

PERMUTATIONSGRUPPEN VOM RANG 3
UND DIE KONSTRUKTION
DER SPORADISCHEN EINFACHEN GRUPPE
VON SUZUKI

DIPLOMARBEIT
an der
Mathematischen Fakultät
der
Eberhard-Karls-Universität
Tübingen

Vorgelegt von
Burkhardt Renz
aus Tübingen

Erklärung

Ich versichere hiermit, daß ich vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und außer der angegebenen Literatur keine weiteren Hilfsmittel benutzt habe.

Burkhardt Reur

V O R W O R T

Michio SUZUKI hat gezeigt, daß die Chevalley-Gruppe $G_2(4)$ in ihrer primitiven Permutationsdarstellung vom Grad 416 eine primitive Erweiterung vom Grad 1 782 und vom Rang 3 besitzt, eine sporadische einfache Gruppe, fortan als die Suzuki-Gruppe Suz (oder auch Sz) bezeichnet. Suz besitzt nach Konstruktion eine Permutationsdarstellung vom Rang 3 auf 1 782 Punkten, sie definiert somit einen streng regulären Graphen mit 1 782 Ecken und die Automorphismengruppe dieses Graphen enthält Suz vom Index 2.

In Kapitel I dieser Arbeit werden zunächst Rang-3-Permutationsgruppen untersucht. Insbesondere wird der Zusammenhang solcher Gruppen mit der Klasse der streng regulären Graphen interessieren. Es wird gezeigt, daß jede Rang-3-Gruppe einen streng regulären Graphen definiert, auf dem sie als transitive Automorphismengruppe wirkt. In § 5 wird dann analysiert, unter welchen Bedingungen und wie, ausgehend von einer abstrakten endlichen Gruppe H eine Rang-3-Erweiterung G von H konstruiert werden kann, d.h. eine transitive Permutationsgruppe G vom Rang 3, so daß der Stabilisator eines Punktes in G isomorph zu H ist.

Kapitel II enthält die Konstruktion der Suzuki-Gruppe Suz . In aufeinander folgenden Schritten, beginnend mit der symmetrischen Gruppe S_4 werden die $PGL(2,7)$, die $G_2(2)$, die sporadische einfache Gruppe HJ von Hall-Janko, die $G_2(4)$ und schließlich Suz , die einfache Gruppe der Ordnung 448 345 497 600 als transitive Erweiterungen konstruiert. Bis zur HJ wird die Konstruktion explizit durchgeführt, so daß die Adjazenzmatrix des Hall-Janko-Graphen angegeben werden kann. Leider kann ich für den letzten Schritt der Konstruktion nur eine Beweisskizze geben.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort.....	I
Bezeichnungen.....	III
Kapitel I Permutationsgruppen vom Rang 3.....	1
§ 1 Einige Eigenschaften transitiver Permutationsgruppen...	1
§ 2 Permutationsgruppen vom Rang 3.....	3
§ 3 Streng reguläre Graphen und Rang-3-Gruppen.....	6
§ 4 Beispiele von Rang-3-Graphen.....	12
§ 5 Rang-3-Erweiterungen.....	18
Kapitel II Der Suzuki - Turm.....	26
§ 6 Die Konstruktion der Suzuki-Gruppe Suz.....	26
§ 7 Die $PGL(2,7)$ als Rang-4-Erweiterung der S_4	30
§ 8 Die $G_2(2)$ als Rang-3-Erweiterung der $PGL(2,7)$	35
§ 9 Die Hall-Janko-Gruppe HJ als Rang-3-Erweiterung der $PSU(3,3^2)$	48
§10 Die $G_2(4)$ als Rang-3-Erweiterung der Hall-Janko- Gruppe HJ.....	59
§11 Die sporadische einfache Gruppe Suz als Rang-3-Er- weiterung der $G_2(4)$	61
Literaturverzeichnis.....	63

BEZEICHNUNGEN

Permutationsgruppen werden mit großen (G, H, \dots), ihre Elemente mit kleinen lateinischen Buchstaben (g, h, \dots) bezeichnet, die Mengen, auf denen die Permutationsgruppen wirken mit großen griechischen Lettern (Ω, Δ, \dots), Elemente dieser Mengen mit kleinen griechischen Buchstaben (α, β, \dots). Mit Großbuchstaben (G, \dots) werden Graphen bezeichnet. Das Bild von α unter der Wirkung eines Elements $g \in G$ wird α^g geschrieben.

Mit S_n bzw. A_n wird die symmetrische bzw. alternierende Gruppe vom Grad n und mit D_{2n} die Diedergruppe der Ordnung $2n$ notiert.

K_n bezeichne den vollständigen Graphen mit n Ecken.

Ferner bedeuten:

$ G $	die Ordnung der Gruppe G
$ \Omega $	die Mächtigkeit der Menge Ω
$H \leq (<) G$	H ist (echte) Untergruppe von G
$\Delta \subseteq (<) \Omega$	Δ ist (echte) Teilmenge von Ω
$\langle X \rangle$	das Erzeugnis von X in G ($X \subseteq G$)
$o(g)$	die Ordnung des Elements g in G , d.h. $o(g) = \langle g \rangle $
\cap, \cup, \setminus	Durchschnitt, Vereinigung und Differenz von Mengen
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	die Menge der natürlichen, der ganzen bzw. der rationalen Zahlen.
$a b$	a teilt b (für $a, b \in \mathbb{Z}$)
$a < (<) b$	a kleiner (kleiner gleich) b

Die Notation von Kapitel II orientiert sich an der in [20] verwendeten, siehe im einzelnen § 6.

Alle sonst verwendeten Zeichen und Bezeichnungen sind im Text definiert. Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf die Nummer des im Literaturverzeichnis aufgeführten Werkes. Zahlen in runden Klammern verweisen auf die Abschnitte des Textes.

Kapitel I

PERMUTATIONSGRUPPEN VOM RANG 3

§ 1 Einige Eigenschaften transitiver Permutationsgruppen

(1.1) Sei G eine transitive Permutationsgruppe auf der endlichen Menge Ω . α und β seien aus Ω . G wirkt auf $\Omega \times \Omega$ vermöge $(\alpha, \beta)^g = (\alpha^g, \beta^g)$. Eine Bahn Δ von G auf $\Omega \times \Omega$, d.h. $\Delta = \{(\alpha, \beta)^g \mid g \in G\}$ für ein $(\alpha, \beta) \in \Omega \times \Omega$ heißt ein *Orbital* von G . Da G transitiv auf Ω wirkt, ist $I = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$ immer ein Orbital von G .

Für ein $\alpha \in \Omega$ bezeichnet G_α den Stabilisator des Punktes α in G . Ist Δ ein Orbital von G , so ist $\Delta(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid (\alpha, \beta) \in \Delta\}$ eine Bahn von G_α auf Ω und es gilt für alle $g \in G$: $(\Delta(\alpha))^g = \Delta(\alpha^g)$. Daraus ergibt sich, daß die Abbildung $(\Delta \mapsto \Delta(\alpha))$ eine Bijektion der G -Orbitale auf die G_α -Bahnen auf Ω ist. Insbesondere ist also die Anzahl der G -Orbitale gleich der Anzahl der G_α -Bahnen auf Ω .

Sei Δ ein Orbital von G . Dann ist auch $\Delta' = \{(\beta, \alpha) \mid (\alpha, \beta) \in \Delta\}$ ein G -Orbital und $\Delta'(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid (\alpha, \beta) \in \Delta'\}$ eine Bahn von G_α . Da G auf Ω transitiv wirkt, kann man $\Delta'(\alpha)$ auch so schreiben:

$\Delta'(\alpha) = \{\alpha^g \in \Omega \mid \alpha^{g^{-1}} \in \Delta(\alpha)\}$. Δ und Δ' , bzw. $\Delta(\alpha)$ und $\Delta'(\alpha)$ heißen *gepaarte Orbitale* bzw. *gepaarte G_α -Bahnen*.

Lemma 1.1 ([9], S.99)

Ein Orbital Δ von G ist entweder symmetrisch, d.h.

$\Delta = \Delta'$ oder asymmetrisch, d.h. $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$.

Beweis: Sei $\Delta \cap \Delta' \neq \emptyset$ und $\Delta \neq I$ (I ist symmetrisch). Dann existieren $(\alpha, \beta), (\beta, \alpha) \in \Delta$ mit $\alpha \neq \beta$. Sei $(\gamma, \delta) \in \Delta$. Da Δ ein Orbital ist, gibt es g, h in G mit $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)^g$ und $(\beta, \alpha) = (\alpha, \beta)^h$. Also ist

$(\gamma, \delta)^{ghg^{-1}} = (\delta, \gamma)$. Folglich gilt $\Delta = \Delta'$. \square

Diese Aussage gilt analog für G_α -Bahnen.

(1.2) Über die Existenz symmetrischer Bahnen gibt folgendes Lemma Auskunft:

Lemma 1.2 G_α hat genau dann eine von $\{\alpha\}$ verschiedene mit sich gepaarte Bahn, wenn die Ordnung von G gerade ist.

Beweis: [25], S.45

(1.3) Sei Σ ein nichttriviales Imprimitivitätsgebiet der Wirkung von G auf Ω , α sei aus Σ . Ist nun $\beta \in \Sigma$, $\beta \neq \alpha$, dann gibt es genau eine Bahn $\Delta(\alpha)$ von G_α mit $\beta \in \Delta(\alpha)$. Annahme: $\Delta(\alpha) \not\subseteq \Sigma$. Sei also $\gamma \in \Delta(\alpha)$, aber $\gamma \notin \Sigma$. Da β und γ in $\Delta(\alpha)$ liegen, gibt es ein $g \in G_\alpha$ mit $\beta^g = \gamma$. Da $\alpha^g = \alpha$ gilt, ist $\Sigma^g \cap \Sigma \neq \emptyset$, also $\Sigma^g = \Sigma$. Andererseits ist $\beta \in \Sigma$ und $\beta^g = \gamma \notin \Sigma$, also ist $\Sigma^g \neq \Sigma$ - Widerspruch. Also ist $\Delta(\alpha) \subseteq \Sigma$ und es gilt

Lemma 1.3 Sei Σ ein nichttriviales Imprimitivitätsgebiet der transitiven Wirkung von G auf Ω , $\alpha \in \Sigma$.
Dann ist Σ Vereinigung von G_α -Bahnen, von denen mindestens eine von $\{\alpha\}$ verschieden ist, also $\Sigma = \{\alpha\} \cup \Delta(\alpha) \cup \dots$

(1.4) Die Anzahl der G -Orbitale bzw. der G_α -Bahnen auf Ω heißt der Rang der Permutationsgruppe G . Diese Definition ist sinnvoll, da wegen der Transitivität von G die Anzahl der G_α -Bahnen unabhängig von der Wahl von α in Ω ist.

Für $|\Omega| > 1$ ist der Rang einer auf Ω transitiven Permutationsgruppe stets ≥ 2 , denn $\{\alpha\}$ ist immer eine Bahn von G_α .

Ist der Rang von $G = 2$, so ist G_α transitiv auf $\Omega \setminus \{\alpha\}$, d.h. G ist zweifach transitiv auf Ω .

§ 2 Permutationsgruppen vom Rang 3

Im folgenden sei G stets eine Permutationsgruppe vom Rang 3 auf Ω , $|\Omega| = n$. Der Stabilisator G_α eines Punktes α in Ω besitzt also genau drei Bahnen auf Ω , die mit $\{\alpha\}$, $\Delta(\alpha)$ und $\Gamma(\alpha)$ bezeichnet werden. Sei $k = |\Delta(\alpha)|$ und $l = |\Gamma(\alpha)|$; es ist also $n = k + l + 1$.

(2.1) Aus Lemma 1.2 ergeben sich für Rang-3-Gruppen sofort folgende Eigenschaften:

Lemma 2.1 ([11], Lemma 3)

(a) Ist $|G|$ ungerade, so gilt:

$$\Delta'(\alpha) = \Gamma(\alpha), \Gamma'(\alpha) = \Delta(\alpha), n = 2k + 1 \text{ und}$$

$\alpha \in \Delta(\beta)$ genau dann, wenn $\beta \in \Gamma(\alpha)$.

(b) Sei $|G|$ gerade. Dann gilt:

$$\Delta'(\alpha) = \Delta(\alpha), \Gamma'(\alpha) = \Gamma(\alpha) \text{ und } \alpha \in \Delta(\beta) \text{ impliziert,}$$

daß $\beta \in \Delta(\alpha)$. Ebenso folgt aus $\alpha \in \Gamma(\beta)$, daß

$\beta \in \Gamma(\alpha)$ ist.

(2.2) Aussagen über die Durchschnitte von Bahnen liefert

Lemma 2.2 ([11], Lemma 2)

Unabhängig von der Wahl von $\alpha, \beta \in \Omega$, gibt es Zahlen λ, μ mit:

$$(a) \quad |\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)| = \begin{cases} \lambda & \text{für } \beta \in \Delta(\alpha) \\ \mu & \text{für } \beta \in \Gamma(\alpha) \end{cases}$$

Ist $|G|$ ungerade, so ist $\lambda = \mu$.

$$(b) \quad |\Gamma(\alpha) \cap \Gamma(\beta)| = \begin{cases} \bar{\lambda} & \text{für } \beta \in \Gamma(\alpha) \\ \bar{\mu} & \text{für } \beta \in \Delta(\alpha) \end{cases},$$

wobei $\bar{\lambda} = 1 - k + \mu - 1$, $\bar{\mu} = 1 - k + \lambda + 1$ gilt,

falls $|G|$ gerade ist. Ist $|G|$ ungerade, so ist

$$\bar{\lambda} = \bar{\mu} = \lambda = \mu.$$

Beweis: (a) Seien $\beta, \gamma \in \Delta(\alpha)$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $g \in G_\alpha$, so daß $(\Delta(\beta))^g = \Delta(\gamma)$. Folglich ist $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) = \Delta(\alpha) \cap (\Delta(\beta))^g$, was wiederum gleich $(\Delta(\alpha))^g \cap \Delta(\beta)^g$ ist. Da $g^{-1} \in G_\alpha$, folgt: $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) = (\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta))^g$. Nun ist $|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)| = |(\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta))^g|$, also auch $|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)| = |\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| = \lambda$. Analog zeigt man die Aussage für $\beta \in \Gamma(\alpha)$. Ist $|G|$ ungerade, so folgt aus 2.1, daß $\lambda = \mu$ gilt.

(b) ergibt sich sofort aus (a). \square

(2.3) Kriterien für die Imprimitivität einer Rang-3-Gruppe gibt Lemma 2.3 ([11], Lemma 4).

Lemma 2.3 Folgende Aussagen sind äquivalent

- (i) G ist imprimitiv und $k \leq 1$.
- (ii) $G_\alpha \neq G_{\Gamma(\alpha)}$
- (iii) $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\beta)$ für ein $\alpha \neq \beta$.

Die Äquivalenz von (i) und (ii) bedeutet, daß Imprimitivitätsgebiete von G gerade die Mengen der Form $\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)$ sind und daß $k + 1 \mid n$ und $k < 1$ gilt.

Beweis: (i) \rightarrow (ii):

Sei Σ ein nichttriviales Imprimitivitätsgebiet und $\alpha \in \Sigma$. Entweder gilt $\Sigma = \{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)$ oder $\Sigma = \{\alpha\} \cup \Gamma(\alpha)$. Ist das zweite der Fall, so folgt $1 + 1 \mid n$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Es gilt also $\Sigma = \{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)$. Da G transitiv ist, gibt es ein $g \in G$ mit $\alpha^g \in \Delta(\alpha)$. Also ist $(\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha))^g = (\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha))$, d.h.

$g \in G_{\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)}$, aber $g \notin G_\alpha$. Da $G_\alpha \leq G_{\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)}$, folgt $G_\alpha < G_{\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)} = G_{\Gamma(\alpha)}$.

(ii) \rightarrow (i) und (ii) \rightarrow (iii):

Da $G_\alpha < G_{\Gamma(\alpha)}$, existiert ein $g \in G_{\Gamma(\alpha)}$ mit $\alpha \neq \alpha^g \in \Delta(\alpha)$, also ist $G_{\Gamma(\alpha)}$ transitiv auf $\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)$. Wegen $G_\alpha < G_{\Gamma(\alpha)} = G_{\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)}$

ist $\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)$ Imprimitivitätsgebiet, also gilt (i).

Es ist $\alpha^g \in \Delta(\alpha)$, also $(\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha))^g = \{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)$, also ist $(\Gamma(\alpha))^g = \Gamma(\alpha^g) = \Gamma(\alpha)$ und $\alpha^g \neq \alpha$, also gilt auch (iii).

(iii) \rightarrow (ii):

Sei $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\beta)$ für $\alpha \neq \beta$. Angenommen es ist $G_\alpha = G_{\Gamma(\alpha)}$, dann ist $G_\alpha = G_{\Gamma(\alpha)} = G_{\Gamma(\beta)} = G_\beta$. Ist nun $\Delta(\alpha) = \{\beta\}$, so ist $G_{\Gamma(\alpha)} = G_{\{\alpha, \beta\}}$. Dies kann nicht sein, also gilt: $\Gamma(\alpha) = \{\beta\} = \Gamma(\beta)$, was die Annahme widerlegt, denn $\{\beta\} \neq \Gamma(\beta)$. \square

(2.4) Aus Lemma 2.3. folgt ([11], S.147):

- Lemma 2.4
- (a) Ist $G_\alpha = G_{\Delta(\alpha)}$ und $\Delta(\alpha) = \Delta(\beta)$, so ist $\alpha = \beta$.
 - (b) Ist G imprimitiv, dann gibt es genau eine Zerlegung von Ω in Blöcke und G wirkt auf diesen zweifach transitiv.
 - (c) Eine Rang-3-Gruppe ungerader Ordnung ist primitiv.

