

Mathématiques

Préparatoires I

Ce document est une synthèse du cours de mathématiques dispensé par M. Jean-François Mallordy en classe préparatoire au lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand en 2022-2023. Il s'agit d'un complément au cours de Maths Spé et ne saurait en aucun cas y être un quelconque remplacement !

Paris, 2024

Mis en forme par
Émile Sauvat
`emile.sauvat@ens.psl.eu`

Chapitres

Chapitre 0

Introduction

Tout les éléments mathématiques seront déclarés et définis, les textes seront différenciés des formules mathématiques.

Contenu

0.1 Règles d'écriture	3
0.1.1 Quantificateurs	3
0.1.2 Conditions Nécessaires et Suffisantes	4
0.1.3 Éléments de Logique	4
0.2 Modes de démonstration	4
0.2.1 Modus Ponens	4
0.2.2 Contraposée	4
0.2.3 Disjonction de cas	4
0.2.4 Absurde	5
0.2.5 Analyse Synthèse	5
Analyse	5
Synthèse	5
0.2.6 Récurrence	5
0.2.7 Exemples	5
Irrationalité de $\sqrt{2}$	5
Infinité de l'ensemble des nombres premiers	6
Inégalité arithmético-géométrique	6

0.1 Règles d'écriture

0.1.1 Quantificateurs

En écriture mathématique, on utilise les quatificateurs suivants :

\exists : Existence

\forall : Quelque soit

Exemples :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = x^7 - x \neq \exists x/ \in \mathbb{R} : y \in \mathbb{R}, y = x^7 - x$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} (n_0 \geq n \Rightarrow |u_n - l| \geq \epsilon) \rightarrow (u_n \text{ converge vers } l)$$

0.1.2 Conditions Nécessaires et Suffisantes

Une condition Q est nécessaire pour avoir P si dès que P est vraie Q est vraie.
 $P \Rightarrow Q$
ABCD est un parallélogramme est une condition nécessaire pour que ABCD soit un losange.

Une condition Q est suffisante pour avoir P si dès que Q est vraie P est vraie. $Q \Rightarrow P$
ABCD à 4 côtés égaux est une condition suffisante pour que ABCD soit un losange.

Si P est nécessaire et suffisante pour avoir Q alors P est nécessairement suffisante pour avoir Q . On dit aussi que P et Q sont logiquement équivalentes. $P \Leftrightarrow Q$
ABCD est un quadrilatère à 4 côtés égaux et ABCD est un losange sont logiquement équivalentes.

0.1.3 Éléments de logique

En mathématiques, pour exprimer un raisonnement où une propriété, on utilise des assertions. Ce sont des formules logiques ayant une valeur de vérité "vraie" ou "fausse".
ex : "Un carré a quatre côtés égaux" est une assertion vraie et "Un carré possède 5 angles" est une assertion fausse.

Pour assembler des assertions et les lier entre elles, on utilise les connecteurs logiques suivants :

\wedge	\vee	\neg	\Rightarrow	\Leftrightarrow
"et"	"ou"	"non"	"implique"	"équivalente"

0.2 Modes de démonstration

0.2.1 Modus Ponens

Soit P et Q deux assertions. On démontre que P est vraie et que P est une condition suffisante pour avoir Q . On a alors Q .

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

On peut utiliser la transitivité de l'implication. $P \wedge ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R$

0.2.2 Contraposée

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

Pour montrer que P est une condition suffisante pour avoir Q , on peut montrer que la négation de P est une condition suffisante pour avoir la négation de Q .

0.2.3 Disjonction de cas

$$\text{Soient } P, Q \text{ et } R \text{ trois assertions. } (P \vee Q) \wedge (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow R$$

Pour montrer qu'une condition A est suffisante pour en avoir une seconde B , on la sépare en plusieurs cas, puis on montre que chaque cas est une condition suffisante pour avoir B .

0.2.4 Absurde

$$(\neg P \Rightarrow Q \wedge \neg Q) \Rightarrow P$$

L'ensemble des nombres naturel est infini

0.2.5 Analyse Synthèse

Utilisé pour démontrer l'existence et l'unicité d'un objet mathématique.

Analyse On détermine un certain nombre de conditions nécessaires.

Synthèse On détermine une condition suffisante parmi les nécessaires.

0.2.6 Récurrence

On définit un prédicat dépendant d'une variable.

On montre alors que le prédicat est vrai pour un certain rang de la valeur.

On montre ensuite que le prédicat vraie à un certain rang (ou sur une série de rangs) est une condition suffisante pour avoir le prédicat vrai à un autre rang.

$$P(n) \Rightarrow P(n+1) / P(n_0) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1) / (P(n) \Rightarrow P(2n)) \wedge (P(n+1) \Rightarrow P(n))$$

Théorème 0.2.1. *ch0th1Théorème : Premier principe de récurrence* Soit $P(n)$ un prédicat défini sur \mathbb{N}

Si on a $\begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases}$
alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

Démonstration. On suppose au contraire $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\neg P(n_0)$.

On considère alors $A = \{k \mid \neg P(k)\}$

On a alors $A \neq \emptyset$ car $n_0 \in A$ et $A \subset \mathbb{N}^*$ donc d'après le principe du bon ordre dans \mathbb{N}^* A admet un plus petit élément noté k_0 .

Par suite $k_0 - 1 \in A$ soit $P(k_0 - 1)$ puis d'après l'hérédité $P(k_0)$. □

Théorème 0.2.2. *ch1th1cCorollaire : Principe de récurrence forte* Soit $P(n)$ un prédicat défini sur \mathbb{N}

Si $\begin{cases} P(n_0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n_0) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases}$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n)$

Démonstration. On considère le prédicat $Q(n) = P(n_0) \wedge \dots \wedge P(n)$

On a alors $\begin{cases} Q(n_0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, Q(n) \Rightarrow Q(n+1) \end{cases}$

D'où d'après le premier principe de récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n)$ □

0.2.7 Exemples

Irrationalité de $\sqrt{2}$

Preuve 1 On suppose $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^{*2} : \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec q minimal.
On considère alors

$$\frac{2q - p}{p - q} = \frac{2 - \frac{p}{q}}{\frac{p}{q} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}$$

avec $p = \sqrt{2}q$ donc $p < 2q$ donc $p - q < q$.

Preuve 2 On suppose $\exists(p, q) \in \mathbb{N}^{*2} : \sqrt{2} = \frac{p}{q}$, soit $2q^2 = p^2$.
On a alors, d'après le théorème fondamental de l'arithmétique p^2 qui possède $2k$ fois 2 dans sa décomposition en facteurs premiers alors que $2q^2$ le possède $2k'+1$ fois, ce qui est impossible par unicité de la décomposition.

Preuve 3 Pour $i \in \mathbb{N}$ on considère

$$\epsilon_i = (\sqrt{2} - 1)^i$$

On a $\frac{8}{4} < \frac{9}{4}$ donc par stricte croissance de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ donc $0 < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } \forall i \in \mathbb{N}^* \epsilon_i < \frac{1}{2^i}$$

D'autre part pour tout entier i il existe des entiers a_i et b_i tels que

$$(\sqrt{2} - 1)^i = a_i + \sqrt{2}b_i$$

Si $\exists(p, q) \in \mathbb{N}^{*2} : \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ alors

$$\epsilon_i = a_i + b_i \frac{p}{q} = \frac{a_i q + b_i p}{q} = \frac{A_i}{q} \quad A_i \in \mathbb{N}^*$$

Soit pour tout entier i $\epsilon_i \geq \frac{1}{q}$ d'où $\frac{1}{q} < \frac{1}{2^i}$

Infinité de l'ensemble des nombres premiers

Lemme Tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier

Preuve : Soit n un entier supérieur à 2 notons p le plus petit de ses diviseurs.

On a alors p premier car tout diviseur de p divise n .

Preuve d'Euclide S'il y avait un nombre fini de nombres premiers, Leur produit additionné de 1 serait divisible par l'un d'entre eux (Lemme), qui diviserait alors la différence, 1.

Inégalité arithmético-géométrique

Lemme de Cauchy Soit A une partie de \mathbb{N}^* qui contient 1 et telle que $\left\{ \begin{array}{l} (1) \forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \Rightarrow 2n \in A \\ (2) \forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \Rightarrow n \in A \end{array} \right.$ alors $A = \mathbb{N}^*$

$$2^p \in A$$

Preuve : On veut démontrer $Q(p) : \forall n \in [2^p, 2^{p+1}] \times \mathbb{N}, n \in A$

$$\Leftrightarrow \forall n \in [0, 2^p] \times \mathbb{N}, 2^{p+1} - n \in A$$

$P(k) : 2^k \in A$ avec $P(0)$
 $2^k \in A \Rightarrow 2 \times 2^k = 2^{k+1} \in A$

D'après le principe de récurrence on a $\forall k \in \mathbb{N}, 2^k \in A$ $H(n) : n > 2^p \vee 2^{p+1} - n \in A$ avec

$H(0)$

Si $H(n)$ et $n+1 \leq 2^p$, on a $2^{p+1} - (n+1) \in A$ d'après (2)

D'après le principe de récurrence on a $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2, n > 2^p \vee 2^{p+1} - n \in A$

Preuve de Cauchy On considère $A = \left\{ n \mid \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \right\}$ avec $1 \in A$ Soit le prédicat $P(n) : \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$ On a $P(1) \wedge P(2)$

Supposons $n \in A$ et considérons $(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$

$$\frac{x_1 + \dots + x_n + x'_1 + \dots + x'_n}{2n} = \frac{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} + \frac{x'_1 + \dots + x'_n}{n}}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sqrt{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \times \frac{x'_1 + \dots + x'_n}{n}} \geq \sqrt[2]{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \times \sqrt[n]{x'_1 \dots x'_n}} \\
&= \sqrt[2n]{x_1 \dots x_n x'_1 \dots x'_n} \quad \text{Soit } P(n) \Rightarrow P(2n)
\end{aligned}$$

On considère maintenant $\forall (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$, $\frac{x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n x_{n+1}}$
 Soit $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ Posons $x_{n+1} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ on a alors avec $P = x_1 \dots x_n$ et $A = x_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + \dots + x_n + \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}{n+1} &\geq \sqrt[n+1]{x_1 \dots x_n x_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{(n+1)\frac{x_1}{n} + \dots + (n+1)\frac{x_n}{n}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{PA} \\
&\Leftrightarrow \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n+1]{PA} \Leftrightarrow A \geq \sqrt[n+1]{PA} \\
&\Rightarrow A^{n+1} \geq PA \Rightarrow A^n \geq P \Rightarrow A \geq \sqrt[n]{P} \text{ donc } P(n+1) \Rightarrow P(n)
\end{aligned}$$

Preuve d'Enguel Lemme : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\ln x \leq x - 1$ avec égalité ssi $x=1$

Preuve : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\ln(\frac{x_i}{A}) \leq \frac{x_i}{A} - 1$

En sommant on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \ln(\frac{x_i}{A}) = \ln(\frac{x_1 \dots x_n}{A^n}) \leq \sum_{i=1}^n (\frac{x_i}{A} - 1) = 0 \Rightarrow x_1 \dots x_n \leq A^n \Rightarrow \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

★ ★ ★

Chapitre 1

Ensembles et applications

Contenu

1.1 Opérations sur les Parties	8
1.1.1 Notations	8
Complémentaire	8
Union	8
Intersection	9
Différence	9
1.1.2 Propriétés	9
1.2 Recouvrement disjoint et Partitions	9
Famille de parties disjointes de E	9
Recouvrement disjoint de B	9
Partition de E	9
1.3 Éléments applicatifs	10
1.3.1 Graphe	10
1.3.2 Indicatrice	10
Définition	10
1.4 Relations binaires	10
Définition	10
Caractéristiques	10
Relation d'ordre	10
Relation d'équivalence	11
Classe d'équivalence	11

1.1 Opérations sur les Parties

1.1.1 Notations

Complémentaire *Le complémentaire de A dans E est $E \setminus A = \overline{A} = A^c$*

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Union *L'union de deux ensembles est*

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Intersection *L'intersection de deux ensembles est*

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Différence *La différence de deux ensemble est*

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

1.1.2 Propriétés

Soit A et B deux parties de E

$$\begin{array}{ll} E \setminus (E \setminus A) \equiv A & A \cup (B \cup C) \equiv (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) \equiv (A \cap B) \cap C & A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C) & E \setminus (A \cup B) \equiv (E \setminus A) \cap (E \setminus B) \\ E \setminus (A \cap B) \equiv (E \setminus A) \cup (E \setminus B) & \end{array}$$

1.2 Recouvrement disjoint et Partitions

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E.

Famille de parties disjointes de E *$(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties disjointes de E si*

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \\ \forall i \in I, A_i \in \mathcal{P}(E) \end{cases}$$

Recouvrement disjoint de B *$(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement disjoint de B si*

les A_i sont deux à deux disjoints et $B \subset \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$

Partition de E *$(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E si*

$$E = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \wedge \quad \begin{cases} \forall i \in I, A_i \in \mathcal{P}(E) \\ \forall i \in I, A_i \neq \emptyset \\ \forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \end{cases}$$

Théorème 1.2.1. *ch2P1Propriétés : Lois de Morgan* Soit E un ensemble, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E

$$\text{Alors } \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c \equiv \bigcap_{i \in I} A_i^c \text{ et } \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c \equiv \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

1.3 Éléments applicatifs

1.3.1 Graphe

Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(E, F)$, son graphe est :

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in E\} \in \mathcal{P}(E \times F)$$

1.3.2 Indicatrice

Définition On définit l'indicatrice de A dans E comme

$$\mathbb{1}_A \left(\begin{array}{l} E \longrightarrow \{0; 1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in A^c \end{cases} \end{array} \right)$$

Propriétés.

Soit A et B deux parties d'un ensemble E on a

$$A \equiv B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$$

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$$

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{E \setminus A} = \mathbb{1}_E = 1$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$$

1.4 Relations binaires

Définition Une relation binaire sur E est la donnée d'une partie Γ de $E \times E$ telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma$$

Γ est appelé graphe de la relation binaire \mathcal{R}

-> ex : $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow y \leq x$

Caractéristiques Soit \mathcal{R} une relation binaire sur un ensemble E

1) \mathcal{R} est réflexive si $\forall x \in E, \quad x \mathcal{R} x$

2) \mathcal{R} est symétrique si $\forall (x, y) \in E^2, \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$

3) \mathcal{R} est antisymétrique si $\forall (x, y) \in E^2, \quad x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$

4) \mathcal{R} est transitive si $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Relation d'ordre Une relation binaire \mathcal{R} est une relation d'ordre si \mathcal{R} est réflexive, antisymétrique et transitive.

-> ex : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$
 $(\Re(z) < \Re(z')) \vee (\Re(z) = \Re(z') \wedge \Im(z) \leq \Im(z'))$ est une relation d'ordre sur \mathbb{C}

Caractère total Une relation d'ordre \mathcal{R} est dite totale si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$

Relation d'équivalence Une relation binaire \mathcal{R} est une relation d'ordre si \mathcal{R} est réflexive, symétrique et transitive.

->ex : Si $a \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = ka$
 \mathcal{R} est appelée relation de congruence modulo a et on note $x \equiv y[a]$

Classe d'équivalence Si $x \in E$ l'ensemble $\{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$ souvent noté $Cl(x)$ est la classe d'équivalence de x

Théorème 1.4.1. *ch2P3PropriétéClEqPartE* Si $E \neq \emptyset$, les classes d'équivalence forment une partition de E

★ ★ ★

Chapitre 2

Calculus

Contenu

2.1	Sommes et Produits	12
	Somme et Produit Télésopique	12
	Permutations	12
	Méthode de perturbation	12
	Sommes doubles	12
2.2	Coefficients binomiaux	13
	Calculs sur les coefficients binomiaux	13
	Binôme de <u>Newton</u>	13
2.3	Valeur absolue	13
	Somme et produit	13
2.4	Trigonométrie	13
	Formules majeures	13
	Tangente	14

2.1 Sommes et Produits

On considère une famille $(a_i)_{i \in I}$ de réels.

$\sum_{i \in I}$ est la **somme** de ses termes

$\prod_{i \in I}$ est le **produit** de ses termes

Somme et Produit Télésopique

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_1$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} k = 1^{n-1} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right) = \frac{a_n}{a_1}$$

Permutations Soit σ une bijection de I sur I , $\sum_{i \in I} a_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} a_i$

-> ex : $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_{n+1-k}$

Méthode de perturbation Soit $(a_i)_{i \in I}$ on note $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$$\underline{S_{n+1}} = \underline{S_n} + a_{n+1} = a_1 + \sum_{k=2}^{n+1}$$

-> ex : Soit $S_n = \sum_{k=1}^n 2^k$
 $S_{n+1} = S_n + 2^{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} 2^k = 2 + 2 \times \sum_{k=1}^n 2^k \Rightarrow S_n + 2^{n+1} = 2S_n + 2$
 $\Rightarrow S_n = 2^{n+1} - 2$

Sommes doubles Soit $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ des familles de réels

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$$

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \sum_{j=i+1}^n b_j$$

Si (a_k) et (b_k) on la même monotonie $\sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \geq 0$

2.2 Coefficients binomiaux

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{n}{p} = \prod_{k=1}^p \frac{n-k+1}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculs sur les coefficients binomiaux

Relation de Pascal Si $1 \leq p \leq n$ alors $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

Propriété de symétrie $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad p \leq n \Rightarrow \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Formule d'absorbtion $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} \text{ ou } p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$

Binôme de Newton

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2.3 Valeur absolue

On note $a^+ = \max(a, 0)$ et $a^- = \max(-a, 0)$. On a alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad a = a^+ - a^- \text{ et } |a| = a^+ + a^- = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{sinon} \end{cases}$$

Somme et produit $\left| \prod_{i=1}^n a_i \right| = \prod_{i=1}^n |a_i| \quad \text{et} \quad \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$

2.4 Trigonométrie

On définit deux fonction **sin** et **cos** par la relation :

$$\mathcal{C}(0; 1) = \{(\cos x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{ou encore} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv a[2\pi] \\ x \equiv -a[2\pi] \end{cases} \quad \sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv a[2\pi] \\ x \equiv \pi - a[2\pi] \end{cases}$$

Formules majeures

Addition $\begin{vmatrix} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \end{vmatrix}$

Duplication $\begin{vmatrix} \cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\alpha) \\ \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{vmatrix}$

Dérivation $\left| \begin{array}{l} \cos' x = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \\ \sin' x = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \end{array} \right|$

Tangente On définit $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ avec $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

$$\sin x = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

Chapitre 3

Nombres Complexes

On définit i tel que $i^2 = -1$ Attention On ne peut pas écrire $i = \sqrt{-1}$

Contenu

3.1	Calcul dans \mathbb{C}	15
	Puissances de i	15
	Identités remarquables	15
3.2	Conjugaison et module	15
3.2.1	Opération de conjugaison	15
	Parties réelles et imaginaires	15
3.2.2	Module du complexe	16
3.2.3	Inégalité triangulaire	16
	Propriété préliminaire	16
3.3	Unimodulaires et trigonométrie	16
	Calculs	16
	Formules d'Euler	16
3.3.1	Technique de l'angle moitié	16

3.1 Calcul dans \mathbb{C}

Puissances de $i \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \quad \begin{array}{ll} i^{4p} = 1 & i^{4p+1} = i \\ i^{4p+2} = -1 & i^{4p+3} = -i \end{array}$

Identités remarquables

$$\begin{aligned} \text{Si } z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n z^k &= \begin{cases} n+1 & \text{si } z = 1 \\ \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{Si } (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad a^n - b^n &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\ \text{Si } (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \end{aligned}$$

3.2 Conjugaison et module

3.2.1 Opération de conjugaison

On définit l'opération **involutive** de **conjugaison** :
 $\forall z = a + ib \in \mathbb{C} \quad \varphi : a + ib \mapsto a - ib \quad \text{et} \quad \varphi \circ \varphi = Id_{\mathbb{C}}$

Avec $\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \overline{\sum_{k=0}^n z_k} = \sum_{k=0}^n \overline{z_k} \quad \text{et} \quad \overline{\prod_{k=0}^n z_k} = \prod_{k=0}^n \overline{z_k}$

Parties réelles et imaginaires $\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{on a} \quad \Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$

3.2.2 Module du complexe

On définit le **module** de $z \in \mathbb{C}$ comme le **réel** positif qui vérifie $|z|^2 = z\bar{z}$
On a alors l'égalité $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

3.2.3 Inégalité triangulaire

Propriété préliminaire On a $\forall z \in \mathbb{C}$, $\begin{cases} |\Re(z)| \leq |z| \\ |\Im(z)| \leq |z| \end{cases}$

