

# *Cours de Maths Spé*

Ce document est une synthèse du cours de mathématiques dispensé par M. Jean-François Mallordy en classe préparatoire au lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand en 2022-2023. Il s'agit d'un complément au cours de Maths Spé et ne saurait en aucun cas y être un quelconque remplacement !

---

*Paris, 2024*

Mis en forme par  
Émile Sauvat  
`emile.sauvat@ens.psl.eu`

# Chapitres

<b>1</b>	<b>Suites et séries</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Limites et continuité</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>Dérivation et intégration</b>	<b>31</b>

# Chapitre 1

## Suites et séries

On considérera comme acquis en sup les cas réel et complexe : Notamment :  
-> Théorème des gendarmes                      -> Théorème de la limite monotone

### 1.1 Norme

#### 1.1.1 Généralités

---

**Norme** Une *norme* sur  $E$  est une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- $\forall x \in E, N(x) = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x = 0_E$
  - $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda.x) = |\lambda| N(x)$
  - $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$
- 

**Lemme 1.1.1.**

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé,  
On a  $N \geq 0$  (i.e.  $\forall x \in E, N(x) \geq 0$ )

---

**Distance** Une *distance* sur  $X$  est une application  $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  - $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
  - $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- 

**Lemme 1.1.2.**

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé.  
Si  $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = N(x - y)$  alors  $d$  est une distance sur  $E$ .

**Boule ouverte et fermée** Soient  $a \in E$ ,  $r \in \mathbf{R}$  On pose

$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\} \quad B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) \leq r\}$$

Les *boules ouverte et fermée* de centre  $a$  et de rayon  $r$ .

**Segment et ensemble convexe** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$  espace vectoriel quelconque

-> Pour  $(a, b) \in E^2$  on définit le *segment* :  $[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$

->  $C \subset E$  est dit *convexe* si  $\forall (a, b) \in C^2$ ,  $[a, b] \subset C$

**Lemme 1.1.3.**

Dans  $E$  un EVN quelconque les boules sont convexes

### 1.1.2 Normes euclidiennes

Ici  $E$  est un  $\mathbf{R}$  espace vectoriel muni d'un produit scalaire<sup>1</sup>

$$\Phi : \begin{pmatrix} E^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x \rangle y \end{pmatrix}$$

On a alors par théorème<sup>2</sup>,  $x \mapsto \sqrt{\langle x \rangle x}$  est une norme sur  $E$ . On notera

$$\|x\|_2 = N_2(x) = \sqrt{\langle x \rangle x}$$

*Note.* L'inégalité triangulaire pour  $\|\cdot\|_2$  est dite inégalité de *Minkovsky*

**Lemme 1.1.4.**

Si  $E = \mathbf{C}^n$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $N(z) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2}$  est une norme

**Lemme 1.1.5.**

$E = C^0([a, b], \mathbf{C})$  Soit  $f \in E$  on pose

$N(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$  alors  $N$  est une norme sur  $E$

1. Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive

2. Voir cours de sup

### 1.1.3 Exemple de normes

**Norme  $N_\infty$  :**

Dans  $E = K^n$  soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $N_\infty(x) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$   
 Dans  $E = C^0([a, b], K)$  soit  $f \in E$ ,  $N_\infty(f) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

**Norme  $N_1$  :**

Dans  $E = K^n$  soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$   
 Dans  $E = C^0([a, b], K)$  soit  $f \in E$ ,  $N_1(f) = \int_a^b |f(x)| dx$

**Norme  $N_2$  :**

Dans  $E = K^n$  soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$   
 Dans  $E = C^0([a, b], K)$  soit  $f \in E$ ,  $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}$

## 1.2 Suites

**Suite convergente** Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in E$ . On dit que  $u$  converge vers  $\ell$  et on note

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, d(u_n, \ell) < \varepsilon$$

**Lemme 1 : Unicité de la limite.**

Si  $\begin{matrix} u_n \xrightarrow{n} \ell_1 \in E \\ u_n \xrightarrow{n} \ell_2 \in E \end{matrix}$  Alors  $\ell_1 = \ell_2$

*Démonstration.* Par l'absurde, on suppose  $\ell_1 \neq \ell_2$ .

Soit  $\varepsilon = \frac{1}{2}d(\ell_1, \ell_2) > 0$  On a alors  $\begin{matrix} n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1, d(u_n, \ell_1) < \varepsilon \\ n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2, d(u_n, \ell_2) < \varepsilon \end{matrix}$  et soit  $p = \max(n_1, n_2)$

$d(\ell_1, \ell_2) \leq d(\ell_1, u_p) + d(u_p, \ell_2) < 2\varepsilon = d(\ell_1, \ell_2)$  impossible □

**Lemme 1.2.1.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ ,  $\ell \in E$  Alors  $u_n \xrightarrow{n} \ell \Leftrightarrow \|u_n - \ell\| \xrightarrow{n} 0$

*Démonstration.* Notons  $v_n = \|u_n - \ell\|$  et  $\lambda = 0$  Alors  $d(u_n, \ell) = \|u_n - \ell\| = v_n = \|v_n - \lambda\| = d(v_n, \lambda)$

or  $u_n \xrightarrow{n} \ell$  ssi :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, d(u_n, \ell) < \varepsilon \Rightarrow d(v_n, \lambda) < \varepsilon \Rightarrow v_n \xrightarrow{n} 0$  □

**Lemme 1.2.2.**

Soient  $u_n, v_n \in E^{\mathbf{N}}$  et  $\lambda \in K$  si on a  $u_n \xrightarrow[n]{} \alpha$  et  $v_n \xrightarrow[n]{} \beta$   
 Alors  $\lambda u_n + v_n \xrightarrow[n]{} \lambda \alpha + \beta$

**Lemme : Inégalité triangulaire renversée.**

Soit  $x, y \in E$  alors  $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$

Démonstration.  $N(x) \leq N(x - y) + N(y) \Rightarrow \underbrace{N(x) - N(y)}_{t \in \mathbf{R}} \leq N(x - y)$

On conclut alors par argument de symétrie. □

**Lemme 1.2.3.**

Soit  $u_n \in E^{\mathbf{N}}$ ,  $\alpha \in K$  on a  $u_n \xrightarrow[n]{} \alpha \Rightarrow \|u_n\| \xrightarrow[n]{} \|\alpha\|$

Attention ! La réciproque est fausse !

**Suite bornée** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$  on dit que  $(u_n)$  est bornée si  $\exists M \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N}, \|u_n\| \leq M$ .

**Lemme 1.2.4.**

Toute suite  $(u_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbf{N}}$  convergente est bornée

**Lemme 1.2.5.**

On suppose  $\begin{cases} \lambda_n \xrightarrow[n]{} \mu \in K \\ u_n \xrightarrow[n]{} v \in E \end{cases}$  Alors  $\lambda_n u_n \xrightarrow[n]{} \mu v$

**Suite extraite** Soit  $u \in E^{\mathbf{N}}$  on appelle *suite extraite* (ou sous-suite) de  $u$  toute suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  où  $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  est une extractrice (injection croissante)  
 NB : en fait  $(v_n)_{n \geq 0} = (u_{\varphi(n)})_{n \geq 0} \Leftrightarrow v = u \circ \varphi$

**Valeur d'adhérence**  $\ell \in E$  est une valeur d'adhérence de  $u$  s'il existe une suite extraite de  $u$  qui converge vers  $\ell$ . On notera  $\mathcal{V}_u$  l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $u$ .

**Théorème 1.2.6.**

Soit  $u \in E^{\mathbb{N}}$  si  $u$  converge vers  $\ell \in K$  alors toute suite extraite de  $u$  converge vers  $\ell$

*Démonstration.* Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une extractrice et  $(v_n)_{n \geq 0} = (u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, d(u_n, \ell) < \varepsilon$  donc  $\varphi(n) \geq n_0$  et ainsi  $d(u_{\varphi(n)}, \ell) < \varepsilon$  et  $v_n \xrightarrow{n} \ell$   $\square$

**Corollaire.**

Toute suite admettant au moins 2 valeurs d'adhérence est divergente

## 1.3 Normes équivalentes

### 1.3.1 Définition

Soit  $E$  un  $K$  espace vectoriel,  $N$  et  $N'$  deux normes sur  $E$ .  $N$  et  $N'$  sont dites équivalentes ( $N \sim N'$ ) si  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha N \leq N' \leq \beta N$

*Note.* On peut aussi l'écrire  $N' \leq \beta N$  et  $N \leq \frac{1}{\alpha} N'$

**Lemme 1.3.1.**

Soit  $N, N'$  des normes équivalentes sur  $E$ ,  $u \in E^{\mathbb{N}}$ ,  $\ell \in E$  alors  
 1)  $u_n \xrightarrow{n} \ell$  dans  $(E, N) \Leftrightarrow u_n \xrightarrow{n} \ell$  dans  $(E, N')$   
 2)  $u$  est bornée dans  $(E, N) \Leftrightarrow u$  est bornée dans  $(E, N')$

**Lemme 1.3.2.**

Sur  $K^n$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_\infty$  sont équivalentes et plus précisément  

$$N_\infty \leq N_1 \leq \sqrt{n} N_2 \leq n N_\infty$$

### 1.3.2 Cas de espaces de dimension fini

*Rappel.* Un espace vectoriel  $E$  est de dimension finie s'il existe une famille d'éléments de  $E$  libre et génératrice, c'est alors une base de  $E$ .

**Théorème 1.3.3.**

Sur un  $K$ -ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Sera démontré ultérieurement.

**Corollaire.**

Dans un  $K$  espace vectoriel de dimension finie, la notion de convergence ne dépend pas de la norme.

Attention ! C'est faux en dimension quelconque !

**Lemme 1.3.4.**

Soit  $E$  de dimension finie et  $e = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ .

Soit  $(x_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$  et  $\alpha \in E$ . On écrit  $\begin{cases} x_n = x_{1,n}e_1 + \dots + x_{p,n}e_p \\ \alpha = \alpha_1e_1 + \dots + \alpha_pe_p \end{cases}$

On a alors  $x_n \xrightarrow[n]{} \alpha \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_{k,n} \xrightarrow[n]{} \alpha_k$

**Théorème 1.3.5.**

Soient  $p, q, r \in \mathbb{N}^*$   $\begin{cases} A_n \xrightarrow[n]{} A & \text{dans } \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \\ B_n \xrightarrow[n]{} B & \text{dans } \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}) \end{cases}$  Alors  $A_n B_n \xrightarrow[n]{} AB$

*Démonstration.* Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$   
 $(A_n B_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^q \underbrace{(A_n)_{i,k}}_{\rightarrow a_{i,k}} \underbrace{(B_n)_{k,j}}_{\rightarrow b_{k,j}} \xrightarrow[n]{} \sum_{k=1}^q a_{i,k} b_{k,j} = (AB)_{i,j}$  donc  $A_n B_n \xrightarrow[n]{} AB$

□

## 1.4 Comparaisons asymptotiques

Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

**Négligeabilité** On dit que  $u_n$  est négligeable devant  $v_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$  noté  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$  s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $(\delta_n)_{n \geq n_0}$  tel que

- $\forall n \geq n_0, u_n = \delta_n v_n$
- $\delta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

**Domination** On dit que  $u_n$  est dominée par  $v_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$  noté  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$  s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $(B_n)_{n \geq n_0}$  tel que

- $\forall n \geq n_0, u_n = B_n v_n$
- $(B_n)_{n \geq n_0}$  est bornée

**Équivalence** On dit que  $u_n$  est équivalent à  $v_n$ , noté  $u_n \sim v_n$  si :

$$u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$$



Note.  $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$

## 1.5 Séries dans un K espace vectoriel de dimension finie

Note. On note par abus "  $\dim E < \infty$  "

Le cas scalaire est abordé en MPSI.

