Cours de Maths Spé

Ce document est une synthèse du cours de mathématiques dispensé par M. Jean-François Mallordy en classe préparatoire au lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand en 2022-2023. Il s'agit d'un complément au cours de Maths Spé et ne saurait en aucun cas y être un quelconque remplacement !

Paris, 2024

Mis en forme par
Émile Sauvat
emile.sauvat@ens.psl.eu

Chapitres

Chapitre 1

Suites et séries

On considèrera comme acquis en sup les cas réel et complexe : Notament :
-> Théorème des gendarmes *-> Théorème de la limite monotone*

1.1 Norme

1.1.1 Généralités

Norme Une *norme* sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :
- $\forall x \in E,\ N(x) = 0_{\mathbb{R}} \iff x = 0_E$
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda.x) = |\lambda|\, N(x)$
- $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Lemme 1.1.1.
Soit (E, N) un espace vectoriel normé,
On a $N \geq 0$ *(i.e. $\forall x \in E,\ N(x-y) \geq 0$)*

Distance Une *distance* sur X est une application $d : X^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :
- $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = d(y,x)$
- $\forall x, y, z \in E,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Lemme 1.1.2.
Soit (E, N) un espace vectoriel normé.
Si $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = N(x-y)$ alors d est une distance sur E.

Boule ouverte et fermée Soient $a \in E,\ r \in \mathbb{R}$ On pose

$B(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\}$ $\quad B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) \leq r\}$

Les *boules ouverte et fermée* de centre a et de rayon r.

Segment et ensemble convexe Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel quelconque

-> Pour $(a, b) \in E^2$ on défini le *segment* : $[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$
-> $C \subset E$ est dit *convexe* si $\forall (a, b) \in C^2,\ [a, b] \subset C$

Lemme 1.1.3.
Dans E un EVN quelconque les boules sont convexes

1.1.2 Normes euclidiennes

Ici E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire[1]

$$\Phi : \begin{pmatrix} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x \rangle\, y \end{pmatrix}$$

On a alors par théorème[2] , $x \mapsto \sqrt{\langle x \rangle\, x}$ est une norme sur E. On notera

$$\boxed{\|x\|_2 = N_2(x) = \sqrt{\langle x \rangle\, x}}$$

Note. L'inégalité triangulaire pour $\|.\|_2$ est dite inégalité de *Minkovsky*

Lemme 1.1.4.
Si $E = \mathbb{C}^n,\ z = (z_1, \ldots, z_n)$, $N(z) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}$ *est une norme*

Lemme 1.1.5.
$E = C^0([a, b], \mathbb{C})$ *Soit* $f \in E$ *on pose*
$N(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x}$ *alors N est une norme sur E*

1. Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive
2. Voir cours de sup

1.1.3 Exemple de normes

Norme N_∞ :

Dans $E = K^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_\infty(x) = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$

Dans $E = \mathcal{C}^0([a,b], K)$ soit $f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Norme N_1 :

Dans $E = K^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Dans $E = \mathcal{C}^0([a,b], K)$ soit $f \in E$, $N_1(f) = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Norme N_2 :

Dans $E = K^n$ soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n {x_i}^2}$

Dans $E = \mathcal{C}^0([a,b], K)$ soit $f \in E$, $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x}$

1.2 Suites

Suite convergente Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ et $\ell \in E$. On dit que u converge vers ℓ et on note

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ :\ \forall n \geq n_0,\ d(u_n, \ell) < \varepsilon$$

Lemme 1 : Unicité de la limite.

Si $\begin{array}{l} u_n \underset{n}{\to} \ell_1 \ \in E \\ u_n \underset{n}{\to} \ell_2 \ \in E \end{array}$ *Alors* $\ell_1 = \ell_2$

Démonstration. Par l'absurde, on suppose $\ell_1 \neq \ell_2$.
Soit $\varepsilon = \frac{1}{2} d(\ell_1, \ell_2) > 0$ On a alors $\begin{array}{l} n_1 \in \mathbf{N}\ :\ \forall n \geq n_1,\ d(u_n, \ell_1) < \varepsilon \\ n_2 \in \mathbf{N}\ :\ \forall n \geq n_2,\ d(u_n, \ell_2) < \varepsilon \end{array}$ et soit $p = max(n_1, n_2)$

$d(\ell_1, \ell_2) \leq d(\ell_1, u_p) + d(\ell_2, u_p) < 2\varepsilon = d(\ell_1, \ell_2)$ *impossible* □

Lemme 1.2.1.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$, $\ell \in E$ *Alors* $u_n \underset{n}{\to} \ell \iff \|u_n - \ell\| \underset{n}{\to} 0$

Démonstration. Notons $v_n = \|u_n - \ell\|$ et $\lambda = 0$ Alors $d(u_n, \ell) = \|u_n - \ell\| = v_n = \|v_n - \lambda\| = d(v_n, \lambda)$
or $u_n \underset{n}{\to} \ell$ *ssi* : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ :\ \forall n \geq n_0,\ d(u_n, \ell) < \varepsilon \Rightarrow d(v_n, \lambda) < \varepsilon \Rightarrow v_n \underset{n}{\to} 0$ □

Lemme 1.2.2.
Soient $u_n,\ v_n \in E^{\mathbf{N}}$ *et* $\lambda \in K$ *si on a* $u_n \underset{n}{\to} \alpha$ *et* $v_n \underset{n}{\to} \beta$
Alors $\lambda u_n + v_n \underset{n}{\to} \lambda\alpha + \beta$

Lemme : Inégalité triangulaire renversée.
Soit $x, y \in E$ *alors* $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$

Démonstration. $N(x) \leq N(x-y) + N(y) \Rightarrow \underbrace{N(x) - N(y)}_{t \in \mathbf{R}} \leq N(x-y)$

On conclut alors par agument de symétrie. □

Lemme 1.2.3.
Soit $u_n \in E^{\mathbf{N}},\ \alpha \in K$ *on a* $u_n \underset{n}{\to} \alpha \ \Rightarrow\ \|u_n\| \underset{n}{\to} \|\alpha\|$

Attention ! La réciproque est fausse !

Suite bornée Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ on dit que (u_n) est bornée si $\exists M \in \mathbf{R}\ :\ \forall n \in \mathbf{N},\ \|u_n\| \leq M$.

Lemme 1.2.4.
Toute suite $(u_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbf{N}}$ *convergente est bornée*

Lemme 1.2.5.
On suppose $\begin{cases} \lambda_n \underset{n}{\to} \mu \in K \\ u_n \underset{n}{\to} v \in E \end{cases}$ *Alors* $\lambda_n u_n \underset{n}{\to} \mu v$

Suite extraite Soit $u \in E^{\mathbf{N}}$ on appelle *suite extraite* (ou sous-suite) de u toute suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ où $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une extractrice (injection croissante)
NB : en fait $(v_n)_{n\geq 0} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0} \ \Leftrightarrow\ v = u \circ \varphi$

Valeur d'adhérence $\ell \in E$ est une valeur d'adhérence de u s'il existe une suite extraite de u qui converge vers ℓ. On notera $\mathcal{V}_u$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.

