b_1, b_2 \in F$

On suppose que $\begin{cases} f_1(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} b_1 \\ f_2(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} b_2 \end{cases}$ *alors* $(\lambda f_1 + f_2)(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} (\lambda b_1 + b_2)$

Lemme 23.2.10.

Soit $f : A(\subset E) \to F$ *avec* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ *une base de* F
On écrit $f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)\varepsilon_i$ *et* $b = \sum_{i=1}^{p} b_i\varepsilon_i$
alors $f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} b \;\Leftrightarrow\; \forall i \in [\![1, p]\!],\; f_i(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} b_i$

23.3 Continuité

23.3.1 Cas général

Continuité en un point Soit $f : A(\subset E) \to F$ et $a \in A$ alors
f est dite C^0 en a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\forall x \in A$, $d(a, x) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Lemme 23.3.1.

fC^0 *en* $a \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$

Lemme 23.3.2.

f C^0 *en* a $\Leftrightarrow$ *(*f *admet une limite finie ai point en* a*)*

Théorème : Caractérisation séquentielle de la continuité.

Soit $f : A(\subset E) \to F$ *et* $a \in A$ *alors*
f *est continue au point* a *si et seulement si* $\left(\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\; a_n \underset{n}{\to} a \;\Rightarrow\; f(a_n \underset{n}{\to} f(a)\right)$

Démonstration. Caractérisation séquentielle d'une limite Page 17 et Lemme. □

Continuité f est dite continue si $\forall a \in A$, f est continue au point a.

Fonction lipschitzienne Soit $f : A(\subset E) \to F$ et $k \in \mathbf{R}^+$

— • f est dite <u>k-lipschitzienne</u> si $\forall (x, y) \in A^2,\ d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y)$

— • f est dite <u>lipschitzienne</u> s'il existe $k \in \mathbf{R}^+$ tel que f est k-lipschitzienne.

Lemme 23.3.3.

f est lipschitzienne $\Rightarrow$ f est continue

<u>Attention !</u> La réciproque est fausse !

Lemme 23.3.4.

$A(\subset E) \xrightarrow{f_1} B(\subset F) \xrightarrow{f_2} G$.

On suppose f_1 k_1-lipschitzienne et f_2 k_2-lipschitzienne <u>alors</u> $f_2 \circ f_1$ est $k_1 \times k_2$-lipschitzienne

---

Distance à un ensemble Soit $A \subset E$, $a \neq \emptyset$ et $x \in E$

$$d(x, A) = \inf\{d(x, \alpha) \mid \alpha \in A\}$$

Théorème 23.3.5.

Toute partie de $\mathbf{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure

Théorème 23.3.6.

Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$ alors $\delta : \begin{array}{l} E \to \mathbf{R} \\ x \mapsto d(x, A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$ Soit $\alpha \in A$, $d(x, \alpha) \leq d(x, y) + d(y, \alpha)$ ainsi $\forall \alpha \in A$, $\underbrace{d(x, A) - d(x, y)}_{\mu} \leq d(y, \alpha)$ donc μ est un minorant de $\{d(y, \alpha) \mid \alpha \in A\}$ donc $\mu \leq d(y, A)$ d'où $\underbrace{d(x, A) - d(y, A)}_{\theta} \leq d(x, y)$ et on a de même pour le couple (y, x) , $-\theta \leq d(y, x) = d(x, y)$

En bref : $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ $\square$

Lemme 23.3.7.

La composée de deux applications continues est continue

Lemme 23.3.8.

Pour $f : A(\subset E) \to F$ et $B \subset F$ on note $f|_B$ la restriction $\begin{array}{l} B \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$

Alors f continue $\Rightarrow$ $f|_B$ continue

Lemme 23.3.9.

- *Une combinaison linéaire d'applications continues est continue*
- *Soit $a \subset E$ et $\left\{ \begin{array}{l} f : A \to F\ C^0 \\ \lambda : A \to K\ C^0 \end{array} \right.$ Alors $\begin{array}{l} A \to F \\ x \mapsto \lambda(x) f(x) \end{array}$ est C^0*

Lemme 23.3.10.
Soit $f, g \in \mathcal{C}^0(A, F)$, E, F des espaces vectoriels normés
Soit $D \subset A$ dense dans A et $f|_D = g|_D$ alors $f = g$

23.3.2 Cas des applications linéaires

Théorème 23.3.11.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $u \in \mathcal{C}^0(E, F) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq C\|x\| \Leftrightarrow u$ est lipschitzienne.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : Si $u \in \mathcal{C}^0(E, F)$ alors u est $\mathcal{C}^0$ en 0 et avec $\varepsilon = 1$, soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|x\| < \delta \ \Rightarrow\ \|u(x)\| < 1$. Soit alors $x \in E \backslash\{0\}$, on pose $x' = \frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|}$ donc $\|u(x')\| < 1$ et ainsi $\|u(x)\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$

(2) $\Rightarrow$ (3) : On suppose $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq C\|x\|$ puis soit $(x, y) \in E^2$ on a $\|u(x-y)\| \leq C\|x-y\|$ donc u est C-lipschitzienne □

Notation On note $\mathcal{L}_c(E, F) = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid u \text{ est continue }\}$

Norme subordonnée

- Soit (E, N) et (F, N') des K espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on pose $|||u||| = \sup\{N'(u(x)) \mid x \in E \text{ et } N(x) \leq 1\} = \sup\limits_{N(x)\leq 1} N'(u(x))$
- $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un K espace vectoriel et $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.
On l'appelle nome subordonnée à N et N' ou encore norme d'opérateur notée $\|.\|_{\text{op}}$

Démonstration.
- Si $u = 0$ alors $|||u||| = 0$, réciproquement si $|||u||| = 0$, $\forall x \in B_f(0,1), u(x) = 0$ Soit $x \in E\backslash\{0\}$ en posant $x' = \frac{x}{\|x\|}$ on a $\frac{1}{\|x\|}u(x) = 0$ donc $u(x) = 0$
- $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F),\ \forall k \in K$ on a $|||\lambda u||| = |\lambda|\ |||u|||$
- Soit $(u, v) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on pose $w = u + v$, soit $x \in B_f(0, 1)$ on a $\|w(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq |||u||| + |||v|||$ et ainsi $|||u||| + |||v|||$ est un majorant de $X = \{\|w(x)\| \ \mid x \in B_f(0, 1)\}$ or $|||w|||$ est le plus petit majorant de X donc $|||w||| \leq |||u||| + |||v|||$

□

Lemme 23.3.12.
(E, N) , (F, N') des espaces vectoriels normés et $E \neq \{0\}$
Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ Alors $|||u||| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup\limits_{x\in E\backslash\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

Note. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ Si $E \neq \{0\}$, $|||u|||$ est le plus petit $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq k\,\|x\|$ (c'est vrai même si $E = \{0\}$) ainsi $|||u|||$ est la plus petite constante de Lipschitz de u

On a donc $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F),\ \forall x \in E,$ $\boxed{\|u(x)\| \leq |||u|||\ \|x\|}$

Théorème 23.3.13.
(E, N), (F, N'), (G, n'') des espaces vectoriels normés quelconques avec $E \overset{u}{\to} F \overset{v}{\to} G$ et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$
Alors $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et $|||v \circ u||| \leq |||u|||.|||v|||$

Démonstration. $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$ car linéaire et continue puis u est $|||u|||$-lipschitzienne et
v est $|||v|||$-lipschitzienne donc $v \circ u$ est $|||u|||.|||v|||$-lipschitzienne du coup $|||v \circ u||| \leq |||u|||.|||v|||$ □

Note. $\forall u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E)$ et $|||v \circ u||| \leq |||u||| \times |||v|||$
On dit aussi que $|||.|||$ est une norme sous-multiplicative ou une norme d'algèbre