Soit  $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$  ; pour  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ .

---

**Sommes partielles** La suite  $(U_n)$  est dite suite des *sommes partielles* associée à  $u$ .

---



---

**Série convergente** On dit que la *série de terme général*  $u_n$  converge si  $(U_n)$  converge.

Dans ce cas on pose  $\sum_0^{+\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \in E$

---

**Lemme 1.5.1.**

$(\sum u_n \text{ converge}) \Rightarrow \left( u_n \xrightarrow[n]{\phantom{0}} 0 \right)$

*Attention !* La réciproque est fausse ! (ex :  $(H_n)$ )

---

**Divergence grossière** Lorsque  $u_n \not\xrightarrow[n]{\phantom{0}} 0$ , la série  $\sum u_n$  est dite *grossièrement divergente* " $\sum u_n$  DVG" ainsi :  $(\sum u_n \text{ DVG} \Rightarrow \sum u_n \text{ DV})$

---

**Théorème : Reste d'une série convergente.**

On suppose  $\sum u_n$  converge, on note  $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$  la "limite de la somme" et  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  le "reste d'ordre  $n$ ".

Alors  $\left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, S = U_n + R_n \\ R_n \rightarrow 0 \end{array} \right.$

*Démonstration.* bien-fondé ?

Soit  $n \in \mathbb{N}$  pour  $m \geq n+1$ ,  $\sum_{k=n+1}^m u_k = U_m - U_n \xrightarrow[m]{\phantom{0}} S - U_n$  donc  $R_n$  existe avec  $R_n = S - U_n$

d'où  $S = U_n + R_n$  puis  $R_n = S - U_n \rightarrow S - S = 0$  □

**Lemme 1.5.2.**

Soit  $(u_n), (v_n) \in E^{\mathbb{N}}$  et  $\lambda \in K$

On suppose que  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent alors :

->  $\sum \lambda u_n + v_n$  converge

->  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n + v_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

---

**Convergence absolue** Soit  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$  on dit que  $\sum u_n$  converge absolument si  $\sum \|u_n\|$  converge.

---

Note. Vu  $\dim E < \infty$ , ceci ne dépend pas du choix de la norme

**Théorème 1.5.3.**

Dans un  $K$  espace vectoriel de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente " CVA  $\Rightarrow$  CV "

Sera démontré ultérieurement.<sup>1</sup>

Attention ! Faux dans un EVN quelconque !

**Lemme 1.5.4.**

Soit  $(E, N)$  un  $K$  espace vectoriel normé de dimension finie

On suppose que  $\sum u_n$  CVA. Alors  $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$

## 1.6 Complément sur les séries numériques

Rappel. Soit  $z \in \mathbb{C}$  alors  $\sum z^n$  CV  $\Rightarrow |z| < 1$

-> Lorsque  $|z| < 1$  on a  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

-> On définit  $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

### 1.6.1 Règle de *Dalembert*

**Théorème : Règle de *Dalembert*.**

Soit  $(u_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$

On suppose l'existence de  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tel que  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow \ell$

Alors : 1)  $\ell < 1 \Rightarrow \sum u_n$  CVA

2)  $\ell > 1 \Rightarrow \sum u_n$  DVG

---

1. TODO : add ref

*Démonstration.* 1) On suppose  $\ell < 1$  et on note  $r_n = \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ . On pose  $\theta \in [\ell, 1]$  et  $\varepsilon = \theta - \ell$ . On a alors

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |r_n - \ell| < \varepsilon$  soit en particulier  $r_n < \ell + \varepsilon = \theta$ . Ainsi  $\forall n \geq n_0, |u_{n+1}| < \theta |u_n|$

et  $|u_n| \leq \theta^{n-n_0} |u_{n_0}|$  (REC) On a alors  $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \underbrace{\theta^{-n_0} |u_{n_0}|}_{\text{cte}} \theta^n$  or  $\sum \theta^n$

converge car  $\theta \in ]0, 1[$

donc par théorème de comparaison  $\sum |u_n|$  converge.

2) On suppose  $\ell > 1$  et on fixe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $1 < \theta < \ell$ , on a alors

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, r_n > \theta$  (..)

on obtient  $|u_n| \rightarrow +\infty$  donc  $u_n \not\rightarrow_n 0$  donc  $\sum u_n$  DVG □

### 1.6.2 Séries alternées

---

**Définition** La série réelle  $\sum u_n$  est dite *alternée* si  $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n| \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n| \end{cases}$

---

**Théorème : Critère spécial des séries alternées.**

Soit  $(u_n)$  une suite, on suppose

1)  $\sum u_n$  est alternée

2)  $u_n \rightarrow 0$

3)  $(|u_n|)_{n \geq 0}$  décroît.

alors  $\sum u_n$  converge et de plus,  $\forall n \in \mathbb{N}$

->  $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

->  $R_n$  et  $u_{n+1}$  ont le même signe

->  $S$  est compris entre  $U_n$  et  $U_{n+1}$

### 1.6.3 Sommation des relations de comparaisons

**Théorème : Cas convergent.**

Soit  $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $v_n \geq 0, \forall n \geq n_0$ . On suppose que

$\sum u_n$  et  $\sum v_n$  converge et on pose  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  et  $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

Alors :

1)  $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow R_n = o_{n \rightarrow +\infty}(R'_n)$

2)  $u_n = \bigcirc_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow R_n = \bigcirc_{n \rightarrow +\infty}(R'_n)$

3)  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} R'_n$

**Théorème : Cas divergent.**

Soit  $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $v_n \geq 0, \forall n \geq n_0$ . On suppose que

$\sum u_n$  et  $\sum v_n$  diverge et on note  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$

Alors :

1)  $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow U_n = o_{n \rightarrow +\infty}(V_n)$

2)  $u_n = \bigcirc_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow U_n = \bigcirc_{n \rightarrow +\infty}(V_n)$

3)  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} V_n$

**Théorème de Cesàro.**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- 1) Si  $u_n \rightarrow \lambda$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \rightarrow \lambda$   
 2) Si  $u_n \rightarrow +\infty$  alors  $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \rightarrow +\infty$

*Démonstration.* 1) Supposons  $u_n \rightarrow \lambda$  alors  $u_n - \lambda = o(1)$ , on pose ensuite  $v_n = 1$  alors  $\sum v_n$  diverge et d'après le théorème de sommation en cas divergent

$$\sum_{k=0}^n u_k - \lambda = o\left(\underbrace{\sum_{k=0}^n 1}_{=n+1}\right) \Rightarrow \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n u_k\right) - \lambda \rightarrow 0$$

2) Supposons  $u_n \rightarrow +\infty$  et posons  $a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$  Soit  $A \in \mathbb{R}$  et  $A' = A + 1$  Soit  $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, u_n > A'$ , puis pour  $n \geq n_0$  :

$$a_n = \frac{1}{n+1} \left( \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k}_{=C} + \underbrace{\sum_{k=n_0}^n u_k}_{> A'(n-n_0+1)} \right) \text{ donc } a_n > \frac{C}{n+1} + A' \frac{n+1-n_0}{n+1} = A' + \frac{C-n_0 A'}{n+1}$$

Soit  $n_1 \geq n_0$  tel que  $\forall n \geq n_1, \left| \frac{C-A'n_0}{n+1} \right| < 1$  alors  $\forall n \geq n_1, a_n > A$  d'où  $a_n \rightarrow +\infty$   $\square$

## 1.7 Produit de deux séries absolument convergentes

**Produit de Cauchy** Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  des séries quelconques (convergentes ou non) de nombres complexes.

On pose  $\forall n \in \mathbb{N} : w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$  (somme finie !)

La série  $\sum w_n$  est appelée *produit de Cauchy* de  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ .

**Attention !**

Lorsque  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent on a pas forcément  $(\sum u_n) \times (\sum v_n) = \sum w_n$

**Théorème 1.7.1.**

Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent absolument alors :

- 1)  $\sum w_n$  CVA  
 2)  $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$

Signalé :

**Théorème de Mertens.**

Si  $\begin{cases} \sum u_n \text{ CVA} \\ \sum v_n \text{ converge} \end{cases}$   
 alors  $\sum w_n$  converge et  $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$

## 1.8 Dualité série-suite

*Toute suite peut-être envisagée comme une série*

Ici  $(E, N)$  est un EVN de dimension finie.

On pose  $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_n = a_n - a_{n-1} \end{cases}$  On a alors pour  $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{k=0}^n b_k = b_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_0 + a_n - a_0 = a_n \quad \text{soit} \quad a_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

On sait ensuite que  $(a_n)$  converge si et seulement si  $\sum b_k$  converge donc

$$(a_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \sum a_n - a_{n-1} \text{ converge}$$

★ ★ ★

## Chapitre 2

# Limites et continuité

Cadre :  $(E, N)$  est un espace vectoriel normé quelconque et  $A \subset E$

### 2.1 Ouverts et fermés

On considère ici  $A \subset E$  et  $\alpha \in E$

#### 2.1.1 Intérieurs

---

##### Point intérieur

->  $\alpha$  est un dit un point intérieur à  $A$  s'il existe un réel  $r > 0$  tel que  $B(\alpha, r) \subset A$

---

---

##### Intérieur

-> On pose  $\overset{\circ}{A} = \{x \in E \mid x \text{ est intérieur à } A\}$  dit *intérieur* de  $A$

---

---

##### Lemme 2.1.1.

| Soit  $A \subset E$  alors  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} \subset A$

##### Lemme : Croissance de l'intérieur.

| Soit  $A, B \subset E$  alors  $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$

#### 2.1.2 Ouverts

---

**Définition** Dans  $(E, N)$  on appelle *ouvert* (ou *partie ouverte*) **toute** réunion de boules ouvertes.

---

**Théorème : Caractérisation des ouverts.**Soit  $U \subset E$  alors $(U \text{ ouvert}) \Leftrightarrow (\forall x \in U, \exists r > 0 : B(x, r) \subset U)$ *Démonstration.*

$\Leftarrow$  Pour chaque  $x \in U$ , on choisit  $r_x$  tel que  $B(x, r_x) \subset U$  alors  $U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x)$  donc par définition,  $U$  est un ouvert.