> **Théorème 1.2.6.**
> *Soit $u \in E^{\mathbf{N}}$ si u*
> *converge vers $\ell \in K$ alors toute suite extraite de u converge vers ℓ*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une extractrice et $(v_n)_{n \geq 0} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \geq 0}$
Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbf{N} \ : \ \forall n \geq n_0, \ d(u_n, \ell) < \varepsilon$ donc $\varphi(n) \geq n_0$ et ainsi $d\left(u_{\varphi(n)}, \ell\right) < \varepsilon$ et $v_n \underset{n}{\to} \ell$ □

> **Corollaire.**
> *Toute suite admettant au moins 2 valeurs d'adhérence est divergente*

1.3 Normes équivalentes

1.3.1 Définition

Soit E un K espace vectoriel, N et N' deux normes sur E. N et N' sont dites équivalentes ($N \sim N'$) si $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R} \ : \ \alpha N \leq N' \leq \beta N$

Note. On peut aussi l'écrire $N' \leq \beta N$ et $N \leq \frac{1}{\alpha} N'$

> **Lemme 1.3.1.**
> *Soit N, N' des normes équivalentes sur E, $u \in E^{\mathbf{N}}$, $\ell \in E$ alors*
> *1) $u_n \underset{n}{\to} \ell$ dans $(E, N) \Leftrightarrow u_n \underset{n}{\to} \ell$ dans (E, N')*
> *2) u est bornée dans $(E, N) \Leftrightarrow u$ est bornée dans (E, N')*

> **Lemme 1.3.2.**
> *Sur K^n, N_1, N_2 et N_∞ sont équivalentes et plus précisément*
> $$N_\infty \leq N_1 \leq \sqrt{n} N_2 \leq n N_\infty$$

1.3.2 Cas de espaces de dimension fini

Rappel. Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il existe une famille d'éléments de E libre et génératrice, c'est alors une base de E.

> **Théorème 1.3.3.**
> *Sur un K-ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Sera démontré ultérieurement.

Corollaire.

Dans un K espace vectoriel de dimension finie, la notion de convergence
ne dépend pas de la norme.

Attention ! C'est faux en dimension quelconque !

Lemme 1.3.4.

Soit E de dimension finie et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbf{N}}$ et $\alpha \in E$. On écrit $\begin{cases} x_n = x_{1,n}e_1 + \cdots + x_{p,n}e_p \\ \alpha = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p \end{cases}$

On a alors $x_n \underset{n}{\to} \alpha \iff \forall k \in [\![1, p]\!],\ x_{k,n} \underset{n}{\to} \alpha_k$

Théorème 1.3.5.

Soient $p, q, r \in \mathbf{N}^*$ $\begin{cases} A_n \underset{n}{\to} A & \text{dans } \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R}) \\ B_n \underset{n}{\to} B & \text{dans } \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{R}) \end{cases}$ *Alors* $A_nB_n \underset{n}{\to} AB$

Démonstration. Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, r]\!]$
$(A_nB_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} \underbrace{(A_n)_{i,k}}_{\to a_{i,k}} \underbrace{(B_n)_{k,j}}_{\to b_{k,j}} \underset{n}{\to} \sum_{k=1}^{q} a_{i,k}b_{k,j} = (AB)_{i,j}$ donc $A_nB_n \underset{n}{\to} AB$

□

1.4 Comparaisons asymptotiques

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$

Négligeabilité On dit que u_n est négligeable devant v_n quand $n \to +\infty$ noté $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ s'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ et $(\delta_n)_{n\geq n_0}$ tel que

- $\forall n \geq n_0,\ u_n = \delta_n v_n$
- $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Domination On dit que u_n est dominée par v_n quand $n \to +\infty$ noté $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ s'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ et $(B_n)_{n\geq n_0}$ tel que

- $\forall n \geq n_0,\ u_n = B_n v_n$
- $(B_n)_{n\geq n_0}$ est bornée

Équivalence On dit que u_n est équivalent à v_n, noté $u_n \sim v_n$ si :

$$u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$$

Note. $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$

1.5 Séries dans un K espace vectoriel de dimension finie

Note. On note par abus " $dimE < \infty$ "

Le cas scalaire est abordé en MPSI.

Soit $u = (u_n) \in E^{\mathbf{N}}$; pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Sommes partielles La suite (U_n) est dite suite des *sommes partielles* associée à u.

Série convergente On dit que la *série de terme général u_n* converge si (U_n) converge.

Dans ce cas on pose $\sum_0^{+\infty} = \lim_{n\to+\infty} U_n \in E$

Lemme 1.5.1.
$(\sum u_n \text{converge}) \Rightarrow \left(u_n \underset{n}{\to} 0\right)$

Attention ! La réciproque est fausse ! (ex : (H_n))

Divergence grossière Lorsque $u_n \underset{n}{\not\to} 0$, la série $\sum u_n$ est dite *grossièrement divergente* "$\sum u_n$ DVG" ainsi : $(\sum u_n \text{DVG} \Rightarrow \sum u_n \text{DV})$

Théorème : Reste d'une série convergente.
On suppose $\sum u_n$ converge, on note $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$
la "limite de la somme" et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le "reste d'ordre n".
Alors $\left|\begin{array}{l} \forall n \in \mathbf{N},\ S = U_n + R_n \\ R_n \to 0 \end{array}\right.$

Démonstration. bien-fondé ?
Soit $n \in \mathbf{N}$ pour $m \geq n+1$, $\sum_{k=n+1}^{m} u_k = U_m - U_n \underset{m}{\to} S - U_n$ donc R_n existe avec $R_n = S - U_n$
d'où $S = U_n + R_n$ puis $R_n = S - U_n \to S - S = 0$ □

Lemme 1.5.2.
Soit (u_n), (v_n) $\in E^{\mathbb{N}}$ *et* $\lambda \in K$
On suppose que $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent alors :*
-> $\sum \lambda u_n + v_n$ *converge*
-> $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n + v_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

Convergence absolue Soit (u_n) $\in E^{\mathbb{N}}$ on dit que $\sum u_n$ *converge absolument*
si $\sum \|u_n\|$ converge.

Note. Vu $dim E < \infty$, ceci ne dépend pas du choix de la norme

Théorème 1.5.3.
Dans un K *espace vectoriel de* dimension finie, *toute série absolument convergente est convergente " CVA* $\Rightarrow$ *CV "*

Sera démontré ultérieurement. [1]

Attention ! Faux dans un EVN quelconque !