Beweis: (a) Es ist $G_\alpha = G_{\Delta(\alpha)} = G_{\Delta(\beta)} = G_\beta$. Da $\Delta(\alpha) = \Delta(\beta)$ gilt, ist $\beta \notin \Delta(\alpha)$. Annahme: $\beta \in \Gamma(\alpha)$. Da G_α auf $\Gamma(\alpha)$ transitiv wirkt, gibt es für alle $\gamma \in \Gamma(\alpha)$, $\gamma \neq \beta$, ein $g \in G_\alpha$, so daß $\gamma = \beta^g$. Da $G_\alpha = G_\beta$, ist $g \in G_\beta$, also ist $\gamma = \beta^g = \beta$, was im Widerspruch zu $\gamma \neq \beta$ steht. Also gilt $\alpha = \beta$.

(b) Sei G imprimitiv. Annahme: $G_\alpha \neq G_{\Delta(\alpha)}$ für $\alpha \in \Omega$. Dann ist $G_\alpha < G_{\Delta(\alpha)}$ und es existiert ein $g \in G_{\Delta(\alpha)}$ mit $\beta = \alpha^g \neq \alpha$. Dann gilt $(\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha))^g = \{\beta\} \cup \Delta(\alpha)$ und $\beta \neq \alpha$, was einen Widerspruch dazu darstellt, daß $\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)$ Imprimitivitätsgebiet ist. Also gilt $G_\alpha = G_{\Delta(\alpha)}$ und wegen (a) ist die Zerlegung von Ω in Blöcke eindeutig. G ist transitiv auf den Mengen $\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)$. Betrachte die Wirkung von $G_{\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)}$ auf den von $\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)$ verschiedenen Imprimitivitätsgebieten. Da diese der Form $\{\beta\} \cup \Delta(\beta)$ mit $\beta \in \Gamma(\alpha)$ sind und $G_\alpha \leq G_{\{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)}$ transitiv auf $\Gamma(\alpha)$ ist, folgt die Behauptung.

(c) Ist $|G|$ ungerade, so ist $1 = k$. Ist Σ ein Block von G , so ist $|\Sigma|$ ein Teiler von $|\Omega|$. Nach (2.2) ist $\Sigma = \{\alpha\} \cup \Delta(\alpha)$ für ein $\alpha \in \Omega$, d.h. $|\Sigma| = k + 1$. Aber $k + 1$ teilt $|\Omega| = 2k + 1$ nicht. Also ist G primitiv. \square

Weitere Aussagen über Rang-3-Gruppen, insbesondere Beziehungen zwischen den Parametern k, l, λ und μ gewinnt man, wenn G als Automorphismengruppe sogenannter Rang-3-Graphen betrachtet wird. Dies ist Gegenstand des nächsten Paragraphen.

§ 3 Streng reguläre Graphen und Rang-3-Gruppen

Jede Rang-3-Gruppe G bestimmt in natürlicher Weise einen Graphen, auf dem G als Automorphismengruppe operiert. Diese Rang-3-Graphen sind streng reguläre Graphen, deren Untersuchung eine nähere Bestimmung der Parameter einer Rang-3-Gruppe bzw. eines Rang-3-Graphen, sowie eine graphentheoretische Interpretation dieser Parameter erlaubt.

(3.1) Zunächst einige Definitionen.

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine endliche Menge, $f \subseteq \Omega \times \Omega \setminus I$ ($I = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$) eine Relation. Man definiert den Graphen $G_f = (\Omega, f)$ mit Ω als Ecken- und f als Bogenmenge. Ein Graph G_f heißt gerichtet oder Digraph, wenn f antisymmetrisch; und ungerichtet, wenn f symmetrisch ist. In letzterem Fall sind zwei Ecken immer durch zwei entgegengesetzte Bögen verbunden, die Kanten des Graphen.

Ein Untergraph von G_f ist ein Paar (Ω_1, f_1) mit $\Omega_1 \subseteq \Omega$ und $f_1 = f|_{\Omega_1}$.

Das Komplement des Graphen G_f ist der Graph $\bar{G}_f = G_{\bar{f}}$ mit $\bar{f} = \Omega \times \Omega \setminus (f \cup I)$.

Ein Graph G_f heißt zusammenhängend, wenn von jeder Ecke $\alpha \in \Omega$ ein Weg zu jedem anderen Punkt $\beta \in \Omega$ existiert, d.h. wenn es eine Folge $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \beta$ von Punkten gibt, so daß für alle $i = 0, 1, \dots, n-1$ gilt: $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in f$.

Die Matrix $A_f = (a_{\alpha, \beta})$ mit $a_{\alpha, \beta} = 1$ falls $(\alpha, \beta) \in f$ und $a_{\alpha, \beta} = 0$ falls $(\alpha, \beta) \notin f$ (für $\alpha, \beta \in \Omega$) heißt die Adjazenzmatrix des Graphen.

Ein Automorphismus g des Graphen G_f ist eine Permutation der Punkte von Ω , für die gilt: $(\alpha, \beta) \in f$ genau dann, wenn $(\alpha^g, \beta^g) \in f$.

Ist g eine Permutation der Punkte von Ω und P die zugehörige Permutationsmatrix, so gilt: g ist genau dann ein Automorphismus des Graphen, wenn $PA_f = A_f P$ gilt.

Die Menge der Automorphismen eines Graphen bildet eine Gruppe, die Automorphismengruppe des Graphen.

Für eine gegebene Ecke α heißt $|\{\beta \mid (\alpha, \beta) \in f\}|$ die Valenz von α .

Der Graph G_f heißt regulär, wenn jede Ecke dieselbe Valenz hat, was gleichbedeutend ist damit, daß die Adjazenzmatrix A_f konstante Zeilensumme hat.

Definition 3.1 Ein ungerichteter Graph G mit n Ecken heißt

streng regulär, wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) G ist regulär mit der Valenz k , $0 < k \leq n-1$.
- (ii) Die Anzahl λ der Dreiecke in G , die eine gegebene Kante enthalten, ist unabhängig von der Wahl dieser Kante.
- (iii) Die Anzahl μ der Wege der Länge 2, die ein gegebenes nichtbenachbartes Eckenpaar verbinden, ist unabhängig von der Wahl dieses Paares.

(3.2) Sei G eine transitive Permutationsgruppe auf Ω , $\Omega \neq \emptyset$.

Δ sei ein Orbital von G , $\Delta \neq I$. G_Δ ist dann offensichtlich ein Graph, nämlich (Ω, Δ) . Aus den Graphen G_Δ für die Orbitale $\Delta \neq I$ von G ergeben sich Aussagen über die Gruppe G . Insbesondere ist für unseren Zusammenhang folgendes Lemma interessant:

Lemma 3.2 Die transitive Permutationsgruppe G ist genau dann primitiv, wenn G_Δ für alle Orbitale $\Delta \neq I$ ein zusammenhängender Graph ist.

Beweis: [10], S.142.

(3.3) Wir betrachten nun im speziellen eine Permutationsgruppe G vom Rang 3 auf Ω mit den Orbitalen I , Δ , Γ . Wie oben sei für ein $\alpha \in \Omega$: $|\Omega| = n$, $|\Delta(\alpha)| = k$, $|\Gamma(\alpha)| = 1$.

Ist $|G|$ gerade, so sind die beiden nichttrivialen Orbitale symmetrisch, G_Δ ist also ein ungerichteter Graph; G_Γ ist der zu G_Δ komplementäre Graph. G_Δ heißt Rang-3-Graph.

G_Δ (und jeweils analog G_Γ mit den komplementären Parametern $\bar{k} = 1$, $\bar{l} = k$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$) hat folgende Eigenschaften:

(i) G_Δ ist regulär, denn für alle $\alpha \in \Omega$ ist $|\Delta(\alpha)| = k$, G_Δ hat also die Valenz k .

(ii) Ist $\beta \in \Delta(\alpha)$, so sind α und β verbunden und $|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)| = \lambda$ ist die Anzahl der Ecken, die sowohl mit α als auch mit β verbunden sind, also die Anzahl der Dreiecke, die die Kante (α, β) enthalten. λ ist nach (2.2) unabhängig von der Wahl von α und β .

(iii) Ist $\beta \in \Gamma(\alpha)$, so sind α und β nicht verbunden. $|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)| = \mu$ ist dann die Anzahl der Ecken, die mit α und mit β verbunden sind, also die Anzahl der Wege der Länge 2 von α nach β . Wieder ergibt Lemma 2.2, daß μ unabhängig von der Wahl von zwei nicht benachbarten Punkten ist.

Kurz: G wirkt nach Konstruktion als transitive Automorphismengruppe auf G_Δ . Da G transitiv auf den Ecken wirkt und Kanten erhält, ist G_Δ regulär, und da G transitiv auf den Paaren benachbarter und nichtbenachbarter Ecken, nämlich den beiden Orbitalen Δ und Γ , wirkt und Kanten erhält, ist G_Δ streng regulär.

G_Δ und G_Γ bilden also ein Paar komplementärer streng regulärer Graphen. Jeder Rang-3-Graph ist ein streng regulärer Graph. Umgekehrt ist ein streng regulärer Graph, dessen Automorphismengruppe transitiv vom Rang 3 auf den Ecken des Graphen wirkt, ein Rang-3-Graph. (Dies ist nicht immer der Fall, siehe (4.2).)

(3.4) Zur Bestimmung der Beziehungen der Parameter k, λ, μ , sowie weiterer Parameter von streng regulären resp. Rang-3-Graphen betrachten wir folgende Situation: Sei $G_\Delta = (\Omega, \Delta)$ ein streng regulärer Graph, Γ die Menge der nichtbenachbarten Eckenpaare, so daß $\Delta \cup \Gamma = \Omega \times \Omega - I$ ist. Dann ist $\overline{G}_\Delta = G_\Gamma$. Für ein $\alpha \in \Omega$ sei $\Delta(\alpha) = \{\beta \mid (\alpha, \beta) \in \Delta\}$ und $|\Delta(\alpha)| = k$. Sei $\Gamma(\alpha) = \{\beta \mid (\alpha, \beta) \in \Gamma\}$ und $|\Gamma(\alpha)| = 1$, $|\Omega| = n = k + 1 + 1$.

Man sieht sofort, daß $0 \leq \lambda \leq k-1$, $0 \leq \mu \leq k$ und $k-\mu \leq 1-1$ gilt. Sei nun $A = A_\Delta$ die Adjazenzmatrix von G_Δ , $B = B_\Gamma$ diejenige von G_Γ . I sei die Einheitsmatrix vom Format $(n \times n)$, J die quadratische Matrix vom Format $(n \times n)$, die überall den Eintrag 1 hat.

Lemma 3.3 ([10], S.144) Dann gilt:

- (a) $I + A + B = J$
- (b) Die Zeilensumme von A ist k , die von B ist 1.
- (c) $A^2 - (\lambda - \mu)A - (k - \mu)I = \mu J$

Beweis: (a) und (b) folgt aus den Definitionen. Zum Beweis von (c) betrachtet man $A^2 = (a_{\alpha, \beta})$. $a_{\alpha, \beta}$ ist die Anzahl der Wege der Länge 2 in G_Δ von α und β . Also ist $A^2 = \lambda A + \mu B + kI$. Mit (a) und (b) ergibt sich dann (c). \square

Lemma 3.4 ([10], S.145)

Es gilt $k(k - \lambda - 1) = \mu 1$

Beweis: Sei $\alpha \in \Omega$ und sei $S = \{\gamma \mid \text{die Distanz von } \alpha \text{ und } \gamma \text{ ist } 2\}$. Dann ist einerseits für $\beta \in \Delta(\alpha)$: $|\Gamma(\alpha) \cap \Delta(\beta)| = k - \lambda - 1$, also gilt $|S| = |\Delta(\alpha)| \cdot (k - \lambda - 1) = k(k - \lambda - 1)$.

Andererseits ist für $\beta \in \Gamma(\alpha)$: $|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)| = \mu$, also ist $|S| = |\Gamma(\alpha)|_\mu = \mu l$. Da dies unabhängig von der Wahl von α ist, gilt die Behauptung. \square

(3.5) Der streng reguläre Graph G heißt *primitiv*, falls G und \bar{G} zusammenhängend sind. Ist G ein Rang-3-Graph, so stimmt diese Definition nach (3.2) gerade mit der Primitivität der Gruppe G überein. Es gilt nun

Lemma 3.5 ([10], S.145)

G ist genau dann primitiv, wenn $\mu \neq 0, k$ ist.

Beweis: Daß G genau dann zusammenhängend ist, wenn $\mu \neq 0$ ist, ergibt sich unmittelbar aus der Definition von μ . \bar{G} ist offenbar genau dann zusammenhängend, wenn $\bar{\mu} \neq 0$ ist. Da $\bar{\mu} = 1 - k + \lambda + 1$ gilt, ist dies genau dann der Fall, wenn $\mu \neq k$ gilt. \square

Die Betrachtung der Eigenwerte der Adjazenzmatrix A von G ergibt weitere Parameter des streng regulären Graphen.

Wegen $A^2 - (\lambda - \mu)A - (k - \mu)I = \mu J$ erfüllt A das Polynom $(X - k)(X^2 - (\lambda - \mu)X - (k - \mu)) = 0$. Demzufolge hat A die folgenden drei Eigenwerte:

$k, s = \frac{1}{2}(\lambda - \mu + \sqrt{d}), t = \frac{1}{2}(\lambda - \mu - \sqrt{d})$, wobei $d = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$ ist.

Da für die Adjazenzmatrix B von \bar{G} die Aussage von Lemma 3.3 für $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$, und \bar{k} erfüllt ist, ergibt sich

$\bar{s}, \bar{t} = \frac{1}{2}(\mu - \lambda - 2 \pm \sqrt{d})$ und $s + \bar{t} = t + \bar{s} = -1$.

Es sollen nun die Vielfachheiten der drei Eigenwerte von A berechnet werden. Sei f_1 die Vielfachheit von k , f_2 diejenige von s und f_3 die von t . (s. [10], S.145f)

Ist G zusammenhängend, so ist A eine unzerlegbare nichtnegative Matrix, Wäre nämlich A zerlegbar, so existierte eine Permutationsmatrix P mit

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} \quad (\text{Rahmen } A_i \geq 1 \times 1 \text{ für } i=1,2,3)$$

Dann wäre G nicht zusammenhängend, denn A ist symmetrisch.

Da $|s|, |t| \leq k$ sind, ist nach dem Theorem von FROBENIUS-PERRON k einfacher Eigenwert von A . Ferner gilt in diesem Fall:

$n = 1 + f_2 + f_3$ und da die Spur von $A = 0$ ist: $0 = k + sf_2 + tf_3$.

Daraus ergibt sich:

$$f_2 = \frac{(n-1)t+k}{t-s} \quad \text{und} \quad f_3 = \frac{(n-1)s+k}{s-t}$$

$$\text{also } f_2, f_3 = \frac{(k+1)(\lambda-\mu) + 2k \mp \sqrt{d}(k+1)}{\mp 2\sqrt{d}}$$

$\bar{f}_2 = f_3$ und $\bar{f}_3 = f_2$ sind die entsprechenden Vielfachheiten der Eigenwerte \bar{s}, \bar{t} der Adjazenzmatrix B von G .

Ist G nicht zusammenhängend, dann ist $\mu = 0$ und $\lambda = k-1$, also ist $s = k$ und $t = -1$.

Daraus folgt, daß $f_2 = \frac{1}{k+1}$ und $f_3 = n - f_2 - 1$ gilt.

(3.6) Das 9-Tupel $(n, k, 1, \lambda, \mu, s, t, f_2, f_3)$ nennt man die zu G gehörige Parametermenge. Ist G ein Rang-3-Graph und wirkt G vom Rang 3 auf den Ecken von G , so heißt es auch Parametermenge der Rang-3-Gruppe G .

Wir erhalten nun

Satz 3.6 ([1], Lemma 7)

Ist $|G|$ gerade, dann gilt entweder

- (I) $k = 1, \mu = \lambda + 1 = \frac{k}{2}, f_2 = f_3 = k$ oder
- (II) $d = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$ ist ein Quadrat und
 - (i) ist n gerade, so ist \sqrt{d} ein Teiler von $2k + (\lambda - \mu)(k + 1)$, aber $2\sqrt{d}$ nicht.
 - (ii) ist n ungerade, so gilt $2\sqrt{d} \mid (2k + (\lambda - \mu)(k + 1))$.