Théorème 3.2.1. *th5.1Inégalité TriangulaireInegT1*

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$ on a $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Avec égalité dans l'inégalité si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$ ou si $z' = 0$

Démonstration. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$ $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\bar{z}') + |z'|^2$

avec $\Re(z\bar{z}') \leq |\Re(z\bar{z}')| \leq |z\bar{z}'| = |z||z'|$ d'où $|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$

avec égalité si et seulement si $\Re(z\bar{z}') = |\Re(z\bar{z}')| = |z\bar{z}'|$ soit $z\bar{z}' \in \mathbb{R}^+$

Si $z \neq 0$ alors $z\bar{z}' \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow z \frac{\bar{z}'}{z'} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow z \frac{|z'|^2}{z'} \in \mathbb{R}^+$
 $\Leftrightarrow z = \lambda z'$ avec $\lambda = \frac{z}{z'} \in \mathbb{R}^+$

□

Théorème 3.2.2. *th5.2Seconde inégalité triangulaireInegT2*

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\begin{cases} |z - z'| \geq |z| - |z'| \\ |z' - z| \geq |z'| - |z| \end{cases} \Rightarrow |z - z'| \geq ||z| - |z'||$

3.3 Unimodulaires et trigonométrie

Dans le plan complexe le cercle trigonométrique $\mathcal{C}(0, 1)$ est l'ensemble des nombres complexes unimodulaires noté $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

$\rightarrow \mathbb{U} = \{\cos \theta + i \sin \theta \mid \theta \in [0, 2\pi[\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi[\}$

Calculs $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$ est stable par produit et quotient et $\forall z \in \mathbb{U}$, $\frac{1}{z} = \bar{z}$

Formules d'Euler $\forall z \in \mathbb{U}$, $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$)

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

3.3.1 Technique de l'angle moitié

Théorème 3.3.1. *th5.3Angle moitié 1AngleMoitié*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} 1 + e^{it} = 2 \cos(\frac{t}{2}) e^{i\frac{t}{2}} \\ 1 - e^{it} = 2i \sin(-\frac{t}{2}) e^{i\frac{t}{2}} \end{cases} \quad \forall (p, q) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} e^{ip} + e^{iq} = 2 \cos(\frac{p-q}{2}) e^{i\frac{p+q}{2}} \\ e^{ip} - e^{iq} = 2i \sin(\frac{p-q}{2}) e^{i\frac{p+q}{2}} \end{cases}$$

Théorème 3.3.2. *th5.4Angle moitié 2AngleMoitié2* $\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \\ \sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \end{cases}$$

Chapitre 4

Fonctions

Toute les fonctions considérées sont des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} définies sur $I \subset \mathbb{R}$

Contenu

4.1 Généralités sur les fonctions	17
Ensemble de définition	17
Représentation graphique	17
Périodicité	18
Fonction croissante	18
4.2 Dérivation	18
Dérivabilité en a	18
Dérivabilité sur I	18
Classe \mathcal{C}^1	19
4.3 Fonctions usuelles	19
Logarithme népérien	19
Exponentielle	20
Logarithme en base a	21
Arcsinus	21
Arccosinus	21
Cosinus hyperbolique - Sinus hyperbolique	22
Tangente hyperbolique	22
4.4 Dérivation d'une fonction complexe	22
Dérivabilité en un point	22

4.1 Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition Si f est une fonction on définit D_f son ensemble de définition comme la plus grande partie de \mathbb{R} sur laquelle f est définie.

Représentation graphique Soit f une fonction la représentation graphique de f est la partie de \mathbb{R}^2 $C_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$

Théorème 4.1.1. *ch5P1PropriétéPariteCourbe* Soit f une fonction à valeurs réelles on a

- Si f est paire alors C_f admet $(0, \pi)$ comme axe de symétrie
- Si f est impaire alors C_f admet 0 comme centre de symétrie.

Périodicité On dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall x \in D_f, x+T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$, on dit alors que f est T -périodique.

Rq : La périodicité n'est stable ni par somme, ni par produit.

Théorème 4.1.2. *ch5P2Propriétés5-P2* Soit f et g deux fonctions on a

- 1) Si f et g admettent un parité, alors $f+g$ et $f.g$ admettent la même parité.
- 2) Si f et g sont T -périodiques, alors $f+g$ et $f.g$ sont T -périodiques.
- 3) $g \circ f$ est paire si f est paire ou si f est impaire et g est paire.
- 4) $g \circ f$ est impaire si f et g le sont.

Fonction croissante On dit que f à valeurs réelles est croissante sur I (resp. décroissante) si

$$\forall (a, b) \in I^2, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \quad (\text{resp. } a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b))$$

On définit de même les strictes croissance et décroissance avec des inégalités strictes.

Théorème 4.1.3. *ch5P3PropriétéCarFCroiss* f est croissante (resp. strictement) sur I si et seulement si

$$\forall (a, b) \in I^2, a \neq b \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0 \quad (\text{resp. } > 0)$$

4.2 Dérivation

Dérivabilité en a On dit que f est dérivable en un point a de I qui n'est pas une extrémité de I si $\tau_a(f)$ admet une limite finie en a . On note alors $f'(a)$ cette limite.

Dérivabilité sur I On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I . On note alors f' la fonction définie sur I qui à chaque point a associe $f'(a)$.

Théorème 4.2.1. *ch5P4PropriétésOpeDeriv* Si f et g sont deux fonction dérivable en a on a

- 1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha f + g$ est dérivable en a et $(\alpha f + g)'(a) = \alpha f'(a) + g'(a)$
- 2) $f.g$ est dérivable en a et $(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$
- 3) Si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a)-f(a).g'(a)}{(g(a))^2}$

Théorème 4.2.2. *ch5P5PropositionDerivCompo* Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$
Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = (g' \circ f)(a) \times f'(a)$

Théorème 4.2.3. *ch5P6Proposition : Caractérisation des fonctions constantes* CarFcC-
te Une fonction définie sur I à valeurs réelles ou complexes est constante
si et seulement si elle est dérivable sur I et sa dérivée est nulle sur I

Théorème 4.2.4. *ch5P7PropriétéStrictCroissCNSS* Si f est dérivable sur I alors f est strictement croissante sur I
 $\Leftrightarrow \begin{cases} f' \text{ est positive sur } I \\ \text{il n'existe pas d'intervalle ouvert } I \subset J \text{ tel que } f'|_J = 0 \end{cases}$

Théorème 4.2.5. *ch5th1ThéorèmeDerStrictCroiss* Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I strictement monotone sur I
alors f réalise une bijection de I sur $f_a(I) = J$ et f^{-1} est continue et dérivable sur J avec $\forall b = f(a) \in J, (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$

Théorème 4.2.6. *ch5P8PropriétéCfCf-1Sym* Si f est à valeurs réelles bijectives et \mathbb{R}^2 rapporté à un repère orthonormé direct
Alors C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Classe C^1 On dit que f est de classe C^1 sur I à valeurs dans \mathbb{R} si f est dérivable sur I et so f' est continue sur I . On dit aussi que f est continuellement dérivable sur I .
On note $C^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur I à valeurs dans \mathbb{R} .

4.3 Fonctions usuelles

Logarithme népérien La fonction \ln est l'unique primitive de $\left(\begin{array}{cc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{x} \end{array} \right)$ avec $\ln(1) = 0$.

Théorème 4.3.1. *ch5P9PropriétésCalcln1* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^*, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ 2)
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

Théorème 4.3.2. *ch5th2ThéorèmeInegFondAnalyse* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x+1) \leq x$

Exponentielle La fonction \exp est la bijection réciproque de \ln , définie sur \mathbf{R} à valeurs dans \mathbf{R}_+^* . Elle est dérivable sur \mathbf{R} avec $\exp' = \exp$ et $\forall (x, y) \in \mathbf{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

$\forall (a, b) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, $a^b = \exp(b \times \ln(a))$

Logarithme en base a Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on appelle Logarithme en base a noté \ln_a la fonction $\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln x}{\ln a} \end{array} \right)$ et on note \exp_a sa bijection réciproque.

Théorème 4.3.3. *ch5L1LemmeCCln* $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$x^\alpha \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \quad 1) \frac{\ln x}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad 2)$$

Théorème 4.3.4. *ch5L1cCorollaireCCexp* $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$\frac{x^\alpha}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Théorème 4.3.5. *ch5P10PropositionDefExpLim* Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $\left(1 + \frac{x}{t}\right)^t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} e^x$

Théorème 4.3.6. *ch5P11PropositionInegExp* $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$ avec égalité $\Leftrightarrow x = 0$

Arcsinus La restriction de \sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. On appelle arcsinus noté \arcsin cette fonction telle que $\forall (x, y) \in [-1, 1] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(y)$

Théorème 4.3.7. *ch5P12PropositionArcsinCroissDer* La fonction \arcsin est continue strictement croissante sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$ avec $\forall x \in] -1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Arccosinus La restriction de \cos à $[0, \pi]$ réalise une bijection sur $[-1, 1]$. On appelle arccosinus noté \arccos cette fonction telle que $\forall (x, y) \in [-1, 1] \times [0, \pi]$, $y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$

Théorème 4.3.8. *ch5P13PropriétéArcos+Arcsin* $\forall x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

Théorème 4.3.9. *ch5th3Théorème - ArctangenteArctantan* réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur \mathbb{R} , on appelle arctan cette fonction. \arctan est dérivable sur \mathbb{R} avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Démonstration. \tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc \arctan est dérivable en tout point $a = \tan(y)$
avec $\arctan'(a) = \frac{1}{\tan'(y)} = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+a^2}$ □

Théorème 4.3.10. *ch5P14PropositionArctan+inv* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \times$

Cosinus hyperbolique - Sinus hyperbolique On appelle cosinus hyperbolique (resp. sinus hyperbolique) noté \cosh (resp. \sinh) la partie paire (resp. impaire) de \exp .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Ces fonctions sont indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} avec $\cosh' = \sinh$ et $\sinh' = \cosh$

Théorème 4.3.11. $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) \geq 1$ avec égalité ssi $x = 0$

Théorème 4.3.12. $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Théorème 4.3.13. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\cosh(a + b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b)$$

$$\sinh(a + b) = \sinh(a) \cosh(b) + \cosh(a) \sinh(b)$$

$$\cosh(a - b) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b)$$

$$\sinh(a - b) = \sinh(a) \cosh(b) - \cosh(a) \sinh(b)$$

Tangente hyperbolique La fonction tangente hyperbolique notée \tanh est définie sur \mathbb{R} par $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$

Théorème 4.3.14. \tanh est impaire et indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

4.4 Dérivation d'une fonction complexe

On étudie ici des fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{C}

Dérivabilité en un point On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $x_0 \in I$ si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ possède une limite en x_0 . (Si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$)

On note alors $f'(x_0)$ cette limite.

Théorème 4.4.1. $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $x_0 \in I$ si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont dérivable en x_0 .

On a alors $f'(x_0) = (\Re(f))'(x_0) + i(\Im(f))'(x_0)$

Théorème 4.4.2. *ch5P19PropositionThOpFcCompl* Les théorèmes opératoires sur la somme, le produit, et la fraction sont identique pour des fonctions à valeurs complexes (pas la composition !)

Théorème 4.4.3. *ch5P20PropositionDerivExpCompl* Si φ est une fonction dérivable sur I de \mathbb{R} à valeurs complexes

Alors $\psi \left(\begin{array}{c} I \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \exp(i\varphi(t)) \end{array} \right)$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \psi'(t) = i\varphi'(t)e^{i\varphi(t)}$$

★ ★ ★

Chapitre 5

Primitives et équations différentielles

Contenu

5.1	Calcul de primitives	24
	Primitive	24
	Exemples de référence	24
	Notation	25
5.2	Équations différentielles du premier ordre	25
	Définition	25
	Méthode de variation de la constante :	26
5.3	Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	27

5.1 Calcul de primitives

Primitive Si I est un intervalle de \mathbb{R} on dit que F est une primitive de f définie sur I à valeurs complexes si F est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

Théorème 5.1.1. *ch6P1PropositionPrimCte* Si F est une primitive de f sur I , alors pour toute primitive G de f il existe $C \in \mathbb{R}$ une constante telle que $G = F + C$

Théorème 5.1.2. *ch6P2PropositionPrim0ena* Si f est une fonction continue sur I alors f admet des primitives sur I et $\forall x_0 \in I, \int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0 .

Exemples de référence

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$; $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$; $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $a \in \mathbb{R}^*$ et $J \subset \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(ax + b) \neq 0\}$

f	$F (+C)$	I	f	$F (+C)$	I
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$	\mathbf{R}	$\ln x$	$x \ln x - x$	\mathbf{R}_+^*
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b)$	\mathbf{R}	$\frac{1}{x}$	$\ln x $	\mathbf{R}_-^* ou \mathbf{R}_+^*
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	\mathbf{R}	x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	\mathbf{R}^*
$\tan(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \ln \cos(ax + b) $	J	x^α	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	\mathbf{R}_+^*
$\sinh(ax + b)$	$\frac{1}{a} \cosh(ax + b)$	\mathbf{R}	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	\mathbf{R}
$\cosh(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sinh(ax + b)$	\mathbf{R}	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	\mathbf{R}
$\tanh(ax + b)$	$\frac{1}{a} \ln (\cosh(ax + b))$	\mathbf{R}	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	\mathbf{R}

Notation On note $\int^x f(t)dt$ une primitive de f .

Théorème 5.1.3. *ch6P3Proposition : Intégration par partie* Si u et v sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I , $(a, b) \in I$,
 $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

Théorème 5.1.4. *ch6P4Proposition : Formule du changement de variable* Soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbf{R} ,
 f une fonction continue sur J avec $\varphi_a(I) \subset J$
 $\forall (a, b) \in I^2, \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$

Règles de Bioche : Soit f une fonction rationnelle en $\cos t$ et $\sin t$ et $\psi(t) = f(t)t$
On effectue les changements de variable suivants :

- Si ψ est invariante par $t \mapsto \pi - t$ alors on pose $x = \sin t$
- Si ψ est invariante par $t \mapsto -t$ alors on pose $x = \cos t$
- Si ψ est invariante par $t \mapsto t + \pi$ alors on pose $x = \tan t$

5.2 Équations différentielles du premier ordre

Définition Une équation fonctionnelle de la forme

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies sur un intervalle I de \mathbf{R} s'appelle une équation différentielle linéaire d'ordre 1 où les inconnues y sont des fonctions dérivables sur I à valeurs dans \mathbf{R} ou \mathbf{C}

Théorème 5.2.1. *ch6P5PropositionEquaHomog* Si a et b sont deux fonctions continues sur I ,

$$(E) : y' + a(x)y = b(x),$$

Alors $(E_0) : y' + a(x)y = 0$ est l'équation homogène associée à (E)

de solution $y = C.e^{-A(x)}$

où $A(x)$ est une primitive de a sur I et C est une constante.

Théorème 5.2.2. *ch6P6PropositionSoluceESi a et b sont deux fonctions continues de I de \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{K} ,*

φ_0 une solution particulière de $(E) : y' + a(x)y = b(x)$

Alors toute solution de (E) est de la forme $x \mapsto \varphi_0(x) + \psi(x)$

où ψ est solution de (E_0)

On notera $\mathcal{S}_{(E)} = \varphi_0 + \mathcal{S}_{(E_0)}$

Méthode de variation de la constante : $y' + a(x)y = b(x)$ avec a et b continues sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

(E_0) l'équation homogène associée à (E) admet pour solution générale $\varphi_0(x) = C.e^{-A(x)}$ avec A une primitive de a sur I et C une constante de \mathbb{K} .

On cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto C(x).e^{-A(x)}$ avec C dérivable sur I

$$\forall x \in I, \psi'(x) + a(x)\psi(x) = b(x) \Leftrightarrow$$

$$C'(x)e^{-A(x)} - \underbrace{C(x)a(x)e^{-A(x)} + C(x)a(x)e^{-A(x)}}_{=0} = b(x)$$

$$\Leftrightarrow \psi \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } \forall x \in I, C'(x) = b(x)e^{A(x)}$$

Théorème 5.2.3. *ch6P7PropositionSolGESous les mêmes hypothèses et notations la solution générale de (E) est*

$$\varphi(x) = \left(C + \int^x b(t)e^{A(t)}dt \right).e^{-A(x)}$$

où A est une primitive de a sur I et C une constante de \mathbb{K}

Théorème 5.2.4. *ch6P8PropriétéEquaDiffPolSi $a \in \mathbb{K}$ et P est une fonction polynômiale à coefficients dans \mathbb{K}*

Alors l'équation différentielle $y' + ay = e^{-\alpha(x)}P(x)$

admet une solution particulière de la forme $\varphi_0 : x \mapsto e^{-\alpha(x)}Q(x)$

avec $Q(x)$ un polynôme à coefficients dans \mathbb{K}

et $\deg Q = \deg P$ si $\alpha \neq a$ et $\deg Q = \deg P + 1$ sinon.

Théorème 5.2.5. *ch6P9Proposition : Principe de superpositionPrincSuperpoSi a, b_1, b_2 sont des fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbb{K}*

φ_1 solution particulière de $y' + a(x)y = b_1(x)$

φ_2 solution particulière de $y' + a(x)y = b_2(x)$

Alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}$,

$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est solution particulière de $y' + a(x)y = \lambda_1b_1(x) + \lambda_2b_2(x)$

Théorème 5.2.6. *ch6P10Proposition : Problème de CauchyPbCauchy $\forall (x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$,*

le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Admet une unique solution

$$\varphi_0 : x \mapsto \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds}dt \right) e^{-\int_{x_0}^x a(s)ds}$$

5.3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On considère ici $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$
 où a, b sont des constantes de \mathbf{K} et f est définie et continue sur I de \mathbf{R} à valeur dans \mathbf{K}
 (E) s'appelle une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dans \mathbf{K}

Théorème 5.3.1. *ch6P11PropositionEquaCar* Si $r \in \mathbf{K}$ alors $\varphi_r : x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_0)
 si et seulement si $r^2 + ar + b = 0$ (équation caractéristique associée à (E) (e.c.))

Théorème 5.3.2. *ch6P12PropositionSolGE02* Avec les mêmes notations et en notant Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E)

- $\Delta > 0$ et r_1, r_2 les solutions de e.c. alors la solution générale de (E_0) est donnée par $x \mapsto C_1 e^{r_1(x)} + C_2 e^{r_2(x)}$
- $\Delta = 0$ et r la solution double de e.c. alors la solution générale de (E_0) est donnée par $x \mapsto (C_1 x + C_2) e^{rx}$
- $\Delta < 0$ et $r = \rho + i\omega$ ($\omega \neq 0$) une solution de e.c. alors la solution générale de (E_0) est donnée par $x \mapsto (C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)) e^{\rho x}$

Théorème 5.3.3. *ch6P13PropositionSolGE2* Si f est une fonction continue sur I , $(a, b) \in \mathbf{K}^2$
 Alors la solution générale de $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$
 est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

Théorème 5.3.4. *ch6P14PropriétéEquaDiff2Pol* Soit P une fonction polynômiale sur I à valeurs dans \mathbf{K} et $\alpha \in \mathbf{K}$
 L'équation $(E) : y'' + ay' + b = P(x)e^{\alpha x}$ admet une solution particulière de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$ avec Q une fonction polynômiale à coefficients dans \mathbf{K} et
 $\deg Q = \deg P$ si α n'est pas solution de e.c.
 $\deg Q = \deg P + 1$ si α est racine simple de e.c.
 $\deg Q = \deg P + 2$ si α est racine double de e.c.

Théorème 5.3.5. *ch6P14cCorollaireEquaDiff2Trig* L'équation différentielle $y'' + ay' + b = \cos(\omega x)e^{\alpha x}$
 (respectivement $y'' + ay' + b = \sin(\omega x)e^{\alpha x}$)
 Admet une solution particulière de la forme
 $x \mapsto x^k (C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)) e^{\alpha x}$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2$
 $k = 0$ si $\alpha + i\omega$ n'est pas solution de e.c.
 $k = 1$ si $\alpha + i\omega$ est une racine double de e.c.
 $k = 2$ si $\alpha + i\omega$ est une racine simple de e.c.

Théorème 5.3.6. *ch6P15Propriété : Principe de superpositionPrincSuperpo2* Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et (f_1, f_2) deux fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbb{K}

φ_1 une solution particulière de $y'' + ay' + by = f_1(x)$

φ_2 une solution particulière de $y'' + ay' + by = f_2(x)$

Alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$,

$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est solution de $y'' + ay' + by = (\lambda_1f_1(x) + \lambda_2f_2(x))$

Théorème 5.3.7. *ch6P16Proposition : Problème de CauchyPbCauchy2* Si $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, f une fonction continue sur I à valeurs dans \mathbb{K} ,

$x_0 \in I$, $(y_0, y'_0) \in \mathbb{K}^2$ le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(x_0) = y_0 ; y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

admet une unique solution.