Lemme 23.3.14.
Lorsque $E \neq \{0\}$, $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F)$

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{C}^0(E, F) &\Leftrightarrow u \text{ bornée sur } B_f(0, 1) \\ &\Leftrightarrow u \text{ est bornée sur } S(0, 1) \end{aligned}$$

Lemme 23.3.15.
Soit $X \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée et $\mu \in \mathbb{R}^+$ Alors $\sup(\mu X) = \mu(\sup X)$

Théorème 23.3.16.
$E_1, \dots, E_n$ des espaces vectoriels normés
$\varphi : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application n-linéaire,
$W = E_1 \times \cdots \times E_n$ muni de la norme produit
Alors (φ est continue) $\Leftrightarrow$ ($\exists M \in \mathbb{R}^+ : \forall (x_1, \dots, x_n) \in W, \|\varphi(x_1, \dots, x_n)\| \leq M \times \|x_1\| \times \cdots \times \|x_n\|$)

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ On fixe $M \geq 0$ vérifiant la propriété.
Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in W$ et $y \in W \cap B_f(x, 1)$

$$\begin{aligned} \varphi(y) - \varphi(x) &= \varphi(y_1, \dots, y_n) - \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) - \varphi(x_1, y_2, \dots, y_n) + \varphi(x_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\quad -\varphi(x_1, x_2, y_3, \dots, y_n) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad +\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) - \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i - x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \end{aligned}$$

ainsi $\|\varphi(y) - \varphi(x)\| \leq \sum_{i=1}^n M \|x_1\| \cdots \|x_{i-1}\| . \|y_i - x_i\| . \|y_{i+1}\| \cdots \|y_n\|$
or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\|y_i - x_i\| \leq \|y - x\|$ et $\forall j$, $\|y_j\| \leq \|x_j\| + \|y_j - x_j\| \leq \|x\| + 1$
donc $\|\varphi(y) - \varphi(x)\| \leq nM(\|x\| + 1)^{n-1}. \|y - x\|$ du coup $\varphi(y) \underset{y \to x}{\longrightarrow} \varphi(x)$ donc φ est continue
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\varphi \in \mathcal{C}^0(W, F)$ alors φ est $\mathcal{C}^0$ en 0 donc soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in B(0, \delta)$, $\|\varphi(x)\| < 1$
Soit $x \in W$
- Si $\forall i$, $x_i \neq 0$, posons $x'_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}\frac{\delta}{2}$ et $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ donc $\|\varphi(x')\| < 1$ or $\varphi(x') = \frac{\delta^n}{2^n}\frac{1}{\|x_1\| \cdots \|x_n\|}\varphi(x)$
donc $\|\varphi(x)\| \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \prod_{i=1}^n \|x_i\| = M \prod_{i=1}^n \|x_i\|$
- Si $\exists i_0$ tel que $x_{i_0} = 0$ alors $\varphi(x) = 0$ donc $\|\varphi(x)\| \leq M \prod_{i=1}^n \|x_i\|$ □

23.4 Image réciproque et continuité

L'idée générale est ici de travailler dans A munie de la distance induite par la norme de E.

Note. Soit $a \in A$ et $r \in \mathbb{R}+$ alors on note $B^A(a, r) = \{x \in A,\ d(x, a) < r\} = A \cap B(a, r)$

Voisinage relatif Soit $a \in A$ et $V \subset A$ alors V est dit voisinage relatif de a s'il existe $r > 0$ tel que $B^A(a, r) \subset V$

Ouvert relatif Soit $U \subset A$ alors U est dit ouvert relatif de A s'il est voisinage relatif de chacun de ses points. i.e. $\forall x \in U, \exists r > 0 \ : \ B^A(x, r) \subset U$

Théorème : Caractérisation des ouverts relatifs.

Soit $U \subset A$ alors :
U ouvert relatif de $A \Leftrightarrow \exists U'$ ouvert de E tel que $U = A \cap U'$

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ Soit U' ouvert de E tel que $A \cap U' = U$ alors
Soit $x \in U = A \cap U'$ alors $\exists r > 0$ tel que $A \cap B(x, r) \subset U$
donc U est un voisnage relatif de x
Par définition, U est un ouvert relatif sur A
$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall x \in U$ ouvert relatif $\exists r_x > 0$ tel que $A \cap B(x, r_x) \subset U$,
alors $U' = \bigcup\limits_{x \in U} B(x, r_x)$ est un ouvert de E et $U = A \cap U'$ □

Fermé relatif Soit $\Phi \subset A$ alors Φ est dit fermé relatif de A si $A \backslash \Phi$ est un ouvert relatif de A.

Théorème : Caractérisation des fermés relatifs.

Soit $\Phi \subset A$ alors :
Φ fermé relatif de $A \Leftrightarrow \exists \Phi'$ fermé de e tel que $\Phi = A \cap \Phi'$

Démonstration. Clair en considérant $U = A \backslash \Phi$ □

Théorème 23.4.1.

Soit $X \subset A$ alors X est un fermé relatif de $A \Leftrightarrow$
Pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbf{N}}$ qui converge vers $a \in A$ on a $a \in X$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $(x_n) \in X^{\mathbf{N}}$ avec $x_n \underset{n}{\to} a \in A$
Si $a \in A \backslash X$ alors $\exists r > 0$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que $\forall \geq n_0,\ x_n \in B(x_n, a) \cap A$ du coup $x_{n_0} \in A \backslash X$ (impossble !) donc $a \in X$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposée on suppose $\exists \xi_0 \in A \backslash X \ : \ \forall r > 0 \exists x \in A \cap B(\xi_0, r)$ tel que $x \in X$. On a alors $\forall n \in \mathbf{N},\ \exists x_n$ tel que $d(x_n, \xi_0) < \frac{1}{n+1}$ d'où $(x_n) \in X^{\mathbf{N}}$ avec $x_n \underset{n}{\to} \xi_0$ mais $\xi_0 \notin X$ □

Théorème 23.4.2.

Soit $A \subset E$ et E, F des espaces vectoriels normés
$f \in \mathcal{C}^0(A, F)$ et $Y \subset F$ alors
1) Y fermé $\Rightarrow f^{-1}(Y)$ fermé relatif de A
2) Y ouvert $\Rightarrow f^{-1}(Y)$ ouvert relatif de A

Démonstration.
1) Soit $f^{-1}(Y) = \{x \in A\ ,\ f(x) \in Y\}$ et soit $(x_n) \in (f^{-1}(Y))^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \underset{n}{\rightarrow} a \in A$
Comme f est $\mathcal{C}^0$ on a $f(x_n) \underset{n}{\rightarrow} f(a) \in A$ car $a \in f^{-1}(Y)$ donc par théorème $f^{-1}(Y)$ est un fermé relatif.
2) Clair avec $F \backslash Y$ ouvert de F □

Cas particulier Lorsque $A = E$ alors $\forall\ Y \subset F$, $\begin{cases} Y \text{ fermé} \Rightarrow\ f^{-1}(Y) \text{ fermé} \\ Y \text{ ouvert} \Rightarrow\ f^{-1}(Y) \text{ ouvert} \end{cases}$

23.5 Compacité

23.5.1 Compacité dans un espace vectoriel normé quelconque

Partie compacte On dit que A est une partie compacte de E (ou compact de E) si toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui converge vers un élément de A.