Beweis: (I) Sei d kein Quadrat. Da f_2 und f_3 in \mathbb{Z} sind, muß gelten:

$$\frac{2k + (\lambda - \mu)(k + 1) \mp \sqrt{d}(k + 1)}{\mp 2\sqrt{d}} \in \mathbb{Z} \quad \text{Da } \sqrt{d} \in \mathbb{Q} \text{ und}$$

$2k + (\lambda - \mu)(k + 1) \in \mathbb{Z}$ gilt, folgt:

$$\frac{2k + (\lambda - \mu)(k + 1)}{\sqrt{d}} \in \mathbb{Z} \text{ genau dann, wenn } 2k + (\lambda - \mu)(k + 1) = 0.$$

Da $2k > 0, (k + 1) > 0$ muß gelten: $\lambda - \mu < 0$, also $\mu > \lambda$. Ferner ist

$(2 + \lambda - \mu)k = (\mu - \lambda)1$. Da $\mu > \lambda$ folgt $2 + \lambda - \mu > 0$, also

$\mu < \lambda + 1$. Also ist $\mu = \lambda + 1$. Daraus folgt $0 = 2k + (\lambda - \mu)(k + 1) = 2k - k - 1 = k - 1$, also ist $k = 1$. Daraus folgt der Rest von (I).

(II) Sei nun d ein Quadrat.

(i) Ist n gerade, so ist $k + 1$ ungerade. Also gilt $2\sqrt{d} \nmid \sqrt{d}(k + 1)$.

Da f_2, f_3 ganze rationale Zahlen sind, muß gelten: $2\sqrt{d}$ teilt

$(2k + (\lambda - \mu)(k + 1))$ nicht, aber \sqrt{d} teilt diese Zahl.

(ii) Ist n ungerade, so ist $k + 1$ gerade. Also gilt $2\sqrt{d} \mid \sqrt{d}(k + 1)$, also auch $2\sqrt{d} \mid (2k + (\lambda - \mu)(k + 1))$. \square

Bemerkungen zu Satz 3.6:

(a) Ist $|G|$ gerade und $f_2 = f_3$, so gilt Fall (I) des Satzes. Denn ist $f_2 = f_3$, so ist $(k + 1)(\lambda - \mu) + 2k = 0$. Beweisteil (I) zeigt, daß dann $k = 1$ und $\mu = \lambda + 1$ gelten muß.

(b) Im Fall (I) gilt außerdem: $n = 1 + 4\mu$, $d = n$, $s, t = \frac{-1 \pm \sqrt{n}}{2}$.

Denn: $k = 2\mu$ und $n = 1 + 2k$, also $n = 1 + 4\mu$. Dann ist

$$d = (\lambda - \lambda - 1)^2 + 4(2\mu - \mu) = 1 + 4\mu = n \text{ und}$$

$$s, t = \frac{(\lambda - \mu) \pm \sqrt{d}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{n}}{2}.$$

(c) Im Fall (II) sind die Eigenwerte von A ganze rationale Zahlen.

Grund: Es ist $s = \frac{(\lambda - \mu) + \sqrt{d}}{2}$. Ist $(\lambda - \mu)$ ungerade, so auch d und \sqrt{d} . Also ist $((\lambda - \mu) + \sqrt{d})$ gerade, also $s \in \mathbb{Z}$.

Ist $(\lambda - \mu)$ gerade, dann ist 4 Teiler von $(\lambda - \mu)^2$, also auch von d , d.h. 2 teilt \sqrt{d} . Also ist 2 auch Teiler von $((\lambda - \mu) + \sqrt{d})$. Ist nun $s \in \mathbb{Z}$, dann auch t .

§ 4 Beispiele von Rang-3-Graphen

(4.1) Die einzigen bekannten Beispiele für streng reguläre Graphen, die Fall (I) von Satz 3.6 erfüllen, sind Rang-3-Graphen vom Singer-Typ und drei weitere Beispiele mit $n = 7^2$, 23^2 und 47^2 [10].

Der Graph G heißt vom *Singer-Typ*, wenn er zu folgendem Graphen S isomorph ist: die Eckenmenge von S sind die Elemente von $GF(p^n)$ (dabei ist p eine Primzahl und n, m natürliche Zahlen, so daß $p^n = 4m + 1$ erfüllt ist). Zwei Ecken in S sind genau dann benachbart, wenn ihre Differenz ein Quadrat $\neq 0$ in $GF(p^n)$ ist.

Die additive Gruppe $M = (GF(p^n), +)$ wirkt regulär auf $\Omega = GF(p^n)$ vermöge $\alpha^g = \alpha + g$ für $\alpha \in \Omega$ und $g \in M$. $GF(p^n)^* = GF(p^n) \setminus \{0\}$ ist als multiplikative Gruppe zyklisch, es gibt ein j in $GF(p^n)^*$, mit $\langle j \rangle = GF(p^n)^*$. Die zyklische Gruppe $\langle j^2 \rangle$ der Ordnung $2m$ wirkt auf Ω vermöge $\alpha^g = \alpha g$ für $\alpha \in \Omega$ und $g \in \langle j^2 \rangle$. Die Gruppe G , die von den Wirkungen von M und $\langle j^2 \rangle$ auf Ω erzeugt wird, das semidirekte Produkt $M \langle j^2 \rangle$ wirkt transitiv auf Ω . Der Stabilisator des Punktes 0 in G ist $\langle j^2 \rangle$ und hat 3 Bahnen auf Ω : $\{0\}$, die Quadrate von $GF(p^n)$ und die Nichtquadrate von $GF(p^n)$. Die Rang-3-Gruppe G definiert auf natürliche Weise einen selbstkomplementären Graphen S vom Singer-Typ. [12].

(4.2) Aus der Vielzahl der unendlichen Familien von Rang-3-Gruppen sollen hier zwei einfache Beispiele genügen.

(a) (Siehe [9], S.108)

Sei Ω die Menge der 2-elementigen Teilmengen von $\Sigma = \{1, 2, \dots, m\}$, $m \geq 4$. Die symmetrische Gruppe S_m und die alternierende Gruppe A_m sind 2-transitiv auf Σ , also transitiv auf Ω . Sei $G = S_m$ oder A_m . Ist $\alpha = (a, b) \in \Omega$, so hat G_α genau 2 Bahnen auf $\Omega \setminus \{\alpha\}$, nämlich $\Delta(\alpha) = \{(c, d) \mid c, d \neq a, b\}$ und

$$\Gamma(\alpha) = \{(a, c) \mid c \neq a, b\} \cup \{(b, c) \mid c \neq a, b\}.$$

G_Δ hat Ω als Eckenmenge. Ein $(a, b) \in \Omega$ ist genau dann mit einem von (a, b) verschiedenen $(c, d) \in \Omega$ verbunden, wenn $\{a, b\} \cap \{c, d\} \neq \emptyset$ gilt.

G_Δ hat folgende Parameter:

$$n = \binom{m}{2}, \quad k = \binom{m-2}{2}, \quad 1 = 2(m-2), \quad \lambda = \frac{1}{2}(m-2)(m-7) + 3, \\ \mu = \frac{1}{2}(m-2)(m-5) + 1, \quad s = 1, \quad t = -m + 3, \quad f_2 = \frac{1}{2}m(m-3), \quad f_3 = m - 1.$$

S_m ist die Automorphismengruppe von G_Δ und für $m > 4$ primitiv. Für $m = 5$ ist G_Δ der wohlbekannte Petersen-Graph mit den Parametern $n = 10$, $k = 3$, $l = 6$, $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $s = 1$, $t = -2$, $f_2 = 5$ und $f_3 = 4$.

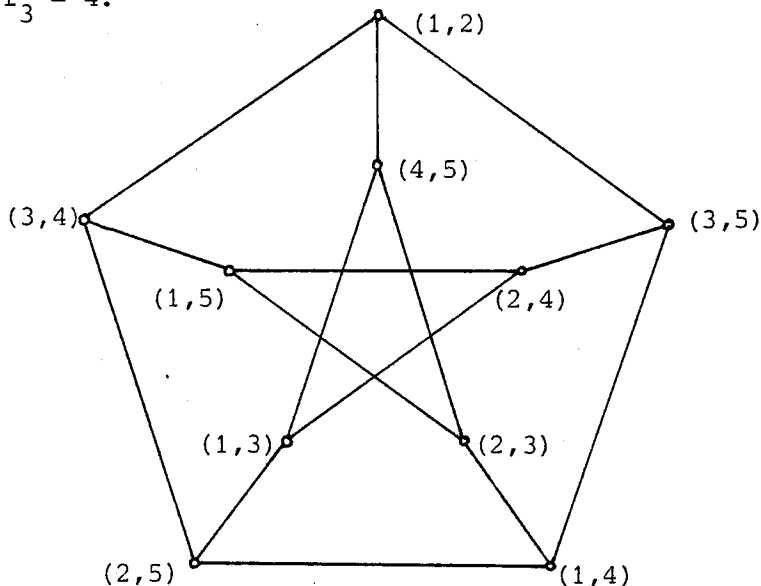


Abbildung 1: Der Petersen-Graph

Das Komplement G_Γ von G_Δ ist für alle $m \geq 4$ der Kantengraph von K_m , dem vollständigen Graphen mit m Ecken. Für $m \neq 8$ ist G_Γ durch die Parameter

$n = \binom{m}{2}$, $k = 2(m-2)$, $l = \binom{m-2}{2}$, $\lambda = m-2$, $\mu = 4$,
 $s = m-4$, $t = -2$, $f_2 = m-1$, $f_3 = \frac{1}{2} m \cdot (m-3)$ eindeutig bestimmt.
 Für $m = 8$ gibt es noch genau drei weitere Graphen, deren Automorphismengruppe intransitiv ist. [10], S.154.

(b) (Siehe [9], S.109)

Sei Ω die Menge der geordneten Paare von $\{1, 2, \dots, m\}$, $m \geq 2$ und G das Kranzprodukt $S_m \wr S_2$ der symmetrischen Gruppen vom Grad m und 2. Jedes Element von G kann eindeutig geschrieben werden als $(\pi, \rho; \tau)$, wobei $\pi, \rho \in S_m$ und $\tau \in S_2$ sind. G wirke auf Ω vermöge

$$(a_1, a_2)^{(\pi, \rho; \tau)} = (a_{\tau(1)}^\pi, a_{\tau(2)}^\rho). \quad ((a_1, a_2) \in \Omega)$$

Der Stabilisator eines Punktes $\alpha = (a_1, a_2)$ in G hat dann 3 Bahnen auf Ω , nämlich $\{\alpha\}$, $\Delta(\alpha) = \{(b_1, b_2) \mid (b_1, b_2) \in \Omega \setminus \{\alpha\} \text{ und } b_1 = a_1 \text{ oder } b_2 = a_2\}$ und $\Gamma(\alpha) = \Omega \setminus \{\Delta(\alpha) \cup \{\alpha\}\}$.

Der Graph G_Δ hat die Eckenmenge Ω . $(a_1, a_2) \in \Omega$ ist genau dann mit (b_1, b_2) verbunden, wenn entweder $a_1 = b_1$ oder $a_2 = b_2$ gilt. G_Δ ist der Gittergraph (auch Lateinisches-Quadrat-Graph) $L_2(m)$ der Ordnung m mit folgenden Parametern:

$$n = m^2, k = 2(m-1), l = (m-1)^2, \lambda = m-2, \mu = 2, s = m-2, t = -2, \\ f_2 = 2(m-1) \text{ und } f_3 = (m-1)^2.$$

Für alle $m \geq 2$, $m \neq 4$ ist G_Δ durch diese Parameter eindeutig bestimmt. Für $m = 4$ existiert noch ein weiterer Graph, der keine transitive Automorphismengruppe besitzt. [10], S.154.

(4.3) Rang-3-Gruppen vom Grad $k^2 + 1$ (siehe [11], S.150f)

Sei G eine primitive Rang-3-Gruppe und $k > 1$. Dann ist $\mu \neq 0$ und wegen (3.4) ist $l = \frac{1}{\mu} k (k - \lambda - 1)$. l ist also für gegebenes k genau dann maximal, wenn $\mu = 1$ und $\lambda = 0$ gilt. Dann ist $l = (k-1)k$. Der maximale Grad der Rang-3-Darstellung von G ist für gegebenes k also $n = k^2 + 1$.

Sei andererseits G eine transitive Rang-3-Gruppe vom Grad $k^2 + 1$. Dann ist nach (3.4) $\mu = 1$ und $\lambda = 0$, also ist G primitiv. ($k > 1$). Für Rang-3-Gruppen vom Grad $n = k^2 + 1$ gilt folgender Satz:†)

Satz 4.3 ([11], Theorem 1)

Ist G eine transitive Rang-3-Gruppe vom Grad $n = k^2 + 1$, k die Länge einer G_α -Bahn, so ist $n = 5, 10, 50$ oder $3 \cdot 250$.

Beweis:

$|G|$ ist gerade, denn andernfalls wäre $\lambda = \frac{1}{2}(k-1)$, nach Voraussetzung gilt hier aber $\lambda = 0$. Nach (3.6) sind nun zwei Fälle zu unterscheiden :

†) Ist G ein zusammenhängender Graph mit Durchmesser $\leq d$ (d.h. das Maximum der Eckenabstände in G ist kleiner gleich d) und maximaler

Valenz k , dann hat G höchstens $1 + \sum_{i=0}^{d-1} k(k-1)^i$ Ecken. Graphen, für

die Gleichheit in dieser Aussage gilt, heißen *Moore-Graphen*, sind regulär von der Valenz k und haben Tailenweite $2d + 1$ (d.h. die Länge des kürzesten Kreises in G ist $2d + 1$). Unter der Voraussetzung, daß G ein Moore-Graph mit Durchmesser $d = 2$ und Valenz k ist, haben HOFFMAN und SINGLETON [13] schon 1960 die Aussage von Satz 4.3 gezeigt: k ist dann 2, 3, 7 oder 57 und in jedem der Fälle $k = 2, 3, 7$ ist G bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

(I) Ist $k = 1$, so ist $k + 1 = k^2 = 2k$, also $k = 1 = 2$ und $n = 5$

(II) $d = 4k - 3$ ist ein Quadrat, sei $t = \sqrt{d}$.

Da $\mu = 1$ und $\lambda = 0$ und $k + 1 = k^2$ gilt, ist $f_2 + f_3 = k^2$. Ferner:

$$f_2 = \frac{2k - (1+t)k^2}{-2t} \quad \text{und} \quad f_3 = \frac{2k - (1-t)k^2}{2t}$$

Also gilt $t(f_2 - f_3) = k^2 - 2k$. Mit $f_3 = k^2 - f_2$ und $k = \frac{t^2 + 3}{4}$ folgt für t : $t^5 + t^4 + 6t^3 - 2t^2 + (9 - 32f_2)t - 15 = 0$.

Also ist t Teiler von 15, d.h. $t \in \{1, 3, 5, 15\}$.

Ist $t = 1$, so ist $k = 1$, dieser Fall entfällt also.

Ist $t = 3$, so ist $k = 3$ und $n = 10$.

Ist $t = 5$, so ist $k = 7$ und $n = 50$.

Ist $t = 15$, so ist $k = 57$ und $n = 3250$. \square

Bemerkung zu Satz 4.3:

Solche Gruppen vom Grad 5, 10 und 50 existieren.

(a) Die Diedergruppe D_{10} hat eine solche Darstellung vom Grad 5. Sei Ω die Menge der Ecken des regelmäßigen Fünfecks im Einheitskreis, darauf hat D_{10} die gewünschte Darstellung auf natürliche Weise.

(b) Die alternierende und die symmetrische Gruppe vom Grad 5 wirken vom Rang 3 auf den 2-elementigen Teilmengen einer Menge der Mächtigkeit 5. (Siehe (4.2))

(c) Die $PSU(3, 5^2)$ und ihre Automorphismengruppe haben eine Rang-3-Darstellung vom Grad 50. $\text{Aut}(PSU(3, 5^2))$ ist die Automorphismengruppe des Hoffman-Singleton-Graphen. [2]

(d) ASHBACHER [1] hat bewiesen, daß es keine Rang-3-Permutationsgruppe vom Grad 3250 mit Subgraden 57 und 3192 gibt.

(4.4) Für die klassischen einfachen Gruppen wurde die Existenz einer ganzen Reihe von Rang-3-Permutationsdarstellungen und entsprechender Rang-3-Graphen gezeigt. Einen Überblick findet man in [14]. Als Beispiel betrachten wir folgende Konstruktion:

BOSE und CHAKRAVARTI betrachten in [3] und [5] eine nichtausgeartete Hermitsche Varietät V_2 im projektiven Raum $PG(3, q^2)$, d.h. die Menge aller absoluten Punkte in $PG(3, q^2)$ bezüglich einer Hermitschen Form vom Rang 4. Im Fall $q = 2$ ist V_2 die kubische Fläche $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ in $PG(3, 4)$ mit 45 Punkten und 27 Erzeugenden (womit die Geraden von $PG(3, 4)$ bezeichnet werden, die ganz

in V_2 enthalten sind). Auf jeder Geraden der kubischen Fläche liegen 5 Punkte und durch jeden Punkt gehen 3 Geraden. Da durch jeden Punkt einer Geraden 2 weitere Geraden gehen, schneidet sich jede Gerade mit 10 andern Geraden. Von diesen schneiden sich wieder jeweils zwei. Jede Gerade ist also Seite von 5 Dreiecken, von denen es insgesamt 45 gibt.

In [5] wird gezeigt, daß der Graph G bestehend aus den 27 Geraden in V_2 als Ecken, die genau dann verbunden sind, wenn sie sich schneiden, streng regulär mit folgenden Parametern ist:

$n = 27$, $k = 10$, $l = 16$, $\lambda = 1$, $\mu = 5$.

Mit (3.6) berechnet man $s = 1$, $t = -5$, $f_2 = 20$ und $f_3 = 6$.