★ ★ ★

Chapitre 6

Nombres réels et suites numériques

Contenu

6.1	Ensembles de nombres réels	29
	Entiers naturels	29
	Entiers relatifs	30
	Nombres rationnels	30
	Approximation décimale propre	30
	Nombres décimaux	30
	Densité	30
	Borne supérieure	31
	Intervalle	31
6.2	Suites réelles	31
6.2.1	Généralités	31
	Suite stationnaire	31
	Convergence	32
	Divergence	33
	Suites adjacentes	34
	Extractrice	35
	Suite extraite	36
	Convergence (cas complexe)	36
6.2.2	Suites particulières	37
	Suite arithmétique	37
	Suite géométrique	37
	Suite arithmético-géométrique	37
	Suite récurrente linéaire d'ordre 2	38

6.1 Ensembles de nombres réels

Entiers naturels $0, 1, 2, \dots$ avec \leq une relation d'ordre totale

Théorème 6.1.1. *ch7P1Propriété : Principe de bon ordre*
 $\text{BonOrdreN}_{(i)}$ Toute partie non vide de \mathbf{N} admet un plus petit élément.
(ii) Tout partie non vide et majorée de \mathbf{N} admet un plus grand élément.

Théorème 6.1.2. *ch7P2Proposition : Division euclidienne sur \mathbb{N}* $\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \exists (q, r) \in \mathbb{N}^2$, unique tel que
 $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$

Entiers relatifs $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

La division euclidienne reste valable sur \mathbb{Z}

Nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$ On dit que $\frac{p}{q}$ est irréductible si p et q sont sans diviseurs communs.

Théorème 6.1.3. *ch7P3Propriété* \mathbb{Q} est stable par somme, différence et produit.

Théorème 6.1.4. *ch7P4Proposition* EncadrDecimal $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ unique telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^n x_k \cdot 10^{-k} \leq x < \sum_{k=0}^n x_k \cdot 10^{-k} + 10^{-n}$$

On a de plus $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in [0, 9]^{\mathbb{N}}$ non stationnaire à 9

Approximation décimale propre Soit $x \in \mathbb{R}$, avec les même notations, on appelle approximation décimale propre de x à 10^{-n} près la somme $\sum_{k=0}^n x_k \cdot 10^{-k}$

On appelle approximation décimale propre de x la **limite** :

$$n \rightarrow +\infty \sum_{k=0}^n x_k \cdot 10^{-k} = x_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$$

Nombres décimaux On appelle nombres décimaux l'ensemble des nombres réels dont l'approximation décimale propre est **stationnaire à 0**. Leur ensemble est noté \mathbb{D} avec

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} : x \times 10^n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}$$

Densité On dit que $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est dense dans \mathbb{R} si pour tout $a < b$ de \mathbb{R} on a $]a, b[\cap X \neq \emptyset$

Théorème 6.1.5. *ch7P5Propriété* Rat Irrat Denses \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .

Borne supérieure Soit X un ensemble. **Sous réserve d'existence**, la borne supérieure de X , notée $\sup X$ est le plus petit éléments de l'ensemble des majorants de X .

Théorème 6.1.6. *ch7th1ThéorèmeSupNonVideMajR* Toute partie non vide et majorée de \mathbf{R} admet une borne supérieure.

Théorème 6.1.7. *ch7P6Proposition : Caractérisation de la borne supérieureCarSup* Soit A une partie de \mathbf{R} , α est la borne supérieure de A si et seulement si $\forall x \in A, x \leq \alpha$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in A$ tel que $x' > \alpha - \varepsilon$

Intervalle On appelle intervalle toute partie X de \mathbf{R} vérifiant

$$\forall (a, b) \in X^2 \text{ avec } a \leq b, [a, b] \subset X$$

Théorème 6.1.8. *ch7P7PropriétéEcritureSegment* $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a \leq b$ on a $[a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid \lambda \in [0, 1]\}$

Théorème 6.1.9. *ch7P8PropriétéIntersecIntervL* L'intersection de deux intervalles est un intervalle.
Toute intersection (même infinie) d'intervalles est un intervalle.

6.2 Suites réelles

6.2.1 Généralités

Suite stationnaire Une suite réelle (u_n) est dite stationnaire si

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \in \mathbf{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0})$$

Théorème 6.2.1. *ch7P9PropriétéSuiteBornée* Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est majorée.

Convergence Si $\ell \in \mathbf{R}$ et (u_n) est une suite réelle,

- On dit que u converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \in \mathbf{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n - \ell \leq \varepsilon)$$

- On dit que u tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si

$$\forall A \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \in \mathbf{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A) \text{ (resp. } u_n \leq A)$$

Divergence Une suite réelle est dite divergente si elle ne converge pas.

Théorème 6.2.2. *ch7P10Propriété : Unicité de la limite* (u_n) tend vers ℓ_1 et vers ℓ_2 alors $\ell_1 = \ell_2$

Théorème 6.2.3. *ch7P11PropriétéConvImplBorn* Toute suite réelle convergente est bornée.

Théorème 6.2.4. *ch7P12PropriétéProdBornLimNulle* Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

Théorème 6.2.5. *ch7P13PropriétésOpeLimSi* (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$

Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent * avec

- $\lim(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim u_n + \mu \lim v_n$
- $\lim(u_n v_n) = (\lim u_n)(\lim v_n)$

Théorème 6.2.6. *ch7P14PropriétéQuotientLimSi* (u_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

Alors (u_n) est non nulle à partir d'un certain rang n_0 et $(\frac{1}{u_n})_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{1}{\ell} \in \overline{\mathbb{R}}$

Théorème 6.2.7. *ch7L1Lemme7-L1* Soit (u_n) une suite réelle avec $u_n \xrightarrow[n]{} \ell$ alors $u_n \xrightarrow[n]{} \ell$

Théorème 6.2.8. *ch7th2Théorème : Passage à la limite dans les inégalités larges* *Pass-LimInegLarges* à compléter

Démonstration. On peut noter que si (u_n) une suite réelle quelconque est à termes positif à partir d'un certain rang et si (u_n) tends vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\ell \geq 0$, en effet : par unicité de la limite, $\ell = \ell \geq 0$

Soit donc (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergente respectivement vers ℓ et ℓ' avec $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang alors

- Si $\ell = \ell' = +\infty$ ou si $\ell = \ell' = -\infty$ alors $\ell = \ell'$ et on a le résultat
- Sinon on note $w_n = u_n - v_n$ et on a ainsi $w_n \geq 0$ à partir d'un certain rang donc vu (w_n) converge vers $\ell'' = \ell - \ell'$ alors $\ell \geq \ell'$ □

Si la somme et/ou le produit ne sont pas des formes indéterminées de $\overline{\mathbb{R}}$

Théorème 6.2.9. *ch7P15PropriétéCarConv* Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que (v_n) converge vers 0.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\text{apcr } u_n - \ell \leq v_n$

Alors (u_n) converge vers ℓ

Théorème 6.2.10. *ch7th3Théorème d'encadrementThEncadr* Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles telles que $\text{apcr } v_n \leq u_n \leq w_n$.

On suppose que (v_n) et (w_n) converge vers une même limite.

Alors (u_n) converge vers cette limite commune.

Démonstration. On a à partir d'un certain rang $0 \leq u_n - v_n \leq w_n - v_n$ et $(w_n - v_n)$ converge vers 0 donc d'après la propriété précédente $(u_n - v_n)$ converge vers 0, or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (u_n - v_n) + v_n$ d'où $\lim u_n = \lim(u_n - v_n) + \lim v_n = \lim v_n$ \square

Théorème 6.2.11. *ch7P16PropositionLimMinorMaj* Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles, on suppose $\text{apcr } u_n \leq v_n$

Alors $\begin{cases} \text{Si } u_n \xrightarrow{n} +\infty \text{ alors } v_n \xrightarrow{n} +\infty \\ \text{Si } v_n \xrightarrow{n} -\infty \text{ alors } u_n \xrightarrow{n} -\infty \end{cases}$

Théorème 6.2.12. *ch7th4 Théorème de la limite monotone ThLimMonot* Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge.

Démonstration. Soit (u_n) une suite réelle, on note $X = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ partie non vide et majorée de \mathbb{R} , on note donc ℓ sa borne supérieure (qui existe). On a alors par croissance de (u_n) et caractérisation de la borne supérieure $u_n \xrightarrow{n} \ell$. \square

Suites adjacentes Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si elles sont de monotonies contraires et si $\lim(u_n - v_n) = 0$

Théorème 6.2.13. *ch7L2Lemme7-L2* Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

Alors $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, u_p \leq v_q$

Théorème 6.2.14. *ch7th5Théorème des suite adjacentesThSuitesAdjacentes* Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

Démonstration. Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. On suppose sans perte de généralité (v_n) décroissante. D'après le lemme on a alors (u_n) croissante majorée par v_0 donc d'après le théorème de la limite monotone (u_n) converge vers $\ell \leq v_0$. De même (v_n) converge vers $\ell' \geq u_0$ puis vu $\lim(u_n - v_n) = 0$ on a $\ell = \ell'$ \square

Extractrice On appelle extractrice toute application $\sigma : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante.

Théorème 6.2.15. *Si $\sigma : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ est une extractrice alors*
 $\forall n \in \mathbf{N}, \sigma(n) \geq n$

Suite extraite Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (v_n) est extraite de (u_n) s'il existe $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une extractrice telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\sigma(n)}$$

Théorème 6.2.16. *ch7P18PropositionLimStableExtracSi une suite possède une limite, toute ses suites extraites possèdent la même limite.*

Théorème 6.2.17. *ch7P19PropriétéSousSuitePairImpairSoit (u_n) une suite réelle. On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une même limite ℓ . Alors (u_n) tend vers ℓ*

Théorème 6.2.18. *ch7th6 Théorème de Bolzano-Weierstrass ThBWTout suite réelle bornée admet une suite extraite qui converge.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite bornée.

On considère $A = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < u_p\}$

On construit alors une extractrice σ telle que $(u_{\sigma(n)})$ est strictement décroissante :

- Si A est infinie, on pose $\sigma(0) = \min A$ (principe de bon ordre) puis $\forall p \in \mathbb{N}$, on pose $\sigma(p+1) = \min(A \cap]\sigma(p), +\infty[)$

On a alors $(u_{\sigma(n)})$ strictement décroissante et minorée donc convergent d'après le théorème de la limite monotone.

- Si A est fini, on pose $\sigma(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est vide} \\ \max A + 1 & \text{sinon} \end{cases}$

On a alors vu $\sigma(0) \notin A$, $\exists n > \sigma(0) : u_n \geq u_{\sigma(0)}$, ainsi on pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sigma(p+1) = \min\{n > \sigma(p) \mid u_n \geq u_{\sigma(p)}\}$ (qui existe vu $\sigma(p) \notin A$)
 $(u_{\sigma(p)})$ est donc croissante et majorée et par suite convergente. □

Convergence (cas complexe) Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ on dit que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n - \ell \leq \varepsilon)$$

Théorème 6.2.19. *ch7P20PropositionCNSConvComplSoit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe, alors (u_n) converge ssi $(\Im(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\Re(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.*

$$\text{On a alors } \begin{cases} \Re(\lim u_n) = \lim \Re(u_n) \\ \Im(\lim u_n) = \lim \Im(u_n) \end{cases}$$

Théorème 6.2.20. *Théorème de Bolzano-Weierstrass : cas complexe* De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite qui converge.

Démonstration. Clair avec le théorème dans le cas réel vu $\forall z \in \mathbb{C}, \Re z \leq z$ et $\Im z \leq z$ \square

Théorème 6.2.21. *Proposition : Caractérisation séquentielle de la densité* Une partie X de \mathbb{R} est dense dans \mathbb{R} si et seulement si tout réel peut s'écrire comme une suite d'éléments de X .

6.2.2 Suites particulières

Suite arithmétique On dit que $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique si la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante appelée raison de la suite arithmétique.

Théorème 6.2.22. *Propriété* Si u est une suite arithmétique de raison r on a

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, u_p = u_q + r(p - q)$$

Suite géométrique On dit que $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique si u est stationnaire à 0 où si u est telle que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bien définie constante appelée raison de la suite géométrique.

Théorème 6.2.23. *Propriété* Si u est une suite géométrique de raison q alors

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, u_m = u_n \times q^{m-n}$$

$$\sum_{k=n}^m u_k = \begin{cases} (m - n + 1) \times u_n & \text{si } q = 1 \\ \frac{u_n - u_{m+1}}{1 - q} & \text{sinon} \end{cases}$$

Suite arithmético-géométrique On dit que $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique s'il existe $a \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{K}$ tels que $u_0 \in \mathbb{K}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$

Théorème 6.2.24. *Propriété* Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique, alors avec les mêmes notations

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

Suite récurrente linéaire d'ordre 2 On dit que $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 si $\exists (a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Théorème 6.2.25. *ch7P25PropriétéSuiteRecLin2* Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

On considère $(E) : z^2 = az + b$ l'équation caractéristique associée alors

→ Si $\Delta \neq 0$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ les racines distinctes de (E) alors

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$

→ Si $\Delta = 0$, z_0 la racine double de (E) alors

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu) z_0^n$

Rq : Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\Delta < 0$ alors λ et μ sont conjugués et on a en écrivant $z_1 = \rho + i\omega$

$\exists (\lambda_r, \mu_r) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (\lambda_r \cos(n\omega) + \mu_r \sin(n\omega))$

★ ★ ★

Chapitre 7

Fonctions d'une variable réelle

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} non réduit à un point à valeur dans \mathbb{R} sauf indications contraires.

Contenu

	Voisinage	39
7.1	Limites et Continuité	40
7.1.1	Limite d'une fonction en un point	40
	Limite d'une fonction	40
7.1.2	Continuité en un point	41
	Continuité	41
	Prolongement par continuité	41
7.1.3	Continuité sur un intervalle	42
	Définition	42
7.1.4	Fonctions à valeurs complexes	43
7.2	Dérivabilité	43
	Dérivabilité en un point	43
	Dérivabilité sur un intervalle	43
7.2.1	Extremum local et point critique	44
	Extremum local	44
	Point critique	44
7.2.2	Théorèmes de Michel Rolle et des accroissements finis	44
	Fonction lipschitzienne	45
7.2.3	Fonctions de classe , $(k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\})$	46
	Définitions	46
7.3	Convexité	47
7.3.1	Généralités	47
	Fonction convexe	47
	Fonction concave	47
7.3.2	Fonctions convexes dérivables et deux fois dérivables	47

Voisinage Une propriété portant sur f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur $]a + \delta, a - \delta[$ pour un certain $\delta > 0$ si $a \in \mathbb{R}$; sur $]A, +\infty[$ ou $]-\infty, A[$ sinon.

7.1 Limites et Continuité

7.1.1 Limite d'une fonction en un point

Limite d'une fonction Soit f une fonction, f admet une limite ℓ en $a \in D_f$ notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, (|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Théorème 7.1.1. *ch8P1Propriété : Unicité de la limite* LimUniq Si la limite de f en a existe alors elle est unique

Théorème 7.1.2. *ch8P2Proposition : Continuité en un point* ContA Si f est définie en a et admet une limite en a alors

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

On dit alors que f est continue en a

Théorème 7.1.3. *ch8P3Propriété* LimBorneVois Si f possède une limite finie en un point a alors f est bornée sur un voisinage de a

Théorème 7.1.4. *ch8P4Propriété : Signe au voisinage de a* SignVoisLimit Si f admet une limite finie non nulle en a alors f est du signe (strict) de cette limite sur un voisinage de a

Théorème 7.1.5. *ch8th1Théorème de caractérisation séquentielle de la limite* CarSeq-Lim f admet ℓ comme limite en $a \in I$ si, et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a , $f(u_n)$ tend vers ℓ .

Démonstration. Soit ℓ la limite de f en $a \in I$

\Rightarrow Soit $\varepsilon > 0$; soit $\delta > 0$ vérifiant la propriété de limite.

On considère $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n - a < \delta$ et on a ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow f(u_n) - \ell < \varepsilon$$

\Leftarrow Par contraposée, on considère $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in I$ tel que $x_n - a \leq \frac{1}{n+1}$ et $f(x_n) - \ell > \varepsilon_0$

On a ainsi $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ convergente vers a avec $(f(x_n))$ qui ne converge pas vers ℓ .

Les preuves pour les limites infinies et/ou en l'infini sont analogue. \square

Théorème 7.1.6. *ch8P5Proposition : opérations sur les limites* OpeLim L'opérateur "limite" est stable par somme, produit, quotient* et composition.

*. Dans ce cas seulement si la limite au dénominateur est non nulle et que le quotient n'est pas une forme indéterminée de \mathbb{R}

Théorème 7.1.7. *ch8P6PropositionLimInegLarge* Soit a un point de I
On suppose que $f \leq g$ sur un voisinage de a , $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$
Alors $\ell \leq \ell'$

Théorème 7.1.8. *ch8th2Théorème d'encadrementThEncadr* Soit f, g, h trois fonctions
telles que sur un voisinage de $a \in I$
on a $h \leq f \leq g$. On suppose que h et g converge vers
une même limite ℓ en a , alors f converge vers ℓ en a

Démonstration. Clair avec la définition et en considérant le plus petit δ □

Théorème 7.1.9. *ch8th3 Théorème de la limite monotone ThLimMonot* Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction croissante sur $]a, b[$.
Alors f admet une limite à gauche et une limite à droite
en tout point $x_0 \in]a, b[$ avec
$$xx_0^- f(x) \leq f(x_0) \leq xx_0^+ f(x)$$

Si de plus f est majorée (resp. minorée) sur $]a, b[$ alors elle admet
une limite à gauche en b (resp. à droite en a)

Démonstration. Soit $x_0 \in]a, b[$, on considère $f_d(]a, x_0[)$ et ℓ sa borne supérieure (existe).
On peut ensuite montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} \ell$ puis on fait de même avec $f_d(]x_0, b[)$ □

7.1.2 Continuité en un point

Continuité Soit f définie sur I à valeur réelles, on dit que f est continue au point
 $a \in I$ si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$

Prolongement par continuité Si f admet une limite finie l en un point a de \mathbb{R} et si
 f n'est pas définie en a , on appelle prolongement par continuité de f en a la fonction
égale à f sur son domaine de définition et à l en a .

Théorème 7.1.10. *ch8P7Proposition : caractérisation séquentielle de la continuitéCarSeqCont* f
est continue en $a \in I$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$
qui converge vers a , $(f(u_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(a)$

Théorème 7.1.11. *ch8P8PropriétéOpeFCont* Si f et g sont deux fonction continues en
un point a de I , alors $f + g$ et fg
sont continues en a . Si de plus $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a .
Si h est continue en $f(a)$ alors $h \circ f$ est continue en a

7.1.3 Continuité sur un intervalle

Définition On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I .
On note $C^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continue sur I à valeur dans \mathbb{R}

Théorème 7.1.12. *ch8th4 Théorème des valeurs intermédiaires TVISi $f \in (I, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in I^2$*

Alors f prend sur I toute les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Démonstration. On considère $\alpha = \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) < c\}$ et on a alors par continuité de f $\neg(f(\alpha) < c \vee f(\alpha) > c) \Leftrightarrow f(\alpha) = c$ \square

Théorème 7.1.13. *ch8P9PropriétéContSegBornSoit f une fonction continue sur un segment alors f est bornée sur ce segment et f atteint ses bornes.*

Théorème 7.1.14. *ch8P9cCorollaireImgSegFContL'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

Théorème 7.1.15. *ch8P10Proposition8-P9Soit f est continue sur I à valeurs réelles, on suppose f est injective sur I
Alors f est strictement monotone sur I*

Démonstration. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, on suppose sans perte de généralité que $f(a) < f(b)$ alors f est strictement croissante sur $[a, b]$, en effet :

Par l'absurde, soit $(x, y) \in]a, b[^2$ tel que $a < x < y < b$ et $f(x) > f(y)$

On considère alors $g \left(\begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f((ta + (1-t)x) - f(tb + (1-t)y)) \end{array} \right)$ continue sur $[0, 1]$

Vu $g(0) = f(x) - f(y) > 0$ et $g(1) = f(a) - f(b) < 0$ par le TVI g s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$ donc f prend deux fois la même valeur en deux points distincts de $[a, b]$ ce qui est impossible d'où cqfd \square

Théorème 7.1.16. *ch8th5Théorème de la bijection réciproqueThBijReciproqueToute fonction réelle définie et continue strictement monotone sur un intervalle admet une fonction réciproque de même monotonie sur l'intervalle image.*

Démonstration. Soit f strictement croissante et continue sur I alors f réalise un bijection de I sur $J = f_a(I)$. On considère alors f^{-1}

D'après le théorème de la limite monotone f^{-1} est continue à droite et à gauche en tout point de l'intervalle ouvert et par injectivité ces limites sont égales donc f^{-1} est continue sur l'intervalle ouvert puis fermé donc strictement monotone avec les monotonie clairement identiques. \square

7.1.4 Fonctions à valeurs complexes

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et x_0 un point ou une extrémité de I . f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, (x - x_0 \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Si $x_0 \in I$ alors $f(x_0) = \ell$ et f est continue en x_0 . On note $\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Théorème 7.1.17. *ch8th6Théorème : caractérisation des limites par les parties réelles et imaginaires*
 $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en x_0 si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ admettent des limites $(\ell_r, \ell_i) \in \mathbb{R}^2$.