Lemme 23.5.1.
A est compacte $\Rightarrow$ A est fermée et bornée

Lemme 23.5.2.
Soit A un compact et X fermé alors $A \cap X$ est compact

Théorème 23.5.3.
Soit A un compact et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ alors :
(a_n) converge $\Leftrightarrow$ (a_n) admet au plus une valeur d'adhérence

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ Vu A compact, $\exists \left(a_{\varphi(n)}\right)_{n \geq 0}$ qui converge vers $\alpha \in A$.
Supposons $\exists \varepsilon_0 > 0\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0\ :\ d(a_n, \alpha) \geq \varepsilon_0$ ainsi $\{n \in \mathbb{N} \| d(a_n, \alpha) \geq \varepsilon_0\}$ est infini donc $\exists \varphi\prime : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ d(a_{\varphi\prime(k)}, \alpha) \geq \varepsilon_0$ donc par compacité $\exists \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $a_{\varphi\prime(\psi(n))} \underset{n}{\rightarrow} \beta \in A$ et comme (a_n) admet au plus une valeur d'adhérence, $\beta = \alpha$ impossible !
Donc $a_n \underset{n}{\rightarrow} \alpha$ □

Théorème 23.5.4.
Soit $E_1, \ldots, E_r$ des espaces vectoriels normés et
$A_1 \subset E_1, \ldots, A_r \subset E_r$ des compacts
Alors $A_1 \times \cdots \times A_r$ est un compact de $E_1 \times \cdots \times E_r$

Continuité uniforme Si E, F est un espace vectoriel normé et $f : A \rightarrow F$ alors f est dite uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ \forall (x, y) \in A^2,\ d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Théorème 23.5.5.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$ alors si A est compact $f(A)$ est compact.
"L'image continue d'un compact est un compact."

Démonstration. Soit $a_{\varphi(n)} \underset{n}{\to} \alpha \in A$ alors $f(a_{\varphi(n)}) \underset{n}{\to} f(\alpha) \in f(A)$ □

Théorème de Heine.
Toute application continue sur un compact est uniformément continue.

Démonstration. Par l'absurde :
On suppose $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \exists (x,y) \in A^2 : d(x,y) < \delta$ et $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$
On pose alors (x_n) et (y_n) vérifiant ces propriétés avec $\delta_n = \frac{1}{n+1}$ et $x_{\varphi(n)} \underset{n}{\to} \alpha \in A$ puis on a $\|f(x_n) - f(y_n)\| \underset{n}{\to} 0$ d'où la contradiction. □

Lemme 23.5.6.
Soit $X \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré alors sup$(X) \in \overline{X}$

Théorème 23.5.7.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$
Si A est un compact non vide alors f admet un maximum sur A

Note. PG -> On dit que "f est bornée et atteind ses bornes"

Démonstration. Soit $B = f(A) \neq \emptyset$, B est borné comme image continue d'un compact.
Soit alors $\beta = \sup(B)$. On a donc $\beta \in \overline{B} = B$ donc $\begin{cases} \beta \text{ majore } B \\ \beta \in B \end{cases}$ d'où $\beta = \max(B)$ □

23.5.2 Compacité en dimension finie

Rappel :

Théorème de Bolzano-Weierstrass.
Dans $\mathbb{R}$, tout segment $[a,b]$ est compact.

Corollaire.
Sur un K-ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration. Voir la fin du chapitre. □

Théorème 23.5.8.
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $A \subset E$ alors
A compact $\Leftrightarrow$ A fermé et borné

Démonstration. On démontre le cas où $K = \mathbb{R}$ avec N_∞ pour se ramener à $[-M, M]$ puis on en déduit le cas où $K = \mathbb{C}$ □

Théorème 23.5.9.
Soit E un espace vectoriel normé quelconque si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel avec $\dim F < \infty$ *alors F est fermé*

Démonstration. On montre la stabilité par passage à la limite en considérant M un majorant des x_n et le compact $Bf(0, M)$ □

Théorème 23.5.10.
Soit E, F des espaces vectoriels normé avec E de dimension finie,
si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors u est continue.

Démonstration. Soit $e = (e_1, \dots, e_p)$ base de E, on choisit $\|x\| = \max\limits_{1 \leq k \leq p} |x_k|$ où $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$. Soit $x \in E$, $\|u(x)\| = \left\|\sum_{k=1}^{p} x_k u(e_k)\right\| \leq \sum_{k=1}^{p} |x_k| \|u(e_k)\|$
Posons alors $C = \sum_{k=1}^{p} \|u(e_k)\|$ alors $\|u(x)\| \leq C\|x\|$ et comme u est linéaire, $u \in \mathcal{C}^0(E, F)$ □

Corollaire.
E est un K espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Pour $i \in [\![1, p]\!]$ on pose $e_i^* : \begin{array}{l} E \to K \\ x \mapsto x_i \end{array}$ alors e_i^* est linéaire donc $\mathcal{C}^0$

Théorème 23.5.11.
$E_1, \dots, E_r, F$ des espaces vectoriels de dimensions finies et
$\varphi : E_1 \times \cdots \times E_r \to F$ r-linéaire alors $\varphi \in \mathcal{C}^0(E_1 \times \cdots \times E_r, F)$

23.5.3 Applications aux séries en dimension finie

Théorème 23.5.12.
En dimension finie, la convergence absolue entraine la convergence

Démonstration. Soit E un K espace vectoriel normé de dimension finie et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $a_n = \|u_n\|$. On suppose alors que $\sum a_n$ converge en on note $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$
•$\forall n \in \mathbb{N}$, $\|U_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \alpha$ donc $U_n \in Bf(0, \alpha)$ compact
•(U_n) admet au plus 1 valeur d'adhérence car $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$,
$\|U_p - U_n\| \leq |A_p - A_n|$ donc $\|U_{\varphi(n)} - U_{\psi(n)}\| \leq |A_{\varphi(n)} - A_{\psi(n)}| \underset{n}{\to} 0$ □

Séries de matrices Soit $E = \mathcal{M}_p(K)$ muni d'une norme d'algèbre (tq $\forall (A, B) \in E^2$, $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$)
- Si $A \in E$ alors $\sum \frac{1}{n!} A^n$ converge et on pose $\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$
- Si $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$ alors $\sum A^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$

23.6 Connexité par arcs

Chemin Pour $A \subset E$,
- Soit $x, y \in A$ on appelle chemin (ou chemin continu) de x à y dans A toute application $\gamma \in \mathcal{C}^0([u, v], A)$ où $u < v$ réels tels que $\gamma(u) = x$ et $\gamma(v) = y$.
- On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur A par $\forall (x, y) \in A^2 : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$ il existe un chemin de x à y.

Lemme 23.6.1.
$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A

Composantes connexes On appelle composante connexes par arcs les classes d'équivalences dans A par $\mathcal{R}$.

Rappel. $\forall x \in A,\ Cl\{x\} = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$

Connexité par arcs A est dite connexe par arcs si $\forall (x, y) \in A^2,\ x\mathcal{R}y$
A est connexe par arcs si pour tout $x, y \in A$ il existe un chemin de x à y dans A.

Lemme 23.6.2.
A convexe $\Rightarrow$ A connexe par arcs

Partie étoilée $A \subset E$ est dite étoilée s'il existe $\alpha \in A$ tel que $\forall b \in A,\ [\alpha, b] \subset A$

Lemme 23.6.3.
A étoilée $\Rightarrow$ A connexe par arcs

Cas de $\mathbb{R}$: $\forall A \subset \mathbb{R}$, A convexe $\Leftrightarrow$ A intervalle

Théorème 23.6.4.
Dans $\mathbb{R}$, les parties connexes par arcs sont exactement les intervalles.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Soient $a, b \in A$ avec $a \leq b$ et $c \in [a, b]$ alors par TVI $\exists \theta \in [0, 1]$ et $\gamma \in \mathcal{C}^0([0, 1], A)$ tels que $c = \gamma(\theta)$ donc $c \in A$. □

Théorème 23.6.5.
L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs
Autrement dit soit $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$ avec F un espace vectoriel normé alors A connexe par arcs $\Rightarrow$ $f(A)$ connexe par arcs

Démonstration. Soit $x, y \in f(A)$ avec $\begin{array}{l} x' \in A \text{ tel que } x = f(x') \\ y' \in A \text{ tel que } y = f(y') \end{array}$ on pose $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma :$ $[0, 1] \to f(a)$
alors $\tilde{\gamma}$ est $\mathcal{C}^0$ et $\tilde{\gamma}(0) = x$ et $\tilde{\gamma}(1) = y$ donc par définition $f(A)$ est connexe par arcs. □

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 24

Dérivation et intégration

Cadre : Soit $f : I \to E$ une fonction à valeur dans E un K espace vectoriel de dimension finie et I un intervalle réel non trivial (i.r.n.t.)