Der Graph G wird als Schläfli-Graph bezeichnet.

Die Automorphismengruppe dieses Graphen enthält die $PSU(4, 2^2)$, die V_2 festläßt, folglich transitiv auf den Erzeugenden wirkt und Kanten in G erhält [10].

Unter Zuhilfenahme einer Liste der 45 Dreiecke in der kubischen Fläche †) kann man die folgende Adjazenzmatrix des Schläfli-Graphen leicht berechnen:

†) "Steiner a fait connaître [J. Steiner, Über eine besondere Curve dritter Klasse und vierten Grades, Crelle Journal 53 (1857), 231 - 237] (Journal de M. Borchardt, t. LIII) les théorèmes suivants: Toute surface du troisième degré contient vingt-sept droites. L'une quelconque d'entre elles, a , en rencontre dix autres, se coupant elles-mêmes deux à deux, et formant ainsi avec a cinq triangles. Le nombre total des triangles ainsi formés sur la surface par les vingt-sept droites est de quarante-cinq. Si deux triangles abc , $a'b'c'$ n'ont aucun côté commun, on peut leur en associer un troisième $a''b''c''$ tel que les côtés correspondants de ces trois triangles se coupent, et forment trois nouveaux triangles $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$. Les trois triangles associés abc , $a'b'c'$, $a''b''c''$ s'appellent le trièdre de Steiner. D'après cela, désignons par les lettres $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, m', n', p', q', r', s', t', u'$ les vingt-sept droites: on formera sans peine le tableau suivant des quarante-cinq triangles, où la désignation des droites reste seule arbitraire:

$abc, ade, afg, ahi, ak l,$
 $bmn, bpq, brs, btu,$
 $cm'n', cp'q', cr's', ct'u',$
 $dmm', dpp', drr', dtt',$
 $enn', eqq', ess', euu',$
 $fmq', fpn', fst', fur',$
 $gnp', gqm', gru', gts',$
 $hms', hrn', hqt', hup',$
 $inr', ism', itq', ipu',$
 $kmu', ktn', kqr', ksp',$
 $lnt', lum', lrq', lps'."$ ([17], S. 316)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	u'	s'	n	q'	m'	p	t'	r	u	r'	t	s	p'	n'	q
a		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1															
b	1		1									1		1			1		1	1	1	1	1			1	1
c	1	1										1	1		1	1	1	1		1			1	1	1	1	
d	1				1						1					1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
e	1		1									1	1	1	1					1			1	1	1	1	
f	1						1				1					1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
g	1					1						1	1	1		1			1		1	1	1	1	1	1	
h	1								1		1	1	1						1	1	1			1	1	1	1
i	1							1			1	1	1	1	1	1						1	1	1	1	1	
k	1										1	1	1									1	1	1	1	1	1
l	1										1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
m		1		1		1		1		1			1	1	1	1	1										
u'			1		1		1		1	1	1	1					1	1	1	1	1						
s'			1		1		1	1		1	1						1				1	1	1	1			
n		1			1		1		1	1	1								1		1			1	1	1	
q'		1		1	1			1		1	1								1		1		1	1	1	1	
m'			1	1			1		1	1	1									1		1		1	1	1	
p		1		1		1		1		1	1	1	1											1	1	1	
t'			1	1		1		1		1	1	1	1									1	1		1	1	
r		1		1		1	1		1	1	1	1	1								1	1	1	1	1	1	
u		1			1	1		1		1	1	1	1				1					1	1	1	1	1	
r'			1	1		1		1	1		1	1	1						1	1						1	
t		1		1		1		1	1		1	1	1				1	1		1	1				1	1	
s		1			1	1		1	1		1	1	1				1	1	1	1				1	1	1	
p'			1	1			1	1		1			1	1	1	1		1		1		1		1	1	1	
n'			1		1	1		1	1				1	1	1	1		1		1		1		1	1	1	
q		1			1		1	1		1							1	1	1	1		1					

Abbildung 2: Die Adjazenzmatrix des Schläfli-Graphen

§ 5 Rang-3-Erweiterungen

(5.1) Sei H eine endliche abstrakte Gruppe. Die endliche Gruppe G heißt *Rang- k -Erweiterung* von H , wenn G eine transitive Permutationsdarstellung vom Rang k auf einer endlichen Menge Ω besitzt, so daß $G_\alpha \cong H$ für ein $\alpha \in \Omega$ gilt. In diesem Paragraphen sollen Rang-3-Erweiterungen diskutiert werden.

Bisher gingen wir von einer Rang-3-Permutationsgruppe G auf der Menge Ω aus und konstruierten Graphen, auf denen G als Automorphismengruppe wirkt. Zur Konstruktion dieser Graphen war nur die Kenntnis der Wirkung eines Punktstabilisators auf Ω notwendig. Nun ist das Ziel, von einer abstrakten Gruppe H ausgehend einen Graphen Γ zu konstruieren, so daß die Automorphismengruppe von Γ eine Rang-3-Gruppe G auf Ω enthält, die $G_\alpha \cong H$ (für $\alpha \in \Omega$) erfüllt.

Um zu klären, welche Probleme hierbei zu lösen sind, gehen wir nochmals von einer Rang-3-Gruppe G auf Ω aus und betrachten die Wirkung von G_α auf Ω . Betrachtet man die beiden Untergraphen von Γ_Δ , die aus den Punkten von $\Delta(\alpha)$ bzw. $\Gamma(\alpha)$ und den zwischen diesen Punkten jeweils vorkommenden Kanten bestehen, so ist G_α eine punkttransitive Automorphismengruppe dieser beiden Untergraphen. Zudem ist G_α offenbar intransitive Automorphismengruppe auf dem von $\Delta(\alpha) \cup \Gamma(\alpha)$ auf Γ_Δ induzierten Untergraphen. Für ein $g \in G_\alpha$ und eine Kante (β, γ) mit $\beta \in \Delta(\alpha)$ und $\gamma \in \Gamma(\alpha)$ gilt also, daß (β^g, γ^g) auch eine Kante in Γ_Δ ist.

Sei nun die abstrakte Gruppe H der Ausgangspunkt. Zunächst müssen zwei reguläre Graphen Γ_1 und Γ_2 gefunden werden, auf denen H als transitive Automorphismengruppe wirkt. Ω_1 und Ω_2 sollen die Punkt-mengen von Γ_1 und Γ_2 bezeichnen, P sei ein zusätzlicher Punkt. Dann gilt es, einen streng regulären Graphen Γ mit der Punktmenge $\Omega = \{P\} \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ zu konstruieren, derart, daß $\Delta(P) = \Omega_1$, $\Gamma(P) = \Omega_2$ und Γ_1 und Γ_2 die von $\Delta(P)$ und $\Gamma(P)$ induzierten Untergraphen von Γ sind. Ist $|\Omega_1| = k$, $|\Omega_2| = l$, die Valenz eines Punktes in $\Omega_1 = \lambda$ und diejenige eines Punktes in $\Omega_2 = k - \mu$, so existiert der gesuchte streng reguläre Graph jedenfalls nur dann, wenn die Parameterbedingungen des Satzes 3.6 erfüllt sind. Da wir uns für

primitive Erweiterungen von H interessieren, sei ferner $\mu \neq 0, k$ verlangt. Ist beides der Fall, so muß nachgeprüft werden, ob die $\mu_1 = k(k - \lambda - 1)$ Kanten zwischen Ω_1 und Ω_2 so ergänzt werden können, daß ein $\alpha \in \Omega_1$ mit einem $\beta \in \Omega_2$ genau dann verbunden ist, wenn für ein beliebiges $h \in H$ α^h und β^h benachbart sind. Ist dann $K = \text{Aut}(\bar{G})$ transitiv auf dem Graphen, so ist K eine Rang-3-Gruppe. Existiert eine auf \bar{G} transitive Untergruppe G von K mit $G_p \cong H$, so ist G eine Rang-3-Erweiterung von H .

Ist H eine einfache Gruppe und G eine primitive Erweiterung vom Rang 3 von H , so läßt sich leicht entscheiden, ob G einfach ist. Denn es gilt

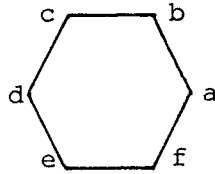
Satz 5.1 *Ist G eine primitive Permutationsgruppe vom Rang 3 auf Ω und G_α einfach, so ist entweder G einfach oder G enthält einen elementar-abelschen regulären Normalteiler.*

Beweis: Sei N ein nichttrivialer Normalteiler von G . Dann ist $N \cap G_\alpha = N_\alpha \trianglelefteq G_\alpha$. Da G_α einfach ist, ist $G_\alpha = N_\alpha$ oder $N_\alpha = 1$. N wirkt als Normalteiler der primitiven Gruppe G transitiv auf Ω . Ist nun $G_\alpha = N_\alpha$, so ist $|N| = |\Omega| \cdot |G_\alpha| = |G|$, also $N = G$. Widerspruch. Folglich ist $N_\alpha = 1$ und N regulärer Normalteiler von G , also $|N| = |\Omega|$. Jede echte Untergruppe von N ist nicht transitiv auf Ω , also ist N minimaler Normalteiler von G , also charakteristisch einfach. Als charakteristisch einfache Gruppe ist N entweder elementar-abelsch oder direktes Produkt isomorpher Kopien einer nichtabelschen einfachen Gruppe. Die Wirkung von G_α auf $\Omega \setminus \{\alpha\}$ ist äquivalent zur Wirkung von G_α auf $N^* = N - \{1\}$. G_α wirkt als Automorphismengruppe auf N und hat auf N^* zwei Bahnen. Da jeder Automorphismus die Ordnung eines Elements erhält, hat $|N|$ höchstens zwei Primteiler p und q . Also ist $|N| = p^\alpha q^\beta$ und N ist nach dem Satz von BURNSIDE über die Auflösbarkeit von Gruppen der Ordnung $p^\alpha q^\beta$ auflösbar. Daraus folgt, daß N eine elementar-abelsche Gruppe ist. \square

(5.2) Beispiele von Rang-3-Erweiterungen

(a) (Siehe [9], S.115ff)

Der Ausgangspunkt sei $H = S_3$ als abstrakte Gruppe. Sei $\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$ und $G_1' = K_3$, der triviale Graph mit 3 isolierten Ecken. Aut (G_1') ist offensichtlich die S_3 . Sei $\Omega_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$ und G_1 der folgende Graph:



H wirke folgendermaßen auf den beiden Mengen Ω_1, Ω_2 :

H	Wirkung von H auf Ω_1	Wirkung von H auf Ω_2
h_1	1	1
h_2	(1 2) 3	(a e) (c) (b f d)
h_3	(1 3 2)	(a c e) (b d f)
h_4	(1 2)	(a b) (c f) (d e)
h_5	(1 3)	(a f) (b e) (c d)
h_6	(2 3)	(a d) (b c) (e f)

(Wir haben es also mit der natürlichen Wirkung der S_3 auf 3 Punkten und mit der rechtsregulären Wirkung der S_3 zu tun))

Sei nun $\Omega = \{P\} \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$. P sei mit jedem Punkt aus Ω_1 verbunden.

Für den zu konstruierenden Graphen G_2 ergibt sich also:

$n = 10$, $k = 3$, $l = 6$, $\lambda = 0$ und $\mu = 1$. Zunächst formal sind die

Parameterbedingungen von (3.6) erfüllt. Es ist $s = 1$, $t = -2$,

$f_2 = 5$, $f_3 = 4$.

Jede Ecke von G_1' muß nun mit $k - \lambda - 1 = 2$ Ecken von G_1 verbunden werden, und zwar so, daß jede Ecke von G_1 mit genau $\mu = 1$ Ecke von G_1' verbunden ist.

Es ist $H_1 = \{h_1, h_6\}$, d.h. H_1 hat die Bahnen $\{a, d\}$, $\{b, c\}$ und $\{e, f\}$ auf Ω_2 . Die beiden Punkte, mit denen 1 zu verbinden ist, müssen in einer dieser Bahnen liegen. Ist 1 mit b oder e verbunden, so bilden 1, b, c oder 1, e, f ein Dreieck, was $\lambda = 0$ widerspricht. Also ist 1 mit a und d verbunden.

Nun ist $1^{h_4} = 2$ und $a^{h_4} = b$ und $d^{h_4} = e$, d.h. 2 ist mit b und e verbunden. Also ist 3 mit c und f verbunden. Man überprüft, daß tatsächlich kein Dreieck vorkommt und $\mu = 1$ gilt. Der so konstruierte

Graph G_2 ist isomorph zum Petersen-Graph (siehe (4.2 a))

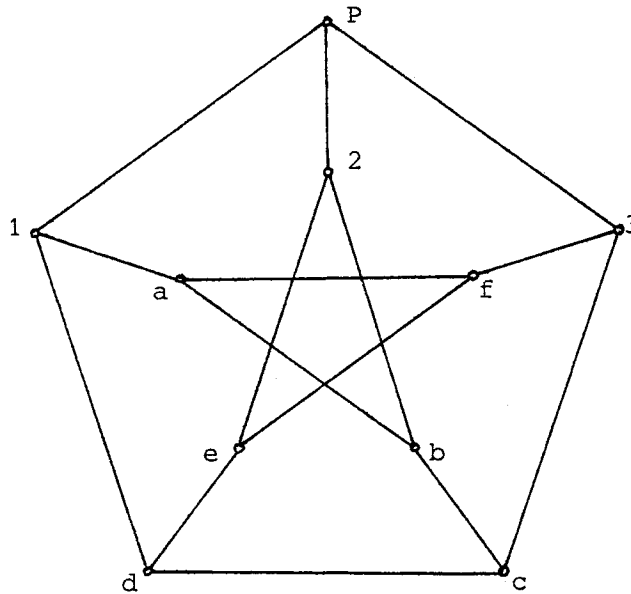


Abbildung 3: Der Graph G_2 (Petersen-Graph)

und $\text{Aut}(G_2) \cong S_5$. Die A_5 wirkt als Rang-3-Permutationsgruppe auf den 10 Ecken des Graphen und $H \cong S_3 \cong (A_5)_P$.

(b) (Siehe [9], S.117ff)

Sei $H = A_5$ als abstrakte Gruppe nun der Ausgangspunkt.

$G'_2 = K_5$ und G_2 der Petersen-Graph wie in (4.2 a). Es ist $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $\Omega_2 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$.

Wir konstruieren nun einen Rang-3-Graphen auf der Eckenmenge

$$\Omega = \{P\} \cup \Omega_1 \cup \Omega_2:$$

P sei mit jedem Punkt aus Ω_1 , aber keinem Punkt aus Ω_2 verbunden.

Ein $i \in \Omega_1$ sei genau dann mit (j, k) in Ω_2 verbunden, wenn $i \in \{j, k\}$ gilt. Daß durch diese Definition die in (5.1) angegebenen Bedingungen erfüllt sind, rechnet man leicht nach. Man erhält den sogenannten Clebsch-Graphen, den eindeutig bestimmten streng regulären Graphen mit folgenden Parametern:

$$n = 16, k = 5, l = 10, \lambda = 0, \mu = 2, s = 1, t = -3, f_2 = 10, f_3 = 5.$$

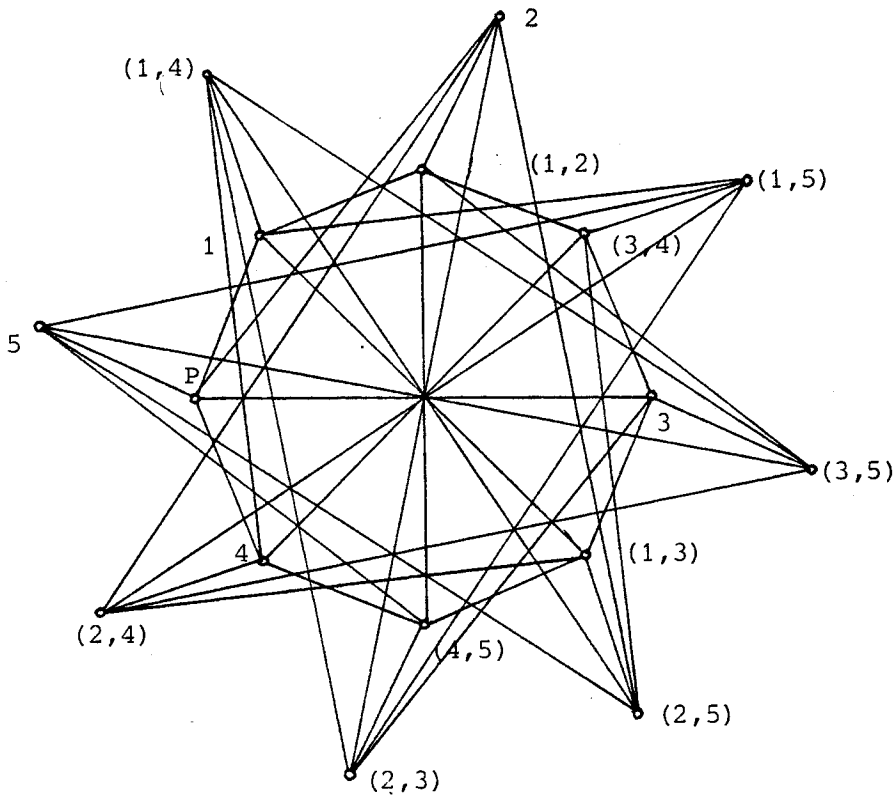


Abbildung 3: Der Clebsch-Graph

P	1	1	1	1	1														
1						1	1	1	1										
2	1					1				1	1	1							
3	1						1			1			1	1					
4	1							1		1		1		1		1			
5	1								1		1		1		1	1			
(1,2)		1	1										1	1	1				
(1,3)		1		1							1	1				1			
(1,4)		1			1					1		1		1					
(1,5)		1				1				1	1		1						
(2,3)			1	1			1	1									1		
(2,4)			1		1			1	1									1	
(2,5)			1			1	1	1						1					
(3,4)				1	1		1			1		1							
(3,5)				1		1	1	1		1			1						
(4,5)					1	1	1	1			1								

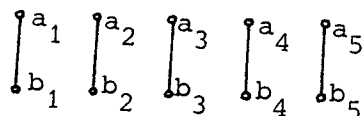
Abbildung 4: Adjazenzmatrix des Clebsch-Graphen

Die Automorphismengruppe des Clebsch-Graphen, den wir hier mit G_3 bezeichnen wollen, ist transitiv auf den Ecken, denn durch Drehungen um 45° bzw. 90° in Abbildung 5 läßt sich P in einen Punkt von G_2 bzw. G_2' überführen, und bei diesen Drehungen handelt es sich um Automorphismen des Graphen. Der Stabilisator von P in $\text{Aut}(G_3)$ ist isomorph zu S_5 . Es ist also $|\text{Aut}(G_3)| = 16 \cdot 120 = 1920$. Da $\text{Aut}(G_3)$ sicher eine ungerade Permutation enthält, besitzt $\text{Aut}(G_3)$ eine Untergruppe K vom Index 2. Da dann $A_5 \leq K$ und A_5 transitiv auf G_2 und G_2' wirkt und obige Drehungen gerade Permutationen sind, ist K selbst primitive Rang-3-Permutationsgruppe auf Ω und es gilt $K_P \cong A_5$.