On a alors $\ell = \ell_r + i\ell_i$

Démonstration. Clair vu $\forall z \in \mathbb{C}, z \leq \Re(z) + i\Im(z)$ et $\max(\Re(z), \Im(z)) \leq |z|$ □

7.2 Dérivabilité

Dérivabilité en un point f est dérivable en un point a de I si

$$\tau_a(f) \left(\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right)$$

Le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a . On note $f'(a)$ cette limite.

Théorème 7.2.1. *ch8P11PropositionDerImplCont* Si f est dérivable en a alors f est continue en a .

Théorème 7.2.2. *ch8P12PropriétéCarDerf* f est dérivable en a si et seulement si il existe une fonction ε

définie sur un voisinage de 0 telle que

$$f(a + h) = f(a) + h \times \ell + h\varepsilon(h)$$

où $\ell \in \mathbb{R}$ et $h\varepsilon(h) = o(h)$. On a alors $\ell = f'(a)$

Dérivabilité sur un intervalle On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I . On note alors f' sa fonction dérivée qui à tout point a de I associe $f'(a)$

Théorème 7.2.3. *ch8P13PropriétésOpeFDer* Soit f, g deux fonction dérivables en a alors

- $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- Si $g'(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$

Soit h dérivable en $f(a)$

Alors $h \circ f$ est dérivable en a et $(h \circ f)'(a) = f'(a) \times h'(f(a))$

Théorème 7.2.4. *ch8P14PropriétéDerBij* Si f est bijective de I sur J dérivable en $a \in I$ Alors f^{-1} est dérivable en $f(a) = b$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$.

On a alors $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

7.2.1 Extremum local et point critique

Extremum local

Maximum On dit que f présente un maximum local en $a \in I$ s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a - \delta, a + \delta] \cap I, f(x) \leq f(a)$$

Minimum La définition est analogue

Point critique Un point critique est un zéro de la dérivée.

Théorème 7.2.5. *ch8P15PropriétéExtremumCritique* Soit a est un point intérieur à I et f dérivable en a .

On suppose que f présente un extremum local en a , alors a est un point critique.

Rq : Si a un point intérieur à I est un point critique et si f ne présente pas d'extremum local en a , on dit que a est un point d'inflexion de f .

7.2.2 Théorèmes de Michel Rolle et des accroissements finis

Théorème 7.2.6. *ch8th7Théorème de Michel Rolle* *ThRolle* Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ à valeurs réelles. On suppose $f(a) = f(b)$
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Démonstration. Si f est constante sur $[a, b]$ c'est vrai.

Sinon l'image continue de $]a, b[$ par f est un segment $[M, m]$ avec M ou m différent de $f(a) = f(b)$ atteint en $c \in]a, b[$ qui est alors un point critique de f d'où cqfd \square

Théorème 7.2.7. *ch8th8Théorème des accroissements finis* *ThAccrFinis* Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles et dérivable sur $]a, b[$
Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Démonstration. On considère $h_{a,b}$ la corde à C_f joignant les points d'abscisse b et a . Soit ensuite

$$g : x \mapsto f(x) - h_{a,b}(x) = f(x) - \left(f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$$

On a alors g continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $g(a) = 0 = g(b)$ soit donc d'après le théorème de Michel Rolle né à Ambert en 1652 $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ or $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ d'où cqfd \square

Théorème 7.2.8. *ch8th8cCorollaire : Inégalité des accroissements finis*
 Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ à valeurs dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} ,
 On suppose $\exists k \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in]a, b[, f'(x) \leq k$
 Alors $f(b) - f(a) \leq kb - a$

Fonction lipschitzienne On dit que f est k -lipschitzienne sur I si

$$\forall x \in]x, y[\in I^2, f(x) - f(y) \leq kx - y$$

On dit que f est lipschitzienne sur I s'il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que f est k -lipschitzienne

Théorème 7.2.9. *ch8P16PropriétéLipCont* Si f est lipschitzienne sur I alors f est continue sur I

Théorème 7.2.10. *ch8P17PropriétéInegAFLip* Si f est dérivable sur I telle que $\forall x \in I, f'(x) \leq k$
 Alors f est k -lipschitzienne sur I

Théorème 7.2.11. *ch8P18Propriété8-P18* Soit f dérivable sur I à valeurs réelles
 f est constante sur I si et seulement si f' est identiquement nulle sur I .
 f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I .
 f est strictement croissante sur I si et seulement si
 $\begin{cases} f' \text{ est positive sur } I \\ \text{Il n'existe pas } J \subset I \text{ contenant deux points distincts avec } f' \text{ nulle sur } J \end{cases}$

Théorème 7.2.12. *ch8th9Théorème de la limite de la dérivée* Soit $a \in I$. Si f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$
 On suppose $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbf{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$

Démonstration. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, il existe par le théorème des accroissements finis c_x strictement compris entre x et a tel que $f(x) - f(a) = f'(c_x) \times (x - a)$.
 Si x tend vers a alors par encadrement c_x tend vers a et par composition de limites $f(c_x)$ tend vers ℓ .
 Ainsi $\tau_a(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell = f'(a)$ \square

*. Ceci reste vrai si f est définie sur I à valeurs complexes

Théorème 7.2.13. *Si f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ avec $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = +\infty$
Alors f n'est pas dérivable en a et C_f admet une tangente verticale en a*

7.2.3 Fonctions de classe , ($k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$)

Définitions Une fonction f est dite de classe sur I si elle est continue sur I .
Elle est dite de classe sur I si elle est k fois dérivable sur I et si sa dérivée k -ième est continue sur I . Elle est dite de classe \mathcal{C}^∞ sur I si elle est de classe sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$

Théorème 7.2.14. *Les fonction polynômiales sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .*

Les fonction rationnelles (quotient de fonctions polynômiales) sont de classe \mathcal{C}^∞ sur leur ensemble de définition.

Les fonctions sin et cos sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}

Les fonction exponentielles sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}

(5) Les fonction logarithme et puissances sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^+

Théorème 7.2.15. *Soit f une fonction et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$
Alors f est de classe \mathcal{C}^{p+q} sur I si et seulement si $f^{(p)}$ est de classe \mathcal{C}^q sur I*

$$\text{On a alors } (f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}$$

Théorème 7.2.16. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $f, g \in (I, \mathbb{R})$
Alors $f + g \in (I, \mathbb{R})$ et $(f + g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$*

Théorème 7.2.17. *Formule de Leibniz Soit $n \in \mathbb{N}$;
soit f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^n sur I*

Alors fg est de classe \mathcal{C}^n sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration. Clair par récurrence sur n . □

Théorème 7.2.18. *Formule de Faa Di Bruno Comp Classe \mathcal{C}^n Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si f est de classe \mathcal{C}^n sur I à valeur dans un intervalle J non trivial, g est de classe \mathcal{C}^n sur J
Alors $g \circ f$ est de classe \mathcal{C}^n*

Théorème 7.2.19. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si f et g sont de classe \mathcal{C}^n sur I avec $0 \notin g(I)$*

$$\text{Alors } \frac{1}{g} \text{ et } \frac{f}{g} \text{ sont de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } I$$

Théorème 7.2.20. *ch8P23PropositionBijRecCn* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si f est bijective de I sur J de classe C^n sur I et si f ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est de classe C^n sur J .

7.3 Convexité

7.3.1 Généralités

Fonction convexe Soit f une fonction à valeurs réelles. On dit que f est convexe sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Fonction concave On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I

Théorème 7.3.1. *ch8th11Théorème : Inégalité de JensenInegJensen* Si f est convexe sur I alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ avec $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration. On a le résultat par récurrence en barycentrant en divisant par $1 - \lambda_{n+1}$ (cas $\lambda_n + 1 = 1$ trivial) puis en appliquant la propriété au rang 2 (inégalité de convexité) \square

Théorème 7.3.2. *ch8P24Propriété : Lemme des pentesLemmePentes* Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on a équivalence entre les propriétés suivantes :
 f convexe sur I

$$\forall (a, b, c) \in I^3 \text{ avec } a < b < c, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

$\forall x_0 \in I, \tau_{x_0}(f)$ est croissant

7.3.2 Fonctions convexes dérivables et deux fois dérivables

Théorème 7.3.3. *ch8P25Proposition : Caractérisation des fonctions convexes dérivablesCarFConvexeDer* Soit f une fonction dérivable sur I alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I .

Théorème 7.3.4. *ch8P25cCorollaireCfConvexeSurTang* Si f est convexe sur I alors C_f est située au-dessus de ses tangentes.

Théorème 7.3.5. *ch8P26PropositionCarFConvexe2Der* Soit f une fonction deux fois dérivable sur I alors f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I .

★ ★ ★

Chapitre 8

Arithmétique dans \mathbb{Z}

Contenu

8.1	Relation de divisibilité dans \mathbb{Z}	49
8.1.1	Principe de bon ordre	49
8.1.2	Multiples et partie $a\mathbb{Z}$	50
	Notation	50
	Multiple	50
8.2	Algorithme de division euclidienne	50
8.3	pgcd et ppcm	50
8.3.1	Egalité de Bézout	50
	pgcd	50
8.3.2	Algorithme d'Euclide	51
	Algorithme	51
	ppcm	51
8.4	Entiers premiers entre eux	51
	Définition	51
	Entiers premiers entre eux dans leur ensemble	52
8.5	Nombres premiers	52
	Définition	52
	Valuation p -adique	53
8.6	Congruences	53
	Définition	53
	Entier inversible	54

8.1 Relation de divisibilité dans \mathbb{Z}

8.1.1 Principe de bon ordre

Théorème 8.1.1. *ch9th1Théorème : Principe de bon ordre dans \mathbb{N} BonOrdre Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément.*

Théorème 8.1.2. *ch9th1cCorollaire : Propriété archimédienne PropArchi Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a \times n \geq b$.*

8.1.2 Multiples et partie $a\mathbb{Z}$

Notation Si $a \in \mathbb{Z}$ alors on note $a\mathbb{Z} = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$
 Si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ alors $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ka + lb \mid (k, l) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Théorème 8.1.3. *ch9P1PropriétéPartZstableaZ* Toute partie de \mathbb{Z} stable par somme est une partie de la forme $m\mathbb{Z}$ avec $m \in \mathbb{N}$.

Multiple Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ on dit que b est un multiple de a (ou a divise b) et on note $a|b$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$: $b = ka$.

Théorème 8.1.4. *ch9P2Propriété9P2* Si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ alors on a $a|b \Leftrightarrow b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$

8.2 Algorithme de division euclidienne

Théorème 8.2.1. *ch9th2ThéorèmeDivEuclid* Soit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ alors il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ unique tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$
 On appelle q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b .

Démonstration. Unicité : claire

Existence : On considère $S = \{a - bk \mid k \in \mathbb{Z} \wedge a - bk \geq 0\}$ on a alors $S \neq \emptyset$ puis on pose $r = \min(S)$ avec $r < b$ sinon $r - b = a - b(k_0 + 1) \geq 0$ donc $0 \leq r < b$ \square

8.3 pgcd et ppcm

8.3.1 Égalité de Bézout

Théorème 8.3.1. *ch9L1Lemme9-L1* Si $a|b$ et $b \neq 0$ Alors $a \leq b$

pgcd Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}^*$, le plus grand commun diviseur de a et b est l'entier naturel d vérifiant les conditions suivantes : $\begin{cases} (1) d|a \text{ et } d|b \\ (2) \forall c \in \mathbb{Z}, c|a \text{ et } c|b \Rightarrow c \leq d \end{cases}$

Théorème 8.3.2. *ch9P3PropriétéEgalBezout* Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$ il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = a \wedge b$

Théorème 8.3.3. *ch9P4Propriétés9-P4* Soit $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ et $m \in \mathbb{Z}$ Alors

- > $a \wedge (b + ma) = a \wedge b = a \wedge (-b)$
- > $ma \wedge mb = m(a \wedge b)$
- > si $d = a \wedge b$, $\frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = 1$
- > si $g \in \mathbb{Z}^*$, $g|a$ et $g|b \Rightarrow \frac{a}{g} \wedge \frac{b}{g} = \frac{1}{g}(a \wedge b)$

8.3.2 Algorithme d'Euclide

Théorème 8.3.4. *ch9L2LemmeLemmeAlgoEuclide* Soit (q, r) le quotient et le reste de la division euclidienne de $a \in \mathbb{Z}$ par $b \in \mathbb{N}^*$
Alors $a \wedge b = b \wedge r$

Démonstration. $a \wedge b = (a - bq) \wedge b = r \wedge b$ □

Algorithme Soit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ On pose $r_0 = a$, $r_1 = b$ et r_2 le reste de la division euclidienne de r_0 par r_1 .

-> Si $r_n = 0$ alors $a \wedge b = r_{n-1}$ sinon on considère r_{n+1} le reste de la division euclidienne de r_{n-1} par r_n avec $r_{n-1} \wedge r_n = r_{n-2} \wedge r_{n-1} = \dots = a \wedge b$

Algorithme d'Euclide étendu

Si on souhaite obtenir les coefficients de Bézout en même temps que le pgcd, on détermine à chaque étape $(u_k, v_k) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $r_k = au_k + bv_k$ avec

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_{n-1} - q_n u_n \\ v_{n+1} = v_{n-1} - q_n v_n \end{cases}$$

ppcm Soit $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ Le plus petit commun multiple de a et b est l'entier naturel m vérifiant les conditions suivantes : $\begin{cases} (1) a|m \text{ et } b|m \\ (2) \forall c \in \mathbb{Z}, a|c \text{ et } b|c \Rightarrow m \leq c \end{cases}$

Théorème 8.3.5. *ch9P5PropriétéppcmZ* Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$ Alors $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$

Théorème 8.3.6. *ch9P6Propriété9-P6* Soit $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ Alors $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$

8.4 Entiers premiers entre eux

Définition Deux entiers $a, b \in \mathbb{Z}^*$ sont dits premiers entre eux si $a \wedge b = 1$

Théorème 8.4.1. *ch9P7PropositionEgalBezout1* Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ deux entiers alors a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$

Théorème 8.4.2. *ch9L3Lemme de GaussLemmGauss* Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ on a
Si c divise ab et c est premier avec a alors c divise b .

Théorème 8.4.3. *ch9P8Propriété9-P10* Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ on a
Si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, a_i est premier avec c alors $\prod_{i=1}^n a_i$ est premier avec c

Théorème 8.4.4. *ch9L4LemmePGCDDistrib* Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ Alors $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b \wedge c$

Entiers premiers entre eux dans leur ensemble Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z}^*)^n$ On dit
que (a_1, \dots, a_n) sont premiers entre eux dans leur ensemble si $a_1 \wedge \dots \wedge a_n = 1$,
Ceci équivaut à l'existence de $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n u_i a_i = 1$

8.5 Nombres premiers

Définition On dit qu'un entier naturel p est (un nombre) premier si $p \geq 2$ et si les
seuls diviseurs dans \mathbb{N} de p sont 1 et lui-même

Un nombre qui n'est pas premier est dit composé

Théorème 8.5.1. *ch9L5LemmeDivisPremier* Tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier

Théorème 8.5.2. *ch9L5cCorollaireNPinfini* L'ensemble des nombres premiers est infini.

Théorème 8.5.3. *ch9L6Lemme9-L6* Si p est un nombre premier et $a \in \mathbb{N}$
Alors $a \wedge p = 1 \Leftrightarrow p \nmid a$

Théorème 8.5.4. *ch9L7Lemme d'EuclideLemmeEuclid* Soit p un nombre premier et
 $a, b \in \mathbb{Z}$
Si $p \mid ab$ alors $p \mid a$ ou $p \mid b$

Théorème 8.5.5. *ch9th3* **Théorème fondamental** *THFondArithm* Tout nombre entier supérieur à 2 s'écrit comme produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Démonstration. Existence : Par récurrence forte avec l'existence d'un diviseur premier

Unicité : Si $p = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^l q_j^{\beta_j}$ avec p_i, q_j premiers distincts

On pose $i_0 \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et on a alors $p_{i_0} \mid \prod_{j=1}^l q_j^{\beta_j}$ donc il existe j_0 tel que $p_{i_0} \mid q_{j_0}^{\beta_{j_0}}$ soit $p_{i_0} = q_{j_0}$. Ainsi $\{p_1, \dots, p_m\} = \{q_1, \dots, q_l\}$ et $m = l$

On suppose $p_k = q_k$ et $\alpha_k < \beta_k$ avec $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ alors $q_k^{\beta_k - \alpha_k} \mid \prod_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket \setminus \{k\}} p_i^{\alpha_i}$ soit $q_k \mid p_i$; $q_k = p_i$ avec $k \neq i$ impossible \square

Valuation p -adique Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle valuation p -adique de n l'exposant de p dans la décomposition de n en produits de facteurs premiers.

Théorème 8.5.6. *ch9L8LemmeDivisValu* $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ on a $m \mid n \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}$ premier, $v_p(m) \leq v_p(n)$

Théorème 8.5.7. *ch9P9PropositionValPGCDPPCM* $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
 $a \wedge b = \prod_{p \text{ premier}} p^{\min(v_p(a), v_p(b))}$ et $a \vee b = \prod_{p \text{ premier}} p^{\max(v_p(a), v_p(b))}$

Théorème 8.5.8. *ch9P10PropriétéVpLog* $\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, $\forall p$ premier, $v_p\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) = \sum_{i=1}^n v_p(a_i)$

8.6 Congruences

Définition Soit $n \in \mathbb{Z}$ la relation de congruence modulo n est définie par $a \equiv b[n] \Leftrightarrow n \mid a - b$
 a est congru à b modulo n .

Théorème 8.6.1. *ch9P11Propriétés9-P11* $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$, $n \in \mathbb{N}$ on a

- 1) $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n] \Rightarrow ac \equiv bd[n]$
- 2) $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n] \Rightarrow a + c \equiv b + d[n]$
- 3) $a \equiv b[n] \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, ka \equiv kb[n]$
- 3) $a \equiv b[n] \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, a^k \equiv b^k[n]$

Théorème 8.6.2. *ch9L9LemmePremierDivBinom* Si $p \in \mathbb{N}$ est un nombre premier et $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ Alors $p \mid \binom{p}{k}$

Théorème 8.6.3. *ch9th5Petit théorème de Fermat* Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier

- Alors
- 1) $\forall a \in \mathbb{Z}, a^p \equiv a[p]$
 - 2) Si $a \wedge p = 1$ alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$

Démonstration. 1) si $p = 2$: $\forall a \in \mathbb{Z}$, a^2 et a ont la même parité d'où $a^2 \equiv a[2]$
 $p \geq 3$ (impair) : Par récurrence sur $a \in \mathbb{N}$ vu $(a+1)^p \equiv a^p + 1[p]$
 2) $\forall a \in \mathbb{Z}$, $p \mid a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$ donc si $a \wedge p = 1$ on a $a^{p-1} \equiv 1[p]$ (Lemme de Gauss) \square

Entier inversible On dit que $a \in \mathbb{Z}^*$ est inversible modulo n ($n \in \mathbb{Z}^*$) s'il existe $a' \in \mathbb{Z}$
 tel que $a \times a' \equiv 1[n]$

Théorème 8.6.4. *ch9P12PropriétéCNSInversible* Soit $a \in \mathbb{Z}^*$ alors a est inversible si et seulement si
 $a \wedge n = 1$

★ ★ ★

Chapitre 9

Structures algébriques usuelles

Contenu

9.1	Lois de composition interne	55
	Définition	55
	Partie stable	56
9.2	Structure de groupe	56
	Groupe	56
	Groupe abélien	56
	Groupe produit	56
	Sous-groupe	56
	Morphisme de groupe	57
	Image et noyau	57
	Isomorphisme de groupe	57
9.3	Structure d'anneau et de corps	57
9.3.1	Structure d'anneau	57
	Loi distributive	57
	Anneau	58
	Anneau intègre	58
	Sous-anneau	58
	Morphisme d'anneau	58
9.3.2	Structure de corps	58
	Corps	58
	Sous-corps	59

9.1 Lois de composition interne

Définition Une loi de composition interne sur un ensemble E est une application

$$* \left(\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x * y \end{array} \right)$$

- $*$ est associative si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x * y) * z = x * (y * z)$
- $*$ est commutative si $\forall (x, y) \in E^2, x * y = y * x$
- $*$ admet un élément neutre e si $\forall x \in E, e * x = x * e = x$
- $x \in E$ est dit inversible s'il existe e un élément neutre et $x' \in E : x * x' = x' * x = e$

Sous réserve d'existence, l'élément neutre et l'inverse sont uniques et on note $x' = x^{-1}$

Exemple \times sur \mathbb{Z} est une loi de composition interne associative et commutative de neutre 1.
Les seuls éléments inversibles pour \times sur \mathbb{Z} sont 1 et -1 .