Lemme 1.5.4.
Soit (E, N) *un* K *espace vectoriel normé de dimension finie*
On supposons que $\sum u_n$ *CVA. Alors* $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$

1.6 Complément sur les séries numériques

Rappel. Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $\sum z^n$ CV $\Rightarrow |z| < 1$

-> Lorsque $|z| < 1$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

-> On définie $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

1.6.1 Règle de *Dalembert*

Théorème : Règle de *Dalembert*.
Soit $(u_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$
On suppose l'existence de $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tel que* $\left|\frac{u_{u+1}}{u_n}\right| \to \ell$
Alors *:* *1)* $\ell < 1 \Rightarrow \sum u_n$ *CVA*
2) $\ell > 1 \Rightarrow \sum u_n$ *DVG*

1. TODO : add ref

Démonstration. 1) On suppose $\ell < 1$ et on note $r_n = \left|\frac{u_{u+1}}{u_n}\right|$. On pose $\theta \in [\ell, 1]$ et $\varepsilon = \theta - \ell$ On a alors
$\exists n_0 \in \mathbf{N} \ : \ \forall n \geq n_0, \ |r_n - \ell| < \varepsilon$ soit en particulier $r_n < \ell + \varepsilon = \theta$ Ainsi $\forall n \geq n_0, \ |u_{n+1}| < \theta\,|u_n|$
et $|u_n| \leq \theta^{n-n_0}\,|u_{n_0}|$ (REC) On a alors $\forall n \geq n_0, \ |u_n| \leq \underbrace{\theta^{-n_0}\,|u_{n_0}|}_{\text{cte}}\,\theta^n$ or $\sum \theta^n$ converge car $\theta \in]0, 1[$
donc par théorème de comparaison $\sum |u_n|$ converge.

2) On suppose $\ell > 1$ et on fixe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $1 < \theta < \ell$, on a alors $\exists n_0 \in \mathbf{N} \ : \ \forall n \geq n_0, \ r_n > \theta \ (\ldots)$
on obtient $|u_n| \to +\infty$ donc $u_n \underset{n}{\not\to} 0$ donc $\sum u_n$ DVG □

1.6.2 Séries alternées

Défnition La série réelle $\sum u_n$ est dite *alternée* si $\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, \ u_n = (-1)^n\,|u_n| \\ \forall n \in \mathbf{N}, \ u_n = (-1)^{n+1}\,|u_n| \end{cases}$

Théorème : Critère spécial des série alternées.

Soit (u_n) une suite, on suppose
1) $\sum u_n$ est alternée
2) $u_n \to 0$
3) $(|u_n|)_{n\geq 0}$ décroit.
alors $\sum u_n$ converge et de plus, $\forall n \in \mathbf{N}$
-> $|R_n| \leq |u_{n+1}|$
-> R_n et u_{n+1} ont le même signe
-> S est compris entre U_n et U_{n+1}

1.6.3 Sommation des relations de comparaisons

Théorème : Cas convergent.

Soit $(u_n), \ (v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $v_n \geq 0, \ \forall n \geq n_0$. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge et on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$ et $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n$
Alors :
1) $u_n = o_{n\to+\infty}(v_n) \ \Rightarrow \ R_n = o_{n\to+\infty}(R'_n)$
2) $u_n = \bigcirc_{n\to+\infty}(v_n) \ \Rightarrow \ R_n = \bigcirc_{n\to+\infty}(R'_n)$
3) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow \ R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$

Théorème : Cas divergent.

Soit $(u_n), \ (v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $v_n \geq 0, \ \forall n \geq n_0$. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ diverge et on note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$
Alors :
1) $u_n = o_{n\to+\infty}(v_n) \ \Rightarrow \ U_n = o_{n\to+\infty}(V_n)$
2) $u_n = \bigcirc_{n\to+\infty}(v_n) \ \Rightarrow \ U_n = \bigcirc_{n\to+\infty}(V_n)$
3) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow \ U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$

Théorème de *Cesàro*.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
1) Si $u_n \to \lambda$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \to \lambda$
2) Si $u_n \to +\infty$ *alors* $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \to +\infty$

Démonstration. 1) Supposons $u_n \to \lambda$ alors $u_n - \lambda = o(1)$, on pose ensuite $v_n = 1$ alors $\sum v_n$ diverge et d'après le théorème de sommation en cas divergent
$\sum_{k=0}^{n} u_k - \lambda = o(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{=n+1}) \Rightarrow \frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{n} u_k) - \lambda \to 0$
2) Supposons $u_n \to +\infty$ et posons $a_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ Soit $A \in \mathbb{R}$ et $A' = A + 1$
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0,\ u_n > A'$, puis pour $n \geq n_0$:
$a_n = \frac{1}{n+1}(\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k}_{=C} + \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} u_k}_{>A'(n-n_0+1}) $ donc $a_n > \frac{C}{n+1} + A'\frac{n+1-n_0}{n+1} = A' + \frac{C-n_0A'}{n+1}$
Soit $n_1 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq n_1,\ \left|\frac{C-A'n_0}{n+1}\right| < 1$ alors $\forall n \geq n_1,\ a_n > A$ d'où $a_n \to +\infty$ □

1.7 Produit de deux séries absolument convergentes

Produit de *Cauchy* Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries quelconques (convergentes ou non) de nombres complexes.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}$: $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ (somme finie !)
La série $\sum w_n$ est appelée *produit de* Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Attention !
Lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent on a pas forcément $(\sum u_n) \times (\sum v_n) = \sum w_n$

Théorème 1.7.1.
Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ convergent absolument *alors :*
1) $\sum w_n$ *CVA*
2) $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$

Signalé :

Théorème de *Mertens*.
Si $\begin{cases} \sum u_n \text{ CVA} \\ \sum v_n \text{ converge} \end{cases}$
alors $\sum w_n$ *converge et* $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$

1.8 Dualité série-suite

Toute suite peut-être envisagée comme une série
Ici (E, N) est un EVN de dimension finie.

On pose $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_n = a_n - a_{n-1} \end{cases}$ On a alors pour $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = b_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_0 + a_n - a_0 = a_n \quad \text{soit} \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

On sait ensuite que (a_n) converge si et seulement si $\sum b_k$ converge donc

$$\boxed{(a_n) \text{ converge } \Leftrightarrow \sum a_n - a_{n-1} \text{ converge}}$$

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 2

Limites et continuité

Cadre : (E, N) est un espace vectoriel normé quelconque et $A \subset E$

2.1 Ouverts et fermés

On considère ici $A \subset E$ et $\alpha \in E$

2.1.1 Intérieurs

Point intérieur
-> α est un dit un point intérieur à A s'il existe un réel $r > o$ tel que $B(\alpha, r) \subset A$

Intérieur
-> On pose $\mathring{A} = \{x \in E \mid x \text{ est intérieur à } A\}$ dit *intérieur* de A

> **Lemme 2.1.1.**
> *Soit $A \subset E$ alors $\mathring{A} \subset A$*

> **Lemme : Croissance de l'intérieur.**
> *Soit $A, B \in E$ alors $A \subset b \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$*

2.1.2 Ouverts

Définition Dans (E, N) on appelle *ouvert* (ou *partie ouverte*) **toute** réunion de boules ouvertes.