Nach Satz 5.1 ist dann K entweder eine einfache Gruppe oder aber K enthält einen regulären, elementar-abelschen Normalteiler. Es gibt freilich keine einfache Gruppe der Ordnung 960 (siehe etwa [18]), also ist K isomorph zu $E_{16} \cdot A_5$, dem semidirekten Produkt der elementar-abelschen Gruppe der Ordnung 16 mit der alternierenden Gruppe vom Grad 5. Schließlich gilt: $\text{Aut}(G_3) \cong E_{16} \cdot S_5$.

(c) Sei nun $H = E_{16} \cdot S_5$ der Ausgangspunkt.

Ω_1 sei die Menge $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ und G_3' folgender Graph



G_3'' sei folgendermaßen definiert: Sei U der 5-dimensionale Vektorraum über $GF(2)$ und W sei $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + \dots + x_5 = 0, x_1, \dots, x_5 \in GF(2)\}$. W sei die Eckenmenge von G_3' ; zwei Punkte von W seien genau dann in G_3'' miteinander verbunden, wenn ihr Hamming-Abstand 4 beträgt. G_3'' hat dann 16 Ecken, ist -wie man leicht nachprüft- streng regulär und hat dieselben Parameter wie der Clebsch-Graph. Wegen der Eindeutigkeit des Clebsch-Graphen ([10], S.154 †)) können wir G_3 und G_3'' identifizieren.

†) HESTENES/HIGMAN bezeichnen einen Graphen, der isomorph zu \bar{G}_3 ist als Clebsch-Graph. Da in der Literatur beide komplementären Graphen als Clebsch-Graph bezeichnet werden, wird hier G_3 Clebsch-Graph genannt. Dieselbe Bemerkung trifft auf den Schläfli-Graph zu.

Sei $\Omega = \{P\} \cup \Omega_1 \cup W$. Es ist $|\Omega| = 27$. Falls ein streng regulärer Graph G_4 mit der Eckenmenge Ω existiert, der G_3' und G_3'' als Untergraphen enthält, so muß er folgende Parameter haben: $n = 27$, $k = 10$, $l = 16$, $\lambda = 1$, $\mu = 5$, $s = 1$, $t = -5$, $f_2 = 20$ und $f_3 = 6$.

Jeder Punkt von G_3' muß also mit genau $k - \lambda - 1 = 8$ Punkten in G_3'' verbunden werden, und zwar so, daß jeder Punkt von G_3'' mit genau $\mu = 5$ Punkten von G_3' verbunden ist.

Benachbarte Punkte in G_3' , also a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) bilden bereits mit P ein Dreieck, denn P ist ja mit jedem Punkt von Ω_1 verbunden, dürfen also in G_3'' keinen gemeinsamen Nachbarn haben. Ferner müssen nicht benachbarte Punkte in G_3' $\mu - 1 = 4$ gemeinsame Nachbarn in G_3'' haben.

Diese Bedingungen werden durch folgende Definition erfüllt:

Für $i = 1, 2, \dots, 5$ sei a_i mit den (x_1, x_2, \dots, x_5) in W verbunden, für die $x_i = 0$ gilt und b_i mit denjenigen, die $x_i = 1$ erfüllen. Dadurch wird ein streng regulärer Graph definiert, denn:

Verbundene Punkte a_i, b_i haben P als gemeinsamen Nachbarn, und keinen gemeinsamen Nachbarn in G_3'' ; benachbarte Punkte in G_3'' liegen in G_3' in keinem Dreieck, da der Clebsch-Graph keine Dreiecke enthält; da sie den Hamming-Abstand 4 haben, haben sie an genau einer Koordinate eine 0 oder eine 1 gemeinsam, sind also beide mit genau einem a_i oder b_i verbunden. Mit dieser Überlegung ist auch der Fall zweier verbundener Punkte aus G_3' und G_3'' erledigt. Also liegen zwei benachbarte Punkte in genau einem Dreieck.

Ferner gilt: Zwei nichtbenachbarte Punkte in G_3' haben P und 4 Nachbarn in G_3'' gemeinsam zum Nachbarn. Zwei nichtadjazente Punkte in G_3'' haben dort 2 gemeinsame Nachbarn und, da ihr Hamming-Abstand 2 ist, weitere 3 gemeinsame Nachbarn in G_3' . Da jeder Punkt in G_3'' 5 Nachbarn in G_3' hat, hat er mit P 5 gemeinsame Nachbarn. Zwei nichtadjazente Punkte aus G_3' und G_3'' haben einen gemeinsamen Nachbarn in G_3' und derer 4 in G_3'' . Also ist $\mu = 5$.

Der so definierte Graph G_4 hat also in der Tat die gewünschten Parameter und ist wegen der Eindeutigkeit des Schläfli-Graphen [10] isomorph zu dem in (4.4) konstruierten Graphen G . (Die in (4.4) angegebene Adjazenzmatrix von G ist so konstruiert, daß man die beiden Untergraphen, die isomorph zu G_3' und G_3'' sind, leicht erkennt.)

In (4.4) haben wir gesehen, daß die Automorphismengruppe dieses Graphen transitiv auf den Ecken von Ω wirkt. Da der Stabilisator des Punktes P isomorph zu $E_{16} \cdot S_5$ ist, folgt:

$$|\text{Aut}(\mathbb{G}_4)| = 27 \cdot |E_{16} \cdot S_5| = 51\,840.$$

$\text{Aut}(\mathbb{G}_4)$ enthält nach (4.4) $\text{PSU}(4, 2^2)$ vom Index 2.

Wir haben damit ein Beispiel eines Rang-3-Turmes kennengelernt, einer aufeinanderfolgenden Reihe von Rang-3-Erweiterungen, bei der ausgehend von der S_3 die A_5 , $E_{16} \cdot A_5$ und die $\text{PSU}(4, 2^2)$ konstruiert wurden.

Die große Bedeutung der Theorie der Rang-3-Permutationsgruppen liegt darin, daß durch die eben beschriebene Konstruktion von Rang-3-Erweiterungen eine ganze Reihe sporadischer einfacher Gruppen entdeckt, bzw. konstruiert wurden, so die Higman-Sims-Gruppe, die McLaughlin-Gruppe, die Rudvalis-Gruppe und die Suzuki-Gruppe. Einen Überblick über Türme von Rang-3-Gruppen, die zu sporadischen einfachen Gruppen führen, gibt TITS [23]. In Kapitel II dieser Arbeit soll der Suzuki-Turm konstruiert werden.

Kapitel II

DER SUZUKI - TURM

§ 6 Die Konstruktion der Suzuki-Gruppe Suz

Die Konstruktion der Suzuki-Gruppe, die M. SUZUKI in [20] angegeben hat, besteht in einer Folge aufeinander aufbauender transitiver Gruppenerweiterungen, beginnend mit der symmetrischen Gruppe S_4 . Vom ersten Schritt abgesehen handelt es sich um Rang-3-Erweiterungen, die gemäß § 5 konstruiert werden sollen.

Für $i = 0, 1, \dots, 5$ sei Γ_i ein (im folgenden) zu definierender Graph und $G_i = \text{Aut}(\Gamma_i)$. Es wird sich zeigen, daß für $i = 1, 2, \dots, 5$ G_i stets eine einfache Gruppe G_i^* vom Index 2 enthält.

(Der Einfachheit der Notation halber werden -sofern Mißverständnisse ausgeschlossen sind- sowohl die Graphen wie ihre Punktemengen mit Γ_i bzw. Σ_i bezeichnet.)

Γ_0 sei der triviale Graph aus 4 Punkten ohne verbindende Kanten, d.h. $\Gamma_0 = K_4$. Offensichtlich ist dann $G_0 = \text{Aut}(\Gamma_0) \cong S_4$.

Für $i = 0, 1, \dots, 4$ definieren wir die Graphen Σ_i auf folgende Weise:

Die Eckenmenge von Σ_i sei:

für $i = 0$: die Menge der Involutionen der S_4

für $i = 1, 2, 3, 4$: die Menge der Zentren der 2-Sylow-Gruppen von G_i^*

Involutionen, die im Zentrum der 2-Sylow-Gruppen einer Gruppe G liegen, heißen *zentrale Involutionen*. Offensichtlich bilden sie eine Konjugiertenklasse. Ist die Ordnung des Zentrums einer 2-Sylow-Gruppe von $G_i = 2$, so betrachten wir einfach die Menge der zentralen Involutionen als Eckenmenge von Σ_i .

(A) Zwei Punkte $u, v \in \Sigma_i$ seien genau dann miteinander verbunden, wenn gilt $[u, v] \neq 1$, aber es existiert ein $w \in \Sigma_i$ mit $[u, w] = [v, w] = 1$.

Betrachtet man den sogenannten Vertauschbarkeitsgraphen

$G_i = (\Sigma_i, \Phi)$ mit der Eckenmenge Σ_i und $\Phi = \{(u,v) \mid [u,v] = 1\}$, so sind in dem in (A) definierten Graphen gerade die Ecken verbunden, die in G_i genau die Distanz 2 haben.

Für $i = 0, 1, \dots, 4$ wird Γ_{i+1} wie folgt definiert:

Die Eckenmenge von Γ_{i+1} bestehe aus den Ecken von Γ_i , denen von Γ_i und einem weiteren Punkt P_i , also $\Gamma_{i+1} = \{P_i\} \cup \Gamma_i \cup \Sigma_i$.

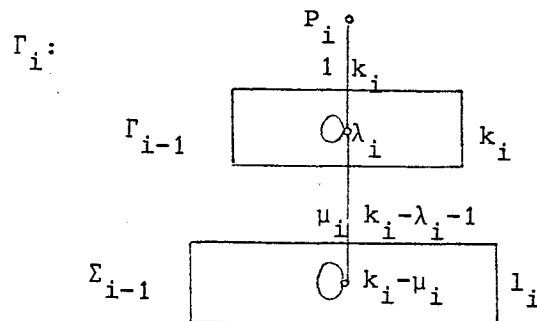
(B) Der Punkt P_i sei mit jedem Punkt aus Γ_i , aber mit keinem Punkt von Σ_i verbunden.

Die Punkte von Γ_i bzw. Σ_i seien untereinander verbunden wie in den beiden Graphen Γ_i bzw. Σ_i .

Jeder Punkt aus Γ_i sei mit genau den Punkten in Σ_i verbunden, die ihn festlassen.

(Die letzte Festlegung von (B) macht Sinn, denn die Elemente von Σ_i liegen in $\text{Aut}(\Gamma_i)$, bzw. sind Untergruppen G_i)

Die Abbildung 6 auf Seite 29 gibt eine Übersicht über den Suzuki-Turm. Die Darstellung der Graphen ist folgendermaßen zu verstehen:



Der Punkt P_i ist mit den k_i Punkten von Γ_{i-1} verbunden, umgekehrt ist jeder der Punkte in Γ_{i-1} mit P_i verbunden.

Die Valenz des Untergraphen Γ_{i-1} ist $\lambda_i = k_{i-1}$.

Jeder Punkt aus Γ_{i-1} ist mit $k_i - \lambda_i - 1$ Punkten in Σ_{i-1} verbunden, während ein Punkt in Σ_{i-1} mit μ_i Punkten in Γ_{i-1} benachbart ist.

Die Punktmenge von Σ_{i-1} hat die Mächtigkeit 1_i und Σ_{i-1} hat die Valenz $k_i - \mu_i$.

Aus der Reihe fällt Γ_1 , denn die $PGL(2,7)$ ist eine imprimitive Rang-4-Erweiterung der S_4 .

Die gesamte Parametermenge für Γ_i ($i = 2,3,4,5$) ist folgender Tabelle zu entnehmen:

i	n_i	k_i	l_i	λ_i	μ_i	s_i	t_i	$f_{2,i}$	$f_{3,i}$
2	36	14	21	4	6	2	-4	21	14
3	100	36	63	14	12	6	-4	36	63
4	416	100	315	36	20	20	-4	65	350
5	1 782	416	1 365	100	96	20	-16	780	1 001

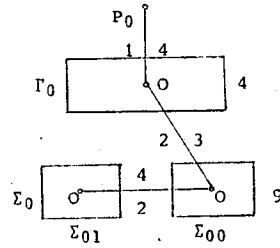
Die Parameterbedingungen in (3.6) zeigen, daß kein streng regulärer Graph existiert, der Γ_5 in der gewünschten Weise als Untergraph enthalten würde.

$\Gamma_0:$

K_4

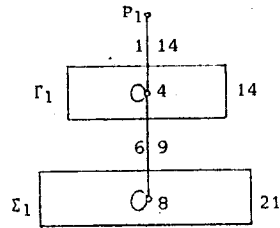
$$G_0 \cong S_4$$

$\Gamma_1:$



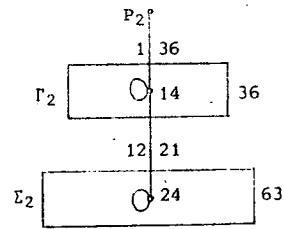
$$G_1 \cong \text{PGL}(2, 7) \quad G_1^* \cong \text{PSL}(2, 7)$$

$\Gamma_2:$



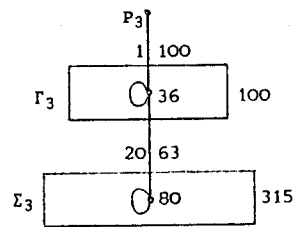
$$G_2 \cong G_2(2) \quad G_2^* \cong \text{PSU}(3, 3^2)$$

$\Gamma_3:$



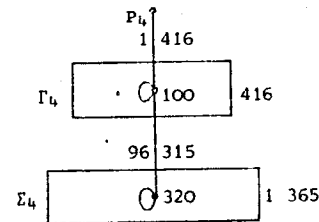
$$G_3 \cong \text{Aut}(\text{HJ}) \quad G_3^* \cong \text{HJ}$$

$\Gamma_4:$



$$G_4 \cong \text{Aut}(G_2(4)) \quad G_4^* = G_2(4)$$

$\Gamma_5:$



$$G_5 \cong \text{Aut}(\text{Suz}) \quad G_5^* = \text{Suz}$$

Abbildung 6: Übersicht über den Suzuki-Turm

§ 7 Die $PGL(2,7)$ als Rang-4-Erweiterung der S_4

(7.1) Σ_O besteht aus der Menge der Involutionen der S_4 . Da zwei Elemente der S_n genau dann konjugiert sind, wenn sie dieselbe Zyklenstruktur besitzen, zerfällt Σ_O in zwei Konjugiertenklassen in der S_4 :

$$\Sigma_{OO} = \{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\} \text{ und}$$

$$\Sigma_{O1} = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

Vorschrift (A) in §6 ergibt: Die Elemente der beiden Konjugiertenklassen sind untereinander nicht verbunden. Für $i, j, k, l, m, n \in \{1, 2, 3, 4\}$ ist $(ij) \in \Sigma_{OO}$ genau dann mit $(kl)(mn) \in \Sigma_{O1}$ verbunden, wenn $(ij) \neq (kl)$ und $(ij) \neq (mn)$ gilt.

Bezeichnet man die Punkte von Γ_O mit 1, 2, 3, 4, so ist $k \in \Gamma_O$ genau dann mit $(ij) \in \Sigma_{OO}$ benachbart, wenn $i, j \neq k$ gilt. Elemente in Σ_{O1} bewegen alle 4 Punkte von Γ_O , sind also mit keinem Punkt von Γ_O verbunden.