$\Rightarrow$  On note  $U = \bigcup B(x_i, r_i)$ , soit  $x \in U$  et  $i_0 \in I$  tel que  $x \in B(x_{i_0}, r_{i_0})$

Soit  $r = r_{i_0} - d(x, x_{i_0}) > 0$  alors  $B(x, r) \subset B(x_{i_0}, r_{i_0})$ 

Soit  $y \in B(x, r)$  c'est-à-dire  $d(x, y) < r$  alors

$$d(y, x_{i_0}) \leq d(y, x) + d(x, x_{i_0}) < r_{i_0}$$

Ainsi  $\forall x \in U, \exists r > 0 : B(x, r) \subset U$ 

□

**Corollaire.**Soit  $U \subset E$  alors  $U \text{ ouvert} \Leftrightarrow U \subset \mathring{U} \Leftrightarrow U = \mathring{U}$ Note.  $\mathcal{T} = \{U \subset E \mid U \text{ est ouvert}\}$  est appelé *Topologie* de  $(E, N)$ **Théorème 2.1.2.**

1) Toute réunion d'ouvert est un ouvert.

2) Toute intersection finie d'ouvert est un ouvert.

*Démonstration.* On démontre la deuxième assertion-> Cas de l'intersection vide :  $\bigcap \emptyset = E$ 

-> Cas de 2 ouverts : Soit  $A, B$  deux ouverts de  $E$ , soit  $x \in A \cap B$ , on a  $\exists r_1, r_2 > 0$  tels que  $B(x, r_1) \subset A$  et  $B(x, r_2) \subset B$  alors soit  $r = \min(r_1, r_2)$ ,  $B(x, r) \subset A \cap B$  et par théorème (Page ??),  $A \cap B$  est un ouvert

-> Cas de  $p$  ouverts,  $p \in \mathbb{N}^*$  : par récurrence sur  $p$  avec le cas  $p = 2$ 

□

**2.1.3 Fermés**

**Lois de Morgan :**  ${}^c\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} {}^c A_i$  et  ${}^c\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} {}^c A_i$

**Définition** On appelle *fermé* tout complémentaire d'un ouvert de  $E$   
Ainsi  $A \text{ est fermé} \Leftrightarrow {}^c A \text{ est ouvert}$  avec  ${}^c A = C_E A$

**Théorème 2.1.3.**

1) Toute intersection de fermés est fermée.

2) Toute réunion finie de fermés est fermée.

*Démonstration.* 1) Soit  $(\Phi_i)_{i \in I}$  une famille de fermés de  $E$  on a  ${}^c(\bigcap_I \Phi_i) = \bigcup_I {}^c \Phi_i$  est un ouvert donc l'intersection des  $\Phi_i$  est fermée. □

### 2.1.4 Adhérence

---

**Point adhérent**  $\alpha$  est dit adhérent à  $A$  si  $\forall r > 0, B(\alpha, r) \cap A \neq \emptyset$

---



---

**Adhérence** On pose  $\overline{A} = \{x \in E \mid x \text{ est adhérent à } A\}$  dit adhérence de  $A$ .

---

**Lemme : Croissance de l'adhérence.**

Soit  $A, B \in E$  alors  $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

**Théorème 2.1.4.**

Soit  $\alpha \in E$  alors  $\alpha \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : a_n \xrightarrow[n]{} \alpha$

*Démonstration.*

$\Leftarrow$  Soit  $r > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que  $\forall n \geq n_0, d(a_n, \alpha) < r$  alors  $B(\alpha, r) \cap A \neq \emptyset$  donc  $\alpha \in \overline{A}$

$\Rightarrow$  Soit  $n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in B(\alpha, \frac{1}{n+1}) \cap A$  d'où  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  vérifie  $a_n \xrightarrow[n]{} \alpha$  □

**Théorème : Caractérisation des fermés.**

Soit  $A \subset E$ ,  $A$  est fermé si et seulement si  $A$  est stable par passage à la limite.

*Démonstration.*  $\Rightarrow$  Soit  $B = {}^c A$  et  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $a_n \xrightarrow[n]{} \alpha \in E$

Si  $\alpha \in B, \exists r > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que  $\forall n \geq n_0, a_n \in B(\alpha, r)$  soit  $a_{n_0} \in B(\alpha, r) \Rightarrow a_{n_0} \notin A$  (impossible !) d'où  $\alpha \in A$

$\Leftarrow$  Par contraposée, on suppose que  $B = {}^c A$  n'est pas un ouvert donc  $\exists \alpha \in B : \forall r > 0, \exists x \in B(\alpha, r)$  tel que  $x \notin B$ . On a alors  $\alpha \in \overline{A}$  et  $\alpha \in B$  soit  $\alpha \notin A$  d'où  $\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  avec  $a_n \xrightarrow[n]{} \alpha$ . On a donc trouvé une suite convergente d'éléments de  $A$  dont la limite n'est pas dans  $A$ . □

**Corollaire.**

Soit  $A \subset E$ , on a :  $A$  fermé  $\Leftrightarrow \overline{A} \subset A \Leftrightarrow \overline{A} = A$

**Lemme 2.1.5.**

Soit  $A \subset E$  alors  ${}^c(\overline{A}) = {}^c A$  et  ${}^c({}^c A) = \overline{A}$

**Lemme 2.1.6.**

- 1)  $\mathring{A}$  est un ouvert
- 2)  $\mathring{A}$  est le plus grand ouvert de  $E$  inclu dans  $A$



**Lemme 2.1.7.**

- 1)  $\overline{A}$  est un fermé
- 2)  $\overline{A}$  est le plus petit fermé de  $E$  contenant  $A$

**Théorème 2.1.8.**

Les notions suivantes, (notions topologiques) :

- point intérieur
- ouvert
- point adhérent
- fermé

sont invariants par passage à une norme équivalente.

*Démonstration.* On sait que la convergence d'une suite est invariante par norme équivalente (Page 7) donc on a l'invariance des notions "point adhérent" et "adhérence" ainsi que "point intérieur" par le complémentaire de l'adhérence (Page 16) puis par caractérisation séquentielle des fermés on a l'invariance de la notion "fermé" ainsi que "ouvert" par le complémentaire.  $\square$

**Lemme 2.1.9.**

- 1) Toute boule fermée est fermée
- 2) Toute sphère est fermée

---

**Frontière** Soit  $A \subset E$  on définit sa *frontière* comme  $F_r(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

---

**Lemme 2.1.10.**

$\forall A \subset E$ ,  $F_r(A)$  est fermée et  $F_r(A) = \overline{A} \cap \overline{{}^c A}$

---

**Densité** Soit  $D \subset A \subset E$  on dit que  $D$  est *dense* dans  $A$  si tout élément de  $A$  est limite d'une suite d'éléments de  $D$  soit

$$\forall a \in A, \exists (d_n) \in D^{\mathbb{N}} : d_n \xrightarrow{n} a$$


---

**Lemme 2.1.11.**

Soit  $D \subset A$  alors on a :  $D$  dense dans  $A \Leftrightarrow A \subset \overline{D}$

**Exemple** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  alors  $GL_n(K)$  dense dans  $\mathcal{M}_n(K)$

*Démonstration.* Soit  $M \in \mathcal{M}_n(K)$  et  $r = \text{rg}(M) \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Par théorème<sup>1</sup>  $\exists U, V \in GL_n(K) : M = UJ_r V$  posons alors pour  $p \in \mathbf{N}^*$   $J_r\left(\frac{1}{p}\right) = \text{Diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right)$  puis  $M_p = UJ_r\left(\frac{1}{p}\right)V$  alors  $M_p \in GL_n(K) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M \quad \square$

## 2.2 Limites

### 2.2.1 Cas général

Dans toute cette partie,  $F$  est un  $K$  espace vectoriel et  $f : A(\subset E) \rightarrow F$

**Définition** Soit  $\alpha \in \overline{A}$ ,  $b \in F$ . On dit que  $f$  admet  $b$  comme limite au point  $\alpha$ , noté  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b$  si  
 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tel que  $\forall x \in A$ ,  $d(x, \alpha) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$

#### Lemme 2.2.1.

Soit  $A(\subset E) \xrightarrow{f} B(\subset F) \xrightarrow{g} G$  et  $\alpha \in \overline{A}$ ,  $\beta \in \overline{B}$ ,  $c \in G$   
 Si on a  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \beta$  et  $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow \beta} c$  alors  $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} c$

#### Lemme 2.2.2.

Soit  $\alpha \in \overline{A}$ ,  $b \in F$ ,  $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$  avec  $\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b \\ a_n \xrightarrow{n} \alpha \end{cases}$   
 alors  $f(a_n) \xrightarrow{n} b$

#### Théorème : Caractérisation séquentielle d'une limite.

Soit  $\alpha \in \overline{A}$ ,  $b \in F$   
 Alors  $\left(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b\right) \Leftrightarrow \left(\forall (a_n) \in A^{\mathbf{N}}, (a_n \xrightarrow{n} \alpha) \Rightarrow (f(a_n) \xrightarrow{n} b)\right)$

*Démonstration.*  $\Rightarrow$  Lemme

$\Leftarrow$  Par contraposée on fixe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $\exists a_n$  tel que  $\begin{cases} d(a_n, \alpha) < \frac{1}{n+1} \\ d(f(a_n), b) \geq \varepsilon_0 \end{cases}$   
 D'où  $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$  telle que  $a_n \xrightarrow{n} \alpha$  et  $f(a_n) \not\xrightarrow{n} b \quad \square$

#### Lemme : Unicité de la limite.

Soit  $\alpha \in \overline{A}$ ,  $b_1 \in F$ ,  $b_2 \in F$   
 Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b_1$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b_2$  alors  $b_1 = b_2$

1. Voir cours de sup

**Lemme 2.2.3.**

Soit  $\alpha \in \bar{A}$  et  $b \in F$

On suppose que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b$  alors ceci reste vrai si

- On remplace  $\|\cdot\|_E$  par une norme équivalente
- On remplace  $\|\cdot\|_F$  par une norme équivalente

**Limite en  $\pm\infty$**  On dit que  $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} b$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}$  tel que  $\|x\| > M \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$

**Limite infinie** Ici  $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\alpha \in \bar{A}$

On dit que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} +\infty$  si  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$  tel que  $\forall x \in A, d(x, \alpha) < \delta \Rightarrow f(x) > M$