Théorème : Caractérisation des ouverts.
Soit $U \subset E$ alors
$(U \text{ ouvert}) \Leftrightarrow (\forall x \in U,\ \exists r > 0 \ :\ B(x,r) \subset U)$

Démonstration.
$\boxed{\Leftarrow}$ Pour chaque $x \in U$, on choisit r_x tel que $B(x,r_x) \subset U$ alors $U = \bigcup\limits_{x\in U} B(x,r_x)$ donc par définition, U est un ouvert.
$\boxed{\Rightarrow}$ On note $U = \bigcup B(x_i, r_i)$, soit $x \in U$ et $i_0 \in I$ tel que $x \in B(x_{i_0}, r_{i_0})$
Soit $r = r_{i_0} - d(x, x_{i_0}) > 0$ alors $B(x,r) \subset B(x_{i_0}, r_{i_0})$
Soit $y \in B(x,r)$ c'est-à-dire $d(x,y) < r$ alors
$d(y, x_{i_0}) \leq d(y,x) + d(x, x_{i_0}) < r_{i_0}$
Ainsi $\forall x \in U,\ \exists r > 0 \ :\ B(x,r) \subset U$ □

Corollaire.
Soit $U \subset E$ alors U ouvert $\Leftrightarrow U \subset \mathring{U} \Leftrightarrow U = \mathring{U}$

Note. $\mathcal{T} = \{U \subset E \mid U \text{ est ouvert}\}$ est appelé *Topologie* de (E, N)

Théorème 2.1.2.
1) Toute réunion d'ouvert est un ouvert.
2) Toute intersection finie *d'ouvert est un ouvert.*

Démonstration. On démontre la deuxième assertion
-> Cas de l'intersection vide : $\bigcap_\emptyset = E$
-> Cas de 2 ouverts : Soit A, B deux ouverts de E , soit $x \in A \cap B$, on a $\exists r_1, r_2 > 0$ tels que $B(x, r_1) \subset A$ et $B(x, r_2) \subset B$ alors soit $r = \min(r_1, r_2)$, $B(x,r) \subset A \cap B$ et par théorème (Page **??**), $A \cap B$ est un ouvert
-> Cas de p ouverts, $p \in \mathbb{N}^*$: par récurrence sur p avec le cas $p = 2$ □

2.1.3 Fermés

Lois de Morgan : $\quad {}^c\Big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I} {}^cA_i$ et ${}^c\Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap\limits_{i\in I} {}^cA_i$

Définition On appelle *fermé* tout complémentaire d'un ouvert de E
Ainsi A est fermé $\Leftrightarrow {}^cA$ est ouvert avec ${}^cA = C_E A$

Théorème 2.1.3.
1) Toute intersection de fermés est fermée.
2) Toute réunion finie *de fermés est fermée.*

Démonstration. 1) Soit $(\Phi_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E on a ${}^c\left(\bigcap_I \Phi_i\right) = \bigcup_I {}^c\Phi_i$ est un ouvert donc l'intersection des Φ_i est fermée. □

2.1.4 Adhérence

Point adhérent α est dit adhérent à A si $\forall r > 0,\ B(\alpha, r) \cap A \neq \emptyset$

Adhérence On pose $\overline{A} = \{x \in E \mid x \text{ est adhérent à } A\}$ dit adhérence de A.

Lemme : Croissance de l'adhérence.
Soit $A, B \in E$ alors $A \subset b \ \Rightarrow\ \overline{A} \subset \overline{B}$

Théorème 2.1.4.
Soit $\alpha \in E$ alors $\alpha \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbf{N}} : a_n \underset{n}{\to} \alpha$

Démonstration.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $r > 0$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que $\forall n \geq n_0,\ d(a_n, \alpha) < r$ alors $B(\alpha, r) \cap A \neq \emptyset$ donc $\alpha \in \overline{A}$
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $n \in \mathbf{N},\ \exists a_n \in B(\alpha, \frac{1}{n+1}) \cap A$ d'où $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ vérifie $a_n \underset{n}{\to} \alpha$ $\square$

Théorème : Caractérisation des fermés.
Soit $A \subset E$, A est fermé si et seulement si A est stable par passage à la limite.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $B = {}^cA$ et $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ telle que $a_n \underset{n}{\to} \alpha \in E$
Si $\alpha \in B$, $\exists r > 0$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que $\forall n \geq n_0,\ a_n \in B(\alpha, r)$ soit $a_{n_0} \in B(\alpha, r) \ \Rightarrow\ a_{n_0} \notin A$ (*impossible !*) d'où $\alpha \in A$
$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposée, on suppose que $B = {}^cA$ n'est pas un ouvert donc $\exists \alpha \in B\ :\ \forall r > 0, \exists x \in B(\alpha, r)$ tel que $x \notin B$. On a alors $\alpha \in \overline{A}$ et $\alpha \in B$ soit $\alpha \notin A$ d'où $\exists\ (a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ avec $a_n \underset{n}{\to} \alpha$. On a donc trouvé une suite convergente d'éléments de A dont la limite n'est pas dan A. $\square$

Corollaire.
Soit $A \subset E$, on a : A femré $\Leftrightarrow \overline{A} \subset A \Leftrightarrow \overline{A} = A$

Lemme 2.1.5.
Soit $A \subset E$ alors ${}^c(\overline{A}) = {}^c\mathring{A}$ et ${}^c(\mathring{A}) = \overline{{}^cA}$

Lemme 2.1.6.
1) $\mathring{A}$ est un ouvert
2) $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de E inclu dans A

Lemme 2.1.7.

1) $\overline{A}$ *est un fermé*
2) $\overline{A}$ *est le plus petit fermé de* E *contenant* A

Théorème 2.1.8.

Les notions suivantes, (notions topologiques) :

- *point intérieur*
- *ouvert*
- *point adhérent*
- *fermé*

sont invariants par passage à une norme équivalente.

Démonstration. On sait que la convergence d'une suite est invariante par norme équivalente (Page 7) donc on a l'invariance des notions "point adhérent" et "adhérence" ainsi que "point intérieur" par le complémentaire de l'adhérence (Page 16) puis par caractérisation séquentielle des fermés on a l'invariance de la notion "fermé" ainsi que "ouvert" par le complémentaire. □

Lemme 2.1.9.

1) Toute boule fermée est fermée
2) Toute sphère est fermée

Frontière Soit $A \subset E$ on définie sa *frontière* comme $\boxed{F_r(A) = \overline{A} \backslash \mathring{A}}$

Lemme 2.1.10.

$\forall A \subset E$, $F_r(A)$ *est fermée et* $\boxed{F_r(A) = \overline{A} \cap \overline{{}^cA}}$

Densité Soit $D \subset A \subset E$ on dit que D est *dense* dans A si tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de D soit

$$\forall a \in A,\ \exists\ (d_n) \in D^{\mathbb{N}}\ :\ d_n \underset{n}{\rightarrow} a$$

Lemme 2.1.11.