Contenu

24.1 Dérivée

Défnition Soit $a \in I$, f est dérivable en a s'il existe $\ell \in E$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x \to a; x \leqslant a}{\longrightarrow} \ell$.
On pose alors

$$f'(x) = \lim_{x \to a; x \leqslant a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Note. On note $\mathcal{T}_f(x,a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ le "taux d'acroissement"

Rq : $\mathcal{T}_f(x,a) = \mathcal{T}_f(a,x)$

Lemme 24.1.1.
Soit $a \in I$, (f dérivable au point a) $\Rightarrow$ (f continue au point a)

Fonction dérivable $f : I \to E$ est dite dérivable (sur I) si $\forall a \in I$, f est dérivable au point a

Dans ce cas on pose $f' : \begin{array}{l} I \to E \\ a \mapsto f'(a) \end{array}$ la dérivée de f.

Fonction continuement dérivable $f : I \to E$ est dite continuement dérivable ou de classe $\mathcal{C}^1$ si f est dérivable et $f' \in \mathcal{C}^0(I,E)$.
On note $\mathcal{C}^1(I,E)$ l'ensemble de ces fonctions.

Lemme 24.1.2.
Foit deux fonctions $f, g : I \to E$, $\lambda \in K$, $a \in I$. Si f et g sont dérivables au point a alors
(1) $\lambda f + g$ est dérivable au point a
(2) $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$

Lemme 24.1.3.
On considère la composition $I \overset{f}{\to} E \overset{u}{\to} F$ et $a \in I$ avec E et F des espaces vectoriels normés de dimensions finies. On suppose $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et f dérivable au point a alors
(1) $u \circ f$ est dérivable au point a
(2) $(u \circ f)'(a) = u(f'(a))$

Lemme 24.1.4.
Soit $a \in I$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de E. Notons $f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)\varepsilon_k$. On a alors
f est dérivable en $a \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,p]\!]$, f_k est dérivable en a
Dans ce cas $f'(a) = \sum_{k=1}^{p} f_k'(a)\varepsilon_k$

Lemme 24.1.5.
$\mathcal{C}^1(I,E)$ est un K espace vectoriel comme sous-espace vectoriel de E^I

Théorème 24.1.6.
Soit $\Phi : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ p-linéaire avec $E_1, \dots, E_p$ de dimensions finies et $a \in I$. Soit $f_1 : I \to E_1, \dots, f_p : I \to E_p$ dérivables au point a
On pose $g : \begin{array}{l} I \longrightarrow F \\ x \mapsto \Phi(f_1(x), \dots, f_p(x) \end{array}$ alors
(1) g dérivable au point a
(2) $g'(a) = \sum_{i=1}^{p} \Phi(f_1(x), \dots, f_i'(x), \dots, f_p(x))$

Démonstration. Cas $p = 2$ scalaire : Soit $x \in I \backslash \{a\}$

$$\mathcal{T}_g(x,a) = \frac{1}{x-a}\big[B(f_1(x), f_2(x)) - B(f_1(a), f(_2(a))\big]$$
$$= B(\mathcal{T}_{f_1}(x,a), f_2(x)) + B(f_1(a), \mathcal{T}_{f_2}(x,a)$$

Puis comme B est bilinéaire, B est $\mathcal{C}^0$ donc $\mathcal{T}_g(x,a) \underset{x\to a; x\leqslant a}{\longrightarrow} B(f_1'(a), f_2(a)) + B(f_1(a), f_2'(a))$ donc g est dérivable au point a

On a ensuite le résultat pour une application p-linéaire par récurrence puis dans le cas vectoriel en décomposant selon toute les bases. □

Théorème 24.1.7.

Soit la composition $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{v} \mathbb{K}$ avec I, J des $i.r.n.t.$ et $a \in I$, $b = u(a) \in J$. Si u dérivable au point a et v dérivable au point b alors

(1) $v \circ u$ est dérivable au point a

(2) $(v \circ u)'(a) = v'(u(a)) \times u'(a)$

Composition vers un espace vectoriel de dimension finie :

Corollaire.

Soit $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} E$ avec I, J des $i.r.n.t.$ et E un K espace vectoriel de dimension finie, $a \in I$, $b = \varphi(a) \in J$. Si φ dérivable au point a et f dérivable au point b alors

(1) $f \circ \varphi$ est dérivable au point a

(2) $(f \circ \varphi)'(a) = f'(\varphi(a)) \times \varphi'(a)$

24.2 Dérivées successives

- On définit $f^{(0)} = f$
- Si f' est dérivable sur I on pose $f^{(1)} = f'$
- Pour $k \in \mathbb{N}$, si $f^{(k)}$ est bien définie et dérivable sur I on pose $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$

Classe $\mathcal{C}^k$ Soit $k \in \mathbb{N}$, f est dite k fois dérivable si $f^{(k)}$ existe.

Dans ce cas f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ si $\begin{cases} f^{(k)} \text{ existe} \\ f^{(k)} \in \mathcal{C}^0(I, E) \end{cases}$

Classe $\mathcal{C}^\infty$ f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ si $\forall k \in \mathbb{N}$ on a f est de classe $\mathcal{C}^k$

Lemme 24.2.1.

Soit $f : I \to E$ alors $f \in \mathcal{C}^\infty \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, f est k fois dérivable

Théorème : Formule de Leibniz.

Soit $f, g : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^n$

alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Démonstration. Rappel : voir cours de sup □

Plus généralement, si $B : E_1 \times E_2 \to F$ est bilinéaire avec E_1, E_2, F de dimensions finies et $(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, E_1) \times \mathcal{C}^n(I, E_2)$ alors la formule à l'ordre n avec B reste vraie.

Lemme 24.2.2.

Soit $f : I \to E$ et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E

Soit $f(x) = f_1(x)e_1 + \cdots + f_n(x)e_n$, $\forall x \in I$

alors $f \in \mathcal{C}^k(I, E) \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, p]\!]$, $f_j \in \mathcal{C}^k(I, E)$

Lemme 24.2.3.
Soit $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} F$, I, J i.r.n.t.
Si φ et f sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $\varphi \circ f \in \mathcal{C}^k(I, F)$

24.3 Fonctions convexes

Barycentre Soit E un espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_p \in E$
Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^p \alpha_k \leqslant 0$. On note $S = \sum_{k=1}^p \alpha_k$
On appelle barycentre du système $\big((x_1, \alpha_1), \ldots, (x_p, \alpha_p)\big)$ le point $\sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{S} x_k$
On parle d'isobarycentre si $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k$

Note. On peut se ramener à $\sum_{k=1}^p \alpha_k = 1$ en posant $\alpha'_k = \frac{\alpha_k}{S}$

Théorème 24.3.1.
Tout ensemble convexe est stable par barycentration à coefficients positifs