Es ergibt sich folgender Graph Γ_1 :

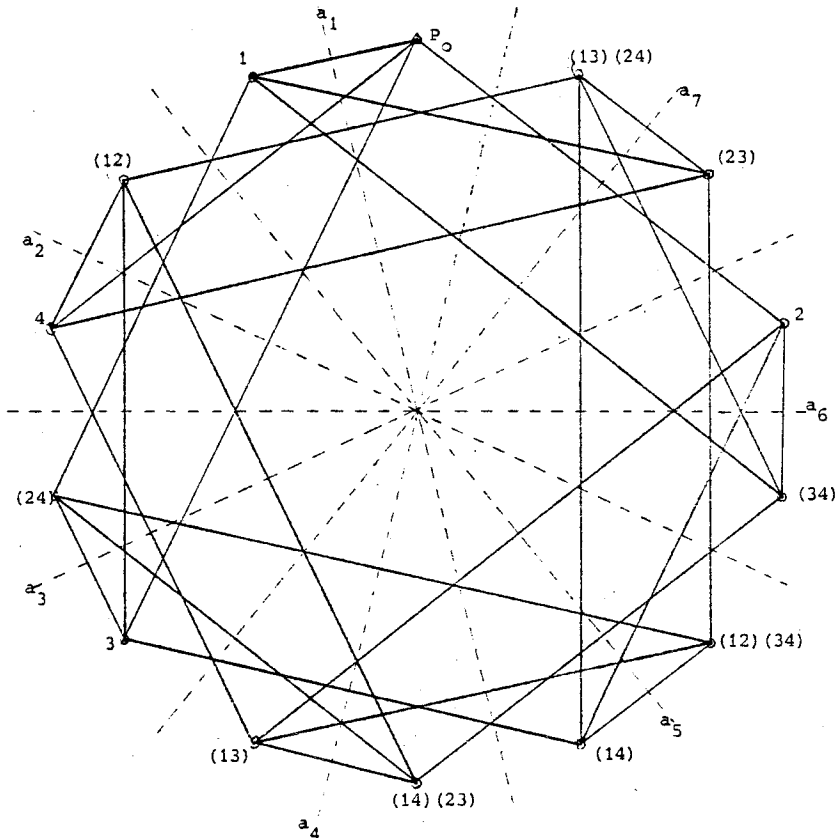


Abbildung 7: Der Graph Γ_1

(7.2) Drehungen um $\frac{n}{7} \cdot 360^\circ$ ($n = 1, 2, \dots, 7$) zusammen mit Spiegelungen an den eingezeichneten Achsen a_1, a_2, \dots, a_7 sind offensichtlich Automorphismen von Γ_1 , die jeden Punkt in jeden beliebigen anderen überführen. $G_1 = \text{Aut}(\Gamma_1)$ ist also transitiv auf den Punkten von Γ_1 .

Sei H der Stabilisator des Punktes P_0 in G_1 , sei $g \in H$.

Es gilt $\Gamma_0^g = \Gamma_0$, d.h. g wirkt eingeschränkt auf die Punkte von Γ_0 wie ein Element der S_4 . Da die Wirkung von g auf Γ_0 die Wirkung von g auf Γ_0 eindeutig bestimmt, ist $H \cong S_4$.

H hat vier Bahnen auf Γ_1 , nämlich $P_0, \Gamma_0, \Sigma_{00}, \Sigma_{01}$. G_1 ist also eine Rang-4-Permutationsgruppe. Da G_1 transitiv auf Γ_1 wirkt und $H \cong S_4$ gilt, ist $|G_1| = 14 \cdot 24 = 336$.

(7.4) Um die Gruppe G_1 zu identifizieren, konstruieren wir den Graphen Γ_1 auf einer anderen Menge von Punkten, nämlich den elementar-abelschen Untergruppen vom Typ (2,2) in der speziellen projektiven linearen Gruppe $\text{PSL}(2,7)$.

(a) Sei J die Menge der Involutionen der $\text{PSL}(2,7)$.

(Zwei Elemente $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}$ sind in der $\text{PSL}(2,7)$ gleich, wenn $p = \pm t, q = \pm u, r = \pm v, s = \pm w$ gilt. Dabei sind p, q, r, s, t, u, v, w aus $\text{GF}(7)$)

$$\text{Es ist } J = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ \frac{1+p^2}{-q} & -p \end{pmatrix} \mid p = 0, 1, \dots, 6, q = 1, 2, 3 \right\}$$

Denn $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} p^2 + qr & pq + qs \\ rp + sr & rq + s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ impliziert, daß $s = -p$.

Da $\det \begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix} = 1$, ergibt sich $r = -\frac{1+p^2}{q}$.

Es gibt also 21 Involutionen in $\text{PSL}(2,7)$ nämlich:

$$\begin{aligned} u_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \\ u_6 &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, u_7 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, u_8 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, u_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, u_{10} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \\ u_{11} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, u_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, u_{13} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, u_{14} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, u_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \\ u_{16} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, u_{17} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, u_{18} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, u_{19} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, u_{20} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ u_{21} &= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Als nächstes zeige ich, daß alle Involutionen der $PSL(2,7)$ konjugiert zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ sind. (Beweis nach [19], S.73)

Sei $r = -\frac{1+p^2}{q}$ und $\lambda = -\frac{p}{r}$ ($r \neq 0$, da $1+p^2 \neq 0$)

Dann ist $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -r^{-1} \\ r & 0 \end{pmatrix}$

Seien $a, b \in GF(7)$ mit $a^2 + b^2 = -r^{-1}$.

Setze $c = -\frac{b}{a^2 + b^2}$ und $d = \frac{bc + 1}{a}$. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a^2 + b^2 \\ -\frac{1}{a^2 + b^2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -r^{-1} \\ r & 0 \end{pmatrix}$$

Alle Involutionen der $PSL(2,7)$ sind also zu u_1 konjugiert.

(c) Wir können nun die gesuchten elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung 4 in $PSL(2,7)$ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -r^{-1} \\ r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ genau dann, wenn } r = 1 \text{ oder } r = 6.$$

Für diese Werte von r ergibt sich folgende Liste von Paaren (a,b) mit $a^2 + b^2 = -r^{-1}$:

$(0,1), (0,6), (1,0), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,5), (4,2), (4,5), (5,3), (5,4), (6,0)$.

Berechnet man nun c und d für diese Werte von (a,b) , so erhält man die Elemente in $PSL(2,7)$, die mit u_1 vertauschbar sind. Darunter sind 5 Involutionen: u_1 selbst und $u_{11}, u_{12}, u_{17}, u_{20}$.

Damit ergeben sich zwei Vierergruppen in $PSL(2,7)$:

$M_O = \{1, u_1, u_{11}, u_{20}\}$ und $N_O = \{1, u_1, u_{12}, u_{17}\}$, die nicht konjugiert sind.

Jede Involution der $PSL(2,7)$ liegt in genau 2 verschiedenen Gruppen vom Typ $(2,2)$.

Für $t = 0, 1, \dots, 6$ liefern die Gleichungen ([19], S.74)

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_O \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = M_t \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} N_O \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = N_t$$

alle gesuchten Gruppen.

Die 14 elementar-abelschen Untergruppen vom Typ (2,2) in $PSL(2,7)$:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right\} & N_0 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right\} \\
 M_1 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\} & N_1 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\
 M_2 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \right\} & N_2 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
 M_3 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\} & N_3 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \right\} \\
 M_4 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\} & N_4 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
 M_5 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \right\} & N_5 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\} \\
 M_6 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right\} & N_6 &= \left\{ 1, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

(c) Definition eines Graphen Γ'_1 :

Die Punkte von Γ'_1 seien die elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung 4 in der $PSL(2,7)$, also $M_0, M_1, \dots, M_6, N_0, N_1, \dots, N_6$.

Ein M_i sei genau dann mit einem N_j verbunden, wenn ihr Schnitt trivial ist. Die M_i 's bzw. die N_j 's seien untereinander nicht benachbart.

Wie man obiger Liste entnimmt ist Γ'_1 ein regulärer Graph der Valenz 4. Für $i = 0, 1, \dots, 6$ ist M_i mit denjenigen N_j mit $j = i+2, i+4, i+5, i+6 \pmod{7}$ verbunden.

Γ'_1 hat folgende Gestalt:

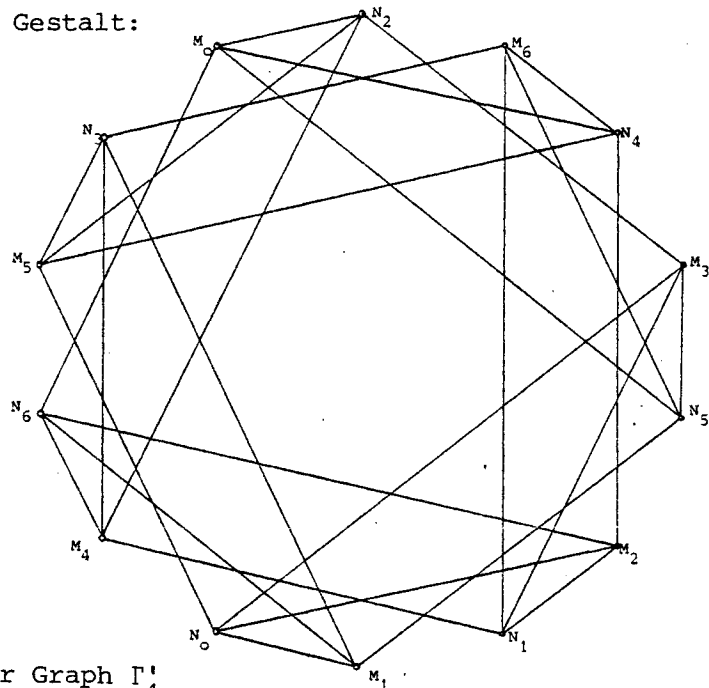


Abbildung 8: Der Graph Γ'_1

(e) Offensichtlich gilt $G_1 \cong \text{Aut}(\Gamma'_1)$.

Konjugation der Punkte von Γ'_1 mit Elementen der $\text{PSL}(2,7)$ bildet die Kanten des Graphen aufeinander ab, d.h. es existiert ein Homomorphismus $f: \text{PSL}(2,7) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma'_1)$, der wegen der Einfachheit der $\text{PSL}(2,7)$ injektiv sein muß. Also ist $\text{PSL}(2,7)$ zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(\Gamma'_1)$ isomorph, die allerdings nicht transitiv auf Γ'_1 wirkt, da die Vierergruppen der $\text{PSL}(2,7)$ in dieser Gruppe zwei Konjugiertenklassen bilden.

Es gibt ein Element in $\text{PGL}(2,7) \setminus \text{PSL}(2,7)$, etwa $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, das durch Konjugation M_0 auf N_4 abbildet, d.h. die Punkte des Graphen Γ'_1 sind in $\text{PGL}(2,7)$ konjugiert. Also gibt es einen injektiven Homomorphismus $g: \text{PGL}(2,7) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma'_1)$.

Wegen $|G_1| = 336$ ist also $\text{Aut}(\Gamma'_1) \cong G_1$ isomorph zur allgemeinen projektiven linearen Gruppe $\text{PGL}(2,7)$.

Bemerkung: Betrachtet man die projektive Ebene der Ordnung 2, so läßt sich ein Graph G , der Fahnenkomplex, so definieren:

Die Ecken von G seien die 7 Punkte und die 7 Geraden der projektiven Ebene, wobei ein Punkt der Ebene genau dann mit einer Geraden verbunden wird, wenn er auf ihr liegt. Sei \tilde{G} das "Komplement" von G in dem Sinne, daß weiterhin die Punkte der Ebene untereinander nicht verbunden sind, ebensowenig wie die Geraden untereinander, aber die anderen Kanten komplementär sind. Dann ist $\tilde{G} \cong \Gamma_1$. Auch daraus ergibt sich, daß $G_1 \cong \text{PGL}(2,7)$ gilt.

Die Wirkung der $\text{PGL}(2,7)$ auf den 14 Vierergruppen der $\text{PSL}(2,7)$ ist imprimitiv, $\{M_0, M_1, \dots, M_6\}$ und $\{N_0, N_1, \dots, N_6\}$ sind Blöcke dieser Wirkung der $\text{PGL}(2,7)$. Wir haben also eine imprimitive Rang-4-Erweiterung der S_4 konstruiert.

§ 8 Die $G_2(2)$ als Rang-3-Erweiterung der $PGL(2,7)$

(8.1) Konstruktion des Graphen Γ_2 .

Die Punkte von Σ_1 sind die Zentren der 2-Sylow-Gruppen von $G_1^* \cong PSL(2,7)$. Da diese Zentren die Ordnung 2 haben, können wir die zentralen Involutionen der $PSL(2,7)$, also die 21 Involutionen dieser Gruppe als Eckenmenge von Σ_1 betrachten. Der Graph Σ_1 wird gemäß Vorschrift (A) von §6 gebildet:

Da jede Involution u Element zweier Vierergruppen ist, gibt es 4 paarweise verschiedene Involutionen v_i ($i = 1, 2, 3, 4$) mit $[u, v_i] = 1$. Jedes der v_i ist in einer weiteren Vierergruppe V_i enthalten, die u nicht enthält.

Annahme: $|V_k \cap V_1| > 1$ für $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, $k \neq l$, sei etwa die Involution w in $V_k \cap V_1$ enthalten.

Gilt nun $[v_k, v_1] = 1$, so müßte $V_k = V_1$ gelten. Widerspruch.

Sei also $[v_k, v_1] \neq 1$. Dann gibt es in $C_{G_1}(v_k)$ zwei nicht vertauschbare Involutionen, nämlich u und w . (Wären u und w vertauschbar, wäre wieder $V_k = V_1$). Also ist $\langle u, w \rangle \leq C_{G_1}(v_k)$ eine Diedergruppe.

Da $C_{G_1}(v_k)$ die Ordnung 8 hat, ist $\langle u, w \rangle = C_{G_1}(v_k)$. Andererseits sind nach Voraussetzung u, w in $C_{G_1}(v_1)$, also¹ gilt:

$C_{G_1}(v_k) = \langle u, w \rangle = C_{G_1}(v_1)$, also¹ $[v_k, v_1] = 1$ Widerspruch.

Also gibt es genau $2 \cdot 4 = 8$ paarweise verschiedene Involutionen in Σ_1 , die nach (A) mit u zu verbinden sind. Σ_1 ist also ein regulärer Graph der Valenz 8.

Da die Punkte von Σ_1 in der $PSL(2,7)$ konjugiert sind, sind sie dies erst recht in $PGL(2,7)$. Da Konjugation Kommutativität erhält, bewirkt sie einen Automorphismus von Σ_1 . $PGL(2,7)$ wirkt also als transitive Automorphismengruppe auf Σ_1 .

Entsprechend der Vorschrift (B) wird Γ_2 gebildet. Wie man der Liste der elementar-abelschen Untergruppen vom Typ $(2,2)$ in $PSL(2,7)$ unmittelbar entnimmt, gibt es zu jedem M_i oder N_j genau 9 Involutionen der $PSL(2,7)$, die M_i bzw. N_j festlassen. Jede Involution u in Σ_1 fixiert genau 6 dieser Untergruppen der $PSL(2,7)$.

Nach Konstruktion ist Γ_2 ein regulärer Graph der Valenz 14. Mit den üblichen Bezeichnungen ist $k = 14$, $l = 21$ und $n = 36$.

Ist Γ_2 ein streng regulärer Graph (was unten gezeigt wird), so muß er die Parameter $\lambda = 4$, $\mu = 6$, $s = 2$, $t = -4$, $f_2 = 21$ und $f_3 = 14$ besitzen, denn die Valenz von Γ_1 ist 4.

(Die Parameterbedingungen aus (3.6) genügen hier als Argument nicht, denn sie würden auch für $\lambda = 7$ gelten. In diesem Fall würde es sich um den eindeutig bestimmten Graphen G_Γ aus (4.2 a) mit $m = 9$ handeln.)

```

1111111111111111
1      1 11111 1      11 1 1 11
1      1 1 11 1 111 1 1 1 11
1      11 1 1 11 1 11 1 1 1 1
1      111 1 11 1 11 1 1 11
1      111 11 11 1 11 1 11
1      1 111 11 1 1 1111 1
1      1 111 1 1 1 11 1 11 1
1 111 1      1 1 1 1 11 11 1
1 111 1      11 1 1 11 1 11
11 111      1 11 11 11 1 1
1 1 111      1 11 1 11 1 11
11 1 11      1 11 1 1 1 11 1
111 1 1      1 11 1 11 11 1
1111 1      11 111 1 11 1
1 1 111 1      1 11 1 1 1 11
11 1 1 111 1 11 1 1 1 1
      1 11 11 1 1 1 11 1 1 11
1 11      11 1 1 1 1 11 1 11
      1 11 1 11 11 1 1 1 11
      1 11 11 1 11 1 1 1 11
      11 11 1 11 1 1 1 11
      11 11 1 11 11 1 1 111
      1 11 11 1 11 1 11 1 1 1
      1 111 1 111 1 1 11 1 1
      11 1 11 1 11 1 1 11 1 1
1 11 11 11      1111 1 1 1
      1 11 1 11 11 11 1 1 1 1
11 1 11 1 1      11 11 1 1 1
      1 11 11 1 1 1 11 1 11 1
      1 11 1 11 1 11 11 1 11
1 1 11 1 1 1 1 1 11 1 1 11
      1 11 1 11 1 1      111 1 1 1
1 11      11 11 1 11 11 1 1
11 1 11 1      1 1 11 11 1 1
      11 1 11 1 1 1 11 1

```

Abbildung 9 Adjazenzmatrix von Γ_2 .