Théorème 9.1.1. *ch10P1PropriétéProdInv* Soit E muni d'une loi de composition interne associative $*$.

Si x et y sont deux éléments inversibles de E

Alors $x * y$ est inversible et $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

Partie stable Soit E muni d'une loi de composition interne $*$. On dit que $F \in \mathcal{P}(E)$ est stable pour $*$ si

$$\forall (x, y) \in E \times F, x * y \in F \text{ et } y * x \in F$$

9.2 Structure de groupe

Groupe Soit un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$, on dit que $(G, *)$ est un groupe si $*$ est associative; $e \in G$ est un élément neutre pour $*$ et tout élément $x \in G$ est inversible.

Groupe abélien On dit que $(G, *)$ est un groupe abélien (ou commutatif) si $(G, *)$ est un groupe et $*$ est commutative sur G .

Groupe produit Soit $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes on appelle groupe produit de G_1 et G_2 l'ensemble $G_1 \times G_2$ muni de la loi $*$ définie par

$$\forall ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in G_1^2 \times G_2^2, (x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 *_1 y_1, x_2 *_2 y_2)$$

Théorème 9.2.1. *ch10P2PropriétéGrProdGr* $G_1 \times G_2, *)$ est un groupe.

Sous-groupe Soit $(G, *)$ un groupe. On dit que $F \subset G$ est un sous-groupe de G si $F \neq \emptyset$; F est stable par $*$ et $\forall x \in F, x^{-1} \in F$.

Théorème 9.2.2. *ch10P3PropriétéSGGr* Si F est un sous-groupe de $(G, *)$ alors $(F, *)$ est un groupe.

Théorème 9.2.3. *ch10P4PropriétéCarSG* Soit $F \subset G$ alors

F est un sous-groupe de $G \Leftrightarrow F \neq \emptyset$ et $\forall (x, y) \in F^2, x * y^{-1} \in F$

Morphisme de groupe Soit $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes et $f : G_1 \rightarrow G_2$. On dit que f est un morphisme de groupe si

$$\forall (x, y) \in G_1, f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)$$

Théorème 9.2.4. *ch10P5PropriétéImSGMorph* Soit $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes et $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupe

Alors $\begin{cases} \forall F_1 \subset G_1 \text{ sous-groupe de } G_1, f(F_1) \text{ est un sous-groupe de } G_2 \\ \forall F_2 \subset G_2 \text{ sous-groupe de } G_2, f^{-1}(F_2) \text{ est un sous-groupe de } G_1 \end{cases}$

Image et noyau Soit $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes et $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupe, on définit l'image et le noyau de f et on note respectivement $\text{Im}(f) = f(G_1)$ et $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{e_2\})$ ($\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont des sous-groupes respectifs de G_2 et G_1)

Théorème 9.2.5. *ch10P6PropositionMorphSurjInj* Soit $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes et $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupe

Alors $\begin{cases} f \text{ est surjectif} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = G_2 \\ f \text{ est injectif} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{e_1\} \end{cases}$

Isomorphisme de groupe Soit $f : (G_1, *_1) \rightarrow (G_2, *_2)$ un morphisme de groupe. On suppose que f est bijectif, alors $f^{-1} : (G_2, *_2) \rightarrow (G_1, *_1)$ est un morphisme de groupe bien défini.

On appelle isomorphisme un tel morphisme.

Démonstration. Soient $x', y' \in G_2$; soient $x, y \in G_1$ tels que $x = f^{-1}(x')$ et $y = f^{-1}(y')$, on a $f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y) = x' *_2 y'$ donc $f^{-1}(x' *_2 y') = x *_1 y = f^{-1}(x') *_1 f^{-1}(y')$ d'où cqfd \square

9.3 Structure d'anneau et de corps

9.3.1 Structure d'anneau

Loi distributive Soit E un ensemble muni de deux lois de composition interne \oplus et \otimes . On dit que \otimes est distributive par rapport à \oplus si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \begin{cases} x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \\ (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z) \end{cases}$$

Anneau Soit A un ensemble muni de deux lois de composition internes \oplus et \otimes . On dit que (A, \oplus, \otimes) est un anneau si

- (A, \oplus) est un groupe abélien
- \otimes est associative et distributive par rapport à \oplus
- Il existe un élément neutre 1_A pour \otimes

On notera maintenant de manière équivalente \otimes , \times et \cdot ainsi que \oplus et $+$

Théorème 9.3.1. *ch10P7PropriétéA*Gr* Soit $(A, +, \times)$ un anneau, si on note A^* l'ensemble des éléments inversible de A alors (A, \times) est un groupe.

Anneau intègre Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau, on dit que $(A, +, \cdot)$ est intègre si

$$\forall (a, b) \in A^2, ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Sous-anneau Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $B \subset A$ alors B est un sous-anneau de A si B est un sous-groupe de A pour $+$, $1_A \in B$ et B est stable par \times .

Théorème 9.3.2. *ch10P8PropriétéSAAnnUn* Un sous-anneau est un anneau pour les lois induites.

Morphisme d'anneau Soit $(A_1, +_1, \times_1)$ et $(A_2, +_2, \times_2)$ deux anneaux et $f : A_1 \rightarrow A_2$, Alors f est un morphisme d'anneaux si

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in A_1^2, \quad & f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y) \\ & f(x \times_1 y) = f(x) \times_2 f(y) \\ & f(1_{A_1}) = 1_{A_2} \end{aligned}$$

Théorème 9.3.3. *ch10P9PropriétésPropMorphAnn* Soit $(A_1, +_1, \times_1)$ et $(A_2, +_2, \times_2)$ deux anneaux et $f : A_1 \rightarrow A_2$ un morphisme d'anneaux. Alors $\forall a \in A_1^*, f(a) \in A_2^*$ avec $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$

9.3.2 Structure de corps

Corps Soit K un ensemble muni de deux lois de compositions interne $+$ et \times on dit que $(K, +, \times)$ est un corps si

- $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif
 - Tout élément de K différent de 0_K est inversible ($K^* = K \setminus \{0\}$)
-

Sous-corps Soit $(K, +, \times)$ un corps et $P \subset K$ alors P est un sous-corps si P est un sous-anneau de K , $P^* = P \setminus \{0\}$ et $\forall x \in P^*, x^{-1} \in P$

Théorème 9.3.4. Soit $(K, +, \times)$ un corps et $P \subset K$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) P est un sous-corps de K
- 2) $(P, +, \times)$ est un corps
- 3) P est un sous-groupe de K pour $+$ et $P \setminus \{0\}$ est un sous groupe de K^* pour \times

Théorème 9.3.5. Soit $(K, +_1, \times_1)$ un corps et $(A, +_2, \times_2)$ un anneau

Soit $f : K \rightarrow A$ un morphisme d'anneaux, alors f est injectif

★ ★ ★

Chapitre 10

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Contenu

10.1 Opérations sur les matrices	60
Définition d'une matrice	60
10.1.1 Somme et Produit matriciel	61
Somme	61
Combinaison linéaire	61
Produit	61
10.1.2 Matrice élémentaire	61
Produit de matrices élémentaires	62
10.1.3 Matrices colonnes	62
10.1.4 Matrice transposée	62
Définition	62
10.2 Opérations élémentaires	63
10.3 Systèmes linéaires	63
Système homogène	64
Système compatible	64
10.4 Anneau des matrices carrées	64
Matrice scalaire	64
Matrice symétrique	64
Matrice antisymétrique	64
Matrice diagonale	65
Matrice triangulaire	65
Matrice inversible	65

10.1 Opérations sur les matrices

Définition d'une matrice Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$
 Une matrice à n lignes et p colonnes est une application

$$M \left(\begin{array}{l} \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \mathbb{K} \\ (i, j) \mapsto M_{i,j} \end{array} \right)$$

On note

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & m_{i,j} & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

10.1.1 Somme et Produit matriciel

Somme $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}^2(\mathbb{K}),$
 $A + B = C \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad a_{i,j} + b_{i,j} = c_{i,j}$

Théorème 10.1.1. *ch11P1StructureStructMnpK* $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien et $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = 0_{n,p}$

Combinaison Linéaire Si $l \in \mathbb{N}^*, (A_i)_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n,p}^l(\mathbb{K}), (\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket} \in \mathbb{K}^l$
 $\sum_{i=1}^l \lambda_i A_i$ est une combinaison linéaire de $(A_i)_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket}$

Produit On peut effectuer le produit matriciel de A et B si A a autant de colonnes que B a de lignes. Soit donc $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), C = A.B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

Note Le produit matriciel est bilinéaire et associatif.

$$\forall (A, A') \in \mathcal{M}_{n,p}^2(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2 \quad (\lambda A + \lambda' A').B = \lambda AB + \lambda' A'B$$

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,l}(\mathbb{K}) \quad ((A.B).C) = (A.(B.C))$$

10.1.2 Matrice élémentaire

Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont les matrices $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ dont tout le coefficients sont nuls celui en ligne i et colonne j qui vaut 1.

$$\forall (k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \quad E_{i,j}(k, l) = \delta_{i,k} \delta_{j,l}$$

Théorème 10.1.2. *ch11P2PropriétéCombLinEij* Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une combinaison linéaire de matrices élémentaires.
De plus, cette décomposition est unique.

Démonstration. $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donc $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} E_{i,j}$

et $(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{i,j} E_{i,j})(k, l) = m_{k,l}$ donc $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} E_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a'_{i,j} E_{i,j}$ si et seulement si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ on a $a_{i,j} = a'_{i,j}$ □

Produit de matrices élémentaires Si $(E_{i,j}^{n,p})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$ sont les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(E_{k,l}^{p,q})_{(k,l) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket}$ celles de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

$$E_{i,j}^{n,p} \times E_{k,l}^{p,q} = \delta_{j,k} E_{i,l}^{n,q}$$

10.1.3 Matrices colonnes

Une matrice colonne est $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Théorème 10.1.3. *ch11P3Produit matriciel AXProdMatCol* Si $(A, X) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

Alors AX est une combinaison linéaire des colonnes de A .

Démonstration.

$$A = (C_1 \quad \cdots \quad C_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = (C_1 \quad \cdots \quad C_p) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Y$$

avec $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_j = \sum_{k=1}^p a_{j,k} x_k$ donc $Y = \sum_{k=1}^p x_k C_k$ □

10.1.4 Matrice transposée

Définition La transposée de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée A^T est la matrice $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad a_{i,j} = b_{j,i}$$

Théorème 10.1.4. *ch11P5CalculsCalcsTranspo* $\rightarrow \forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$
 $\rightarrow \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (AB)^T = B^T A^T$

Démonstration.

$$\rightarrow \text{Si } \begin{matrix} A = (a_{i,j}) \\ B = (b_{i,j}) \end{matrix} \quad \begin{matrix} A^T = (a'_{i,j}) \\ B^T = (b'_{i,j}) \end{matrix} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$$

$$\begin{aligned} (\lambda A + \mu B)^T(i, j) &= (\lambda A + \mu B)(j, i) = \lambda A(j, i) + \mu B(j, i) \\ &= \lambda(a'_{i,j}) + \mu(b'_{i,j}) = \lambda A^T(i, j) + \mu B^T(i, j) \end{aligned}$$

$$\rightarrow A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}), C = AB = (c_{i,j}) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$$

$$C^T(i, j) = c_{j,i} = \sum_{k=1}^p a_{k,i} b_{j,k} = \sum_{k=1}^p b'_{i,k} a'_{k,j} = B^T A^T(i, j)$$

□

10.2 Opérations élémentaires

Pour $i \neq j$ des indices de lignes ou colonnes on considère les 4 opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{array}{ll} L_i \leftrightarrow L_j & L_i \leftarrow L_i + L_j \\ L_i \leftarrow \lambda L_i (\lambda \neq 0) & L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \end{array}$$

Théorème 10.2.1. *ch11P6PropositionEquivOpElemMat* Chacunes des opérations ci-dessus sur les lignes (resp. les colonnes) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ se traduit par la multiplication à gauche (resp. à droite) par la matrice obtenue en effectuant cette opération sur I_n (resp. I_p)

ex :

$$\begin{array}{l} L_i \leftrightarrow L_j : \\ L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j : \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & & C_i & \dots & C_j & & C_p \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \dots & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & & & & 1 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & & C_i & \dots & C_j & & C_p \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \dots & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}$$

Théorème 10.2.2. *ch11L1LemmeProdMatDistrib* $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \forall (B, C) \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}))^2$ on a $A(B + C) = AB + AC$

10.3 Systèmes linéaires

On considère le système linéaire d'inconnues $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p$ suivant :

$$(S) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

En notant $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$;

$B = (b_i)_{i \in \llbracket 1,n \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$; $X = (x_j)_{j \in \llbracket 1,p \rrbracket} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ on a

$$(S) \Leftrightarrow AX = B$$

Système homogène Le système homogène associé à (S) est :

$$(S_0) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow AX = 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$$

Système compatible Un système est dit compatible s'il admet au moins une solution.

Théorème 10.3.1. *ch11P7PropriétéCompBCombLinColASi* (S) s'écrit matriciellement $AX = B$
 Alors (S) est compatible si B est une combinaison linéaire des colonnes de A .

Théorème 10.3.2. *ch11P8Structure* Le l'ensemble des solutions d'un système compatible $AX = B$ sont les matrices $X_0 + Y$
 où X_0 est une solution particulière du système et Y décrit l'ensemble des solutions du système associé.

10.4 Anneau des matrices carrées

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices carrée d'ordre n

Cet anneau n'est pas intègre.
Théorème 10.4.1. *ch11P9PropriétéMnKAnneau* $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot)$ est un anneau non commutatif si $n \geq 2$

Matrice scalaire On appelle matrice scalaire d'ordre n toute matrice de la forme

$$A = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix} \lambda \in \mathbf{K}$$

Matrice symétrique On appelle matrice symétrique d'ordre n toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A^T = A$ et on note $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n

Matrice antisymétrique On appelle matrice antisymétrique d'ordre n toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A^T = -A$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n

Théorème 10.4.2. *ch11P10PropriétéA=U+V* $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \exists (U, V) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ unique tel que $A = U + V$

Théorème 10.4.3. *ch11P11PropositionIdRemarq* $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbf{K})$ tel que $A.B = B.A$ Alors on a

- 1) $\forall p \in \mathbf{N}, A^p - B^p = (A - B) \sum_{k=1}^{p-1} A^k B^{p-k}$
- 2) $\forall p \in \mathbf{N}, (A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$

Théorème 10.4.4. *ch11L2LemmeMScalCommut* Les matrices scalaires commutent avec toutes les matrices.

Matrice diagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite diagonale si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow A(i, j) = 0$

Théorème 10.4.5. *ch11P12PropriétéDiagoStable* Le produit de deux matrices diagonales d'ordre n est une matrice diagonale d'ordre n ; en particulier,

$$\text{si } A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), A = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}; \forall p \in \mathbf{N}, A^p = \begin{pmatrix} d_1^p & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n^p \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure)

si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i > j \Rightarrow A(i, j) = 0$ (resp. $i < j \Rightarrow A(i, j) = 0$)

On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbf{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbf{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures)

Théorème 10.4.6. *ch11P13PropriétéMTriStable* $\forall n \in \mathbf{N}^*, \mathcal{T}_n^+(\mathbf{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbf{K})$ sont stable par produit matriciel.

Matrice inversible On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A.B = B.A = I_n$ et on note $\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ le groupe des matrices inversibles d'ordre n .

Théorème 10.4.7. *ch11P14PropriétéTranspoInversible* $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K}) \Rightarrow A^T \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Théorème 10.4.8. *ch11P15PropriétéMOpéElemInvLes matrices correspondantes aux opérations élémentaires sont inversibles.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 ; \begin{array}{l} P_n(i, j) = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} \\ T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} \\ D_n(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i} \end{array} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$$

Théorème 10.4.9. *ch11P15cCorollaireOpéElemPresInvLes opérations élémentaires préservent l'inversibilité.*

Théorème 10.4.10. *ch11th1ThéorèmeMTriInvCNSndUne matrice triangulaire est inversible si et seulement si tout ses coefficients diagonaux sont non nuls.*

Démonstration. \rightarrow voir Chapitre 15

□

Théorème 10.4.11. *ch11P16Propriété11-P16Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors*
 $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \left(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), (AX = O \Rightarrow X = 0) \right)$

Théorème 10.4.12. *ch11P16cCorollaireMDiagInvCNSUne matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Son inverse est alors la matrice diagonale des inverses des coefficients diagonaux de A .*

Théorème 10.4.13. *ch11P17PropriétéInvMatTriTriSi une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible alors son inverse est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure)*

★ ★ ★

Chapitre 11

Polynômes et fractions rationnelles

Contenu

11.1 Anneau des polynômes à 1 indéterminée	67
Anneau des polynômes $(\mathbb{K}[X], +, \times)$	67
11.1.1 Degré d'un polynôme	68
Degré de la somme et du produit	68
Ensemble	68
Intégrité de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$	68
11.1.2 Composition de polynômes	68
Degré du polynôme composé	69
Coefficient dominant	69
11.2 Divisibilité et Division Euclidienne	69
11.2.1 Divisibilité des polynômes	69
Propriété	69
11.2.2 Polynômes associés	69
\rightarrow	69
11.2.3 Division euclidienne polynômiale	69
11.3 Fonctions polynômiales et racines	70
11.3.1 Fonction polynômiale associée	70
Calculs	70
11.3.2 Racines du polynôme	70
Nombre de racines	71
Corollaire : Caractérisation du polynôme nul	71
11.3.3 Ordre de multiplicité	71
\rightarrow	71
11.3.4 Méthode de Horner pour l'évaluation polynômiale	71
11.3.5 Polynôme scindé	72
11.4 Dérivation	72

11.1 Anneau des polynômes à 1 indéterminée

Anneau des polynômes $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ Soit $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites à valeurs dans \mathbb{K} stationnaires nulles.

$$\forall u \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, (n \leq n_0 \Rightarrow u_n = 0)$$

On définit une addition et une multiplication :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)(n) = u_n + v_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (uv)(n) = \sum_{k=0}^n u(k)v(n-k)$$

On considère la suite $X = (0, 1, 0, 0, \dots)$ et on a alors $X^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ et $X^0 = 1_K = (1, 0, 0, \dots)$ On peut noter $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ comme $\mathbb{K}[X]$.

$$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$$

$(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}[X], +, \times)$ est l'anneau des polynômes.

Utilisation $(1+X)^{n+m} = (1+X)^n(1+X)^m$

$$\sum_{l=0}^{n+m} \binom{n+m}{l} X^l = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} X^j \quad \text{Qui donne}$$

$$\binom{n+m}{l} = \sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k}$$

11.1.1 Degré d'un polynôme

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$ on appelle degré de P noté $\deg(P)$ ou $d^\circ(P)$:

$$\deg(P) = \max\{n \in \mathbb{N} | a_n \neq 0\} \quad (P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k)$$

avec par convention le polynôme nul de degré $-\infty$.

Degré de la somme et du produit Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$

$$\deg(P+Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$$

égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

Ensemble Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus n .