Démonstration. Soit $X \subset E$ convexe. On démontre la propriété par récurrence avec $\mathcal{A}(n)$ le prédicat correspondant à la propriété pour n vecteurs de X.
On a $\mathcal{A}(1)$ et $\mathcal{A}(2)$. On suppose $\mathcal{A}(n)$ et on considére $n+1$ vecteurs de X et $n+1$ scalaires quelconques. On pose x le barycentre du système.
• Si $S = \sum_{k=1}^n \alpha_k \leqslant 0$ alors on pose y le barycentre du système composé des n premiers termes et on a $x = \mathrm{Bar}\big((y, S), (x_{n+1}, \alpha_{n+1})\big) \in X$ d'après $\mathcal{A}(2)$
• Si $S = 0$ alors $\alpha_{n+1} = 1$ et $x = x_{n+1} \in X$
D'où $\mathcal{A}(n+1)$ □

Fonction convexe Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I i.r.n.t. alors f est dites convexe si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1] f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Interprétation géométrique : "L'arc reste sous la corde"

Épigraphe Soit $f : I \to \mathbb{R}$ on appelle épigraphe de f l'ensemble

$$E(f) = \big\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \ ; \ f(x) \leqslant y\big\}$$

Théorème 24.3.2.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ alors f est convexe $\Leftrightarrow$ $E(f)$ est convexe

Démonstration.
Si f est convexe, on vérifie avec la définition que $E(f)$ l'est aussi.
Réciproquement, si $E(f)$ est convexe, alors pour $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$ avec $x \leqslant y$ on pose $z = (1-\lambda)x + \lambda y \in [x, y]$ et on a $\big(x, f(x)\big), \big(y, f'y)\big) \in E(f)$ donc $c = \big(z, (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)\big) \in E(f)$ ainsi $f(z) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ □

Théorème : Inégalité de Jensen.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe alors pour $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ on a $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$

Démonstration. On pose $a_i = \big(x_i, f(x_i)\big) \in E(f)$ donc $\sum_{i=1}^n \lambda a_i \in E(f)$ car $E(f)$ est stable par barycentration donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$ et finallement $f\big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\big) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ □

Lemme des pentes.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application alors avec $p(a, b) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$
f convexe $\Leftrightarrow \big(\forall (a, b, c) \in I^3$ tels que $a < b < c$, $p(a, b) \leqslant p(a, c) \leqslant p(b, c)\big)$

Théorème 24.3.3.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Si f est convexe, soient $x, y \in I$ alors $\forall t \in]x, y[$, $p(x, t) \leqslant p(x, y)$ puis en passant à la limite $f'(x) \leqslant p(x, y)$ d'où $f'(x) \leqslant f'(y)$ par symétrie
$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose f' croissante et $a < b < c \in I$. Par le théorème des accroissements finis on a $p(a, b) = f'(x)$ et $p(b, c) = f'(y)$ avec x et y dans les segments respectifs $]a, b[$ et $]b, c[$ ainsi $f'(x) \leqslant f'(y)$ d'où f est convexe avec le Lemme des pentes. □

Corollaire.

Soit $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$ alors f est convexe $\Leftrightarrow f'' \geqslant 0$

Fonction concave Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un i.r.n.t. alors f est dite concave si $-f$ est convexe.

Théorème 24.3.4.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et convexe alors
$\forall x_0, x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$

"Le graphe de f est au dessus de ses tangentes"

Démonstration. Soit $x, x_0 \in I$
- Si $x = x_0$ on a bien le résultat.
- Si $x > x_0$ alors $p(x, x_0) = f'(\theta)$ où $\theta \in]x, x_0[$ donc $f'(\theta) \geqslant f'(x_0)$
- Si $x < x_0$ même raisonnement. □

24.4 Intégration sur un segment

Cadre : $f : I \to E$ avec I intervalle réel non trivial et E de dimension finie.

24.4.1 Fonctions continues par morceaux

Subdivision Soit $a < b$ réels et $f : [a, b] \to E$
On appelle subdivision de $[a, b]$ toute suite finie $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = \sigma$ telle que $a = \alpha_0 < \cdots < \alpha_n = b$

Continuité par morceaux Soit $a < b$ réels et $f : [a, b] \to E$
f est dite continue par morceaux si il existe une subdivision $\sigma = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ de $[a, b]$ telle que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ la restriction $f|_{]\alpha_k, \alpha_{k+1}[}$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$

Définition bis Soit I i.r.n.t. et $f : I \to E$
On dit que f est continue par morceaux ($\mathcal{C}^0_{pm}$) si sa restriction à tout segment de I est continue par morceaux

---

Lemme 24.4.1.
$\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], E)$ et $\mathcal{C}^0_{pm}(I, E)$ sont des K espaces vectoriels

Lemme 24.4.2.
Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de E. On note $f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)\varepsilon_k$
alors f est continue par moreceaux $\Leftrightarrow$ $\forall k \in [\![1, p]\!],\ f_k \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, K)$

Intégrale Soit $a < b$ réels et $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], E)$
On fixe $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de E et on note $f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)\varepsilon_k$, $\forall x \in [a, b]$ On a alors

$$\int_a^b f \ = \ \sum_{k=1}^{p} \left(\int_a^b f_k \right) \varepsilon_k$$

24.4.2 Propriétés de l'intégrale

Théorème 24.4.3.

$$\mathcal{I} : \begin{array}{l} \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], E) \to E \\ f \mapsto \int_a^b f \end{array} \quad \textit{est linéaire}$$

Démonstration. On se ramène au cas scalaire en écrivant $f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)\varepsilon_k$ □

Lemme 24.4.4.
Soit $a < b$ réels et $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], E)$ tels que
$\{x \in [a, b] \mid f(x) \leqslant g(x)\}$ est fini alors $\int_a^b f = \int_a^b g$

Notations Soit I i.r.n.t. , $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, E)$ et $(a, b) \in I^2$

- Si $a < b$ on a $\int_a^b f(t)dt \in E$
- Si $a > b$ on pose $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$
- Si $a = b$ on pose $\int_a^b f(t)dt = 0$

> **Théorème : Relation de Chasles.**
> *Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, E)$ $(a, b, c) \in I^3$ alors*
> $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$

Démonstration. Connu sur les coordonnées. □

24.4.3 Inégalités

> **Théorème 24.4.5.**
> *Soit $a \leqslant b$, $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], E)$ avec E un espace vectoriel normé de dimension finie alors* $\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| \leqslant \int_a^b \left\|f(x)\right\|dx$

Démonstration. Vu $\left\|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a + k\frac{b-a}{n})\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \left\|f(a + k\frac{b-a}{n})\right\|$, d'après les résultats sur les sommes de Riemann comme les inegalités larges passent à la limite on a $\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$ □

> **Théorème de positivité amélioré.**
> *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $f \in \mathcal{C}^0([a, b], E)$, $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ et $a < b$*
> *Alors* $\int_a^b f(x)dx = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x \in [a, b],\; f(x) = 0$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Clair par linéarité.
$\boxed{\Leftarrow}$ Comme f est $\mathcal{C}^0$ on sait que $\int_{[a,b]} = 0 \Leftrightarrow \int_{]a,b[} = 0$ puis on suppose $\exists x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \leqslant 0$
Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0) > 0$ on considère $\delta > 0$ tel que $a \leqslant x_0 - \delta < x_0 + \delta \leqslant b$ et
$\forall x \in [a, b],\; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ du coup $\int_a^b f \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f \leqslant 2\delta\varepsilon > 0$ donc $\int_a^b f > 0$ □

> **Corollaire.**
> *Sous les même hypothèse on a*
> *si f n'est pas identiquement nulle sur $[a, b]$ alors* $\int_a^b f(x)dx > 0$