---

**Voisinage** Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé quelconque et  $\alpha \in E$   
 Soit  $V \subset E$  alors  $V$  est un *voisinage* de  $\alpha$  si  $\exists r > 0$  tel que  $B(\alpha, r) \subset V$   
 On peut noter  $\mathcal{V}_\alpha = \{V \subset E \mid V \text{ est } v(\alpha)\}$

---

Note.  $V \in \mathcal{V}_\alpha \Leftrightarrow \alpha \in \mathring{V}$

**Lemme 2.2.4.**

On suppose que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b \in F$

Alors  $f$  est bornée localement au voisinage de  $\alpha$  (noté  $v(\alpha)$ )

## 2.2.2 Produit fini d'espaces vectoriels normés

---

**Norme produit** Soient  $(E_1, N_1), \dots, (E_r, N_r)$  des  $K$  espaces vectoriels normés.

On note  $W = \prod_{i=1}^r E_i = E_1 \times \dots \times E_r$  et  $x = (x_1, \dots, x_r) \in W$

On pose  $\forall x \in W, N(x) = \max_{1 \leq i \leq r} \{N_i(x_i)\}$  alors  $\begin{cases} N \text{ est dite norme produit} \\ (E, N) \text{ est dit EVN produit} \end{cases}$

---

**Lemme 2.2.5.**

Soient  $U_1$  ouvert de  $(E_1, N_1)$

$\vdots$

$U_r$  ouvert de  $(E_r, N_r)$

alors  $U_1 \times \dots \times U_r$  est un ouvert de  $W$

Un produit fini d'ouvert est un ouvert

**Lemme 2.2.6.**

*Un produit fini de fermé est un fermé*

**Lemme 2.2.7.**

Soit  $u = (u_n) \in W^{\mathbb{N}}$ ,  $b \in W$  où  $W = \prod_{i=1}^r E_i$   
 On note  $u_n = (u_{1,n}, \dots, u_{r,n})$  et  $b = (b_1, \dots, b_r)$   
 alors  $u_n \xrightarrow[n]{} b \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, u_{i,n} \xrightarrow[n]{} b_i$

**Lemme 2.2.8.**

Soit  $f : A(\subset E) \rightarrow W = \prod_{i=1}^r E_i$ ,  $\alpha \in \overline{A}$  et  $b = (b_1, \dots, b_r) \in W$   
 On note  $\forall x \in A$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x))$   
 alors  $\left( f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} b \right) \Leftrightarrow \left( \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, f_i(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} b_i \right)$

**Lemme 2.2.9.**

$f_1 : A \rightarrow F$   
 $f_2 : A \rightarrow F$ ,  $\alpha \in \overline{A}, \lambda \in K$  et  $b_1, b_2 \in F$   
 On suppose que  $\begin{cases} f_1(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} b_1 \\ f_2(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} b_2 \end{cases}$  alors  $(\lambda f_1 + f_2)(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} (\lambda b_1 + b_2)$

**Lemme 2.2.10.**

Soit  $f : A(\subset E) \rightarrow F$  avec  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  une base de  $F$   
 On écrit  $f(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x) \varepsilon_i$  et  $b = \sum_{i=1}^p b_i \varepsilon_i$   
 alors  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} b \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} b_i$

## 2.3 Continuité

### 2.3.1 Cas général

---

**Continuité en un point** Soit  $f : A(\subset E) \rightarrow F$  et  $a \in A$  alors  
 $f$  est dite  $C^0$  en  $a$  si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0 : \forall x \in A, d(a, x) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$

---

**Lemme 2.3.1.**

$f C^0$  en  $a \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} f(a)$

**Lemme 2.3.2.**

$f C^0$  en  $a \Leftrightarrow (f \text{ admet une limite finie au point en } a)$

**Théorème : Caractérisation séquentielle de la continuité.**

Soit  $f : A(\subset E) \rightarrow F$  et  $a \in A$  alors  
 $f$  est continue au point  $a$  si et seulement si  
 $\left( \forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow{n} a \Rightarrow f(a_n) \xrightarrow{n} f(a) \right)$

*Démonstration.* Caractérisation séquentielle d'une limite Page 18 et Lemme.  $\square$

---

**Continuité**  $f$  est dite continue si  $\forall a \in A$ ,  $f$  est continue au point  $a$ .

---



---

**Fonction lipschitzienne** Soit  $f : A(\subset E) \rightarrow F$  et  $k \in \mathbb{R}^+$

- •  $f$  est dite  $k$ -lipschitzienne si  $\forall (x, y) \in A^2, d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y)$
  - •  $f$  est dite lipschitzienne s'il existe  $k \in \mathbb{R}^+$  tel que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne.
- 

**Lemme 2.3.3.**

$f$  est lipschitzienne  $\Rightarrow f$  est continue

*Attention !* La réciproque est fautive !

**Lemme 2.3.4.**

$A(\subset E) \xrightarrow{f_1} B(\subset F) \xrightarrow{f_2} G$ .

On suppose  $f_1$   $k_1$ -lipschitzienne et  $f_2$   $k_2$ -lipschitzienne alors  $f_2 \circ f_1$  est  $k_1 \times k_2$ -lipschitzienne

---

**Distance à un ensemble** Soit  $A \subset E$ ,  $A \neq \emptyset$  et  $x \in E$

$$d(x, A) = \inf\{d(x, \alpha) \mid \alpha \in A\}$$


---

**Théorème 2.3.5.**

Toute partie de  $\mathbb{R}$  non vide et minorée admet une borne inférieure

**Théorème 2.3.6.**

Soit  $A \subset E$ ,  $A \neq \emptyset$  alors  $\delta : E \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto d(x, A)$  est 1-lipschitzienne

*Démonstration.* Soit  $(x, y) \in E^2$  Soit  $\alpha \in A$ ,  $d(x, \alpha) \leq d(x, y) + d(y, \alpha)$  ainsi  $\forall \alpha \in A, \underbrace{d(x, A) - d(x, y)}_{\mu} \leq d(y, \alpha)$  donc  $\mu$  est un minorant de  $\{d(y, \alpha) \mid \alpha \in A\}$  donc  $\mu \leq d(y, A)$  d'où  $\underbrace{d(x, A) - d(y, A)}_{\theta} \leq d(x, y)$  et on a de même pour le couple  $(y, x)$ ,  $-\theta \leq d(y, x) = d(x, y)$   
 En bref :  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$  □

**Lemme 2.3.7.**

*La composée de deux applications continues est continue*

**Lemme 2.3.8.**

Pour  $f : A(\subset E) \rightarrow F$  et  $B \subset F$  on note  $f|_B$  la restriction  $\begin{matrix} B \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{matrix}$   
 Alors  $f$  continue  $\Rightarrow f|_B$  continue

**Lemme 2.3.9.**

- Une combinaison linéaire d'applications continues est continue
- Soit  $a \subset E$  et  $\begin{cases} f : A \rightarrow F \mathcal{C}^0 \\ \lambda : A \rightarrow K \mathcal{C}^0 \end{cases}$  Alors  $\begin{matrix} A \rightarrow F \\ x \mapsto \lambda(x)f(x) \end{matrix}$  est  $\mathcal{C}^0$

**Lemme 2.3.10.**

Soit  $f, g \in \mathcal{C}^0(A, F)$ ,  $E, F$  des espaces vectoriels normés  
 Soit  $D \subset A$  dense dans  $A$  et  $f|_D = g|_D$  alors  $f = g$

### 2.3.2 Cas des applications linéaires

**Théorème 2.3.11.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  alors  $u \in \mathcal{C}^0(E, F) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in E, \|u(x)\| \leq C\|x\| \Leftrightarrow u$  est lipschitzienne.

*Démonstration.* (1)  $\Rightarrow$  (2) : Si  $u \in \mathcal{C}^0(E, F)$  alors  $u$  est  $\mathcal{C}^0$  en 0 et avec  $\varepsilon = 1$ , soit  $\delta > 0$  tel que  $\forall x \in E, \|x\| < \delta \Rightarrow \|u(x)\| < 1$ . Soit alors  $x \in E \setminus \{0\}$ , on pose  $x' = \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}$  donc  $\|u(x')\| < 1$  et ainsi  $\|u(x)\| \leq \frac{2}{\delta} \|x\|$

(2)  $\Rightarrow$  (3) : On suppose  $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq C\|x\|$  puis soit  $(x, y) \in E^2$  on a  $\|u(x - y)\| \leq C\|x - y\|$  donc  $u$  est  $C$ -lipschitzienne □

**Notation** On note  $\mathcal{L}_c(E, F) = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid u \text{ est continue}\}$

---

**Norme subordonnée**

- Soit  $(E, N)$  et  $(F, N')$  des  $K$  espaces vectoriels normés et  $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$  on pose  $\|u\| = \sup\{N'(u(x)) \mid x \in E \text{ et } N(x) \leq 1\} = \sup_{N(x) \leq 1} N'(u(x))$
  - $\mathcal{L}_c(E, F)$  est un  $K$  espace vectoriel et  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{L}_c(E, F)$ . On l'appelle *norme subordonnée* à  $N$  et  $N'$  ou encore *norme d'opérateur* notée  $\|\cdot\|_{\text{op}}$
- 

**Démonstration.**

- Si  $u = 0$  alors  $\|u\| = 0$ , réciproquement si  $\|u\| = 0$ ,  $\forall x \in B_f(0, 1)$ ,  $u(x) = 0$  Soit  $x \in E \setminus \{0\}$  en posant  $x' = \frac{x}{\|x\|}$  on a  $\frac{1}{\|x\|} u(x) = 0$  donc  $u(x) = 0$
- $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ ,  $\forall k \in K$  on a  $\|ku\| = |k| \|u\|$
- Soit  $(u, v) \in \mathcal{L}_c(E, F)$  on pose  $w = u + v$ , soit  $x \in B_f(0, 1)$  on a  $\|w(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq \|u\| + \|v\|$  et ainsi  $\|u\| + \|v\|$  est un majorant de  $X = \{\|w(x)\| \mid x \in B_f(0, 1)\}$  or  $\|w\|$  est le plus petit majorant de  $X$  donc  $\|w\| \leq \|u\| + \|v\|$

□

**Lemme 2.3.12.**

$(E, N)$ ,  $(F, N')$  des espaces vectoriels normés et  $E \neq \{0\}$   
 Soit  $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$  Alors  $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

*Note.* Soit  $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$  Si  $E \neq \{0\}$ ,  $\|u\|$  est le plus petit  $k \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall x \in E$ ,  $\|u(x)\| \leq k \|x\|$  (c'est vrai même si  $E = \{0\}$ ) ainsi  $\|u\|$  est la plus petite constante de Lipschitz de  $u$

On a donc  $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ ,  $\forall x \in E$ ,  $\boxed{\|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|}$

**Théorème 2.3.13.**

$(E, N)$ ,  $(F, N')$ ,  $(G, n'')$  des espaces vectoriels normés quelconques  
 avec  $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$  et  $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ ,  $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$   
 Alors  $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$  et  $\|v \circ u\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