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$$

Remarque $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (P, Q) \in (\mathbb{K}_n[X])^2 \quad \lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$$

Intégrité de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$

$$\begin{aligned} PQ = 0 & \Leftrightarrow \deg(PQ) = -\infty \\ & \Leftrightarrow \deg(P) + \deg(Q) = -\infty \\ & \Leftrightarrow \deg(P) = -\infty \text{ ou } \deg(Q) = -\infty \\ & \Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0 \end{aligned}$$

11.1.2 Composition de polynômes

Si $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k$$

Degré du polynôme composé Si $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_0[X]$

$$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$$

Coefficient dominant Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$

$a_{\deg P}$ s'appelle le coefficient dominant de P . Si il vaut 1 P est dit unitaire.

11.2 Divisibilité et Division Euclidienne

11.2.1 Divisibilité des polynômes

Si $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$

On dit que A divise B si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = AQ$

On note alors $A|B$ (sinon $A \nmid B$)

Propriété Soit $A \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ $A|B \Rightarrow \deg A \leq \deg B$

Preuve $A = BQ \Rightarrow \deg A = \deg B + \deg Q \geq \deg B$

11.2.2 Polynômes associés

$(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ est un couple de polynômes associés si

$$A|B \quad B|A$$

$\rightarrow (A, B)$ est un couple de polynômes associés si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : A = \lambda B$$

11.2.3 Division euclidienne polynômiale

Si $B \neq 0$, $B = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ avec $b_m \neq 0$

Si $A \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_{m-1}[X]$ il existe $(Q_0, R_0) \in (\mathbb{K}[X])^2$: $A = BQ_0 + R_0$ et $\deg R_0 < \deg A$

(Si $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ il suffit de considérer $Q_0 = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}$)

Théorème de la division euclidienne polynômiale.

Si $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ alors pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$

$$\exists (Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2 : \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$$

De plus Q et R sont uniques appelés quotient et reste de la division euclidienne de A par B .

Démonstration. Existence Récurrence sur $\deg A$

Initialisation Si $\deg A < \deg B$

$$A = B \times 0 + A = BQ + R$$

Hérédité On suppose la propriété vraie pour tout polynôme de degré $k < n$ avec $n \geq \deg B$. D'après la remarque préliminaire on a :

$$\exists (Q_0, R_0) \in (\mathbb{K}[X])^2 : A = BQ_0 + R_0 \quad \deg R_0 < \deg A = n$$

d'après l'hypothèse de récurrence $\exists(Q_1, R_1) \in (\mathbb{K}[X])^2$
 $R_0 = BQ_1 + R_1$ avec $\deg R_1 < \deg B$ soit

$$A = B(Q_0 + Q_1) + R_1$$

Unicité

Supposons $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ avec $\deg R_1, \deg R_2 < \deg B$
 alors $B(Q_1 - Q_2) = R_1 - R_2$ donc

$$\deg B + \deg(Q_1 - Q_2) = \deg(R_1 - R_2) \leq \max\{\deg R_1, \deg R_2\} < \deg B$$

d'où $\deg(Q_1 - Q_2) = -\infty$ soit $Q_1 = Q_2$ puis $R_1 = R_2$ □

11.3 Fonctions polynômiales et racines

11.3.1 Fonction polynômiale associée

À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ on peut associer la fonction polynômiale

$$\tilde{P} \left(\begin{array}{c} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k \end{array} \right)$$

Calculs $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$

$$\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda \tilde{P} + \mu \tilde{Q}$$

$$\widetilde{PQ} = \tilde{P}\tilde{Q} \quad \widetilde{P \circ Q} = \tilde{P} \circ \tilde{Q}$$

11.3.2 Racines du polynôme

$a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si

$$\tilde{P}(a) = 0$$

On notera ensuite $\mathcal{Z}(P)$ l'ensemble des racines (ou zéros) de P .

Divisibilité par $(X - a)$ (1). $\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ distincts

$$\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathcal{Z}(P) \Leftrightarrow \prod_{i=1}^n (X - a_i) | P$$

Démonstration. Récurrence sur n : $P(n)(??)$

Initialisation $(x - a) | P$ si et seulement si $\exists Q : P = (X - a)Q$ alors

$$\tilde{P}(a) = \widetilde{(X - a)(a)}\tilde{Q}(a) = 0$$

Si $a \in \mathcal{Z}(P)$ et $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$

$$\begin{aligned} P &= P - P(a) = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k - \sum_{k=0}^n \alpha_k a^k = \sum_{k=0}^n \alpha_k (X^k - a^k) \\ &= (X - a) \sum_{k=0}^n \alpha_k \sum_{l=0}^{k-1} a^{k-1-l} X^l = (X - a)Q \end{aligned}$$

Hérédité Supposons $P(n)$ et considérons $\{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\} \in \mathbb{K}^{n+1}$ distincts
Par l'hypothèse de récurrence on a

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = \left(\prod_{i=1}^n (X - a_i) \right) Q$$

$$a_{n+1} \in \mathcal{Z}(P) \Leftrightarrow \tilde{P}(a_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow \left(\prod_{i=1}^n (a_{n+1} + 1 - a_i) \right) \tilde{Q}(a_{n+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} \in \mathcal{Z}(Q) \Leftrightarrow X - a_{n+1} | Q$$

□

Nombre de racines Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

dem. Par récurrence si $\deg\left(\prod_{i=1}^n (X - a_i)\right) = n$ et $P \neq 0$

$$\prod_{i=1}^n (X - a_i) | P \Rightarrow n \leq \deg P$$

Corollaire : Caractérisation du polynôme nul Le seul polynôme admettant une infinité de racines ou $n + 1$ racines est le polynôme nul.

appli. Soit $E = \{P \in \mathbb{K}[X] | \exists T \in \mathbb{K}^* : \forall x \in \mathbb{K}, \tilde{P}(x + T) = \tilde{P}(x)\}$, déterminons E .
 $\mathbb{K}_0[X] \subset E$

Réciproquement si $\P \in E$ T - périodique ($T \neq 0$) et $Q = P - \tilde{P}(0)$ on a $T\mathbb{Z} \subset \mathcal{Z}(P)$
d'où $P - \tilde{P}(0) = 0$ donc $P = \tilde{P}(0) \in \mathbb{K}_0[X]$

En conclusion on a $E = \mathbb{K}_0[X]$.

11.3.3 Ordre de multiplicité

$$\forall P \in \mathbb{K}[X]$$

Si $a \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$ et $(X - a)^k | P$ on dit que a est une racine de P d'ordre de multiplicité au moins k .

Si de plus $(X - a)^{k+1} \nmid P$ alors a est une racine de P d'ordre de multiplicité exactement k .

→ a est une racine de P d'ordre de multiplicité k si et seulement si $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - a)^k Q \text{ et } a \notin \mathcal{Z}(Q)$$

11.3.4 Méthode de Horner pour l'évaluation polynômiale

Soit $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $x_0 \in \mathbb{K}$ on veut déterminer $\tilde{P}(x_0)$.

On considère la suite $\begin{cases} u_0 = a_n \\ u_{k+1} = u_k x_0 + a_{n+1-k} \end{cases}$

$$u_k = a_n x_0^k + \dots + a_{n-k} \text{ et } u_n = \tilde{P}(x_0)$$

11.3.5 Polynôme scindé

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1.

Théorème 11.3.1. *th12Formule de VietefViete*

Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé

Soit P un polynôme scindé, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = \lambda \prod_{k=1}^n (X - x_k)$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \mid a_n \neq 0 & \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \lambda \\ a_{n-l} = \lambda \prod_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq n} \sum_{r=1}^l (-x_{i_r}) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \lambda \\ \prod_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq n} \sum_{r=1}^l x_{i_r} = \frac{(-1)^l a_{n-l}}{a_n} \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration. Faire arbre □

11.4 Dérivation

Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ on appelle polynôme dérivé de P

$$P' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} X^k$$

puis par récurrence avec $\forall n \in \mathbb{N} \quad P^{(n+1)} = (P^{(n)})' \quad P^{(n)} = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k X^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+n)(k+n-1) \cdots (k+1) a_{k+n} X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k X^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n} X^k$

Calcul : $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' \\ & \rightarrow (PQ)' = P'Q + PQ' \quad \rightarrow (P \circ Q)' = P' \circ Q + P \times Q' \end{aligned}$$

Démonstration. $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \quad Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$

$$\rightarrow (\lambda P + \mu Q)' = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} k (\lambda a_k + \mu b_k) X^{k-1}$$

$$= \lambda \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1} \right) + \mu \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k b_k X^{k-1} \right) = \lambda P' + \mu Q'$$

$$\rightarrow PQ = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k \quad c_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \quad \text{donc} \quad (PQ)' = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) c_{k+1} X^k$$

$$\text{avec} \quad P' = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} X^k \quad \text{et} \quad Q' = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) b_{k+1} X^k$$

$$PQ' = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k X^k \quad d_k = \sum_{l=0}^k a_l (k+1-l) b_{k+1-l}$$

$$P'Q = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k X^k \quad \delta_k = \sum_{l=0}^k (l+1) a_{l+1} b_{k-l}$$

$$d_k + \delta_k = \sum_{l=0}^k a_l (k+1-l) b_{k+1-l} + \sum_{l=0}^k (l+1) a_{l+1} b_{k-l}$$

$$= a_0 (k+1) b_{k+1} + (k+1) a_{k+1} b_0 + \sum_{l=1}^k a_l (k+1-l) b_{k+1-l} + \sum_{l=1}^k l a_l b_{k+1-l}$$

$$= (k+1) \sum_{l=0}^{k+1} a_l b_{k+1-l} = (k+1) c_{k+1} \quad \square$$

Chapitre 12

Analyse asymptotique

Chapitre 13

Espaces vectoriels et applications linéaires

Chapitre 14

Matrices II

Contenu

14.1 Matrices et applications linéaires	75
14.1.1 Matrice d'une application linéaire dans des bases	75
Matrice représentative d'un vecteur	75
Matrice représentative d'une famille	76
Matrice représentative d'une application linéaire	76
14.1.2 Application linéaire canoniquement associée	77
Définition	77
Noyau, image et rang	77
14.1.3 Systèmes linéaires	77
Système de Cramer	78
14.2 Changement de bases	78
Matrice de passage	78
14.3 Équivalence et similitude	79
14.3.1 Matrices équivalentes et rang	79
Équivalence	79
Matrice extraite	79
Matrice échelonnée	80
14.3.2 Matrices semblables et trace	80
Matrices semblables	80
Trace	80
Trace d'un endomorphisme	81

14.1 Matrices et applications linéaires

14.1.1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Matrice représentative d'un vecteur Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On considère $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. La matrice représentative de x dans la base B

est la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{Mat}_B(x) \in \mathcal{M}_n(K)$

Matrice représentative d'une famille Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On considère (x_1, \dots, x_p) une famille de p vecteurs de E . La matrice représentative de cette famille dans cette base est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ notée $\text{Mat}_B(x_1, \dots, x_p)$ dont la j^{e} colonne est donnée par $\text{Mat}_B(x_j)$, $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$

Matrice représentative d'une application linéaire Soit E et F deux \mathbf{K} espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n avec $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

On considère $u \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice représentative de u dans les bases e et f est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ notée $\text{Mat}_{e,f}(u)$ définie par $\text{Mat}_{e,f}(u) = \text{Mat}_f(u(e_1), \dots, u(e_p))$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ on note $\text{Mat}_e(u) = \text{Mat}_{e,e}(u) = \text{Mat}_e(u(e_1), \dots, u(e_n))$

Théorème 14.1.1. *ch15P1PropositionMatIsoEV* Si E et F sont des \mathbf{K} -ev de dimensions p et n rapportés à des bases e et f , alors

$\Phi \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_{e,f}(u) \end{array} \right)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Théorème 14.1.2. *ch15P1cCorollaireIsoInduitBaseLe* Le choix d'une base B sur E induit un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$:

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_B(u) \end{array} \right)$$

Théorème 14.1.3. *ch15P2PropositionApLinMat* Soit E, F deux \mathbf{K} -ev de dimensions p et n rapportés à des bases e et f

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$; $x \in E$, on considère $y = u(x) \in F$ et on note $X = \text{Mat}_e(x)$; $Y = \text{Mat}_f(y)$; $A = \text{Mat}_{e,f}(u)$ Alors $Y = AX$

Théorème 14.1.4. *ch15P3PropositionMatComposeeE* E de dimension p et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

F de dimension q et $f = (f_1, \dots, f_q)$ une base de F .

G de dimension n et $g = (g_1, \dots, g_n)$ une base de G .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$; $A = \text{Mat}_{e,f}(u)$, $B = \text{Mat}_{f,g}(v)$

Alors $C = \text{Mat}_{e,g}(v \circ u) = AB$

Théorème 14.1.5. *ch15th1ThéorèmeEndoInvMatInv* Soit E et F deux \mathbf{K} -ev de dimension finie n rapportés à des bases e et f

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on a (u est un isomorphisme) $\Leftrightarrow (\text{Mat}_{e,f}(u)$ est inversible)

Dans ce cas on a $(\text{Mat}_{e,f}(u))^{-1} = \text{Mat}_{e,f}(u^{-1})$

14.1.2 Application linéaire canoniquement associée

Définition Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ on appelle Application linéaire canoniquement associée à A l'unique application linéaire, notée u_A telle que $\text{Mat}_{C(\mathbf{K}^p), C(\mathbf{K}^n)}(u_A) = A$

Noyau, image et rang Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ on appelle

- noyau de A noté $\text{Ker}(A)$ défini par $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(u_A)$
 - image de A notée $\text{Im}(A)$ définie par $\text{Im}(A) = \text{Im}(u_A)$
 - rang de A noté $\text{rg}(A)$ défini par $\text{rg}(A) = \text{rg}(u_A)$
-

Théorème 14.1.6. *ch15P4PropriétéImKerColLign* Les colonnes de A engendrent $\text{Im}(A)$ et ses lignes donnent un système d'équation de $\text{Ker}(A)$

Théorème 14.1.7. *ch15P5PropositionAInvCNS* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ alors $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K}) \Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0\} \Leftrightarrow \mathbf{K}^n = \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$

Théorème 14.1.8. *ch15P5cCorollaireMatTriInvCNS* Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{T}^+(\mathbf{K})$

\Leftarrow Si les coefficients $(a_{jj})_{1 \leq j \leq n}$ sont tous non nuls alors (C_1, \dots, C_n) est une famille libre donc une base de \mathbf{K}^n d'où $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$

\Rightarrow Par contraposée si $\exists k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_{k_0, k_0} = 0$ alors $\dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_{k_0})) \leq k_0 - 1$ donc $\dim A \leq n - 1$ d'où $A \notin \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ \square

Théorème 14.1.9. *ch15P6Propriété15-P6* Si E est un \mathbf{K} -ev de dimension n rapporté à une base B

Soit (x_1, \dots, x_p) une famille de p vecteurs de E

Alors $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim(\text{Vect}(\text{Mat}_B(x_1), \dots, \text{Mat}_B(x_p)))$

$= \dim(\text{Im}(X_1 \cdots X_p)) = \text{rg}(u_A)$ Où $A = (X_1 \ X_2 \cdots X_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

Théorème 14.1.10. *ch15P7PropriétéInvDG* Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversible à gauche ou à droite est inversible.

14.1.3 Systèmes linéaires

$$(S) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases} \Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Résoudre le système homogène associé à (S) c'est déterminer le noyau de A
 Par le théorème du rang, la dimension de l'espace des solutions du système homogène est donnée par $p - \text{rg}(A)$ ($\geq p - n$)

L'ensemble des solutions de (S) a une structure de sous-espace affine de \mathbf{K}^p si il est compatible, soit si X_0 est une solution particulière

$$S = X_0 + \text{Ker}(A) \subset \mathbf{K}^p$$

Système de Cramer Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ alors le système (S) est compatible et admet une unique solution $A^{-1} \times B$.

14.2 Changement de bases

Matrice de passage On appelle matrice de passage d'une base e à une base e' d'un même espace vectoriel E et on note $P_e^{e'}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ représentative des vecteurs de e' dans la base e

$$P_e^{e'} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, e'_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$$

Théorème 14.2.1. *ch15P8PropriétéMatPassInv* Si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice de passage de e à e' alors P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de e' à e .

Théorème 14.2.2. *ch15P9PropriétéMatPassUtil* Soit E un \mathbf{K} -ev rapporté successivement à des bases e et e'
 On considère $x \in E$ avec $X = \text{Mat}_e(x)$; $X' = \text{Mat}_{e'}(x)$ et $P = P_e^{e'}$
 Alors $X = P \times X'$

Théorème 14.2.3. *ch15th2ThéorèmeMatPassApL* Soit E et F deux \mathbf{K} -ev de dimensions finies p et n
 rapporté successivement à des bases e, e' et f, f' . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$
 On note $A = \text{Mat}_{e,f}(u)$; $A' = \text{Mat}_{e',f'}(u)$ et $Q = P_f^{f'}$; $P = P_e^{e'}$
 Alors $A' = Q^{-1} \times A \times P$

Démonstration. Soit $(x, y) \in E \times F$ tel que $y = u(x)$ alors on a $Y = AX \Leftrightarrow Y' = A'X'$ avec $Y = QY'$; $X = PX'$
 Ainsi $Y = AX \Leftrightarrow QY' = APX' \Leftrightarrow Y' = Q^{-1}APX' \Leftrightarrow A' = Q^{-1}AP$ □

Théorème 14.2.4. *ch15th2cCorollaireMatPassEndo* Soit E un \mathbf{K} -ev de dimension n rapporté à deux bases e et e'
 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $A = \text{Mat}_e(u)$; $A' = \text{Mat}_{e'}(u)$ et $P = P_e^{e'}$
 Alors $A' = P^{-1} \times A \times P$

14.3 Équivalence et similitude

14.3.1 Matrices équivalentes et rang

Théorème 14.3.1. *ch15P10PropositionEquiJr* Soit E et F deux \mathbf{K} -ev de dimensions p et n et $u \in \mathcal{L}(E, F)$

Soit $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si $rg(u) = r$ alors il existe un couple de base (e, f)

tel que $Mat_{e,f}(u) = J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

Démonstration. D'après la forme géométrique du théorème du rang u induit un isomorphisme de S sur $Im(u)$ où S est un supplémentaire de $Ker(u)$

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E adaptée à $Ker(u) \oplus S$ avec (e_1, \dots, e_r) base de S . On a alors $(f_1 = u(e_1), \dots, f_r = u(e_r))$ une base de $Im(u)$ que l'on complète en une base de F \square

Équivalence Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont dites équivalentes

si il existe $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbf{K})$ tels que $B = Q^{-1}AP$. On note $A \sim B$

Théorème 14.3.2. *ch15P11PropositionCNSrgr* Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de rang r si et seulement $A \sim J_r$.

Théorème 14.3.3. *ch15th3ThéorèmeRgInvTranspo* Le rang d'une matrice est invariant par transposition.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$; ${}^t(J_r^{n,p}) = J_r^{p,n}$

On a alors $rg(A) = r \Leftrightarrow \exists (Q, P) \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{GL}_p(\mathbf{K}) : A = Q^{-1}J_r^{n,p}P$

$\Leftrightarrow {}^tA = \underbrace{{}^tP}_{\in \mathcal{GL}_p(\mathbf{K})} \times {}^t(J_r^{n,p}) \times \underbrace{{}^t(Q^{-1})}_{\in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})} = Q'^{-1}J_r^{p,n}P' \Leftrightarrow rg({}^tA) = r$ \square

Matrice extraite Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ on appelle matrice extraite de A toute matrice obtenue à partir de A par suppression de lignes et/ou colonnes de A .

$\left(A' = (a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \text{ où } I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } J \subset \llbracket 1, p \rrbracket \right)$

Théorème 14.3.4. *ch15P12PropriétéRgExtrait* Si A' est extraite de A alors on a $rg(A') \leq rg(A)$

Théorème 14.3.5. *ch15P13Proposition15-P14* Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ alors $rg(A) = \max\{k \in \mathbf{N} \mid A' \in \mathcal{GL}_k(\mathbf{K}) \text{ et } A' \text{ extraite de } A\}$

Théorème 14.3.6. *ch15P14PropriétéOpeElemPresImKer* Les opérations élémentaires sur les colonnes préservent l'image.
Celles sur les lignes préservent le noyau.

Théorème 14.3.7. *ch15P14cCorollaireOpeElemPresRg* Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A conservent le rang de A .

Matrice échelonnée Une matrice échelonnée en ligne est une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ telle que si on note $l_i(A) = \min\{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid a_{i,j} \neq 0\} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (par convention $\min \emptyset = +\infty$)
Alors $(l_i(A))_{1 \leq i \leq n}$ est une suite croissante.

14.3.2 Matrices semblables et trace

Matrices semblables Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont dites semblables s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
Deux matrices semblables sont équivalentes.

Théorème 14.3.8. *ch15P15PropriétéSemblCNS* Deux matrices A et B sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme d'un \mathbf{K} -ev de dimension finie dans deux bases différentes.