24.5 Théorème fondamental

> **Théorème fondamental de l'analyse.**
> *Soit I i.r.n.t. , $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$ on pose $\forall x \in I$, $F(x) = \int_a^b f(t)dt$*
> *Alors* $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $\forall x \in I,\; F'(x) = f(x)$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$ et $x \in I \backslash \{x_0\}$
Posons $\Delta(x) = \frac{1}{x-x_0}\big(F(x)-F(x_0)\big)$ alors si $x_0 < x$, $\|\Delta(x) - f(x_0)\| \leqslant \frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^{x} \|f(t) - f(x_0)\|$
Soit $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ alors
$\|\Delta(x) - f(x_0)\| \leqslant \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \varepsilon dt = \varepsilon$
On a de même pour $x_0 > x$
Ainsi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in I\backslash\{x_0\},\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leqslant \varepsilon$ c'est à dire $\delta(x) \underset{x \to x_0; x \leqslant x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ donc F est dérivable au point x_0 avec $F'(x_0) = f(x_0)$ □

Corollaire.
Soit $h \in C^1(I, E)$ et $(a, b) \in I^2$ Alors $\int_a^b h'(x)dx = [h]_a^b$

Note. Si $f \in C^0_{pm}(I, E),\ a \in I$ alors $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ bien définie $\forall x \in I$ et $F \in C^0(I, E)$

Théorème : Inégalité des accroissements finis.
Soit $f \in C^1\big([a, b], E\big), a < b$ et $M \in \mathbb{R}^+$, on suppose $\forall x \in [a, b],\ \|f'(x)\| \leqslant M$
Alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\,|b - a|$

Démonstration. $f(b)-f(a) = \int_a^b f'(t)dt$ car f est C^1 donc $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \int_a^b \|f'(t)\|\, dt \leqslant M(b - a)$ □

Théorème 24.5.1.
Soit $a < b$ réels et $f \in C^0_{pm}\big([a, b], E\big)$
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E, F de dimension finie. Alors $\int_a^b u \circ f = u\left(\int_a^b f\right)$

Démonstration. Cas 1 : soit $f \in C^0\big([a, b], E\big)$ Posons $\forall[a, b]$
$G(x) = \int_a^x u \circ f$, $\Phi(x) = \int_a^x f$ et $\Delta(x) = G(x) - u(\Phi(x))$
Δ est dérivable et $\forall x \in [a, b],\ \Delta'(x) = (u \circ f)(x) - u(\Phi'(x)) = 0$ donc $\Delta(x) = \text{cte} = \Delta(a) = 0$
Cas 2 : soit $f \in C^0_{pm}\big([a, b], E\big)$ Soit $\sigma = (\alpha_0, \ldots, \alpha_p)$ une subdivision adaptée
$\forall i \in [\![0, p - 1]\!],\ f|_{]\alpha_i,\alpha_{i+1}[} = \varphi_i|_{]\alpha_i,\alpha_{i+1}[}$ où $\varphi_i \in C^0\big([\alpha_i, \alpha_{i+1}], E\big)$
alors $u\left(\int_a^b f\right) = \sum_{k=0}^{p-1} u\left(\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \varphi_i\right) = \sum_{k=0} p - 1 \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} u \circ \varphi_i = \sum_{k=0}^{p-1}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} u \circ f = \int_a^b u \circ f$
d'où le résultat. □

24.6 Formules de Taylor

Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral.
Soit $n \in \mathbb{N},\ f \in C^{n+1}(I, E)$ et $(a, x) \in I^2$ avec I i.r.n.t. et $\dim E < \infty$
Alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathcal{R}_n(a, x)$
où $\mathcal{R}_n(a, x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)dt$

Démonstration. On montre $T(n)$ le théorème au rang n par récurrence :
- $T(0)$: Soit $f \in C^1(I, E)$ alors $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ On suppose $T(n)$ et on considère $f \in C^{n+2}(I, E)$

d'après $T(n)$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathcal{R}_n(a, x)$
avec $R_n(a, x) = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)$ d'où $T(n + 1)$ □

Corollaire : Inégalité de Taylor-Lagrange.

Sous les mêmes hypothèses on a
$f(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in[x,a]} \left\| f^{(n+1)}(x) \right\|$

Négligeabilité Soit $f : I \to E$; $\varphi : I \to \mathbf{R}$; $a \in \bar{I}$, on dit que $f(x) = o_{x\to a}(\varphi(x))$ s'il existe $r > 0$ et $\delta : V = I \cap]a-r, a+R[\backslash\{a\} \to \mathbf{R}$ tels que

$$\forall x \in V,\ \|f(x)\| = \delta(x) \times \varphi(x) \text{ et } \delta(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

Théorème d'intégration des DL.

Soit $f \in C^0(I, E)$; $x_0 \in I$; I *i.r.n.t.*
E un EVN de dimension finie. On suppose que f admet un DL en x_0
$f(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + \cdots + (x-x_0)^n a_n + o_{x\to x_0}((x-x_0)^n)$
Soit g une primitive de f sur I . Alors
$g(x) = g(x_0) + (x-x_0)a_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2} a_1 + \cdots + \frac{(x-x_0^{n+1}}{n+1} a_n + o_{x\to x_0}((x-x_0)^{n+1})$
où $a_0, a_1, \ldots, a_n \in E$

Démonstration. On note $r(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} (x-x_0)^k a_k \ (\in C^0(I, E))$
$g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1} a_k + R(x)$ où $R(x) = \int_{x_0}^{x} r(t)dt$
Soit $\varepsilon > 0$; soit $\delta > 0$ tel que $\forall t \in I,\ |t-x_0| < \delta \Rightarrow \|r(t)\| \leqslant \varepsilon |t-x_0|^n$
Soit $x \in I$, on suppose $|x-x_0| < \delta$ et $x \leqslant x_0$ alors $\|R(x)\| \leqslant \int_{x_0}^{x} \varepsilon (t-x_0)^n dt = \varepsilon \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \leqslant \varepsilon (x-x_0)^{n+1}$
Ainsi $\forall x \in I\backslash\{x_0\},\ |x-x_0| < \delta \Rightarrow \frac{\|R(x)\|}{|-x_0|^{n+1}} \leqslant \varepsilon$ donc $R(x) = o_{x\to x_0}((x-x_0)^{n+1})$ □

Théorème : Développement limité de Taylor-Young.

Soit $f \in C^n(I, E)$; $x_0 \in I$ *alors*
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o_{x\to x_0}((x-x_0)^n)$

Démonstration. On démontre $T(n)$ le théorème au rang n par récurrence :
- $T(0)$: $\forall f \in C^0(I, E),\ f(x) = f(x_0) + o_{x\to x_0}(1)$
- : Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose $T(n)$ et on considère $f \in C^{n=1}(I, E)$

on a $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} (f')^{(k)}(x_0) + o_{x\to x_0}((x-x_0)^n)$
On applique alors le théorème précédent à f' qui est bien continue sur I
$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0) + o_{x\to x_0}((x-x_0)^{n+1})$ □

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 25

Suites de fonctions

Cadre : E, F des espaces vectoriels normés de dimensions finies ; $A \subset E$.

et $f_n : A \longrightarrow F$; $f : A \longrightarrow F$

Contenu

25.1 Convergences

Convergence simple Soit $f \in \left(F^A\right)$ et $(f_n) \in \left(F^A\right)^{\mathbf{N}}$ On dit que (f_n) converge simplement vers f su
si

$$\forall x \in A,\ f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

Attention ! La convergence simple ne préserve pas la continuité !

Convergence uniforme
Soit $f \in \left(F^A\right)$ et $(f_n) \in \left(F^A\right)^{\mathbf{N}}$ On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0\ ;\ \forall x \in A\ ;\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Lemme 25.1.1.
La convergence uniforme entraine la convergence simple.