Soit $D \subset A$ *alors on a :* D *dense dans* $A \Leftrightarrow A \subset \overline{D}$

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors $GL_n(K)$ dense dans $\mathcal{M}_n(K)$

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ et $r = \mathrm{rg}(M) \in [\![1, n]\!]$
Par théorème [1] $\exists U, V \in GL_n(K) : M = UJ_rV$ posons alors pour $p \in \mathbb{N}^*$ $J_r\left(\frac{1}{p}\right) = \mathrm{Diag}\Big(\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\Big)$ puis $M_p = UJ_r\left(\frac{1}{p}\right)V$ alors $M_p \in GL_n(K) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} M$ □

2.2 Limites

2.2.1 Cas général

Dans toute cette partie, F est un K espace vectoriel et $f : A(\subset E) \to F$

Définition Soit $\alpha \in \overline{A}$, $b \in F$. On dit que f admet b comme limite au point α, noté $f(x) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} b$ si
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in A,\ d(x, \alpha) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$

Lemme 2.2.1.
Soit $A(\subset E) \xrightarrow{f} B(\subset F) \xrightarrow{g} G$ et $\alpha \in \overline{A}$, $\beta \in \overline{B}$, $c \in G$
Si on a $f(x) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} \beta$ et $g(y) \underset{y \to \beta}{\longrightarrow} c$ alors $g(f(x)) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} c$

Lemme 2.2.2.
Soit $\alpha \in \overline{A}$, $b \in F$, $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ avec $\begin{cases} f(x) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} b \\ a_n \underset{n}{\to} \alpha \end{cases}$
alors $f(a_n) \underset{n}{\to} b$

Théorème : Caractérisation séquentielle d'une limite.
Soit $\alpha \in \overline{A}$, $b \in F$
Alors $\left(f(x) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} b\right) \Leftrightarrow \left(\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ (a_n \underset{n}{\to} \alpha) \Rightarrow (f(a_n) \underset{n}{\to} b)\right)$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Lemme
$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposée on fixe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n$ tel que $\begin{cases} d(a_n, \alpha) < \frac{1}{n+1} \\ d(f(a_n), b) \geq \varepsilon_0 \end{cases}$
D'où $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n}{\to} \alpha$ **et** $f(a_n) \underset{n}{\nrightarrow} b$ □

Lemme : Unicité de la limite.
Soit $\alpha \in \overline{A}$, $b_1 \in F$, $b_2 \in F$
Si $f(x) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} b_1$ et $f(x) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} b_2$ alors $b_1 = b_2$

1. Voir cours de sup

Lemme 2.2.3.
Soit $a \in \overline{A}$ et $b \in F$
On suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ alors ceci reste vrai si
- *On remplace $\|\dot{\|}_E$ par une une norme équivalente*
- *On remplace $\|\dot{\|}_F$ par une une norme équivalente*

Limite en $\pm\infty$ On dit que $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} b$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\|x\| > M \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$

Limite infinie Ici $f : A(\subset E) \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{A}$
On dit que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in A,\ d(x, a) < \delta \Rightarrow f(x) > M$

Voisinage Soit (E, N) un espace vectoriel normé quelconque et $a \in E$
Soit $V \subset E$ alors V est un *voisinage de a* si $\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$
On peut noter $\mathcal{V}_a = \{V \subset E \mid V \text{ est } v(a)\}$

Note. $V \in \mathcal{V}_a \;\Leftrightarrow\; a \in \mathring{V}$

Lemme 2.2.4.
On suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \in F$
Alors f est bornée localement *au voisinage de a (noté $v(a)$)*

2.2.2 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Norme produit Soients $(E_1, N_1), \ldots, (E_r, N_R)$ des K espaces vectoriels normés.
On note $W = \prod_{i=1}^{r} E_i = E_1 \times \cdots \times E_r$ et $x = (x_1, \ldots, x_r) \in W$
On pose $\forall x \in W,\ N(x) = \max_{1 \le i \le r}\{N_i(x_i)\}$ alors $\begin{cases} N \text{ est dite } \textit{norme produit} \\ (E, N) \text{ est dit } \textit{EVN produit} \end{cases}$

Lemme 2.2.5.
Soient U_1 ouvert de (E_1, N_1)
$\vdots$
U_r ouvert de (E_r, N_r)
alors $U_1 \times \cdots \times U_r$ est un ouvert de W
Un produit fini d'ouvert est un ouvert

Lemme 2.2.6.
Un produit fini de fermé est un fermé

Lemme 2.2.7.
Soit $u = (u_n) \in W^{\mathbb{N}}$, $b \in W$ *où* $W = \prod_{i=1}^{r} E_i$
On note $u_n = (u_{1,n}, \ldots, u_{r,n})$ *et* $b = (b_1, \ldots, b_r)$
alors $u_n \underset{n}{\to} b \iff \forall i \in [\![1, r]\!],\ u_{i,n} \underset{n}{\to} b_i$

Lemme 2.2.8.
Soit $f : A(\subset E) \to W = \prod_{i=1}^{r} E_i$, $\alpha \in \overline{A}$ *et* $b = (b_1, \ldots, b_r) \in W$
On note $\forall x \in A$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x))$
alors $\left(f(x) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} b\right) \iff \left(\forall i \in [\![1, r]\!],\ f_i(x) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} b_i\right)$

Lemme 2.2.9.
$\begin{matrix} f_1 : A \to F \\ f_2 : A \to F \end{matrix}$, $\alpha \in \overline{A}, \lambda \in K$ *et* $b_1, b_2 \in F$
On suppose que $\begin{cases} f_1(x) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} b_1 \\ f_2(x) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} b_2 \end{cases}$ alors $(\lambda f_1 + f_2)(x) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} (\lambda b_1 + b_2)$

Lemme 2.2.10.
Soit $f : A(\subset E) \to F$ *avec* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ *une* base *de* F
On écrit $f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)\varepsilon_i$ *et* $b = \sum_{i=1}^{p} b_i\varepsilon_i$
alors $f(x) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} b \iff \forall i \in [\![1, p]\!],\ f_i(x) \underset{x \to \alpha}{\longrightarrow} b_i$

2.3 Continuité

2.3.1 Cas général

Continuité en un point Soit $f : A(\subset E) \to F$ et $a \in A$ alors
f est dite C^0 en a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\forall x \in A$, $d(a, x) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Lemme 2.3.1.
fC^0 *en* $a \iff f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$

Lemme 2.3.2.
f C^0 *en* a $\iff$ *(*f *admet une limite finie ai point en* a*)*

Théorème : Caractérisation séquentielle de la continuité.
Soit $f : A(\subset E) \to F$ et $a \in A$ alors
f est continue au point a si et seulement si $\left(\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \underset{n}{\to} a \ \Rightarrow\ f(a_n \underset{n}{\to} f(a)\right)$

Démonstration. Caractérisation séquentielle d'une limite Page 18 et Lemme. □

Continuité f est dite continue si $\forall a \in A$, f est continue au point a.

Fonction lipschitzienne Soit $f : A(\subset E) \to F$ et $k \in \mathbb{R}^+$

- f est dite *k-lipschitzienne* si $\forall (x, y) \in A^2,\ d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y)$
- f est dite *lipschitzienne* s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que f est k-lipschitzienne.

Lemme 2.3.3.
f est lipschitzienne $\Rightarrow$ f est continue

Attention ! La réciproque est fausse !