Trace Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ on appelle trace de A le scalaire $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

Théorème 14.3.9. *ch15P16PropriétéTrFLin* $tr \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^*$ avec $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$, $tr(AB) = tr(BA)$

Théorème 14.3.10. *ch15th4ThéorèmeTrInvSim* La trace est invariante par similitude.
 $\left(\begin{array}{l} \forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2, \\ (\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K}) \text{ telle que } B = P^{-1}AP) \Rightarrow (tr(B) = tr(A)) \end{array} \right)$

Démonstration. Soit un tel couple $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$
Alors $tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(APP^{-1}) = tr(A)$

□

Trace d'un endomorphisme Si u est un endomorphisme d'un \mathbf{K} -ev de dimension finie E , on appelle trace de u le scalaire $tr(u) = tr(Mat_e(u))$ où e est une base de E .

Théorème 14.3.11. *ch15P17PropriétéTrFLinEndo* $tr \in (\mathcal{L}(E))^*$ avec $\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$, $tr(uv) = tr(vu)$

Théorème 14.3.12. *ch15P18PropositionTrProjecteur* Soit E un \mathbf{K} -ev de dimension finie et p un projecteur de E
Alors $tr(p) = rg(p)$

★ ★ ★

Chapitre 15

Groupe symétrique et déterminant

Chapitre 16

Intégration

Contenu

16.1 Continuité uniforme	83
Définition	83
16.2 Intégrations des fonctions en escalier	84
16.2.1 Subdivision d'un segment	84
Définition	84
Subdivision adaptée	84
Intégrale d'une fonction en escalier	84
16.3 Fonctions continues par morceaux	85
16.3.1 Généralités	85
Définition	85
16.3.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux	85
Définition	85
Valeur moyenne	86
16.4 Sommes de Riemman	87
Définition	87
Somme de Riemman associée	87
16.5 Lien entre intégrales et primitives	87
16.6 Formules de Taylor globales	88

Dans tout le chapitre, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$

16.1 Continuité uniforme

Définition Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f est dite uniformément continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in I^2, (|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

Théorème 16.1.1. *ch17P1PropriétéLipschImplUC0* Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on a

- 1) Si f est lipschitzienne sur I alors f est uniformément continue sur I
- 2) Si f est uniformément continue sur I alors f est continue sur I

Théorème 16.1.2. *ch17th1* **Théorème de Heine** *ThHeine* Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$
Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration. Par l'absurde :

On suppose $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists (x_n, y_n) \in [a, b]^2$ tq $(|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass $\exists \varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ et $\psi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ extractrices tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n} l \in [a, b]$ et $y_{\psi(n)} \xrightarrow{n} l' \in [a, b]$ donc $|x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\psi(\psi(n))}| \leq \frac{1}{\varphi(\psi(n))} \leq \frac{1}{n}$ d'où $l = l'$

Ainsi par continuité de f on a $f(x_{\varphi(\psi(n))}) - f(y_{\psi(\psi(n))}) \xrightarrow{n} f(l) - f(l') = 0 > \varepsilon > 0 \quad \square$

16.2 Intégrations des fonctions en escalier

On note $\mathcal{E}f]([a, b], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans \mathbf{R} .

16.2.1 Subdivision d'un segment

Définition Une subdivision de $[a, b]$ est une suite finie strictement croissante $\sigma = (c_0 = a < c_1 < \dots < c_n = b)$.

On note $\delta(\sigma)$ le pas de σ définit par $\delta(\sigma) = \max_{0 \leq i \leq n-1} (c_{i+1} - c_i)$.

On dit que σ est à pas constant si la suite $(c_i)_{0 \leq i \leq n}$ est arithmétique.

Soit σ' une subdivision de $[a, b]$, on dit que σ' est plus finie que σ si tout point de σ est un point de σ' . On notera ici $\sigma \subset \sigma'$.

Subdivision adaptée Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction en escalier sur $[a, b]$, on considère $\sigma = (c_0, \dots, c_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On dit que σ est adaptée à f si

$$\forall i \in [0, n-1], \exists \lambda_i \in \mathbf{R} : f|_{[c_i, c_{i+1}[} = \widetilde{\lambda_i}$$

Théorème 16.2.1. *ch17P2PropositionEscaStable* $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$ est stable par somme, produit et passage à la valeur absolue.

Intégrale d'une fonction en escalier Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$; soit $\sigma = (c_0, \dots, c_n)$ une subdivision adaptée à f .

On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le scalaire

$$\int_{[a, b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (c_{i+1} - c_i)$$

Théorème 16.2.2. *ch17P3Propriétés17-P3* Soit f et g des fonctions en escalier sur $[a, b]$

- 1) Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_{[a, b]} f \geq 0$
- 2) Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x)$ alors $\int_{[a, b]} f \geq \int_{[a, b]} g$
- 3) $\left| \int_{[a, b]} f \right| \leq \int_{[a, b]} |f| \leq (b-a) \sup_{[a, b]} |f|$

Théorème 16.2.3. *ch17P4PropositionChaslesEsc* Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $c \in [a, b]$ alors
 $\int_{[a, b]} f = \int_{[a, c]} f + \int_{[c, b]} f$

16.3 Fonctions continues par morceaux

16.3.1 Généralités

Définition Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe $\sigma = (c_0, \dots, c_n)$ une subdivision de $[a, b]$ telle que $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f|_{]c_i, c_{i+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité en c_i et c_{i+1} .

On note \mathcal{C}_{pm}^0 l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Théorème 16.3.1. *ch17P5PropriétéCpmBornee* Si $f \in \mathcal{C}_{pm}^0$ alors f est bornée sur $[a, b]$

Théorème 16.3.2. *ch17L1LemmeCpmEntreEsc* Si $f \in \mathcal{C}_{pm}^0$ alors $\forall \varepsilon > 0, \exists (\varphi, \psi) \in (\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}))^2$ telles que
 $\forall x \in [a, b], \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$

Théorème 16.3.3. *ch17P6PropriétéCpmStable* \mathcal{C}_{pm}^0 est stable par produit, combinaison linéaire et valeur absolue.

16.3.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0$

On note $\mathcal{I}^+(f) = \left\{ \int_{[a, b]} \psi \mid \psi \text{ en escalier sur } [a, b] \text{ et } f \leq \psi \right\}$

Alors $\inf(\mathcal{I}^+(f))$ existe, on appelle intégrale de f sur $[a, b]$ notée $\int_{[a, b]} f$ cette valeur.

Rq : $\int_{[a, b]} f = \inf(\mathcal{I}^+(f)) = \sup(\mathcal{I}^-(f))$

Théorème 16.3.4. *ch17P7PropriétéLineInt* Soit $(f, g) \in (\mathcal{C}_{pm}^0)^2$; $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors
 $\int_{[a, b]} \alpha f + \beta g = \alpha \int_{[a, b]} f + \beta \int_{[a, b]} g$

Théorème 16.3.5. *ch17th2Théorèmes opératoiresThOperInt* Soit $f, g \in \left(C_{pm}^0\right)^2$ on a

- 1) Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$
- 2) Si $\forall x \in [a, b], g(x) \geq f(x)$ alors $\int_{[a,b]} g \geq \int_{[a,b]} f$
- 3) $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Démonstration. Clair d'après le lemme. □

Théorème 16.3.6. *ch17th3Théorème : Inégalité de Cauchy-SchwartzInegCauchySchwartz* Soient $f, g \in C_{pm}^0$ alors $\left(\int_{[a,b]} fg \right)^2 \leq \int_{[a,b]} f^2 \times \int_{[a,b]} g^2$

Démonstration. On pose $P(\lambda) = \int_{[a,b]} (\lambda f + g)^2 = \lambda^2 \int_{[a,b]} f^2 + 2\lambda \int_{[a,b]} fg + \int_{[a,b]} g^2 \geq 0$
Si $\int_{[a,b]} f^2 = 0$ alors $2 \int_{[a,b]} fg = 0$ et l'inégalité est vraie

Sinon $\int_{[a,b]} f^2 > 0$ et $\Delta = 4 \left(\left(\int_{[a,b]} fg \right)^2 - \int_{[a,b]} f^2 \times \int_{[a,b]} g^2 \right) \leq 0$ □

Valeur moyenne Soit $f \in C_{pm}^0$ on appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le scalaire

$$\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$$

Théorème 16.3.7. *ch17P8PropositionIntNulle* Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeur dans \mathbf{R}^+

On suppose $\int_{[a,b]} f = 0$ alors $f = 0$

Théorème 16.3.8. *ch17P9PropriétéEgCSLiee* Soit $f, g \in C_{pm}^0$ alors
 $\left(\int_{[a,b]} fg \right)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \times \int_{[a,b]} g^2 \Leftrightarrow (f, g) \text{ sont liées.}$

Théorème 16.3.9. *ch17P10PropriétéChgtVarInt* Soit $f \in C_{pm}^0$ et $\forall u \in \mathbf{R}$ on pose

$$f_u \left(\begin{array}{ccc} [a+u, b+u] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x-u) \end{array} \right)$$

alors $\int_{[a+u, b+u]} f_u = \int_{[a,b]} f$

Théorème 16.3.10. *ch17th4Théorème : Relation de ChaslesRelChasles* Soit f continue par morceaux sur un segment S de \mathbf{R} et $(a, b, c) \in S^3$

alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Théorème 16.3.11. *ch17P11PropriétéIntFcImpaire* Soit $a \in \mathbf{R}$; $f \in C_p^0([-a, a], \mathbf{R})$, on suppose que f est paire (resp. impaire)
alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$ (resp. $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$)

Théorème 16.3.12. *ch17P12PropriétéIntTperio* Soit f continue par morceaux sur $I \subset \mathbf{R}$, on suppose que f est T -périodique
alors $\forall a \in I, \int_a^{a+T} f(x)dx = \text{cte}$ (ne dépend pas de a)

16.4 Sommes de Riemman

Définition Si f est continue sur $[a, b]$ et $\sigma = (c_0, \dots, c_n)$ est une subdivision de $[a, b]$, on appelle somme de Riemman associée à f sur $[a, b]$ l'expression

$$\sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i) \times f(\xi_i) \text{ avec } \xi_i \in [c_i, c_{i+1}]$$

Somme de Riemman associée Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0$ et $\sigma = (c_0, \dots, c_n)$ une subdivision adaptée à f sur $[a, b]$ on pose pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\varphi_i = f|_{[c_i, c_{i+1}[}$ que l'on prolonge par continuité sur $[c_i, c_{i+1}]$.

On appelle somme de Riemmann associée une somme de sommes de Riemman associées aux φ_i

Théorème 16.4.1. *ch17P13PropriétéLimSommRiemman* Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0$ alors $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n}) \xrightarrow{n} \int_a^b f(t) dt$

16.5 Lien entre intégrales et primitives

Théorème 16.5.1. *ch17th5Théorème fondamental du calcul intégral ThFondInt* Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} et $a \in I$, Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration. F est bien définie sur I , on considère alors $c \in I$; soit $x \in I \setminus \{c\}$
Il existe alors ξ_x compris entre x et c tel que $\frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(\xi_x) \xrightarrow{x \rightarrow c} f(c)$ par \mathcal{C}^0 de f en c
Donc F est dérivable en c et $f'(c) = f(c)$ □

Théorème 16.5.2. *ch17th5cCorollaireIntDifPrim* Pour toute primitive F de f sur I on a $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$

Théorème 16.5.3. *ch17th5c2CorollaireDL1f* Soit f continue sur I et $a \in I$, on suppose $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$
alors $\forall x \in I, f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$

16.6 Formules de Taylor globales

Théorème 16.6.1. *ch17th6Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral*
TaylRstInt Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$

$$\text{Alors } \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Démonstration. Par récurrence sur n :

Initialisation : $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ d'après le corollaire précédant

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n et on considère $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{R})$.

Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ on a $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \text{ par IPP} \quad \square$$

Théorème 16.6.2. *ch17th6cCorollaire : Inégalité de Taylor-Lagrange*
InegTaylLagr Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ et M un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur I

$$\text{Alors } \forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \times \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

★ ★ ★

Chapitre 17

Dénombrément

Contenu

17.1 Cardinal d'un ensemble	89
17.1.1 Généralités	89
Équipotence	89
Ensemble fini - Cardinal	89
17.1.2 Lemme des Bergers et principe des Tirroirs	90
17.1.3 Calcul sur les cardinaux	91
17.2 Listes et Combinaisons	92
Arrangement	92
Combinaison	92
Formule de Vandermonde	92

17.1 Cardinal d'un ensemble

17.1.1 Généralités

Équipotence On dit que deux ensembles E et F sont équipotents s'il existe une bijection de E sur F . On note alors $E \sim F$

Ensemble fini - Cardinal Soit E un ensemble, on dit que E est fini s'il est **vide** ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $E \sim \llbracket 1, n \rrbracket$
On appelle alors n le cardinal de E noté $|E|$ (ou $\text{Card}(E)$) dont on admet l'unicité, sous réserve d'existence avec par convention $|\emptyset| = 0$

Théorème 17.1.1. *ch18L1LemmeSousEns1n* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; soit $F \subset \llbracket 1, n \rrbracket$
Alors F est fini et $|F| \leq n$

Théorème 17.1.2. *ch18L1cCorollaire18-L1* Si E et F sont des ensembles avec F fini et $E \subset F$
Alors E est fini et $|E| \leq |F|$
avec égalité si et seulement si $E = F$

Remarque : Définition avec l'indicatrice Soit $A \in \mathcal{P}(E)$

$$\mathbb{1}_A : \left(\begin{array}{ll} E & \longrightarrow \{0, 1\} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in C_E A \end{cases} \end{array} \right) \text{ et si } E \text{ est fini alors } |A| = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Théorème 17.1.3. *ch18P1PropositionAppliCard* Si E et F sont deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$ alors

- 1) Si f injective $|f(E)| = |E|$ et $|E| \leq |F|$
- 2) Si f surjective $|F| \leq |E|$
- 3) Si $|F| = |E|$ alors f est injective si et seulement si f est surjective.

Théorème 17.1.4. *ch18P2PropriétéCardCompl* Soit E un ensemble fini et $A \in \mathcal{P}(E)$ alors $|C_E A| = |E| - |A|$

Théorème 17.1.5. *ch18P2cCorollaireCardDiff* Si A et B sont finis alors $A \setminus B$ est fini et $|A \setminus B| = |A| - |B|$

Théorème 17.1.6. *ch18P3PropositionCardUnion* Si A et B sont finis alors $A \cup B$ est fini et $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

17.1.2 Lemme des Bergers et principe des Tirroirs

Théorème 17.1.7. *ch18P4PropositionCardPart* Si P est une partition de E alors $|E| = \sum_{X \in P} |X|$

Théorème 17.1.8. *ch19th1Lemme des Bergers* Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$ telle que

$$\exists p \in \mathbb{N}^* : \forall y \in F, |f_r^{-1}(\{y\})| = p \text{ alors } |E| = p|F|$$

Démonstration. $(f_r^{-1}(\{y\}))_{y \in F}$ est une partition de E et on a alors

$$|E| = \sum_{y \in F} |f_r^{-1}(\{y\})| = \sum_{y \in F} p = p|F|$$

□

Théorème 17.1.9. *ch19th2Principe des Tirroirs de Dirichlet* Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et $p \in \mathbb{N}^*$

$f : E \rightarrow F$ telle que s'il existe $k \in \mathbb{N} : n > kp$ alors $\exists y \in F : |f_r^{-1}(\{y\})| > k$

Démonstration. On suppose que $\forall y \in F, |f_r^{-1}(\{y\})| \leq k$ alors d'après le Lemme des Bergers $|E| \leq kp$

□

17.1.3 Calcul sur les cardinaux

Théorème 17.1.10. *ch18P5PropositionCalculCard* Soit E et F deux ensembles finis alors

$$\rightarrow |E \times F| = |E| \times |F|$$

Théorème 17.1.11. *ch18P6PropriétéCardBij* Soit E et F deux ensemble de même cardinal n alors

- $\mathcal{B}\mathcal{Y}(E, F)$ l'ensemble des bijections de E sur F est de cardinal $n!$
- $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini de cardinal 2^n

Théorème 17.1.12. *ch18P6cCorollaireCardPermut* Le cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble à n éléments es $n!$

17.2 Listes et Combinaisons

Arrangement On appelle arrangement de k éléments parmi n toute **application injective** de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ soit une **k -liste** d'éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $A_{k,n}$ l'ensemble des arrangements de k éléments parmi n .

Théorème 17.2.1. *ch18P7PropriétéCardArrang* Le nombre d'arrangement de k éléments parmi n , noté A_n^k vérifie

$$A_n^k = |A_{k,n}| = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \frac{n!}{(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

Combinaison On appelle combinaison de k objets parmi n toute **partie** à k éléments d'un ensemble à n objets et on note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des combinaisons à k éléments de E .

Théorème 17.2.2. *ch18P8PropriétéNbCombin* Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est $\binom{n}{k}$

Formule de Vandermonde

$$(1 + X)^n (1 + X)^m = (1 + X)^{n+m} \Rightarrow \binom{n+m}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{n}{i} \binom{m}{j}$$

★ ★ ★

Chapitre 18

Probabilités

On désigne par expérience aléatoire toute expérience dont le résultat est soumis au hasard.

Contenu

18.1 Univers, événements et variables aléatoires	93
Ensemble des événements	93
Système complet d'événements	94
Probabilité	94
Variable aléatoire	94
18.2 Espaces probabilisés finis, probabilité uniforme	94
18.2.1 Équiprobabilités	94
18.2.2 Probabilités conditionnelles	94
Définition	95
18.3 Loi d'une variable aléatoire	95
Loi de probabilité	95
18.3.1 Variable uniforme sur un ensemble fini non vide	96
Loi uniforme	96
18.3.2 Variable de Bernoulli	96
Loi de Bernoulli	96
18.3.3 Loi binomiale	96

18.1 Univers, événements et variables aléatoires

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience ε trois objets mathématiques : Ω un univers fini (des possibles), $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements associés à ε et P une probabilité.

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Ensemble des événements On appelle ensemble des événements associés à ε toute partie \mathcal{A} de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

$$\Omega \in \mathcal{A} \text{ et } \emptyset \in \mathcal{A}$$

$$\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$$

Soit I un ensemble fini ou dénombrable et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements

alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A} \text{ et } \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$$

Dans le cas où $|\Omega| < +\infty$ on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

Système complet d'événements

$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

On appelle système complet d'événements toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements deux à deux incompatibles et dont la réunion est l'événement certain

Probabilité Si (Ω, \mathcal{A}) est un espace probabilisable, on appelle probabilité sur \mathcal{A} toute application telle que

$$\mathcal{P}(\Omega) = 1$$

$$\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Dans le cas fini, (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace probabilisé fini.

Théorème 18.1.1. *ch19P1PropriétésPropProba* $P(\emptyset) = 0$

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2(\mathcal{A}), P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2(\Omega), A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$^{(5)} \forall (A, B) \in \mathcal{P}^2(\Omega), P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Variable aléatoire On appelle variable aléatoire toute application définie sur Ω à valeurs dans un ensemble E . Si $E \subset \mathbb{R}$ on dit que $X : \Omega \rightarrow E$ est une variable aléatoire réelle.

Notations Si X est une variable aléatoire, on note

- Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, $X_r^{-1}(A) = \{X \in A\}$
- Si $e \in E$, $X_r^{-1}(\{e\}) = \{X = e\}$
- Si $E = \mathbb{R}$, $X_r^{-1}([a, b]) = \{a \leq X < b\}$

18.2 Espaces probabilisés finis, probabilité uniforme

18.2.1 Équiprobabilités

Si $|\Omega| < +\infty$, une hypothèse classique est de considérer une probabilité P telle que $\forall \omega \in \Omega$, $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$. C'est bien une probabilité, dite équiprobabilité car tout les événements réduits à une issue ont la même probabilité

18.2.2 Probabilités conditionnelles

Définition Si A et B sont deux événements de (Ω, \mathcal{A}, P) de probabilités non nulles, on définit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Théorème 18.2.1. *ch19P2PropriétéPCondProba* Si B est un événement de probabilité non nulle dans un espace probabilisé fini (Ω, \mathcal{A}, P)

Alors $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ A & \longmapsto & P(A|B) \end{array} \right)$
est une probabilité

Théorème 18.2.2. *ch19P3Proposition \heartsuit ProbaIntersec* Si A_1, \dots, A_n sont des événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ alors

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Théorème 18.2.3. *ch19P4Propriété : Formule des probabilités totalesProbaTot* Si B est un événement et $(A_i)_{i \in [1, n]}$ est un système complets d'événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

$$\text{Alors } P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \times P(A_i)$$

Théorème 18.2.4. *ch19P5Proposition : Formule de BayesFormuleBayes* Soit A un événement de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ tel que $P(A) \neq 0$
Si (B_1, \dots, B_n) est un système complet d'événements

$$\text{Alors } \forall i \in [1, n], \quad P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{k=1}^n P(A|B_k)P(B_k)}$$

18.3 Loi d'une variable aléatoire

Loi de probabilité Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ à valeur dans E on appelle loi de probabilité de la variable X (ou distribution) l'application

$$P_X \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & [0, 1] \\ A & \longmapsto & P(X \in A) \end{array} \right)$$

Théorème 18.3.1. *ch19P6PropriétéDistribEstProba* Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

Alors P_X est une probabilité sur E

Notation Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini à valeurs dans E on note $X \sim Y$ si $P_X = P_Y$

Théorème 18.3.2. Soit $X : \Omega \rightarrow E$ est une variable aléatoire et $f : E \rightarrow F$

Alors $f(X) = f \circ X : \Omega \rightarrow F$ est une variable aléatoire avec
 $\forall B \in \mathcal{P}(F), P_{f(X)}(B) = P(f(X) \in B) = P(X \in f^{-1}(B)) = P_X(f^{-1}(B))$

18.3.1 Variable uniforme sur un ensemble fini non vide

Soit E un ensemble fini non vide.