*Démonstration.*  $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$  car linéaire et continue puis  $u$  est  $\|u\|$ -lipschitzienne et  $v$  est  $\|v\|$ -lipschitzienne donc  $v \circ u$  est  $\|u\| \cdot \|v\|$ -lipschitzienne du coup  $\|v \circ u\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$  □

*Note.*  $\forall u, v \in \mathcal{L}_c(E)$ ,  $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E)$  et  $\|v \circ u\| \leq \|u\| \times \|v\|$

On dit aussi que  $\|\cdot\|$  est une norme *sous-multiplicative* ou une *norme d'algèbre*

**Lemme 2.3.14.**

Lorsque  $E \neq \{0\}$ ,  $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F)$   
 $u \in \mathcal{C}^0(E, F) \Leftrightarrow u$  bornée sur  $B_f(0, 1)$   
 $\Leftrightarrow u$  est bornée sur  $S(0, 1)$

**Lemme 2.3.15.**

Soit  $X \subset \mathbb{R}$  non vide et majorée et  $\mu \in \mathbb{R}^+$  Alors  $\sup(\mu X) = \mu(\sup X)$

**Théorème 2.3.16.**

$E_1, \dots, E_n$  des espaces vectoriels normés  
 $\varphi : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  une application  $n$ -linéaire,  
 $W = E_1 \times \dots \times E_n$  muni de la norme produit  
Alors  $(\varphi \text{ est continue}) \Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}^+ : \forall (x_1, \dots, x_n) \in W, \|\varphi(x_1, \dots, x_n)\| \leq M \times \|x_1\| \times \dots \times \|x_n\|)$

*Démonstration.*  $\boxed{\Leftarrow}$  On fixe  $M \geq 0$  vérifiant la propriété.

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in W$  et  $y \in W \cap B_f(x, 1)$

$$\begin{aligned} \varphi(y) - \varphi(x) &= \varphi(y_1, \dots, y_n) - \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) - \varphi(x_1, y_2, \dots, y_n) + \varphi(x_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\quad - \varphi(x_1, x_2, y_3, \dots, y_n) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) - \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i - x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \end{aligned}$$

ainsi  $\|\varphi(y) - \varphi(x)\| \leq \sum_{i=1}^n M \|x_1\| \dots \|x_{i-1}\| \cdot \|y_i - x_i\| \cdot \|y_{i+1}\| \dots \|y_n\|$   
or  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\|y_i - x_i\| \leq \|y - x\|$  et  $\forall j$ ,  $\|y_j\| \leq \|x_j\| + \|y_j - x_j\| \leq \|x\| + 1$   
donc  $\|\varphi(y) - \varphi(x)\| \leq nM(\|x\| + 1)^{n-1} \cdot \|y - x\|$  du coup  $\varphi(y) \xrightarrow{y \rightarrow x} \varphi(x)$  donc  $\varphi$  est continue

$\boxed{\Rightarrow}$  Si  $\varphi \in \mathcal{C}^0(W, F)$  alors  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^0$  en 0 donc soit  $\delta > 0$  tel que  $\forall x \in B(0, \delta)$ ,  $\|\varphi(x)\| < 1$  Soit  $x \in W$

• Si  $\forall i$ ,  $x_i \neq 0$ , posons  $x'_i = \frac{x_i}{\|x_i\|} \frac{\delta}{2}$  et  $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$  donc  $\|\varphi(x')\| < 1$  or  
 $\varphi(x') = \frac{\delta^n}{2^n \|x_1\| \dots \|x_n\|} \varphi(x)$

donc  $\|\varphi(x)\| \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \prod_{i=1}^n \|x_i\| = M \prod_{i=1}^n \|x_i\|$

• Si  $\exists i_0$  tel que  $x_{i_0} = 0$  alors  $\varphi(x) = 0$  donc  $\|\varphi(x)\| \leq M \prod_{i=1}^n \|x_i\|$   $\square$

## 2.4 Image réciproque et continuité

L'idée générale est ici de travailler dans  $A$  munie de la distance induite par la norme de  $E$ .

*Note.* Soit  $a \in A$  et  $r \in \mathbb{R}_+$  alors on note  $B^A(a, r) = \{x \in A, d(x, a) < r\} = A \cap B(a, r)$

**Voisinage relatif** Soit  $a \in A$  et  $V \subset A$  alors  $V$  est dit voisinage relatif de  $a$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B^A(a, r) \subset V$



---

**Ouvert relatif** Soit  $U \subset A$  alors  $U$  est dit ouvert relatif de  $A$  s'il est voisinage relatif de chacun de ses points. i.e.  $\forall x \in U, \exists r > 0 : B^A(x, r) \subset U$

---

**Théorème : Caractérisation des ouverts relatifs.**

Soit  $U \subset A$  alors :

$U$  ouvert relatif de  $A \Leftrightarrow \exists U'$  ouvert de  $E$  tel que  $U = A \cap U'$

*Démonstration.*  $\boxed{\Leftarrow}$  Soit  $U'$  ouvert de  $E$  tel que  $A \cap U' = U$  alors

Soit  $x \in U = A \cap U'$  alors  $\exists r > 0$  tel que  $A \cap B(x, r) \subset U$   
donc  $U$  est un voisinage relatif de  $x$

Par définition,  $U$  est un ouvert relatif sur  $A$

$\boxed{\Rightarrow}$   $\forall x \in U$  ouvert relatif  $\exists r_x > 0$  tel que  $A \cap B(x, r_x) \subset U$ ,  
alors  $U' = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x)$  est un ouvert de  $E$  et  $U = A \cap U'$   $\square$

---

**Fermé relatif** Soit  $\Phi \subset A$  alors  $\Phi$  est dit fermé relatif de  $A$  si  $A \setminus \Phi$  est un ouvert relatif de  $A$ .

---

**Théorème : Caractérisation des fermés relatifs.**

Soit  $\Phi \subset A$  alors :

$\Phi$  fermé relatif de  $A \Leftrightarrow \exists \Phi'$  fermé de  $E$  tel que  $\Phi = A \cap \Phi'$

*Démonstration.* Clair en considérant  $U = A \setminus \Phi$   $\square$

**Théorème 2.4.1.**

Soit  $X \subset A$  alors  $X$  est un fermé relatif de  $A \Leftrightarrow$

Pour toute suite  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $a \in A$  on a  $a \in X$

*Démonstration.*  $\boxed{\Rightarrow}$  Soit  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  avec  $x_n \xrightarrow{n} a \in A$

Si  $a \in A \setminus X$  alors  $\exists r > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que  $\forall n \geq n_0, x_n \in B(x_n, a) \cap A$  du coup  $x_{n_0} \in A \setminus X$  (impossible!) donc  $a \in X$ .

$\boxed{\Leftarrow}$  Par contraposée on suppose  $\exists \xi_0 \in A \setminus X : \forall r > 0 \exists x \in A \cap B(\xi_0, r)$  tel que  $x \notin X$ . On a alors  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n$  tel que  $d(x_n, \xi_0) < \frac{1}{n+1}$  d'où  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  avec  $x_n \xrightarrow{n} \xi_0$  mais  $\xi_0 \notin X$   $\square$

**Théorème 2.4.2.**

Soit  $A \subset E$  et  $E, F$  des espaces vectoriels normés  
 $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$  et  $Y \subset F$  alors

1)  $Y$  fermé  $\Rightarrow f^{-1}(Y)$  fermé relatif de  $A$

2)  $Y$  ouvert  $\Rightarrow f^{-1}(Y)$  ouvert relatif de  $A$

*Démonstration.*

- 1) Soit  $f^{-1}(Y) = \{x \in A, f(x) \in Y\}$  et soit  $(x_n) \in (f^{-1}(Y))^{\mathbb{N}}$  tel que  $x_n \xrightarrow{n} a \in A$ . Comme  $f$  est  $\mathcal{C}^0$  on a  $f(x_n) \xrightarrow{n} f(a) \in A$  car  $a \in f^{-1}(Y)$  donc par théorème  $f^{-1}(Y)$  est un fermé relatif.
- 2) Clair avec  $F \setminus Y$  ouvert de  $F$  □

*Cas particulier* Lorsque  $A = E$  alors  $\forall Y \subset F, \begin{cases} Y \text{ fermé} \Rightarrow f^{-1}(Y) \text{ fermé} \\ Y \text{ ouvert} \Rightarrow f^{-1}(Y) \text{ ouvert} \end{cases}$

## 2.5 Compacité

### 2.5.1 Compacité dans un espace vectoriel normé quelconque

---

**Partie compacte** On dit que  $A$  est une partie compacte de  $E$  (ou compact de  $E$ ) si toute suite d'éléments de  $A$  admet une sous-suite qui converge vers un élément de  $A$ .

---

**Lemme 2.5.1.**

$A$  est compacte  $\Rightarrow A$  est fermée et bornée

**Lemme 2.5.2.**

Soit  $A$  un compact et  $X$  fermé alors  $A \cap X$  est compact

**Théorème 2.5.3.**

Soit  $A$  un compact et  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  alors :  
 $(a_n)$  converge  $\Leftrightarrow (a_n)$  admet au plus une valeur d'adhérence

*Démonstration.*  $\boxed{\Leftarrow}$  Vu  $A$  compact,  $\exists (a_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  qui converge vers  $\alpha \in A$ .

Supposons  $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 : d(a_n, \alpha) \geq \varepsilon_0$  ainsi  $\{n \in \mathbb{N} \mid d(a_n, \alpha) \geq \varepsilon_0\}$  est infini donc  $\exists \varphi' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\forall k \in \mathbb{N}, d(a_{\varphi'(k)}, \alpha) \geq \varepsilon_0$  donc par compacité  $\exists \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $a_{\varphi'(\psi(n))} \xrightarrow{n} \beta \in A$  et comme  $(a_n)$  admet au plus une valeur d'adhérence,  $\beta = \alpha$  impossible !  
 Donc  $a_n \xrightarrow{n} \alpha$  □

**Théorème 2.5.4.**

Soit  $E_1, \dots, E_r$  des espaces vectoriels normés et  
 $A_1 \subset E_1, \dots, A_r \subset E_r$  des compacts  
 Alors  $A_1 \times \dots \times A_r$  est un compact de  $E_1 \times \dots \times E_r$

---

**Continuité uniforme** Si  $E, F$  est un espace vectoriel normé et  $f : A \rightarrow F$  alors  $f$  est dite *uniformément continue* si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in A^2, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

---

**Théorème 2.5.5.**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$  alors si  $A$  est compact  $f(A)$  est compact.  
 "L'image continue d'un compact est un compact."

*Démonstration.* Soit  $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n]{} \alpha \in A$  alors  $f(a_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n]{} f(\alpha) \in f(A)$  □

**Théorème de Heine.**

Toute application continue sur un compact est uniformément continue.