Die Zeilen und Spalten sind folgendermaßen 'numeriert': P_1 , die Punkte von Γ_1 , nämlich $M_0, M_1, \dots, M_6, N_0, \dots, N_6$, dann die Punkte von Σ_1 : u_1, u_2, \dots, u_{21} .

(8.2) Bestimmung der Ordnung der Automorphismengruppe von Γ_2 .

Zunächst ist zu zeigen, daß der Stabilisator H des Punktes P_1 in $G_2 = \text{Aut}(\Gamma_2)$ isomorph zu $\text{PGL}(2,7)$ ist.

Beweis: Sei $h \in H$. Dann ist $P_1^h = P_1$ und $\Gamma_1^h = \Gamma_1$. Eingeschränkt auf die Punkte von Γ_1 wirkt h also wie ein Element von G_1 , d.h. h wirkt wie Konjugation der M_i 's und N_j 's durch ein Element der $\text{PGL}(2,7)$. (Wegen der Isomorphie $\Gamma_1 \cong \Gamma_1'$ identifiziere ich die beiden Graphen.) Die durch (B) definierten Kanten werden durch h aber nur dann aufeinander abgebildet, wenn die Punkte von Σ_1 durch Konjugation mit demselben Element der $\text{PGL}(2,7)$ permutiert werden. Die Wirkung von h auf Γ_1 bestimmt also eindeutig die Wirkung von h auf Γ_1 , also ist $H \cong \text{PGL}(2,7)$. \square

Es ist nun zu zeigen, daß G_2 transitiv auf den Punkten von Γ_2 wirkt. Da der Stabilisator H des Punktes P_1 transitiv auf Γ_1 und Σ_1 wirkt, genügt es einen Automorphismus g von Γ_2 zu finden, der P_1 , Γ_1 und Σ_1 bewegt. Unter Berücksichtigung der Kanten in Γ_1 berechnet man leicht ein solches g .

(Numeriere P_1 mit 01; $M_0, M_1 \dots M_6$ mit 02, 03, ..., 08; N_0, \dots, N_6 mit 09, ..., 15 und die Punkte von Σ_1 , u_1, u_2, \dots, u_{21} mit 16, 17, ..., 36.)

Dann ist $g =$

(01 02) (11) (13) (14) (15) (03 17) (04 34) (05 19) (06 32) (07 29) (08 27)
(09 16) (10 35) (12 26) (18 23) (20 33) (21 36) (22 24) (25 30) (28 31)

ein Automorphismus von Γ_2 , der P_1 , Γ_1 und Σ_1 bewegt.

(Wie man einen solchen Automorphismus anders denn durch "Probieren" konstruiert, wird in (9.2) gezeigt; die dortige Konstruktion samt Beweis läßt sich ohne Mühe auf diesen Fall übertragen).

Damit ist klar, daß G_2 eine transitive Rang-3-Gruppe ist, folglich Γ_2 ein streng regulärer Graph mit den in (8.1) angegebenen Parametern ist.

Aus den Überlegungen dieses Abschnitts folgt:

$$|G_2| = 36 \cdot |\text{PGL}(2,7)| = 36 \cdot 336 = 12\,096.$$

(8.3) Behauptung: G_2 enthält eine einfache Untergruppe G_2^* der Ordnung 6 048.

Beweis: Da für $\Gamma_2 \mu \neq 0, k$ gilt, ist G_2 eine primitive Gruppe, also ist $\text{PGL}(2,7)$ maximale Untergruppe von G_2 . Da $g \in G_2 \setminus \text{PGL}(2,7)$ gilt, ist $G_2 = \langle \text{PGL}(2,7), g \rangle$. Sei $G_2^* = \langle \text{PSL}(2,7), g \rangle$. Es gilt $G_2^* < G_2$, denn es gibt einen Automorphismus von Γ_2 , der jedes der M_i auf ein N_j abbildet und P_1 fixiert. Dieser Automorphismus liegt in $\text{PGL}(2,7)$, aber nicht in $\text{PSL}(2,7)$. Da g eine gerade Permutation ist, liegt dieser Automorphismus auch nicht in G_2^* .

Es ist nun zu zeigen, daß G_2^* transitiv auf Γ_2 wirkt. Da $\text{PSL}(2,7)$ Untergruppe von G_2^* ist und transitiv auf den M_i 's, den N_j 's und Σ_1 wirkt, genügt es zu zeigen, daß G_2^* Elemente enthält, die

- (i) P_1 auf jeden andern Punkt,
- (ii) jeden Punkt von Σ_1 auf jeden beliebigen Punkt in Γ_1 und
- (iii) jedes M_i auf jedes N_j abbilden.

(i): $P_1^g = M_0$. Es existieren $h_i \in \text{PSL}(2,7)$, so daß $P_1^{gh_i} = M_i$ (für $i = 1, 2, \dots, 6$). $M_i^g \in \Sigma_1$, also gibt es ein $h \in G_2^*$ mit

$P_1^h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $P_1^{hg} = N_0$. Daraus folgt (i).

(ii) folgt aus den Beziehungen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} g = N_0$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} g = M_1$.

(iii) folgt aus: $M_1^g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, es existiert ein $h \in G_2^*$ mit

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, also ist $M_1^{ghg} = N_0$.

G_2^* ist also transitiv auf Γ_2 und da ein Punktstabilisator in G_2^* isomorph zu $\text{PSL}(2,7)$ ist, ist $|G_2^*| = 36 \cdot 168 = 6\,048$.

G_2^* ist sogar primitiv. Denn: $\text{PSL}(2,7)$ hat auf den Punkten von Γ_2 Bahnen der Länge 1, 7, 7, 21 (P_1 , die M_i 's, die N_j 's und Σ_1 für den Stabilisator von P_1). Nach (1.3) hat dann ein nichttriviales Imprimitivitätsgebiet die Länge 8, 15, 22 oder 29. Da keine dieser Zahlen Teiler von $|\Gamma_2| = 36$ ist, ist G_2^* primitiv.

Mit Satz 5.1 folgt nun, daß G_2^* einfach ist. ▮

Bemerkung:

Da nach [4] jede einfache Gruppe der Ordnung 6 048 isomorph zur speziellen projektiven unitären Gruppe $\text{PSU}(3,3^2)$ ist, gilt $G_2^* \cong \text{PSU}(3,3^2)$. Im folgenden soll allerdings ein Graph Γ_2' konstruiert werden, der eine direkte Identifizierung von G_2^* erlaubt.

(8.4) Bestimmung der Automorphismengruppe von Γ_2 .

Zur Identifizierung von G_2 konstruiere ich einen Graphen Γ'_2 , der zu Γ_2 isomorph sein wird.

(a) $GF(3)$ ist der endliche Körper mit 3 Elementen; das Polynom $x^2 - x - 1$ ist über $GF(3)$ irreduzibel und Adjunktion einer Wurzel j dieses Polynoms ergibt den Körper $GF(3^2)$.

Sei π eine unitäre Polarität der projektiven Ebene E über $GF(9)$ und G sei $PSU(3, 3^2)$.

E hat $9^2 + 9 + 1 = 91$ Punkte, bezüglich π 28 absolute und 63 nichtabsolute Punkte. Jede Involution der $PSU(3, 3^2)$ läßt genau einen der nichtabsoluten Punkte fest und zu jedem der 63 nichtabsoluten Punkte gehört eine Involution in G , die ihn festläßt [6].

Es gibt also in der $PSU(3, 3^2)$ 63 Involutionen, die geometrisch interpretiert Homologien mit nichtabsoluten Punkten als Zentrum und ihrer Polare als Achse sind. Nach [6] liegen diese 63 Involutionen in einer Konjugiertenklasse von G .

Sind A und B nichtabsolute Punkte, so sind A^π und B^π nichtabsolute Geraden. Jede nichtabsolute Gerade von E enthält 6 nichtabsolute Punkte. Liegt B auf A^π , so bilden $A, B, A^\pi \cap B^\pi$ ein selbstpolares Dreieck in E . A liegt also in genau 3 selbstpolaren Dreiecken.

(Die Eigenschaften einer Polarität der projektiven Ebene E betreffend, siehe [15], S.45ff und S.244ff)

(b) Ist T ein selbstpolares Dreieck in E , so bilden die drei "zugehörigen" Involutionen der $PSU(3, 3^2)$ eine Klein'sche Vierergruppe V (zusammen mit der 1). Also gibt es gerade 63 elementarabelsche Untergruppen vom Typ $(2, 2)$ in der $PSU(3, 3^2)$. Sie seien mit V_1, V_2, \dots, V_{63} bezeichnet.

Satz 8.4: Es gibt in $PSU(3, 3^2)$ genau 36 Paare $\{H_i, H'_i\}$ mit

$$H_i = \{v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_7}\}, \quad k_1, \dots, k_7 \in \{1, 2, \dots, 63\}$$

$$H'_i = \{v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_7}\}, \quad l_1, \dots, l_7 \in \{1, 2, \dots, 63\}$$

wobei $H_i \cap H'_i = \emptyset$, aber

$$\{x \mid x \in v_{k_1} \cup v_{k_2} \cup \dots \cup v_{k_7}\} = \{y \mid y \in v_{l_1} \cup \dots \cup v_{l_7}\}$$

gilt.

Beweis: ([6])

(Wir unterstellen die Elemente von $GF(9)$ als homogene Koordinaten der Punkte $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ der endlichen Ebene und die Punkte, die $\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \bar{x}_3 x_3 = 0$ erfüllen, wo $\bar{}$ den Körperautomorphismus $x \mapsto x^3$ von $GF(3^2)$ bezeichnet, sind die absoluten Punkte der Ebene.)

Sei T ein selbstpolares Dreieck in E und V die zugehörige Vierergruppe in $PSU(3, 3^2)$. Jede Seite von T enthält 4 absolute Punkte. Die restlichen $28 - 12 = 16$ absoluten Punkte in E bilden 4 Vierecke, die unter V invariant bleiben und T als Diagonaleck besitzen. Insgesamt gibt es $63 \cdot 4 = 252$ solcher Vierecke.

Ist z.B. $T = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$, so erhält man folgende Vierecke: (Die Punkte sind als Spalten geschrieben)

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & j^2 & -j^2 & -j^2 & j^2 & j^2 & -j^2 & -j^2 & j^2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & j^2 & -j^2 & j^2 & -j^2 & 1 & -1 & 1 & -1 & j^2 & -j^2 & j^2 & -j^2 \end{array}$$

Ist Q ein solches Viereck mit den Eckpunkten n_1, n_2, n_3, n_4 , so daß für $T = p_1 p_2 p_3$ gerade folgendes gilt:

p_1 liegt auf $n_2 n_3$ und auf $n_1 n_4$,

p_2 liegt auf $n_1 n_3$ und auf $n_2 n_4$,

p_3 liegt auf $n_1 n_2$ und auf $n_3 n_4$,

dann erhält man 6 nichtabsolute Punkte p_4, p_5, \dots, p_9 als folgende Schnittpunkte:

p_4 ist der Schnittpunkt von $n_2 n_3$ mit $p_2 p_3$

p_5 $n_1 n_4$ $p_2 p_3$

p_6 $n_1 n_3$ $p_1 p_3$

p_7 $n_2 n_4$ $p_1 p_3$

p_8 $n_1 n_2$ $p_1 p_2$

p_9 $n_3 n_4$ $p_1 p_2$

Daraus ergeben sich drei neue Dreiecke, nämlich

$T'_1 = p_1 p_4 p_5$, $T'_2 = p_2 p_6 p_7$ und $T'_3 = p_3 p_8 p_9$.

In unserem Beispiel ist:

$p_4 = \langle (0, 1, -1) \rangle$ $p_6 = \langle (1, 0, 1) \rangle$ $p_8 = \langle (1, 1, 0) \rangle$

$p_5 = \langle (0, 1, 1) \rangle$ $p_7 = \langle (1, 0, -1) \rangle$ $p_9 = \langle (1, -1, 0) \rangle$

Durch diese Konstruktion erhält man also 3 Dreiecke, die je eine Ecke mit $T = T_1$ gemeinsam haben.

Die Punkte p_2, p_3, p_4 und p_5 sind kollinear, d.h. T_1 und T'_1 haben eine Seite gemeinsam. d.h. es gibt noch $28 - 5 \cdot 4 = 8$ absolute Punkte, die nicht auf einer Seite von T_1 und T'_1 liegen.

Diese 8 Punkte bilden 2 Vierecke mit T'_1 als Diagonalepunkt-Dreieck, eines davon soll analog zum vorherigen Schritt die drei Dreiecke $T_1 = p_1 p_2 p_3$, $T_2 = p_5 p_a p_b$ und $T_3 = p_4 p_c p_d$ liefern.

Betrachten wir in unserem Beispiel $T'_1 = p_1 p_4 p_5$, so erhalten wir durch dieselbe Konstruktion wie im ersten Schritt 4 Vierecke, von denen die beiden rechten schon ausgehend von T_1 aufgetaucht sind. Die beiden neuen Vierecke stehen links im Schema:

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & -j & 0 & 0 & j^3 & -j^3 & 0 & 0 & j^2 & -j^2 & -j^2 & j^2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & j & -j & 0 & 0 & -j^3 & -j^3 & 1 & -1 & 1 & -1 & j^2 & -j^2 & j^2 & -j^2 \end{array}$$

(Wieder sind die Punkte als Spalten geschrieben)

Nimmt man nun das erste Viereck und konstruiert die 3 Dreiecke, so erhält man:

$$\begin{aligned} T_1, T_2 &= \langle (0, 1, 1) \rangle \langle (1, -j, j) \rangle \langle (1, j, -j) \rangle \\ \text{und } T_3 &= \langle (0, 1, -1) \rangle \langle (1, -j, -j) \rangle \langle (1, j, j) \rangle. \end{aligned}$$

Die Ecken von T_1 und T'_1 entsprechen je einer Ecke der Dreiecke der anderen Triade. Es gibt nun noch 8 Ecken, je 4 pro Triade, für die dies nicht zutrifft. Die sich ergebenden 16 Schnittpunkte der Polaren von p_a, p_b, p_c, p_d mit denen von p_6, p_7, p_8, p_9 bestehen aus 8 absoluten und 8 nichtabsoluten Punkten. Die 8 nichtabsoluten Punkte, die paarweise auf den Polaren liegen, bilden zusammen mit p_a, p_b, p_c, p_d und entsprechend mit p_6, p_7, p_8, p_9 je vier weitere Dreiecke T bzw. T' , so daß nun die gesuchten Paare $\{H_i, H'_i\}$ konstruiert sind.

$\{H, H'\}$ wurde ausgehend von einem der 252 Vierecke Q konstruiert.

Beim 2. Schritt gab es 2 Möglichkeiten. Also gibt es

$$\frac{252 \cdot 2}{14} = 36 \text{ solcher Paare. Jedes der Dreiecke } T \text{ ist in } \frac{36 \cdot 14}{63} = 8$$

Mengen H bzw. H' enthalten.

In unserem Beispiel erhalten wir:

[illegible]

Da selbstpolare Dreiecke, für die die Behauptung gezeigt wurde, den Vierergruppen in der $PSU(3,3^2)$ entsprechen, gilt die Behauptung von Satz 8.4. \square

Bemerkung: Die $PSU(3,3^2)$ enthält genau 36 konjugierte Untergruppen der Ordnung 168, die isomorph zu $PSL(2,7)$ sind. Die 36 konstruierten Paare $\{H_i, H'_i\}$ stellen nichts anderes dar als die je zwei konjugierten Klassen von elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung 4 dieser konjugierten Untergruppen von $PSU(3,3^2)$.

Ich habe, um später die Adjazenzmatrix des Hall-Janko-Graphen angeben zu können, obige Konstruktion im einzelnen durchgeführt. Es folgen drei Tabellen: die 63 Involutionen der $PSU(3,3^2)$, die 63 elementar-abelschen Untergruppen vom Typ $(2,2)$ in $PSU(3,3^2)$ und die 36 Paare $\{H_i, H'_i\}$ gemäß Satz 8.4.