Loi uniforme On dit que X variable aléatoire suit une loi uniforme sur E si

$$\begin{cases} X(\Omega) = E \\ \forall x \in E, P(X = x) = \frac{1}{|E|} \end{cases}$$

On écrit alors $X \sim \mathcal{U}(E)$

On prend un objet au hasard parmi $|E|$ objets qui ont tous la même probabilité d'être choisis et on note X cet objet.

18.3.2 Variable de Bernoulli

On appelle expérience de Bernoulli une expérience aléatoire à deux issues. On appelle succès l'une des issues et échec l'autre. On peut donc lui associer une variable aléatoire réelle qui prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.

Loi de Bernoulli On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ P(X = 1) = p \end{cases}$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$

18.3.3 Loi binomiale

Si on répète n fois une expérience de Bernoulli, la variable aléatoire associée au nombre de succès suit une loi de Bernoulli de paramètres n et p .

Chapitre 19

Espaces préhilbertiens réels

Dans ce chapitre, E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Contenu

19.1 Produit scalaire	97
Définition	97
Espace euclidien	97
Produit scalaires canoniques	98
19.2 Norme associée à un produit scalaire	98
Norme	98
Distance	98
19.3 Orthogonalité	99
19.3.1 Résultats théoriques	99
Vecteur orthogonal	99
Ensemble orthogonal	99
Famille orthogonale	100
19.3.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	100
Construction par récurrence	100
19.4 Bases orthonormées	101
19.5 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	102
Projection orthogonale	102
Distance à un ensemble	102

19.1 Produit scalaire

Définition Un produit scalaire $\langle x, y \rangle$ est une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- | | |
|---|--|
| 1) φ est <u>bilinéaire</u> | $\varphi(\lambda x + \lambda' x', y) = \lambda \varphi(x, y) + \lambda' \varphi(x', y)$
$\varphi(x, \mu y + \mu' y') = \mu \varphi(x, y) + \mu' \varphi(x, y')$ |
| 2) φ est <u>symétrique</u> | $\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ |
| 3) φ est <u>définie positif</u> | $\varphi(x, x) \geq 0 \wedge \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ |

Espace euclidien Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien si E est de **dimension finie**.

Produit scalaires canoniques

$$\text{Sur } \mathbb{R}^n \quad \langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

$$\text{Sur } \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}) \quad \langle X, Y \rangle = \text{tr}(X \times {}^t Y) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n a_{ki} \cdot b_{ki}$$

$$\text{Sur } \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \quad (a < b) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt$$

On a aussi sur $\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k) \cdot Q(k)$ et $\psi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0) \cdot Q^{(k)}(0)$

19.2 Norme associée à un produit scalaire

Norme Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel on dit que $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme si

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$$

$$\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$$

$$\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

Distance Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel on dit que $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une distance si

$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$$

$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Rq : Si (E, N) est un espace normé alors $d \left(\begin{array}{c} E \times E \\ (x, y) \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \mathbb{R} \\ N(x - y) \end{array} \right)$ est une distance.

Théorème 19.2.1. *ch20th1* Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwartz InegCSSoit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Avec égalité si et seulement si x et y sont liés (égaux à un scalaire près)

Démonstration. On pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0 \in \mathbb{R}[X]$

On a alors $P(\lambda) = \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle$

• Si $\langle y, y \rangle = 0$ alors $y = 0$ et on a l'égalité.

• Sinon vu $p(\lambda) \leq 0$ on a $\Delta = 4(\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle) \leq 0$

Si on a égalité alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda_0) = 0 \Rightarrow x + \lambda_0 y = 0$

Réciproquement si $x = \lambda y$ alors $\langle x, y \rangle^2 = \lambda \langle y, y \rangle \times \lambda \langle y, y \rangle = \langle \lambda y, \lambda y \rangle \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ □

Théorème 19.2.2. *ch20P1* Proposition NormEuclidSi $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel

Alors $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E dite norme euclidienne ($\|\cdot\|$)

Théorème 19.2.3. *ch20P2PropriétéInegTriAmelio* $\forall (x, y) \in E^2$ si N est la norme euclidienne associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ avec égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$

Théorème 19.2.4. *ch20P3PropriétéIdRemNorm* Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

On a les identités remarquables suivantes :

$$\forall (x, y) \in E^2, \begin{cases} \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{cases}$$

On en déduit les formules de polarisation suivantes :

$$\forall (x, y) \in E^2, \begin{cases} \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \end{cases}$$

Rq : $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme euclidienne sur E si et seulement si $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(N^2(x + y) - N^2(x - y))$ est un produit scalaire.

19.3 Orthogonalité

19.3.1 Résultats théoriques

Vecteur orthogonal Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel, x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$

Ensemble orthogonal Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel et $F \in \mathcal{P}(E)$ on appelle orthogonal de F noté F^\perp l'ensemble

$$\{y \in E \mid \forall x \in F, y \perp x\}$$

Théorème 19.3.1. *ch20P4PropositionOrthSousEspace* $\forall F \in \mathcal{P}(E)$, F^\perp est un sous-espace de E

Théorème 19.3.2. *ch20P5Propriété20-P5* Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel,

$$\forall (F, G) \in \mathcal{P}^2(E), F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$$

$$F^\perp = (\text{Vect}(F))^\perp$$

$$F \subset (F^\perp)^\perp \text{ avec égalité si et seulement si } F \text{ est une sous-espace vectoriel.}$$

Famille orthogonale Soit I un ensemble, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est orthogonale si

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j$$

On dit de plus que la famille est orthonormée (ou orthonormale) si les vecteurs sont **normés** (ou unitaires), càd

$$\forall i \in I, \|x_i\| = 1 \Leftrightarrow \forall (i, j) \in I^2, \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Théorème 19.3.3. *ch20P6PropositionFamOrthoNonNulleLibre* Toute famille $(x_i)_{i \in I}$ d'un espace préhilbertien réel **orthogonale** et ne contenant pas le vecteur nul est libre. Toute famille **orthonormée** est libre.

Théorème 19.3.4. *ch20th2Théorème de PythagoreThPythagore* Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale alors

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{(I)}, \left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \lambda_i^2 \|x_i\|^2$$

Démonstration. $\forall (x, y) \in E^2$

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = 0 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i \in I} \lambda_i x_i, \sum_{j \in I} \lambda_j x_j \right\rangle = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \lambda_i \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i^2 \|x_i\|^2 \quad \square$$

19.3.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Objectif : Transformer par un algorithme une famille $(e_i)_{i \in [1, n]}$ libre en une famille $(\varepsilon_i)_{i \in [1, n]}$ orthonormée de telle sorte que

$$\forall k \in [1, n], F_k = \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\}) = \text{Vect}(\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}) = F'_k$$

Pour tout $k \in [1, n]$ on pose $u_k = \sum_{i=1}^{k-1} \langle \varepsilon_i, e_k \rangle \varepsilon_i$

Construction par récurrence

Initialisation $\{e_1\}$ est libre car $e_1 \neq 0$ on pose donc $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ qui convient.

Hérédité Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$ vérifie les contraintes et on considère $u'_k = e_k - u_k$. On peut vérifier que $u'_k \in F_{k-1}^\perp$; en effet :

$$\forall l \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, \quad \langle u'_k, \varepsilon_l \rangle = \left\langle e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \varepsilon_i, e_k \rangle \varepsilon_i, \varepsilon_l \right\rangle = \langle e_k, \varepsilon_l \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \langle \varepsilon_i, e_l \rangle \langle \varepsilon_i, \varepsilon_l \rangle}_{=\langle \varepsilon_k, e_l \rangle} = 0$$

On a par contraposée $u'_k \neq 0$ (sinon $e_k \in F_{k-1}$), on peut donc considérer $\varepsilon_k = \frac{u'_k}{\|u'_k\|}$.

Vérifions que ε_k convient :

On a déjà $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ est orthonormée vu $\varepsilon_k \in F_{k-1}^\perp$. De plus $u'_k \in F_k$ d'où $\varepsilon_k \in F_k$ donc $F'_k \subset F_k$. Réciproquement $F'_{k-1} = F_{k-1}$ et $e_k \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, u'_k)$ d'où $F_k \subset F'_k$.

On a ainsi une famille $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ orthonormée vérifiant les contraintes.

19.4 Bases orthonormées

Théorème 19.4.1. *ch20th3* Théorème Base Orth EEuclid Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

Démonstration. Tout espace E euclidien admet une base (dimension finie) donc on peut construire avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt une famille orthonormée génératrice de E donc une base orthonormée de E \square

Théorème 19.4.2. *ch20th4* Théorème de la base orthonormée incomplète ThBaseOrthoIncomplete Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension n , pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit (e_1, \dots, e_k) une famille orthonormée de vecteurs de E . Alors cette famille peut être complétée en une base orthonormée de E .

Démonstration. Comme (e_1, \dots, e_k) est orthonormée elle est libre, on peut donc la compléter en une base de E à laquelle on pourra appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E . \square

Théorème 19.4.3. *ch20P7* Propriété Coord Base Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien muni d'une base

(e_1, \dots, e_n) orthonormée on a

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad x &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \\ \forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle \end{aligned}$$

Théorème 19.4.4. *ch20P7c* Corollaire 120-P7c Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien rapporté à une base orthonormée e

$$\text{Alors } \varphi \left(\begin{array}{c} E \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix} \end{array} \right) \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriel tel que } (\langle x, y \rangle) = \varphi(x) \times^T \varphi(y)$$

Théorème 19.4.5. *ch20P7c2Corollaire 2NormBaseESi $x \in E$, E euclidien rapporté à une base (e_1, \dots, e_n) orthonormée*

$$\text{Alors } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x_i, e_i \rangle^2$$

19.5 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Théorème 19.5.1. *ch20P8PropositionSupplOrthoSi F est un sous-espace de dimension finie de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace préhilbertien réel*

Alors F^\perp est un supplémentaire de F dans E appelé supplémentaire orthogonal de F dans E . On note $F \oplus F^\perp$

Théorème 19.5.2. *ch20P8cCorollaireThRangOrthoSi F est un sous-espace vectoriel d'un espace $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien*

$$\text{Alors } \dim F^\perp = \dim E - \dim F$$

*En particulier si H est un hyperplan de E tout vecteur **non nul** de H^\perp est dit vecteur normal à H*

Projection orthogonale *Si F est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ rapporté à une base orthonormée (e_1, \dots, e_p) , alors $\sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$ est la projection de x sur F parallèlement à F^\perp autrement appelée projection orthogonale de x sur F parfois notée $p_F^\perp(x)$*

Distance à un ensemble *Si F est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, pour $x \in E$, on appelle distance de x à F et on note $d(x, F)$ le réel définit par*

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \{ \|x - y\| \}$$

Théorème 19.5.3. *ch20P9PropriétéEcritureDistanceEnsembleSi F est rapporté à une base orthonormée (e_1, \dots, e_p)*

$$\text{Alors } \boxed{d(x, F) = \|x - p_F^\perp(x)\| = \|p_{F^\perp}^\perp(x)\|} = \|x - \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i\|$$

Théorème 19.5.4. *ch20P10Proposition20-P10Si u est un vecteur non nul d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on a :*

$$\forall x \in E, \quad p_{(\text{Vect}(u))^\perp}^\perp(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle u}{\|u\|^2}$$

$$\text{et } d(x, (\text{Vect}(u))^\perp) = \frac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|}$$

★ ★ ★

Chapitre 20

Procédés sommatoires discrets

Chapitre 21

Fonctions de deux variables

Contenu

21.1 Continuité	105
21.1.1 Notion d'ouvert	105
Boules	106
Ouvert	106
21.1.2 Fonctions de deux variables	106
Définition	106
Continuité	106
Applications partielles	107
21.2 Dérivation	107
21.2.1 Dérivée partielles	107
Fonction différentiable	107
Dérivées partielles	107
Dérivabilité selon un scalaire	107
Classe	
.	108
21.2.2 Différentielle	108
Fonction négligeable	108

21.1 Continuité

21.1.1 Notion d'ouvert

Rappel :

Si la norme $\|\cdot\|$ dérive d'un produit scalaire on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \geq 0 = \|(0, 0) \quad x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\lambda x + \mu y = 0$

$$^{(5)} \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2, \|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

Théorème 21.1.1. *ch22P1PropriétéNormSupComposantes* Si $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ avec $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Alors $\|x\| \geq |x_1|$, $\|x\| \geq |x_2|$ et $\|x\| \leq |x_1| + |x_2|$

Boules Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ on appelle

- Boule ouvert de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| < r\}$$

- Boule fermée de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

Ouvert Une partie U de \mathbb{R}^2 est dit ouvert lorsque

$$\forall x \in U, \exists r > 0 : B(x, r) \subset U$$

Rq : Une partie de \mathbb{R}^2 est dite fermée si son complémentaire dans \mathbb{R}^2 est un ouvert.

Théorème 21.1.2. *ch22P2Propriétés22-P2Ø* et \mathbb{R}^2 sont des parties ouvertes de \mathbb{R}^2

Une union d'ouverts de \mathbb{R}^2 est un ouvert de \mathbb{R}^2

Une intersection **finie** d'ouverts de \mathbb{R}^2 est un ouvert de \mathbb{R}^2

21.1.2 Fonctions de deux variables

Définition Si U est un ouvert de \mathbb{R}^2 toute application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables réelles.

Continuité Si U est un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$ on dit que f est continue en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 : \forall x \in U, (x \in B(x_0, r) \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

Théorème 21.1.3. *ch22P3PropriétéPolynomXY* Toute fonction polynômiale en x et y est continue sur \mathbb{R}^2

Théorème 21.1.4. *ch22P4PropositionOpéF2Var* Soit f et g définies sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 à valeurs réelles

Soit $x_0 \in U$, on suppose que f et g sont continues en x_0 , alors

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g \text{ est continue en } x_0$$

Si de plus $g(x_0) \neq 0$, il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in B(x_0, r)$, $g(x) \neq 0$ et $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

Applications partielles Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ et $x = (x_1, x_2) \in U$ on définit les fonctions d'une variable réelle f_1 et f_2

$$f_1(t) = f(x_1, t) \quad \text{et} \quad f_2(t) = f(t, x_2)$$

f_1 et f_2 sont dites applications partielles de f au point $x = (x_1, x_2)$

Théorème 21.1.5. *ch22P5PropriétéContApplPart* Si $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ est continue en $(x_1, x_2) \in U$

Alors f_1 et f_2 sont continues respectivement en x_2 et x_1

21.2 Dérivation

21.2.1 Dérivée partielles

Fonction différentiable Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ avec U un ouvert de \mathbf{R}^2 et $x = (x_1, x_2) \in U$
On dit que f est différentiable en x par rapport à la première variable si

$$t \mapsto \frac{f(x_1 + t, x_2) - f(x_1, x_2)}{t}$$

admet une limite en 0, notée $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ sous réserve d'existence.

On considère une définition analogue en x_2

Dérivées partielles Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ avec U un ouvert de \mathbf{R}^2 , on note \mathcal{D}_f l'ensemble des points x de U tels que f soit différentiable en x selon la première variable.

On définit la dérivée partielle de f selon la première variable

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$$

qui à tout x de \mathcal{D}_f associe $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$

On définit de même la dérivée partielle de f selon la deuxième variable.

<p>Si f est différentiable en x selon la première variable, on dit aussi que f admet une dérivée partielle selon la première variable. On a de même pour la deuxième variable.</p>

Dérivabilité selon un scalaire Si $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, $h \in \mathbf{R}^2$ et $x \in U$ on dit que f est dérivable en x selon h lorsque

$$\frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

admet une limite finie quand $t \rightarrow 0$, notée $f_x(h)$

Classe On dit que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe sur U si $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ sont définies et continues sur U

Théorème 21.2.1. *ch22P7PropriétésCalcDer2VarSi* f et g sont de classe sur U ouvert de \mathbb{R}^2 alors

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe sur U avec

$$\forall x \in U, \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i}(x) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

fg est de classe sur U avec

$$\forall x \in U, \frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(x) = f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) + g(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Si g ne s'annule pas sur U alors $\frac{f}{g}$ est de classe sur U avec

$$\forall x \in U, \frac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x) - f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)}{g^2(x)}$$

21.2.2 Différentielle

Fonction négligeable Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ avec $(0, 0) \in U$ on dit que $f(h)$ est négligeable devant $\|h\|$ au voisinage de $(0, 0)$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall h \in U, (\|h\| \leq \eta \Rightarrow |f(h)| \leq \varepsilon \|h\|)$$

On note alors $f(h)$ est négligeable devant $\|h\|$ au voisinage de $(0, 0)$ alors $f(h) \xrightarrow[h \rightarrow (0,0)]{} 0$ et f admet des dérivées selon tout vecteur en $(0, 0)$ nulles.

Théorème 21.2.2. *ch22th1Théorème : Développement limité à l'ordre 1 en (x_0, y_0)* $DL1 \times 0 y_0$ Si

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe sur U et $(x_0, y_0) \in U$

Alors pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \underset{h \rightarrow (0,0)}{=} f(x_0, y_0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|h\|)$$

Démonstration. Ce résultat est admis. □

Théorème 21.2.3. *ch22th1cCorollaireC12VarImplContSi* f est de classe sur U alors f est continue sur U .

Théorème 21.2.4. *ch22P8PropositionEcritureDer2VarSi* $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe sur U , $x \in U$

Alors pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, f admet une dérivée en x selon h donnée par

$$f_x(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$$

★ ★ ★

Table des matières - Première année

Table des matières - Deuxième année

1	Suites et séries	3
1.1	Norme	4
1.1.1	Généralités	4
1.1.2	Normes euclidiennes	5
1.1.3	Exemple de normes	5
1.2	Suites	5
1.3	Normes équivalentes	7
1.3.1	Définition	7
1.3.2	Cas de espaces de dimension finie	7
1.4	Comparaisons asymptotiques	8
1.5	Séries dans un K espace vectoriel de dimension finie	8
1.6	Complément sur les séries numériques	10
1.6.1	Règle de <u>Dalembert</u>	10
1.6.2	Séries alternées	10
1.6.3	Sommation des relations de comparaisons	11
1.7	Produit de deux séries absolument convergentes	11
1.8	Dualité série-suite	12
2	Limites et continuité	13
2.1	Ouverts et fermés	14
2.1.1	Intérieurs	14
2.1.2	Ouverts	14
2.1.3	Fermés	15
2.1.4	Adhérence	15
2.2	Limites	17
2.2.1	Cas général	17
2.2.2	Produit fini d'espaces vectoriels normés	18
2.3	Continuité	19
2.3.1	Cas général	19
2.3.2	Cas des applications linéaires	21
2.4	Image réciproque et continuité	22
2.5	Compacité	24
2.5.1	Compacité dans un espace vectoriel normé quelconque	24
2.5.2	Compacité en dimension finie	25
2.5.3	Applications aux séries en dimension finie	26
2.6	Connexité par arcs	26
3	Dérivation et intégration	28
3.1	Dérivée	28
3.2	Dérivées successives	30
3.3	Fonctions convexes	31
3.4	Intégration sur un segment	32
3.4.1	Fonctions continues par morceaux	32
3.4.2	Propriétés de l'intégrale	33

3.4.3	<i>Inégalités</i>	34
3.5	<i>Théorème fondamental</i>	34
3.6	<i>Formules de <u>Taylor</u></i>	35