Lemme 2.3.4.
$A(\subset E) \overset{f_1}{\to} B(\subset F) \overset{f_2}{\to} G$.
On suppose f_1 k_1-lipschitzienne et f_2 k_2-lipschitzienne alors $f_2 \circ f_1$ *est $k_1 \times k_2$-lipschitzienne*

Distance à un ensemble Soit $A \subset E$, $a \neq \emptyset$ et $x \in E$

$$d(x, A) = \inf\{d(x, \alpha) \mid \alpha \in A\}$$

Théorème 2.3.5.
Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure

Théorème 2.3.6.
Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$ alors $\delta : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x, A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$ Soit $\alpha \in A$, $d(x, \alpha) \leq d(x, y) + d(y, \alpha)$ ainsi $\forall \alpha \in A, \underbrace{d(x, A) - d(x, y)}_{\mu} \leq d(y, \alpha)$ donc μ est un minorant de $\{d(y, \alpha) \mid \alpha \in A\}$ donc $\mu \leq d(y, A)$ d'où $\underbrace{d(x, A) - d(y, A)}_{\theta} \leq d(x, y)$ et on a de même pour le couple (y, x) , $-\theta \leq d(y, x) = d(x, y)$
En bref : $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ $\square$

Lemme 2.3.7.
La composée de deux applications continues est continue

Lemme 2.3.8.
Pour $f : A(\subset E) \to F$ et $B \subset F$ on note $f|_B$ la restriction $\begin{array}{l} B \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$
Alors f continue $\Rightarrow$ $f|_B$ continue

Lemme 2.3.9.
- *Une combinaison linéaire d'applications continues est continue*
- *Soit $a \subset E$ et* $\left\{ \begin{array}{l} f : A \to F \ \mathcal{C}^0 \\ \lambda : A \to K \ \mathcal{C}^0 \end{array} \right.$ *Alors* $\begin{array}{l} A \to F \\ x \mapsto \lambda(x) f(x) \end{array}$ *est* $\mathcal{C}^0$

Lemme 2.3.10.
Soit $f, g \in \mathcal{C}^0(A, F)$, E, F des espaces vectoriels normés
Soit $D \subset A$ dense dans A et $f|_D = g|_D$ alors $f = g$

2.3.2 Cas des applications linéaires

Théorème 2.3.11.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $u \in \mathcal{C}^0(E, F) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbf{R}^+ : \ \forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq C\|x\| \Leftrightarrow u$ *est lipschitzienne.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : Si $u \in \mathcal{C}^0(E, F)$ alors u est $\mathcal{C}^0$ en 0 et avec $\varepsilon = 1$, soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in E, \ \|x\| < \delta \ \Rightarrow \ \|u(x)\| < 1$. Soit alors $x \in E \backslash \{0\}$, on pose $x' = \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}$ donc $\|u(x')\| < 1$ et ainsi $\|u(x)\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$

(2) $\Rightarrow$ (3) : On suppose $\forall x \in E, \ \|u(x)\| \leq C\|x\|$ puis soit $(x, y) \in E^2$ on a $\|u(x - y)\| \leq C\|x - y\|$ donc u est C-lipschitzienne $\square$

Notation On note $\mathcal{L}_c(E, F) = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid u$ est continue $\}$

Norme subordonnée

• Soit (E, N) et (F, N') des K espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on pose $|||u||| = \sup\{N'(u(x)) \mid x \in E \text{ et } N(x) \leq 1\} = \sup\limits_{N(x)\leq 1} N'(u(x))$

• $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un K espace vectoriel et $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. On l'appelle *nome subordonnée* à N et N' ou encore *norme d'opérateur* notée $\|.\|_{\text{op}}$

Démonstration.

— Si $u = 0$ alors $|||u||| = 0$, réciproquement si $|||u||| = 0$, $\forall x \in B_f(0, 1), u(x) = 0$ Soit $x \in E\backslash\{0\}$ en posant $x' = \frac{x}{\|x\|}$ on a $\frac{1}{\|x\|}u(x) = 0$ donc $u(x) = 0$

— $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $\forall k \in K$ on a $|||\lambda u||| = |\lambda|\, |||u|||$

— Soit $(u, v) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on pose $w = u + v$, soit $x \in B_f(0, 1)$ on a $\|w(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq |||u||| + |||v|||$ et ainsi $|||u||| + |||v|||$ est un majorant de $X = \{\|w(x)\| \mid x \in B_f(0, 1)\}$ or $|||w|||$ est le plus petit majorant de X donc $|||w||| \leq |||u||| + |||v|||$

□

Lemme 2.3.12.

(E, N) , (F, N') des espaces vectoriels normés et $E \neq \{0\}$
Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ Alors $|||u||| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup\limits_{x\in E\backslash\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

Note. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ Si $E \neq \{0\}$, $|||u|||$ est le plus petit $k \in \mathbf{R}^+$ tel que $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq k\|x\|$ (c'est vrai même si $E = \{0\}$) ainsi $|||u|||$ *est la plus petite constante de* Lipschitz *de u*
On a donc $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $\forall x \in E$, $\boxed{\|u(x)\| \leq |||u|||\, \|x\|}$

Théorème 2.3.13.

(E, N), (F, N'), (G, n'') des espaces vectoriels normés quelconques avec $E \overset{u}{\to} F \overset{v}{\to} G$ et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$
Alors $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et $|||v \circ u||| \leq |||u|||.|||v|||$

Démonstration. $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$ car linéaire et continue puis u est $|||u|||$-lipschitzienne et
v est $|||v|||$-lipschitzienne donc $v \circ u$ est $|||u|||.|||v|||$-lipschitzienne du coup $|||v \circ u||| \leq |||u|||.|||v|||$ □

Note. $\forall u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E)$ et $|||v \circ u||| \leq |||u||| \times |||v|||$
On dit aussi que $|||.|||$ est une norme *sous-multiplicative* ou une *norme d'algèbre*

Lemme 2.3.14.

Lorsque $E \neq \{0\}$, $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F)$

$$\begin{array}{rcl} u \in \mathcal{C}^0(E,F) & \Leftrightarrow & u \text{ bornée sur } B_f(0,1) \\ & \Leftrightarrow & u \text{ est bornée sur } S(0,1) \end{array}$$

Lemme 2.3.15.

Soit $X \subset \mathbb{R}$ *non vide et majorée et* $\mu \in \mathbb{R}^+$ *Alors* $\sup(\mu X) = \mu(\sup X)$

Théorème 2.3.16.

$E_1, \ldots, E_n$ *des espaces vectoriels normés*
$\varphi : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ *une application* n*-linéaire,*
$W = E_1 \times \cdots \times E_n$ *muni de la norme produit*
Alors (φ *est continue*) $\Leftrightarrow$ $(\exists M \in \mathbb{R}^+ : \forall (x_1, \ldots, x_n) \in W, \|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\| \leq M \times \|x_1\| \times \cdots \times \|x_n\|)$

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ On fixe $M \geq 0$ vérifiant la propriété.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in W$ et $y \in W \cap B_f(x, 1)$

$$\begin{array}{rcl} \varphi(y) - \varphi(x) & = & \varphi(y_1, \ldots, y_n) - \varphi(x_1, \ldots, x_n) \\ & = & \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) - \varphi(x_1, y_2, \ldots, y_n) + \varphi(x_1, y_2, \ldots, y_n) \\ & & \quad -\varphi(x_1, x_2, y_3, \ldots, y_n) + \\ & & \quad \vdots \\ & & +\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n) - \varphi(x_1, \ldots, x_n) \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i - x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) \end{array}$$

ainsi $\|\varphi(y) - \varphi(x)\| \leq \sum_{i=1}^{n} M \|x_1\| \cdots \|x_{i-1}\| . \|y_i - x_i\| . \|y_{i+1}\| \cdots \|y_n\|$
or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\|y_i - x_i\| \leq \|y - x\|$ et $\forall j$, $\|y_j\| \leq \|x_j\| + \|y_j - x_j\| \leq \|x\| + 1$
donc $\|\varphi(y) - \varphi(x)\| \leq nM(\|x\| + 1)^{n-1}. \|y - x\|$ du coup $\varphi(y) \underset{y \to x}{\longrightarrow} \varphi(x)$ donc φ est continue
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\varphi \in \mathcal{C}^0(W, F)$ alors φ est $\mathcal{C}^0$ en 0 donc soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in B(0, \delta)$, $\|\varphi(x)\| < 1$ Soit $x \in W$
• Si $\forall i$, $x_i \neq 0$, posons $x'_i = \frac{x_i}{\|x_i\|} \frac{\delta}{2}$ et $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ donc $\|\varphi(x')\| < 1$ or $\varphi(x') = \frac{\delta^n}{2^n} \frac{1}{\|x_1\| \cdots \|x_n\|} \varphi(x)$
donc $\|\varphi(x)\| \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \|x_i\| = M \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$
• Si $\exists i_0$ tel que $x_{i_0} = 0$ alors $\varphi(x) = 0$ donc $\|\varphi(x)\| \leq M \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$ □