*Démonstration.* Par l'absurde :

On suppose  $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \exists (x, y) \in A^2 : d(x, y) < \delta$  et  $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$   
 On pose alors  $(x_n)$  et  $(y_n)$  vérifiant ces propriétés avec  $\delta_n = \frac{1}{n+1}$  et  $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n]{} \alpha \in A$  puis on a  $\|f(x_n) - f(y_n)\| \xrightarrow[n]{} 0$  d'où la contradiction. □

**Lemme 2.5.6.**

Soit  $X \subset \mathbb{R}$  non vide et majoré alors  $\sup(X) \in \overline{X}$

**Théorème 2.5.7.**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$   
 Si  $A$  est un compact non vide alors  $f$  admet un maximum sur  $A$

*Note.* PG -> On dit que " $f$  est bornée et atteint ses bornes"

*Démonstration.* Soit  $B = f(A) \neq \emptyset$ ,  $B$  est borné comme image continue d'un compact.

Soit alors  $\beta = \sup(B)$ . On a donc  $\beta \in \overline{B} = B$  donc  $\begin{cases} \beta \text{ majore } B \\ \beta \in B \end{cases}$  d'où  $\beta = \max(B)$  □

## 2.5.2 Compacité en dimension finie

*Rappel :*

**Théorème de Bolzano-Weierstrass.**

Dans  $\mathbb{R}$ , tout segment  $[a, b]$  est compact.

**Corollaire.**

Sur un  $K$ -ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

*Démonstration.* Voir la fin du chapitre.  $\square$

**Théorème 2.5.8.**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie et  $A \subset E$  alors  
 $A$  compact  $\Leftrightarrow A$  fermé et borné

*Démonstration.* On démontre le cas où  $K = \mathbf{R}$  avec  $N_\infty$  pour se ramener à  $[-M, M]$  puis on en déduit le cas où  $K = \mathbf{C}$   $\square$

**Théorème 2.5.9.**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé quelconque si  $F \subset E$  est un sous-espace vectoriel avec  $\dim F < \infty$  alors  $F$  est fermé

*Démonstration.* On montre la stabilité par passage à la limite en considérant  $M$  un majorant des  $x_n$  et le compact  $Bf(0, M)$   $\square$

**Théorème 2.5.10.**

Soit  $E, F$  des espaces vectoriels normés avec  $E$  de dimension finie, si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  alors  $u$  est continue.

*Démonstration.* Soit  $e = (e_1, \dots, e_p)$  base de  $E$ , on choisit  $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq p} |x_k|$  où  $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$ . Soit  $x \in E$ ,  $\|u(x)\| = \left\| \sum_{k=1}^p x_k u(e_k) \right\| \leq \sum_{k=1}^p |x_k| \|u(e_k)\|$   
 Posons alors  $C = \sum_{k=1}^p \|u(e_k)\|$  alors  $\|u(x)\| \leq C\|x\|$  et comme  $u$  est linéaire,  $u \in \mathcal{C}^0(E, F)$   $\square$

**Corollaire.**

$E$  est un  $K$  espace vectoriel de dimension  $p \in \mathbf{N}^*$  et  $e = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  on pose  $e_i^* : E \rightarrow K$   
 $x \mapsto x_i$  alors  $e_i^*$  est linéaire donc  $\mathcal{C}^0$

**Théorème 2.5.11.**

$E_1, \dots, E_r, F$  des espaces vectoriels de dimensions finies et  $\varphi : E_1 \times \dots \times E_r \rightarrow F$   $r$ -linéaire alors  $\varphi \in \mathcal{C}^0(E_1 \times \dots \times E_r, F)$

### 2.5.3 Applications aux séries en dimension finie

**Théorème 2.5.12.**

En dimension finie, la convergence absolue entraîne la convergence

*Démonstration.* Soit  $E$  un  $K$  espace vectoriel normé de dimension finie et  $(u_n) \in E^{\mathbf{N}}$ . On note  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $a_n = \|u_n\|$ . On suppose alors que  $\sum a_n$  converge en on note  $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $\|U_n\| \leq \sum_{k=0}^n a_k \leq \alpha$  donc  $U_n \in Bf(0, \alpha)$  compact
- $(U_n)$  admet au plus 1 valeur d'adhérence car  $\forall (n, p) \in \mathbf{N}^2$ ,  
 $\|U_p - U_n\| \leq |A_p - A_n|$  donc  $\|U_{\varphi(n)} - U_{\psi(n)}\| \leq |A_{\varphi(n)} - A_{\psi(n)}| \xrightarrow{n} 0$   $\square$

---

**Séries de matrices** Soit  $E = \mathcal{M}_p(K)$  muni d'une *norme d'algèbre* (tq  $\forall(A, B) \in E^2, \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ )

- Si  $A \in E$  alors  $\sum \frac{1}{n!} A^n$  converge et on pose  $\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$
  - Si  $A \in E$  telle que  $\|A\| < 1$  alors  $\sum A^n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$
- 

## 2.6 Connexité par arcs

---

**Chemin** Pour  $A \subset E$ ,

- Soit  $x, y \in A$  on appelle *chemin* (ou chemin continu) de  $x$  à  $y$  dans  $A$  toute application  $\gamma \in C^0([u, v], A)$  où  $u < v$  réels tels que  $\gamma(u) = x$  et  $\gamma(v) = y$ .
  - On définit une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $A$  par  $\forall(x, y) \in A^2 : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$  il existe un chemin de  $x$  à  $y$ .
- 

**Lemme 2.6.1.**

$\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $A$

---

**Composantes connexes** On appelle *composante connexes par arcs* les classes d'équivalences dans  $A$  par  $\mathcal{R}$ .

---

*Rappel.*  $\forall x \in A, Cl\{x\} = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$

---

**Connexité par arcs**  $A$  est dite *connexe par arcs* si  $\forall(x, y) \in A^2, x\mathcal{R}y$   
 $A$  est connexe par arcs si pour tout  $x, y \in A$  il existe un chemin de  $x$  à  $y$  dans  $A$ .

---

**Lemme 2.6.2.**

$A$  convexe  $\Rightarrow A$  connexe par arcs

---

**Partie étoilée**  $A \subset E$  est dite *étoilée* s'il existe  $\alpha \in A$  tel que  $\forall b \in A, [\alpha, b] \subset A$

---

**Lemme 2.6.3.**

$A$  étoilée  $\Rightarrow A$  connexe par arcs

Cas de  $\mathbb{R}$  :  $\forall A \subset \mathbb{R}$ ,  $A$  convexe  $\Leftrightarrow A$  intervalle

**Théorème 2.6.4.**

Dans  $\mathbb{R}$ , les parties connexes par arcs sont exactement les intervalles.

*Démonstration.*  $\boxed{\Rightarrow}$  Soient  $a, b \in A$  avec  $a \leq b$  et  $c \in [a, b]$  alors par TVI  $\exists \theta \in [0, 1]$  et  $\gamma \in \mathcal{C}^0([0, 1], A)$  tels que  $c = \gamma(\theta)$  donc  $c \in A$ .  $\square$

**Théorème 2.6.5.**

*L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs*  
*Autrement dit soit  $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$  avec  $F$  un espace vectoriel normé*  
*alors  $A$  connexe par arcs  $\Rightarrow f(A)$  connexe par arcs*

*Démonstration.* Soit  $x, y \in f(A)$  avec  $x' \in A$  tel que  $x = f(x')$   $y' \in A$  tel que  $y = f(y')$  on pose  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow f(A)$   
 alors  $\tilde{\gamma}$  est  $\mathcal{C}^0$  et  $\tilde{\gamma}(0) = x$  et  $\tilde{\gamma}(1) = y$  donc par définition  $f(A)$  est connexe par arcs.  $\square$

★      ★      ★

## Chapitre 3

# Dérivation et intégration

Cadre : Soit  $f : I \rightarrow E$  une fonction à valeur dans  $E$  un  $K$  espace vectoriel de dimension finie et  $I$  un intervalle réel non trivial (i.r.n.t.)

### 3.1 Dérivée

---

**Définition** Soit  $a \in I$ ,  $f$  est *dérivable* en  $a$  s'il existe  $\ell \in E$  tel que  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow{x \rightarrow a; x \leq a} \ell$ . On pose alors

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a; x \leq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

---

*Note.* On note  $\mathcal{T}_f(x, a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  le "taux d'accroissement"

Rq :  $\mathcal{T}_f(x, a) = \mathcal{T}_f(a, x)$

**Lemme 3.1.1.**

Soit  $a \in I$ , ( $f$  dérivable au point  $a$ )  $\Rightarrow$  ( $f$  continue au point  $a$ )

---

**Fonction dérivable**  $f : I \rightarrow E$  est dite *dérivable* (sur  $I$ ) si  $\forall a \in I$ ,  $f$  est dérivable au point  $a$

Dans ce cas on pose  $f' : \begin{matrix} I \rightarrow E \\ a \mapsto f'(a) \end{matrix}$  la *dérivée* de  $f$ .

---

---

**Fonction continuellement dérivable**  $f : I \rightarrow E$  est dite *continuellement dérivable* ou de *classe  $C^1$*  si  $f$  est dérivable et  $f' \in C^0(I, E)$ .  
On note  $C^1(I, E)$  l'ensemble de ces fonctions.