Théorème 25.1.2.
On suppose $a \in A$; $f : A \to F$; $\forall n \in \mathbf{N},\ f_n : A \to F$ et
- *$\forall n \in \mathbf{N},\ f_n$ est $\mathcal{C}^0$ au point a*
- *(f_n) CVU sur A vers f*

Alors f est $\mathcal{C}^0$ au point a

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$
Vu la CVU, soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall x \in A,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$
Vu f_{n_0} est $\mathcal{C}^0$ au point a, soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in A,\ \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}$
On a alors $d(f(x), f(a)) \leqslant d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + d(f_{n_0}(a), f(a)) < \varepsilon$
Ainsi f est $\mathcal{C}^0$ au point a □

Corollaire.
Toute limite uniforme sur A d'une suite de fonctions continues sur A est continue sur A.

Corollaire.
Soit $f : A \to F$; $f_n : A \to F,\ \forall n \in \mathbf{N}$. Soit $a \in A$ On suppose que
- *$\forall n \in \mathbf{N},\ f_n$ est $\mathcal{C}^0$ au point a*
- *(f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage relatif de a dans A*

Alors f est $\mathcal{C}^0$ au point a

Le Lemme suivant permet d'établir l'absence de convergence uniforme

Lemme 25.1.3.
Soit $f, f_n : A \to F$; $B \subset A$ alors
$$\Big(\exists (x_n) \in B^{\mathbf{N}} \text{ tel que } f_n(x) - f(x) \underset{n}{\not\to} 0\Big) \Leftrightarrow \text{non}\Big((f_n) \text{CVU}/A \text{ vers } f\Big)$$

Théorème de la double limite.
Soit $f, f_n : A \to F$; $a \in A$ On suppose que
- *$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists b_n \in F$ tel que $f_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b_n$*
- *(f_n) converge uniformément sur A vers f*

Alors
(1) $\exists \beta \in F$ tel que $b_n \underset{n}{\to} \beta$
(2) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \beta$

En particulier $\lim\limits_{x \to a}\big(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\big) = \lim\limits_{n \to +\infty}\big(\lim\limits_{x \to a} f_n(x)\big)$

Attention ! Faux sans la convergence uniforme !

Démonstration. On suppose que $b_n \underset{n}{\to} \beta$
Soit $\varepsilon > 0$; soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ d(f(x), f_n(x)) < \frac{1}{3}\varepsilon$ et $d(b_n, \beta) < \frac{1}{3}\varepsilon$
Soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in B(a, \delta),\ d(f_{n_0}(x), b_{n_0}) < \frac{1}{3}\varepsilon$
Pour un tel x on a $d(f(x), \beta) < \varepsilon$ donc $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \beta$ d'où (1) $\Rightarrow$ (2)

Par convergence uniforme soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant p,\ \forall x \in A,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant 1$ alors $\|f_n(x) - f_p(x)\| \leqslant 2$ et par passage à la limite $b_n \in B(b_p, 2)$ compact vu F de dimension finie.
Montrons que (b_n) admet au plus une valeur d'adhérence :
On suppose $\begin{cases} b_{\varphi(n)} \underset{n}{\to} \beta_1 \\ b_{\psi(n)} \underset{n}{\to} \beta_2 \end{cases}$ alors en appliquant le début de la démo on a $\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \beta_1 \\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \beta_2 \end{cases}$
Donc $\beta_1 = \beta_2$ et par théorème $b_n \underset{n}{\to} \beta$ d'où (1) □

Norme infinie Soit $\varphi : A(\subset E) \to F$, $a \neq \emptyset$ et φ bornée alors on pose

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in A} \|\varphi(x)\|$$

Lemme 25.1.4.
Soit $f, f_n : A \to F$ alors

$$(f_n) \text{ CVU sur } A \text{ vers } f \Leftrightarrow \begin{cases} \|f_n - f\|_\infty \text{ est bien définie apcr} \\ \|f_n - f\|_\infty \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Cas des fonctions bornées :

Soit $\mathscr{B}(A, F) = \{f : A \to F \text{ ; } f \text{ est bornée}\}$ alors
1) $\mathscr{B}(A, F)$ est un K espace vectoriel
2) $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{B}(A, F)$

$\|.\|_\infty$ *est dite norme de la convergence uniforme.*

25.2 Série de fonctions

Soit $(g_n) \in \left(F^A\right)^{\mathbb{N}}$ on pose $f_n = g_0 + g_1 + \cdots + g_n$ $(: A \to F)$
Etudier la série de fonction $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ revient à étudier la suite de fonction (f_n).

On dit que
(1) $\sum g_n$ converge simplement sur A si (f_n) converge simplement sur A
(2) $\sum g_n$ converge uniformément sur A si (f_n) converge uniformément A

Lorsque $\sum g_n$ converge simplement sur A

$\forall x \in A$, $f_n(x) = \sum_{k=k}^n g_k(x) \underset{n}{\to} f(x)$ ainsi $\sum g_n(x)$ converge et $\sum_{n=0}^\infty g_k(x) = f(x)$

On pose $\sum_{n=0}^\infty g_k : \begin{array}{l} A \to F \\ x \mapsto \infty g_k(x) \end{array}$ et on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k$

Lemme 25.2.1.
$\sum g_n$ *converge uniformément sur A*
$\Leftrightarrow$ $\sum g_n$ *converge simplement sur A et* (R_n) *converge uniformément sur A*

Convergence normale Soit $g_n : A \to F$, $\forall n \in \mathbb{N}$
$\sum g_n$ est dite normalement convergente sur A si

1) $\|g_n\|_\infty$ existe à partir d'un certain rang n_0
2) $\sum \|g_n\|_\infty$ converge

Théorème : Caractérisation de la convergence normale.
$\sum_n$ *converge normalement sur A*
$\Leftrightarrow$ *Il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *et* (α_n) *une suite réelle tels que*
(1) $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in A$, $\|g_n(x)\| \leqslant \alpha_n$
(2) $\sum_{n\geqslant n_0} \alpha_n$ *converge*

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Clair en posant $\forall n \geqslant n_0$, $\alpha_n = \|g_n\|_\infty$
$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que (α_n) vérifie (1) et (2) ; soit $n \geqslant n_0$ alors $\forall x \in A$, $\|g_n(x)\| \leqslant \alpha_n$
Donc $0 \leqslant \|g_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$ et vu (2) par comparaison de série à terme général positif $\sum \|g_n\|_\infty$ converge □

> **Théorème 25.2.2.**
> *La convergence normale entraine la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.*

Démonstration. Soient n_0 et (a_n) qui vérifient la caractérisation de la convergence normale . Soit $x \in A$

$\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant \|g_n(x)\| \leqslant a_n$ or $\sum a_n$ converge donc $\sum \|g_n(x)\|$ converge
Donc $\sum g_n(x)$ converge absolument et vu la dimension finie de F, $\sum g_n(x)$ converge

Ainsi $\sum g_n$ converge simplement.