2.4 Image réciproque et continuité

L'idée générale est ici de travailler dans A munie de la distance induite par la norme de E.

Note. Soit $a \in A$ et $r \in \mathbb{R}+$ alors on note $B^A(a, r) = \{x \in A,\ d(x, a) < r\} = A \cap B(a, r)$

Voisinage relatif Soit $a \in A$ et $V \subset A$ alors V est dit voisinage relatif de a s'il existe $r > 0$ tel que $B^A(a, r) \subset V$

Ouvert relatif Soit $U \subset A$ alors U est dit ouvert relatif de A s'il est voisinage relatif de chacun de ses points. *i.e.* $\forall x \in U, \exists r > 0 \ : \ B^A(x,r) \subset U$

Théorème : Caractérisation des ouverts relatifs.

Soit $U \subset A$ alors :
U ouvert relatif de $A \Leftrightarrow \exists U'$ ouvert de E tel que $U = A \cap U'$

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ Soit U' ouvert de E tel que $A \cap U' = U$ alors
Soit $x \in U = A \cap U'$ alors $\exists r > 0$ tel que $A \cap B(x,r) \subset U$
donc U est un voisnage relatif de x
Par définition, U est un ouvert relatif sur A
$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall x \in U$ ouvert relatif $\exists r_x > 0$ tel que $A \cap B(x, r_x) \subset U$,
alors $U' = \bigcup\limits_{x \in U} B(x, r_x)$ est un ouvert de E et $U = A \cap U'$ □

Fermé relatif Soit $\Phi \subset A$ alors Φ est dit fermé relatif de A si $A \backslash \Phi$ est un ouvert relatif de A.

Théorème : Caractérisation des fermés relatifs.

Soit $\Phi \subset A$ alors :
Φ fermé relatif de $A \Leftrightarrow \exists \Phi'$ fermé de e tel que $\Phi = A \cap \Phi'$

Démonstration. Clair en considérant $U = A \backslash \Phi$ □

Théorème 2.4.1.

Soit $X \subset A$ alors X est un fermé relatif de $A \Leftrightarrow$
Pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbf{N}}$ qui converge vers $a \in A$ on a $a \in X$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $(x_n) \in X^{\mathbf{N}}$ avec $x_n \underset{n}{\to} a \in A$
Si $a \in A \backslash X$ alors $\exists r > 0$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que $\forall \geq n_0, \ x_n \in B(x_n, a) \cap A$ du coup $x_{n_0} \in A \backslash X$ (*impossble !*) donc $a \in X$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposée on suppose $\exists \xi_0 \in A \backslash X \ : \ \forall r > 0 \exists x \in A \cap B(\xi_0, r)$ tel que $x \in X$. On a alors $\forall n \in \mathbf{N}, \ \exists x_n$ tel que $d(x_n, \xi_0) < \frac{1}{n+1}$ d'où $(x_n) \in X^{\mathbf{N}}$ avec $x_n \underset{n}{\to} \xi_0$ mais $\xi_0 \notin X$ □

Théorème 2.4.2.

Soit $A \subset E$ et E, F des espaces vectoriels normés
$f \in C^0(A, F)$ et $Y \subset F$ alors
1) Y fermé $\Rightarrow f^{-1}(Y)$ fermé relatif de A
2) Y ouvert $\Rightarrow f^{-1}(Y)$ ouvert relatif de A

Démonstration.
1) Soit $f^{-1}(Y) = \{x \in A \ , \ f(x) \in Y\}$ et soit $(x_n) \in (f^{-1}(Y))^{\mathbf{N}}$ tel que $x_n \underset{n}{\to} a \in A$ Comme f est $\mathcal{C}^0$ on a $f(x_n) \underset{n}{\to} f(a) \in A$ car $a \in f^{-1}(Y)$ donc par théorème $f^{-1}(Y)$ est un fermé relatif.
2) Clair avec $F \backslash Y$ ouvert de F □

Cas particulier Lorsque $A = E$ alors $\forall \ Y \subset F$, $\begin{cases} Y \text{ fermé} \Rightarrow \ f^{-1}(Y) \text{ fermé} \\ Y \text{ ouvert} \Rightarrow \ f^{-1}(Y) \text{ ouvert} \end{cases}$

2.5 Compacité

2.5.1 Compacité dans un espace vectoriel normé quelconque

Partie compacte On dit que A est une partie compacte de E (ou compact de E) si toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui converge vers un élément de A.

Lemme 2.5.1.
A est compacte $\Rightarrow$ A est fermée et bornée

Lemme 2.5.2.
Soit A un compact et X fermé alors $A \cap X$ est compact

Théorème 2.5.3.
Soit A un compact et $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ alors :
(a_n) converge $\Leftrightarrow$ (a_n) admet au plus une valeur d'adhérence

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ Vu A compact, $\exists \left(a_{\varphi(n)}\right)_{n \geq 0}$ qui converge vers $\alpha \in A$.
Supposons $\exists \varepsilon_0 > 0 \ : \ \forall n \in \mathbf{N}, \ \exists n \geq n_0 \ : \ d(a_n, \alpha) \geq \varepsilon_0$ ainsi $\{n \in \mathbf{N} \| d(a_n, \alpha) \geq \varepsilon_0\}$ est infini donc $\exists \varphi\prime : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $\forall k \in \mathbf{N}, \ d(a_{\varphi\prime(k)}, \alpha) \geq \varepsilon_0$ donc par compacité $\exists \psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $a_{\varphi\prime(\psi(n))} \underset{n}{\to} \beta \in A$ et comme (a_n) admet au plus une valeur d'adhérence, $\beta = \alpha$ *impossible !*
Donc $a_n \underset{n}{\to} \alpha$ □

Théorème 2.5.4.
Soit $E_1, \ldots, E_r$ des espaces vectoriels normés et
$A_1 \subset E_1, \ldots, A_r \subset E_r$ des compacts
Alors $A_1 \times \cdots \times A_r$ est un compact de $E_1 \times \cdots \times E_r$

Continuité uniforme Si E, F est un espace vectoriel normé et $f : A \to F$ alors f est dite *uniformément continue* si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ \forall (x,y) \in A^2,\ d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Théorème 2.5.5.
Soit $f \in C^0(A, F)$ alors si A est compact $f(A)$ est compact.
"L'image continue d'un compact est un compact."