---

**Lemme 3.1.2.**

Soit deux fonctions  $f, g : I \rightarrow E$ ,  $\lambda \in K$ ,  $a \in I$ . Si  $f$  et  $g$  sont dérivables au point  $a$  alors

- (1)  $\lambda f + g$  est dérivable au point  $a$
- (2)  $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$

**Lemme 3.1.3.**

On considère la composition  $I \xrightarrow{f} E \xrightarrow{u} F$  et  $a \in I$  avec  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels normés de dimensions finies. On suppose  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $f$  dérivable au point  $a$  alors

- (1)  $u \circ f$  est dérivable au point  $a$
- (2)  $(u \circ f)'(a) = u(f'(a))$

**Lemme 3.1.4.**

Soit  $a \in I$  et  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  une base de  $E$ . Notons  $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)\varepsilon_k$ . On a alors  
 $f$  est dérivable en  $a \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k$  est dérivable en  $a$

Dans ce cas  $f'(a) = \sum_{k=1}^p f'_k(a)\varepsilon_k$

**Lemme 3.1.5.**

$\mathcal{C}^1(I, E)$  est un  $K$  espace vectoriel comme sous-espace vectoriel de  $E^I$

**Théorème 3.1.6.**

Soit  $\Phi : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$   $p$ -linéaire avec  $E_1, \dots, E_p$  de dimensions finies et  $a \in I$ . Soit  $f_1 : I \rightarrow E_1, \dots, f_p : I \rightarrow E_p$  dérivables au point  $a$

On pose  $g : I \rightarrow F$   
 $x \mapsto \Phi(f_1(x), \dots, f_p(x))$  alors

- (1)  $g$  dérivable au point  $a$
- (2)  $g'(a) = \sum_{i=1}^p \Phi(f_1(x), \dots, f'_i(x), \dots, f_p(x))$

*Démonstration.* Cas  $p = 2$  scalaire : Soit  $x \in I \setminus \{a\}$

$$\mathcal{T}_g(x, a) = \frac{1}{x-a} [B(f_1(x), f_2(x)) - B(f_1(a), f_2(a))]$$

$$= B(\mathcal{T}_{f_1}(x, a), f_2(x)) + B(f_1(a), \mathcal{T}_{f_2}(x, a))$$

Puis comme  $B$  est bilinéaire,  $B$  est  $\mathcal{C}^0$  donc  $\mathcal{T}_g(x, a) \xrightarrow{x \rightarrow a; x \leq a} B(f'_1(a), f_2(a)) + B(f_1(a), f'_2(a))$  donc  $g$  est dérivable au point  $a$

On a ensuite le résultat pour une application  $p$ -linéaire par récurrence puis dans le cas vectoriel en décomposant selon toute les bases.  $\square$

**Théorème 3.1.7.**

Soit la composition  $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{v} K$  avec  $I, J$  des i.r.n.t. et  $a \in I$ ,  $b = u(a) \in J$ . Si  $u$  dérivable au point  $a$  et  $v$  dérivable au point  $b$  alors

- (1)  $v \circ u$  est dérivable au point  $a$
- (2)  $(v \circ u)'(a) = v'(u(a)) \times u'(a)$



Composition vers un espace vectoriel de dimension finie :

**Corollaire.**

Soit  $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} E$  avec  $I, J$  des i.r.n.t. et  $E$  un  $K$  espace vectoriel de dimension finie,  $a \in I$ ,  $b = \varphi(a) \in J$ . Si  $\varphi$  dérivable au point  $a$  et  $f$  dérivable au point  $b$  alors

(1)  $f \circ \varphi$  est dérivable au point  $a$

(2)  $(f \circ \varphi)'(a) = f'(\varphi(a)) \times \varphi'(a)$

## 3.2 Dérivées successives

- On définit  $f^{(0)} = f$
- Si  $f'$  est dérivable sur  $I$  on pose  $f^{(1)} = f'$
- Pour  $k \in \mathbf{N}$ , si  $f^{(k)}$  est bien définie et dérivable sur  $I$  on pose  $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$

---

**Classe  $\mathcal{C}^k$**  Soit  $k \in \mathbf{N}$ ,  $f$  est dite  $k$  fois dérivable si  $f^{(k)}$  existe.

Dans ce cas  $f$  est dite de classe  $\mathcal{C}^k$  si  $\begin{cases} f^{(k)} \text{ existe} \\ f^{(k)} \in \mathcal{C}^0(I, E) \end{cases}$

---

**Classe  $\mathcal{C}^\infty$**   $f$  est dite de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si  $\forall k \in \mathbf{N}$  on a  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$

---

**Lemme 3.2.1.**

Soit  $f : I \rightarrow E$  alors  $f \in \mathcal{C}^\infty \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{N}$ ,  $f$  est  $k$  fois dérivable

**Théorème : Formule de Leibniz.**

Soit  $f, g : I \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^n$

alors  $fg$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Démonstration. Rappel : voir cours de sup

□

Plus généralement, si  $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$  est bilinéaire avec  $E_1, E_2, F$  de dimensions finies et  $(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, E_1) \times \mathcal{C}^n(I, E_2)$  alors la formule à l'ordre  $n$  avec  $B$  reste vraie.

**Lemme 3.2.2.**

Soit  $f : I \rightarrow E$  et  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$

Soit  $f(x) = f_1(x)e_1 + \dots + f_n(x)e_n$ ,  $\forall x \in I$

alors  $f \in \mathcal{C}^k(I, E) \Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $f_j \in \mathcal{C}^k(I, E)$

**Lemme 3.2.3.**

Soit  $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} F$ ,  $I, J$  i.r.n.t.

Si  $\varphi$  et  $f$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  alors  $\varphi \circ f \in \mathcal{C}^k(I, F)$

### 3.3 Fonctions convexes

**Barycentre (HP)** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $x_1, \dots, x_p \in E$   
Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$  tels que  $\sum_{k=1}^p \alpha_k \leq 0$ . On note  $S = \sum_{k=1}^p \alpha_k$

On appelle *barycentre du système*  $((x_1, \alpha_1), \dots, (x_p, \alpha_p))$  le point  $\sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{S} x_k$   
On parle d'*isobarycentre* si  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p$

*Note.* On peut se ramener à  $\sum_{k=1}^p \alpha_k = 1$  en posant  $\alpha'_k = \frac{\alpha_k}{S}$

#### Théorème 3.3.1.

*Tout ensemble convexe est stable par barycentration à coefficients positifs*

*Démonstration.* Soit  $X \subset E$  convexe. On démontre la propriété par récurrence avec  $\mathcal{A}(n)$  le prédicat correspondant à la propriété pour  $n$  vecteurs de  $X$ .

On a  $\mathcal{A}(1)$  et  $\mathcal{A}(2)$ . On suppose  $\mathcal{A}(n)$  et on considère  $n+1$  vecteurs de  $X$  et  $n+1$  scalaires quelconques. On pose  $x$  le barycentre du système.

- Si  $S = \sum_{k=1}^n \alpha_k \leq 0$  alors on pose  $y$  le barycentre du système composé des  $n$  premiers termes et on a  $x = \text{Bar}((y, S), (x_{n+1}, \alpha_{n+1})) \in X$  d'après  $\mathcal{A}(2)$
- Si  $S = 0$  alors  $\alpha_{n+1} = 1$  et  $x = x_{n+1} \in X$

D'où  $\mathcal{A}(n+1)$

□

**Fonction convexe** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $I$  i.r.n.t. alors  $f$  est dite *convexe* si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1] f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

*Interprétation géométrique :* "L'arc reste sous la corde"

**Épigraphe** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  on appelle *épigraphe de  $f$*  l'ensemble

$$E(f) = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} ; f(x) \leq y\}$$

#### Théorème 3.3.2.

*Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  alors  $f$  est convexe  $\Leftrightarrow E(f)$  est convexe*

*Démonstration.*

Si  $f$  est convexe, on vérifie avec la définition que  $E(f)$  l'est aussi.

Réciproquement, si  $E(f)$  est convexe, alors pour  $x, y \in I$  et  $\lambda \in [0, 1]$  avec  $x \leq y$  on pose  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y \in [x, y]$  et on a  $(x, f(x)), (y, f(y)) \in E(f)$  donc  $c = (z, (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) \in E(f)$  ainsi  $f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$   $\square$

**Théorème : Inégalité de Jensen.**

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe alors pour  $x_1, \dots, x_n \in I$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  on a  $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$

*Démonstration.* On pose  $a_i = (x_i, f(x_i)) \in E(f)$  donc  $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \in E(f)$  car  $E(f)$  est stable par barycentration donc  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$  et finalement  $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$   $\square$

**Lemme des pentes.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application alors avec  $p(a, b) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$   
 $f$  convexe  $\Leftrightarrow (\forall (a, b, c) \in I^3 \text{ tels que } a < b < c, p(a, b) \leq p(a, c) \leq p(b, c))$

**Théorème 3.3.3.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $I$  alors  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est croissante sur  $I$

*Démonstration.*  $\Rightarrow$  Si  $f$  est convexe, soient  $x, y \in I$  alors  $\forall t \in ]x, y[, p(x, t) \leq p(x, y)$  puis en passant à la limite  $f'(x) \leq p(x, y)$  d'où  $f'(x) \leq f'(y)$  par symétrie

$\Leftarrow$  On suppose  $f'$  croissante et  $a < b < c \in I$ . Par le théorème des accroissements finis on a  $p(a, b) = f'(x)$  et  $p(b, c) = f'(y)$  avec  $x$  et  $y$  dans les segments respectifs  $]a, b[$  et  $]b, c[$  ainsi  $f'(x) \leq f'(y)$  d'où  $f$  est convexe avec le Lemme des pentes.  $\square$

**Corollaire.**

Soit  $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$  alors  $f$  est convexe  $\Leftrightarrow f'' \geq 0$

**Fonction concave** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $I$  un i.r.n.t. alors  $f$  est dite *concave* si  $-f$  est convexe.

**Théorème 3.3.4.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et convexe alors  
 $\forall x_0, x \in I, f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$

"Le graphe de  $f$  est au dessus de ses tangentes"

*Démonstration.* Soit  $x, x_0 \in I$

- Si  $x = x_0$  on a bien le résultat.
- Si  $x > x_0$  alors  $p(x, x_0) = f'(\theta)$  où  $\theta \in ]x_0, x[$  donc  $f'(\theta) \geq f'(x_0)$
- Si  $x < x_0$  même raisonnement.

□

### 3.4 Intégration sur un segment

*Cadre :*  $f : I \rightarrow E$  avec  $I$  intervalle réel non trivial et  $E$  de dimension finie.

#### 3.4.1 Fonctions continues par morceaux

---

**Subdivision** Soit  $a < b$  réels et  $f : [a, b] \rightarrow E$

On appelle *subdivision* de  $[a, b]$  toute suite finie  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \sigma$  telle que  $a = \alpha_0 < \dots < \alpha_n = b$

---



---

**Continuité par morceaux** Soit  $a < b$  réels et  $f : [a, b] \rightarrow E$   
 $f$  est dite *continue par morceaux* si il existe une subdivision  $\sigma = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  de  $[a, b]$  telle que  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  la restriction  $f|_{] \alpha_k, \alpha_{k+1} [}$  est prolongeable en une fonction continue sur le segment  $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$

---



---

**Définition bis** Soit  $I$  i.r.n.t. et  $f : I \rightarrow E$   
On dit que  $f$  est continue par morceaux ( $\mathcal{C}_{pm}^0$ ) si sa restriction à tout segment de  $I$  est continue par morceaux

---

**Lemme 3.4.1.**

$\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E)$  et  $\mathcal{C}_{pm}^0(I, E)$  sont des  $K$  espaces vectoriels

**Lemme 3.4.2.**

Soit  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  une base de  $E$ . On note  $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x) \varepsilon_k$   
alors  $f$  est continue par morceaux  $\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, K)$

---

**Intégrale** Soit  $a < b$  réels et  $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E)$

On fixe  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  une base de  $E$  et on note  $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)\varepsilon_k$ ,  $\forall x \in [a, b]$  On a alors

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^p \left( \int_a^b f_k \right) \varepsilon_k$$

### 3.4.2 Propriétés de l'intégrale

**Théorème 3.4.3.**

$\mathcal{I}: \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E) \rightarrow E$  est linéaire  
 $f \mapsto \int_a^b f$

*Démonstration.* On se ramène au cas scalaire en écrivant  $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)\varepsilon_k$   $\square$

**Lemme 3.4.4.**

Soit  $a < b$  réels et  $f, g \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E)$  tels que  
 $\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq g(x)\}$  est fini alors  $\int_a^b f = \int_a^b g$

**Notations** Soit  $I$  i.r.n.t.,  $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, E)$  et  $(a, b) \in I^2$

- Si  $a < b$  on a  $\int_a^b f(t)dt \in E$
- Si  $a > b$  on pose  $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$
- Si  $a = b$  on pose  $\int_a^b f(t)dt = 0$

**Théorème : Relation de Chasles.**

Soit  $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, E)$   $(a, b, c) \in I^3$  alors  
 $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$

*Démonstration.* Connu sur les coordonnées.  $\square$

### 3.4.3 Inégalités

**Théorème 3.4.5.**

Soit  $a \leq b$ ,  $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E)$  avec  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie alors  $\left\| \int_a^b f(x)dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|dx$

*Démonstration.* Vu  $\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \left\| f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\|$ , d'après les résultats sur les sommes de *Riemann* comme les inégalités larges passent à la limite on a  $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$   $\square$

**Théorème de positivité amélioré.**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], E)$ ,  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$  et  $a < b$   
Alors  $\int_a^b f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b], f(x) = 0$

*Démonstration.*  $\Rightarrow$  Clair par linéarité.