Soit $n \geqslant n_0$; soit $x \in A$, on a $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x)$ donc $\|R_n(x) - 0\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|g_k(x)\|$ *leq* $\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k}_{=\rho_n}$

Or $\rho_n \underset{n}{\to} 0$ donc $\|R_n - 0\|_\infty \underset{n}{\to} 0$ ainsi par théorème (R_n) converge uniformément sur A vers 0

On a alors $\sum g_n$ converge uniformément sur A. □

> **Théorème 25.2.3.**
> *Soit $g_n : A \to F$, $\forall n \in N$; $a \in A$ On suppose que*
> - *$\forall n \in N$, g_n est C^0 en a*
> - *$\sum g_n$ converge uniformément sur A*
>
> *alors $\sum_{n=0}^{\infty} g_k$ est C^0 au point a*

Démonstration. $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$ est C^0 au point a et $f_n \underset{n}{\to} f$ uniformément sur A où $f = \sum_{n=0}^{\infty} g_k$
Alors par théorème , f est C^0 au point a. □

> **Théorème de la double limite (Séries).**
> *Soit $g_n : A \to F$, $\forall n \in \mathbf{N}$; $a \in \overline{A}$*
> *On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}$, $g_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} c_n \in F$ et $\sum g_n$ converge uniformément sur A*
> alors
> *(1) $\sum c_n$ converge*
> *(2) $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$*

En particulier $\lim\limits_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} g_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$

Démonstration. On pose $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$ et $f = \sum_{n=0}^{\infty} g_k$
Ainsi $f_n \underset{n}{\to} f$ uniformément sur A et $\forall n \in \mathbf{N}$, $f_n \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n} c_k = b_n$

Par théorème de la double limite pour les suites
(1) $\exists \beta \in F\ :\ b_n \underset{n}{\to} \beta$
(2) $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \beta$

(1) donc $\sum c_k$ converge et $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} c_k$
(2) donc $\sum_{n=0}^{\infty} g_k(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} c_k$ □

25.3 Intégration et dérivation

25.3.1 Cas général

<u>Question :</u> Si $\forall t \in [a,b]$, $f_n(t) \underset{n}{\to} f(t)$, a-t-on $\int_a^b f_n(t)dt \underset{n}{\to} \int_a^b f(t)dt$?
<u>non !</u> *Exemple :*
$f_n : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ telle que si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$, $f_n(x) = n^2x$; si $\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n}$, $f_n(x) = 2n - n^2x$; si $x \geqslant \frac{2}{n}$, $f_n(x) = 0$

Théorème 25.3.1.

Soit $a < b$ réels ; $\dim F < \infty$. On suppose
$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ f_n \in \mathcal{C}^0([a,b],F)$ *et* (f_n) *converge uniformément sur* $[a,b]$ *vers* f

Alors (1) $f \in \mathcal{C}^0([a,b],F)$
(2) $\int_a^b f_n(x)dx \underset{n}{\to} \int_a^b f(x)dx$

Formellement $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx$

Démonstration. (1) Connu.
(2) On note $u_n = \int_a^b f_n \in F$ et $l = \int_a^b f \in F$
Alors $\|u_n - l\|\ \ leq \int_a^b \|f_n(x) - f(x)\|\, dx \leqslant \int_a^b \|f_n - f\|_\infty\, dx = (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty \underset{n}{\to} 0$
Par théorème des gendarmes $\|u_n - l\| \underset{n}{\to} 0$ soit $u_n \underset{n}{\to} l$ □

Corollaire.

Soit $a < b$ réels ; $\dim F < \infty$. On suppose
$\forall n \in \mathbf{N},\ g_n \in \mathcal{C}^0([a,b],F)$ *et* $\sum g_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$

Alors (1) $\sum_{n=0}^{\infty} g_k \in \mathcal{C}^0([a,b],F)$
(2) $\sum \int_a^b g_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_k(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} g_k(x)dx$

Lemme 25.3.2.

Soit $\varphi_n \in \mathcal{C}^0(I,F),\ \forall n \in \mathbf{N}$; I *i.r.n.t.* ; $\dim F < \infty$; $a \in I$
On suppose que $\varphi_n \underset{n}{\to} \varphi$ *uniformément sur tout segment de* I *et on pose*
$\Phi_n(x) = \int_a^x \varphi_n(t)dt$; $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$

Alors $\Phi_n \underset{n}{\to} \Phi$ *uniformément sur tout segment de* I.

Théorème 25.3.3.

On suppose
- $\forall n \in \mathbf{N},\ f_n \in \mathcal{C}^1(I,F)$
- (f_n) *converge simplement sur* I *vers* f
- (f_n') *converge vers* h *uniformément sur tout segment de* I

Alors (1) (f_n) *converge vers* f *uniformément sur tout segment de* I
(2) $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$ *et* $f' = h$

Démonstration. Soit $a \in I$, $\forall x \in I,\ f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)dt = \Phi_n(x),\ \forall n \in \mathbf{N}$
D'où $f(x) - f(a) = \int_a^x h dt = \Phi(x)$ vu la CVU sur $[a,x]$ (éventuellement $[x,a]$) et Φ est $\mathcal{C}^1$ avec $\Phi' = h$
donc $f = f(a) + \Phi$ est $\mathcal{C}^1$ et $f' = h$
Soit S un segment inclu dans I, vu (Φ_n) converge vers Φ uniformément sur tout segment de I on a
$\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,S} \leqslant \|f_n(a) - f(a)\| + \|\Phi_n - \Phi\|_{\infty,S} \underset{n}{\to} 0$ □

Attention : La convergence uniforme ne conserve pas la dérivabilité !

Corollaire.

On suppose
- $\forall n \in \mathbf{N},\ g_n \in \mathcal{C}^1(I,F)$
- $\sum g_n$ *converge simplement sur* I
- $\sum g_n'$ *converge uniformément sur tout segment de* I

Alors (1) $\sum g_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I
(2) $\sum_{n=0}^{\infty} g_n \in \mathcal{C}^1(I,F)$ *et* $\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'$

25.3.2 Application aux matrices

Lemme 25.3.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on pose $\phi \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_p(K) \\ t & \longmapsto & \exp(At) \end{array} \right)$

Alors $\phi \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}, \mathcal{M}_p(K)\big)$ *et* $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi'(t) = A.e^{tA} = e^{tA}.A$

Lemme 25.3.5.

On suppose $\left\{ \begin{array}{l} \sum U_n \text{ converge dans } \mathcal{M}_p(K) \\ M \in \mathcal{M}_p(K) \end{array} \right.$

Alors $\sum M.U_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{\infty} M.U_n = M. \sum_{n=0}^{\infty} U_n$

Lemme 25.3.6.

$\phi : t \to e^{tA}$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$

Corollaire.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(E) < \infty$, *on pose* $\varphi \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ t & \longmapsto & \exp(tu) \end{array} \right)$

Alors $\varphi \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E)\big)$ *et* $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = u \circ e^{tu} = e^{tu} \circ u$

25.4 Approximations uniformes

Théorème de Weierstrass.

Toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b], K)$ continue sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Démonstration. Sera vu dans le cours de probabilité □

On note $\mathcal{E}\big([a,b], \mathbb{R}\big)\big([a,b], F\big)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Lemme 25.4.1.

f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier $\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathcal{E}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ *telle que* $\|\varphi - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$

Théorème 25.4.2.

Toute fonction continue par morceaux sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Démonstration. Soit $a < b$ des réels.
1° cas : Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([a,b], F\big)$; soit $\varepsilon > 0$, on sait que f est uniformément continue sur $[a,b]$, soit donc $\delta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |x-y| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b-a}{n} < \delta$.

Posons alors $x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\varphi \left(\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x_k) & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}[\\ f(b) & \text{si } x = b \end{array} \right. \end{array} \right)$

Ainsi $\varphi \in \mathcal{E}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ et $\|\varphi - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ d'où cqfd

Cas général : Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}\big([a,b], F\big)$; soit donc $(a_0, \ldots, a_p)$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\forall i \in [\![0, p-1]\!],\ f|_{]a_i, a_{i+1}[} = f_i|_{]a_i, a_{i+1}[}$ où $f_i \in \mathcal{C}^0\big([a,b], F\big)$.
On a alors le résultat en itérant le cas précédant. □

$\mathcal{E}\big([a,b], \mathbb{R}\big)\big([a,b], F\big)$ est dense dans $\mathcal{C}^0_{pm}\big([a,b], F\big)$

⋆ ⋆ ⋆

Table des matières - Première année

Table des matières - Deuxième année