Démonstration. Soit $a_{\varphi(n)} \underset{n}{\to} \alpha \in A$ alors $f(a_{\varphi(n)}) \underset{n}{\to} f(\alpha) \in f(A)$ □

Théorème de Heine.
Toute application continue sur un compact est uniformément continue.

Démonstration. Par l'absurde :
On suppose $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \exists (x,y) \in A^2 : d(x,y) < \delta$ et $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$
On pose alors (x_n) et (y_n) vérifiant ces propriétés avec $\delta_n = \frac{1}{n+1}$ et $x_{\varphi(n)} \underset{n}{\to} \alpha \in A$ puis on a $\|f(x_n) - f(y_n)\| \underset{n}{\to} 0$ d'où la contradiction. □

Lemme 2.5.6.
Soit $X \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré alors sup$(X) \in \overline{X}$

Théorème 2.5.7.
Soit $f \in C^0(A, \mathbb{R})$
Si A est un compact non vide alors f admet un maximum sur A

Note. PG -> On dit que "f est bornée et atteind ses bornes"

Démonstration. Soit $B = f(A) \neq \emptyset$, B est borné comme image continue d'un compact.
Soit alors $\beta = \sup(B)$. On a donc $\beta \in \overline{B} = B$ donc $\begin{cases} \beta \text{ majore } B \\ \beta \in B \end{cases}$ d'où $\beta = \max(B)$ □

2.5.2 Compacité en dimension finie

Rappel :

Théorème de *Bolzano-Weierstrass*.
Dans $\mathbb{R}$, tout segment $[a, b]$ est compact.

Corollaire.
Sur un K-ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration. Voir la fin du chapitre. □

Théorème 2.5.8.
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $A \subset E$ alors A compact $\Leftrightarrow$ A fermé et borné

Démonstration. On démontre le cas où $K = \mathbb{R}$ avec N_∞ pour se ramener à $[-M, M]$ puis on en déduit le cas où $K = \mathbb{C}$ □

Théorème 2.5.9.
Soit E un espace vectoriel normé quelconque si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel avec $\dim F < \infty$ alors F est fermé

Démonstration. On montre la stabilité par passage à la limite en considérant M un majorant des x_n et le compact $Bf(0, M)$ □

Théorème 2.5.10.
Soit E, F des espaces vectoriels normé avec E de dimension finie, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors u est continue.

Démonstration. Soit $e = (e_1, \ldots, e_p)$ base de E, on *choisit* $\|x\| = \max\limits_{1\leq k\leq p} |x_k|$ où $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$. Soit $x \in E$, $\|u(x)\| = \left\|\sum_{k=1}^{p} x_k u(e_k)\right\| \leq \sum_{k=1}^{p} |x_k| \|u(e_k)\|$
Posons alors $C = \sum_{k=1}^{p} \|u(e_k)\|$ alors $\|u(x)\| \leq C\|x\|$ et comme u est linéaire, $u \in \mathcal{C}^0(E, F)$ □

Corollaire.
E est un K espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et $e = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Pour $i \in [\![1, p]\!]$ on pose $e_i^* : \begin{array}{l} E \to K \\ x \mapsto x_i \end{array}$ alors e_i^* est linéaire donc $\mathcal{C}^0$

Théorème 2.5.11.
$E_1, \ldots, E_r, F$ des espaces vectoriels de dimensions finies et $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_r \to F$ r-linéaire alors $\varphi \in \mathcal{C}^0(E_1 \times \cdots \times E_r, F)$

2.5.3 Applications aux séries en dimension finie

Théorème 2.5.12.
En dimension finie, la convergence absolue entraine la convergence

Démonstration. Soit E un K espace vectoriel normé de dimension finie et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $a_n = \|u_n\|$. On suppose alors que $\sum a_n$ converge en on note $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$
●$\forall n \in \mathbb{N},\ \|U_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \alpha$ donc $U_n \in Bf(0, \alpha)$ compact
●(U_n) admet au plus 1 valeur d'adhérence car $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$,
$\|U_p - U_n\| \leq |A_p - A_n|$ donc $\|U_{\varphi(n)} - U_{\psi(n)}\| \leq |A_{\varphi(n)} - A_{\psi(n)}| \underset{n}{\to} 0$ □

Séries de matrices Soit $E = \mathcal{M}_p(K)$ muni d'une *norme d'algèbre* (tq $\forall (A, B) \in E^2,\ \|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$)

- Si $A \in E$ alors $\sum \frac{1}{n!} A^n$ converge et on pose $\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$
- Si $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$ alors $\sum A^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$

2.6 Connexité par arcs

Chemin Pour $A \subset E$,

- Soit $x, y \in A$ on appelle *chemin* (ou chemin continu) de x à y *dans* A toute application $\gamma \in \mathcal{C}^0([u, v], A)$ où $u < v$ réels tels que $\gamma(u) = x$ et $\gamma(v) = y$.
- On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur A par $\forall (x, y) \in A^2 : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$ il existe un chemin de x à y.

Lemme 2.6.1.
$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A

Composantes connexes On appelle *composante connexes par arcs* les classes d'équivalences dans A par $\mathcal{R}$.

Rappel. $\forall x \in A,\ Cl\{x\} = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$

Connexité par arcs A est dite *connexe par arcs* si $\forall (x, y) \in A^2,\ x\mathcal{R}y$
A est connexe par arcs si pour tout $x, y \in A$ il existe un chemin de x à y dans A.

Lemme 2.6.2.
A convexe $\Rightarrow$ A connexe par arcs

Partie étoilée $A \subset E$ est dite *étoilée* s'il existe $\alpha \in A$ tel que $\forall b \in A,\ [\alpha, b] \subset A$

Lemme 2.6.3.
A étoilée $\Rightarrow$ *A connexe par arcs*

Cas de $\mathbb{R}$: $\forall A \subset \mathbb{R}$, A convexe $\Leftrightarrow$ A intervalle

Théorème 2.6.4.
Dans $\mathbb{R}$*, les parties connexes par arcs sont exactement les intervalles.*

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Soient $a, b \in A$ avec $a \leq b$ et $c \in [a, b]$ alors par TVI $\exists \theta \in [0, 1]$ et $\gamma \in \mathcal{C}^0([0, 1], A)$ tels que $c = \gamma(\theta)$ donc $c \in A$. □

Théorème 2.6.5.
L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs
Autrement dit soit $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$ *avec* F *un espace vectoriel normé alors* A *connexe par arcs* $\Rightarrow f(A)$ *connexe par arcs*

Démonstration. Soit $x, y \in f(A)$ avec $\begin{array}{l} x' \in A \text{ tel que } x = f(x') \\ y' \in A \text{ tel que } y = f(y') \end{array}$ on pose $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma : [0, 1] \to f(a)$
alors $\tilde{\gamma}$ est $\mathcal{C}^0$ et $\tilde{\gamma}(0) = x$ et $\tilde{\gamma}(1) = y$ donc par définition $f(A)$ est connexe par arcs. □

⋆ ⋆ ⋆

Table des matières