$\Leftarrow$  Comme  $f$  est  $\mathcal{C}^0$  on sait que  $\int_{[a, b]} = 0 \Leftrightarrow \int_{]a, b[} = 0$  puis on suppose

$\exists x_0 \in ]a, b[$  tel que  $f(x_0) \leq 0$

Soit  $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0) > 0$  on considère  $\delta > 0$  tel que  $a \leq x_0 - \delta < x_0 + \delta \leq b$  et

$\forall x \in [a, b], |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  du coup  $\int_a^b f \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f \geq 2\delta\varepsilon > 0$   
donc  $\int_a^b f > 0$   $\square$

**Corollaire.**

Sous les même hypothèse on a

si  $f$  n'est pas identiquement nulle sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f(x)dx > 0$

### 3.5 Théorème fondamental

**Théorème fondamental de l'analyse.**

Soit  $I$  i.r.n.t.,  $a \in I$  et  $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$  on pose  $\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Alors  $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R})$  et  $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

*Démonstration.* Soit  $x_0 \in I$  et  $x \in I \setminus \{x_0\}$

Posons  $\Delta(x) = \frac{1}{x-x_0}(F(x) - F(x_0))$  alors si  $x_0 < x, \|\Delta(x) - f(x_0)\| \leq \frac{1}{|x-x_0|} \int_{x_0}^x \|f(t) - f(x_0)\|$

Soit  $\varepsilon > 0$ , soit  $\delta > 0$  tel que  $\forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$  alors

$\|\Delta(x) - f(x_0)\| \leq \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x \varepsilon dt = \varepsilon$

On a de même pour  $x_0 > x$

Ainsi  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que  $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$

c'est à dire  $\delta(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0; x \leq x_0} f(x_0)$  donc  $F$  est dérivable au point  $x_0$  avec  $F'(x_0) =$

$f(x_0)$   $\square$

**Corollaire.**

Soit  $h \in \mathcal{C}^1(I, E)$  et  $(a, b) \in I^2$  Alors  $\int_a^b h'(x)dx = [h]_a^b$

*Note.* Si  $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, E)$ ,  $a \in I$  alors  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  bien définie  $\forall x \in I$  et  $F \in \mathcal{C}^0(I, E)$

**Théorème : Inégalité des accroissements finis.**

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], E)$ ,  $a < b$  et  $M \in \mathbf{R}^+$ , on suppose  $\forall x \in [a, b], \|f'(x)\| \leq M$

Alors  $\|f(b) - f(a)\| \leq M|b - a|$

*Démonstration.*  $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$  car  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  donc  $\|f(b) - f(a)\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq M(b-a)$   $\square$

**Théorème 3.5.1.**

Soit  $a < b$  réels et  $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E)$

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E, F$  de dimension finie. Alors  $\int_a^b u \circ f = u \left( \int_a^b f \right)$

*Démonstration.* Cas 1 : soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], E)$  Posons  $\forall [a, b]$

$G(x) = \int_a^x u \circ f$ ,  $\Phi(x) = \int_a^x f$  et  $\Delta(x) = G(x) - u(\Phi(x))$

$\Delta$  est dérivable et  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\Delta'(x) = (u \circ f)(x) - u(\Phi'(x)) = 0$  donc  $\Delta(x) = \text{cte} = \Delta(a) = 0$

Cas 2 : soit  $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], E)$  Soit  $\sigma = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)$  une subdivision adaptée

$\forall i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ ,  $f|_{] \alpha_i, \alpha_{i+1} [} = \varphi_i|_{] \alpha_i, \alpha_{i+1} [}$  où  $\varphi_i \in \mathcal{C}^0([\alpha_i, \alpha_{i+1}], E)$

alors  $u \left( \int_a^b f \right) = \sum_{k=0}^{p-1} u \left( \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \varphi_i \right) = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} u \circ \varphi_i = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} u \circ f = \int_a^b u \circ f$  d'où le résultat.  $\square$

## 3.6 Formules de Taylor

**Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$  et  $(a, x) \in I^2$  avec  $I$  i.r.n.t. et  $\dim E < \infty$

Alors  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathcal{R}_n(a, x)$

où  $\mathcal{R}_n(a, x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) dt$

*Démonstration.* On montre  $T(n)$  le théorème au rang  $n$  par récurrence :

•  $T(0)$  : Soit  $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$  alors  $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$

• Soit  $n \in \mathbb{N}$  On suppose  $T(n)$  et on considère  $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, E)$

d'après  $T(n)$  :  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathcal{R}_n(a, x)$

avec  $\mathcal{R}_n(a, x) = \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)$

d'où  $T(n+1)$   $\square$

**Corollaire : Inégalité de Taylor-Lagrange.**

Sous les mêmes hypothèses on a

$f(x) \leq \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [x, a]} \|f^{(n+1)}(x)\|$

**Négligeabilité** Soit  $f : I \rightarrow E$  ;  $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$  ;  $a \in \bar{I}$ , on dit que  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(\varphi(x))$  s'il existe  $r > 0$  et  $\delta : V = I \cap ]a - r, a + r[ \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$  tels que

$$\forall x \in V, \|f(x)\| = \delta(x) \times \varphi(x) \text{ et } \delta(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

**Théorème d'intégration des DL.**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$  ;  $x_0 \in I$  ;  $I$  i.r.n.t.

$E$  un EVN de dimension finie. On suppose que  $f$  admet un DL en  $x_0$

$$f(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + \cdots + (x - x_0)^n a_n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Soit  $g$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Alors

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)a_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2}a_1 + \cdots + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}a_n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{n+1})$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_n \in E$

*Démonstration.* On note  $r(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n (x - x_0)^k a_k \in \mathcal{C}^0(I, E)$

$$g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} a_k + R(x) \text{ où } R(x) = \int_{x_0}^x r(t) dt$$

Soit  $\varepsilon > 0$  ; soit  $\delta > 0$  tel que  $\forall t \in I, |t - x_0| < \delta \Rightarrow \|r(t)\| \leq \varepsilon |t - x_0|^n$

Soit  $x \in I$ , on suppose  $|x - x_0| < \delta$  et  $x \leq x_0$  alors  $\|R(x)\| \leq \int_{x_0}^x \varepsilon (t - x_0)^n dt =$

$$\varepsilon \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} \leq \varepsilon (x - x_0)^{n+1}$$

Ainsi  $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{\|R(x)\|}{|x - x_0|^{n+1}} \leq \varepsilon$  donc  $R(x) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{n+1})$

□

**Théorème : Développement limité de Taylor-Young.**

Soit  $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$  ;  $x_0 \in I$  alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

*Démonstration.* On démontre  $T(n)$  le théorème au rang  $n$  par récurrence :

•  $T(0)$  :  $\forall f \in \mathcal{C}^0(I, E), f(x) = f(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)$

• : Soit  $n \in \mathbf{N}$ , on suppose  $T(n)$  et on considère  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$

$$\text{on a } f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} (f')^{(k)}(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

On applique alors le théorème précédent à  $f'$  qui est bien continue sur  $I$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{n+1})$$

□

★ ★ ★



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Suites et séries</b>	<b>3</b>
1.1	Norme . . . . .	3
1.1.1	Généralités . . . . .	3
1.1.2	Normes euclidiennes . . . . .	4
1.1.3	Exemple de normes . . . . .	5
1.2	Suites . . . . .	5
1.3	Normes équivalentes . . . . .	7
1.3.1	Définition . . . . .	7
1.3.2	Cas de espaces de dimension fini . . . . .	7
1.4	Comparaisons asymptotiques . . . . .	8
1.5	Séries dans un $K$ espace vectoriel de dimension finie . . . . .	9
1.6	Complément sur les séries numériques . . . . .	10
1.6.1	Règle de <i>Dalembert</i> . . . . .	10
1.6.2	Séries alternées . . . . .	11
1.6.3	Sommation des relations de comparaisons . . . . .	11
1.7	Produit de deux séries absolument convergentes . . . . .	12
1.8	Dualité série-suite . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Limites et continuité</b>	<b>14</b>
2.1	Ouverts et fermés . . . . .	14
2.1.1	Intérieurs . . . . .	14
2.1.2	Ouverts . . . . .	14
2.1.3	Fermés . . . . .	15
2.1.4	Adhérence . . . . .	16
2.2	Limites . . . . .	18
2.2.1	Cas général . . . . .	18
2.2.2	Produit fini d'espaces vectoriels normés . . . . .	19
2.3	Continuité . . . . .	20
2.3.1	Cas général . . . . .	20
2.3.2	Cas des applications linéaires . . . . .	22
2.4	Image réciproque et continuité . . . . .	24
2.5	Compacité . . . . .	26
2.5.1	Compacité dans un espace vectoriel normé quelconque . . . . .	26
2.5.2	Compacité en dimension finie . . . . .	27
2.5.3	Applications aux séries en dimension finie . . . . .	28
2.6	Connexité par arcs . . . . .	29

<b>3</b>	<b>Dérivation et intégration</b>	<b>31</b>
3.1	Dérivée . . . . .	31
3.2	Dérivées successives . . . . .	33
3.3	Fonctions convexes . . . . .	34
3.4	Intégration sur un segment . . . . .	36
3.4.1	Fonctions continues par morceaux . . . . .	36
3.4.2	Propriétés de l'intégrale . . . . .	37
3.4.3	Inégalités . . . . .	37
3.5	Théorème fondamental . . . . .	38
3.6	Formules de <i>Taylor</i> . . . . .	39