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & v_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & v_3 &= \begin{pmatrix} 0 & j^2 & 0 \\ -j^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & v_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -j^2 & 0 \\ j^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & v_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 v_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & v_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & j^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -j^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & v_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -j^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ j^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & v_9 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & v_{10} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 v_{11} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \\ 0 & -j^2 & 0 \end{pmatrix} & v_{12} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \\ 0 & j^2 & 0 \end{pmatrix} & v_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & -j & j \\ -j^3 & 1 & 1 \\ j^3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & v_{14} &= \begin{pmatrix} 0 & j & -j \\ j^3 & 1 & 1 \\ -j^3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & v_{15} &= \begin{pmatrix} 0 & -j^3 & j^3 \\ -j & 1 & 1 \\ j & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 v_{16} &= \begin{pmatrix} 0 & j^3 & -j^3 \\ j & 1 & 1 \\ -j & 1 & 1 \end{pmatrix} & v_{17} &= \begin{pmatrix} 0 & j & j \\ j^3 & 1 & -1 \\ j^3 & -1 & 1 \end{pmatrix} & v_{18} &= \begin{pmatrix} 0 & -j & -j \\ -j^3 & 1 & -1 \\ -j^3 & -1 & 1 \end{pmatrix} & v_{19} &= \begin{pmatrix} 0 & j^3 & j^3 \\ j & 1 & -1 \\ j & -1 & 1 \end{pmatrix} & v_{20} &= \begin{pmatrix} 0 & -j^3 & -j^3 \\ -j & 1 & -1 \\ -j & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 v_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & j & -j^3 \\ j^3 & 1 & j^2 \\ -j & -j^2 & 1 \end{pmatrix} & v_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & -j & j^3 \\ -j^3 & 1 & j^2 \\ j & -j^2 & 1 \end{pmatrix} & v_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & j^3 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^3 & -j^2 & 1 \end{pmatrix} & v_{24} &= \begin{pmatrix} 0 & -j^3 & -j \\ -j & 1 & j^2 \\ -j^3 & -j^2 & 1 \end{pmatrix} & v_{25} &= \begin{pmatrix} 0 & j & j^3 \\ j^3 & 1 & -j^2 \\ j & j^2 & 1 \end{pmatrix} \\
 v_{26} &= \begin{pmatrix} 0 & -j & -j^3 \\ -j^3 & 1 & -j^2 \\ -j & j^2 & 1 \end{pmatrix} & v_{27} &= \begin{pmatrix} 0 & j^3 & -j \\ j & 1 & -j^2 \\ -j^3 & j^2 & 1 \end{pmatrix} & v_{28} &= \begin{pmatrix} 0 & -j^3 & j \\ -j & 1 & -j^2 \\ j^3 & j^2 & 1 \end{pmatrix} & v_{29} &= \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^3 & 0 & j \\ -j^2 & j^3 & 1 \end{pmatrix} & v_{30} &= \begin{pmatrix} 1 & -j & -j^2 \\ -j^3 & 0 & j \\ j^2 & j^3 & 1 \end{pmatrix} \\
 v_{31} &= \begin{pmatrix} 1 & j^3 & -1 \\ j & 0 & j \\ -1 & j^3 & 1 \end{pmatrix} & v_{32} &= \begin{pmatrix} 1 & -j^3 & 1 \\ -j & 0 & j \\ 1 & j^3 & 1 \end{pmatrix} & v_{33} &= \begin{pmatrix} 1 & j & -j^2 \\ j^3 & 0 & -j \\ j^2 & -j^3 & 1 \end{pmatrix} & v_{34} &= \begin{pmatrix} 1 & -j & j^2 \\ -j^3 & 0 & -j \\ -j^2 & -j^3 & 1 \end{pmatrix} & v_{35} &= \begin{pmatrix} 1 & j^3 & 1 \\ j & 0 & -j \\ 1 & -j^3 & 1 \end{pmatrix} \\
 v_{36} &= \begin{pmatrix} 1 & -j^3 & -1 \\ -j & 0 & j \\ -1 & -j^3 & 1 \end{pmatrix} & v_{37} &= \begin{pmatrix} 1 & j & -1 \\ j^3 & 0 & j^3 \\ -1 & j & 1 \end{pmatrix} & v_{38} &= \begin{pmatrix} 1 & -j & 1 \\ j & 0 & j^3 \\ 1 & j & 1 \end{pmatrix} & v_{39} &= \begin{pmatrix} 1 & j^3 & -j^2 \\ j & 0 & j^3 \\ j^2 & j & 1 \end{pmatrix} & v_{40} &= \begin{pmatrix} 1 & -j^3 & j^2 \\ -j & 0 & j^3 \\ -j^2 & j & 1 \end{pmatrix} \\
 v_{41} &= \begin{pmatrix} 1 & j & 1 \\ j^3 & 0 & -j^3 \\ 1 & -j & 1 \end{pmatrix} & v_{42} &= \begin{pmatrix} 1 & -j & -1 \\ -j^3 & 0 & -j^3 \\ -1 & -j & 1 \end{pmatrix} & v_{43} &= \begin{pmatrix} 1 & j^3 & j^2 \\ j & 0 & -j^3 \\ -j^2 & -j & 1 \end{pmatrix} & v_{44} &= \begin{pmatrix} 1 & -j^3 & -j^2 \\ -j & 0 & -j^3 \\ j^2 & -j & 1 \end{pmatrix} & v_{45} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -j \\ 1 & 1 & j \\ -j^3 & j^3 & 0 \end{pmatrix} \\
 v_{46} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & j \\ -1 & 1 & j \\ j^3 & j^3 & 0 \end{pmatrix} & v_{47} &= \begin{pmatrix} 1 & j^2 & -j^3 \\ -j^2 & 1 & j \\ -j & j^3 & 0 \end{pmatrix} & v_{48} &= \begin{pmatrix} 1 & -j^2 & j^3 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^3 & 0 \end{pmatrix} & v_{49} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & j \\ 1 & 1 & -j \\ j^3 & -j^3 & 0 \end{pmatrix} & v_{50} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -j \\ -1 & 1 & -j \\ -j^3 & -j^3 & 0 \end{pmatrix} \\
 v_{51} &= \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j^3 \\ -j^2 & 1 & -j \\ j & -j^3 & 0 \end{pmatrix} & v_{52} &= \begin{pmatrix} 1 & -j^2 & -j^3 \\ j^2 & 1 & -j \\ -j & -j^3 & 0 \end{pmatrix} & v_{53} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -j^3 \\ -j^2 & 1 & j^3 \\ -j & j & 0 \end{pmatrix} & v_{54} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & j^3 \\ -1 & 1 & j^3 \\ j & j & 0 \end{pmatrix} & v_{55} &= \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ -j^2 & 1 & j^3 \\ j^3 & j & 0 \end{pmatrix} \\
 v_{56} &= \begin{pmatrix} 1 & -j^2 & -j \\ j^2 & 1 & j^3 \\ -j^3 & j & 0 \end{pmatrix} & v_{57} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & j^3 \\ 1 & 1 & -j^3 \\ j & -j & 0 \end{pmatrix} & v_{58} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -j^3 \\ -1 & 1 & -j^3 \\ -j & -j & 0 \end{pmatrix} & v_{59} &= \begin{pmatrix} 1 & j^2 & -j \\ -j^2 & 1 & -j^3 \\ -j^3 & -j & 0 \end{pmatrix} & v_{60} &= \begin{pmatrix} 1 & -j^2 & j \\ j^2 & 1 & -j^3 \\ j^3 & -j & 0 \end{pmatrix} \\
 v_{61} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & v_{62} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & v_{63} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Tabelle 1: Die 63 Involutionen der $\text{PSU}(3,3^2)$

$v_1 = \{1, v_1, v_2, v_{63}\}$	$v_{22} = \{1, v_9, v_{13}, v_{14}\}$	$v_{43} = \{1, v_{19}, v_{30}, v_{56}\}$
$v_2 = \{1, v_1, v_{45}, v_{49}\}$	$v_{23} = \{1, v_9, v_{15}, v_{16}\}$	$v_{44} = \{1, v_{19}, v_{37}, v_{46}\}$
$v_3 = \{1, v_1, v_{53}, v_{57}\}$	$v_{24} = \{1, v_{10}, v_{17}, v_{18}\}$	$v_{45} = \{1, v_{20}, v_{29}, v_{55}\}$
$v_4 = \{1, v_2, v_{46}, v_{50}\}$	$v_{25} = \{1, v_{10}, v_{19}, v_{20}\}$	$v_{46} = \{1, v_{20}, v_{38}, v_{45}\}$
$v_5 = \{1, v_2, v_{54}, v_{58}\}$	$v_{26} = \{1, v_{11}, v_{12}, v_{61}\}$	$v_{47} = \{1, v_{21}, v_{32}, v_{59}\}$
$v_6 = \{1, v_3, v_4, v_{63}\}$	$v_{27} = \{1, v_{11}, v_{21}, v_{22}\}$	$v_{48} = \{1, v_{21}, v_{43}, v_{46}\}$
$v_7 = \{1, v_3, v_{47}, v_{51}\}$	$v_{28} = \{1, v_{11}, v_{23}, v_{24}\}$	$v_{49} = \{1, v_{22}, v_{31}, v_{60}\}$
$v_8 = \{1, v_3, v_{55}, v_{59}\}$	$v_{29} = \{1, v_{12}, v_{25}, v_{26}\}$	$v_{50} = \{1, v_{22}, v_{44}, v_{45}\}$
$v_9 = \{1, v_4, v_{48}, v_{52}\}$	$v_{30} = \{1, v_{12}, v_{27}, v_{28}\}$	$v_{51} = \{1, v_{23}, v_{29}, v_{58}\}$
$v_{10} = \{1, v_4, v_{56}, v_{60}\}$	$v_{31} = \{1, v_{13}, v_{36}, v_{57}\}$	$v_{52} = \{1, v_{23}, v_{42}, v_{48}\}$
$v_{11} = \{1, v_5, v_6, v_{62}\}$	$v_{32} = \{1, v_{13}, v_{43}, v_{52}\}$	$v_{53} = \{1, v_{24}, v_{30}, v_{57}\}$
$v_{12} = \{1, v_5, v_{32}, v_{35}\}$	$v_{33} = \{1, v_{14}, v_{35}, v_{58}\}$	$v_{54} = \{1, v_{24}, v_{41}, v_{47}\}$
$v_{13} = \{1, v_5, v_{38}, v_{41}\}$	$v_{34} = \{1, v_{14}, v_{44}, v_{51}\}$	$v_{55} = \{1, v_{25}, v_{36}, v_{55}\}$
$v_{14} = \{1, v_6, v_{31}, v_{37}\}$	$v_{35} = \{1, v_{15}, v_{33}, v_{59}\}$	$v_{56} = \{1, v_{25}, v_{39}, v_{50}\}$
$v_{15} = \{1, v_6, v_{37}, v_{42}\}$	$v_{36} = \{1, v_{15}, v_{42}, v_{49}\}$	$v_{57} = \{1, v_{26}, v_{35}, v_{56}\}$
$v_{16} = \{1, v_7, v_8, v_{62}\}$	$v_{37} = \{1, v_{16}, v_{34}, v_{60}\}$	$v_{58} = \{1, v_{26}, v_{40}, v_{49}\}$
$v_{17} = \{1, v_7, v_{29}, v_{34}\}$	$v_{38} = \{1, v_{16}, v_{41}, v_{50}\}$	$v_{59} = \{1, v_{27}, v_{33}, v_{54}\}$
$v_{18} = \{1, v_7, v_{40}, v_{43}\}$	$v_{39} = \{1, v_{17}, v_{31}, v_{54}\}$	$v_{60} = \{1, v_{27}, v_{38}, v_{52}\}$
$v_{19} = \{1, v_8, v_{30}, v_{33}\}$	$v_{40} = \{1, v_{17}, v_{40}, v_{47}\}$	$v_{61} = \{1, v_{28}, v_{34}, v_{53}\}$
$v_{20} = \{1, v_8, v_{39}, v_{44}\}$	$v_{41} = \{1, v_{18}, v_{32}, v_{53}\}$	$v_{62} = \{1, v_{28}, v_{37}, v_{51}\}$
$v_{21} = \{1, v_9, v_{10}, v_{61}\}$	$v_{42} = \{1, v_{18}, v_{39}, v_{48}\}$	$v_{63} = \{1, v_{61}, v_{62}, v_{63}\}$

Tabelle 2: Die 63 elementar-abelschen Untergruppen vom Typ $(2,2)$ in $PSU(3,3^2)$
(Die Numerierung der Involutionen der $PSU(3,3^2)$ entspricht der in Tabelle 1)

Auf Seite 45 folgt die Tabelle der 36 Paare $\{H_i, H'_i\} =: N_i$. Dabei bezeichnen die Zahlen in den Schemata die Nummern der Involutionen der $PSU(3,3^2)$ gemäß Tabelle 1.

N_1 :	61 9 10 5 6 1 2 62 13 18 35 36 57 58 63 14 17 32 31 53 54 61 62 63 13 14 18 17 9 5 1 36 35 32 31 10 6 2 57 58 53 54	N_{13} :	2 54 58 21 43 41 16 46 27 35 59 52 38 15 50 33 14 32 13 5 9 2 46 50 27 33 35 14 54 21 41 52 59 32 13 58 43 16 38 15 5 9	N_{25} :	1 53 57 22 44 42 15 45 18 24 21 39 48 59 49 32 30 11 8 23 33 1 45 49 18 32 24 30 53 22 42 39 21 11 8 57 44 15 48 59 23 33
N_2 :	61 9 10 5 6 1 2 62 15 20 41 42 49 50 63 16 19 38 37 45 46 61 62 63 15 16 20 19 9 5 1 42 41 38 37 10 6 2 49 50 45 46	N_{14} :	1 53 57 22 44 42 15 45 28 36 60 51 37 16 49 34 13 31 14 6 9 1 45 49 28 34 36 13 53 22 42 51 60 31 14 57 44 15 37 16 6 9	N_{26} :	61 11 12 7 8 1 2 62 22 26 43 44 45 46 63 21 25 40 39 49 50 61 62 63 22 21 26 25 11 7 1 44 43 40 39 12 8 2 45 46 49 50
N_3 :	62 7 8 32 35 42 37 5 29 39 53 58 23 28 6 34 44 18 14 48 51 62 5 6 29 34 39 44 7 32 42 58 53 18 14 8 35 37 23 28 48 51	N_{15} :	2 54 58 19 37 25 39 46 31 29 10 6 36 18 50 17 23 20 42 55 48 2 46 50 31 17 29 23 54 19 25 6 10 20 42 58 37 39 36 18 55 48	N_{27} :	61 11 12 13 14 20 19 9 22 27 43 44 45 46 10 21 28 52 51 38 37 61 9 10 22 21 27 28 11 13 20 44 43 52 51 12 14 19 45 46 38 37
N_4 :	3 55 59 48 52 1 2 4 36 32 39 13 57 50 63 25 21 18 43 53 46 3 4 63 36 25 32 31 55 48 1 13 39 18 43 59 52 2 57 50 53 46	N_{16} :	4 3 63 19 30 16 34 56 59 61 20 33 15 29 60 55 62 10 8 9 7 4 56 60 59 55 61 62 3 19 16 33 20 10 8 63 30 34 15 29 9 7	N_{28} :	22 31 60 23 24 43 46 11 36 4 42 57 13 37 21 6 56 48 30 52 19 22 11 21 36 6 4 56 31 23 43 57 42 48 30 60 24 46 13 37 52 19
N_5 :	4 3 63 26 35 22 31 56 51 1 40 14 44 17 60 47 2 49 58 45 54 4 56 60 51 47 1 2 3 26 22 14 40 49 58 63 35 31 44 17 45 54	N_{17} :	62 7 8 38 41 31 36 5 34 44 20 16 60 55 6 29 39 45 50 22 25 62 5 6 34 29 44 39 7 38 31 16 20 45 50 8 41 36 60 55 22 25	N_{29} :	62 7 8 32 35 42 37 5 40 33 21 26 49 46 6 43 30 59 56 15 19 62 5 6 40 43 33 30 7 32 42 26 21 59 56 8 35 37 49 46 15 19
N_6 :	61 11 12 13 14 20 19 9 23 25 57 58 29 30 10 24 26 36 35 55 56 61 9 10 23 24 25 26 11 13 20 58 57 36 35 12 14 19 29 30 55 56	N_{18} :	2 17 23 11 24 16 7 46 31 29 21 41 34 40 50 54 58 22 47 60 43 2 21 16 17 22 11 7 54 46 41 40 31 23 29 58 43 50 47 60 24 34	N_{30} :	1 53 57 20 38 26 40 45 28 36 29 27 12 7 49 34 13 55 52 25 43 1 45 49 28 34 36 13 53 20 26 27 29 55 52 57 38 40 12 7 25 43
N_7 :	62 7 8 38 41 31 36 5 40 33 52 47 17 13 6 43 30 27 24 54 57 62 5 6 40 43 33 30 7 38 31 47 52 27 24 8 41 36 17 13 54 57	N_{19} :	4 3 63 19 30 16 34 56 47 2 37 24 41 28 60 51 1 46 57 50 53 4 56 60 47 51 2 1 3 19 16 24 37 46 57 63 30 34 41 28 50 53	N_{31} :	3 55 59 17 40 28 37 47 25 33 31 26 12 6 51 36 15 54 49 27 42 3 47 51 25 36 33 15 55 17 28 26 31 54 59 59 40 37 12 6 27 42
N_8 :	61 11 12 15 16 17 18 9 22 28 33 60 31 32 10 21 27 59 34 54 53 61 9 10 22 21 28 27 11 15 17 60 59 34 33 12 16 18 31 32 53 54	N_{20} :	3 55 59 24 41 44 14 47 25 33 57 50 39 13 51 36 15 30 16 8 9 3 47 51 25 36 33 15 55 24 44 50 57 30 16 59 41 14 39 13 8 9	N_{32} :	61 11 12 15 16 17 18 9 24 26 49 41 47 48 10 23 25 42 50 40 39 61 9 10 24 23 26 25 11 15 17 41 42 49 50 12 16 18 47 48 40 39
N_9 :	3 4 63 17 40 14 44 47 52 61 18 43 13 39 51 48 62 10 7 9 8 3 47 51 52 48 61 62 4 17 14 43 18 10 7 63 40 44 13 39 9 8	N_{21} :	5 20 3 14 24 11 23 32 38 55 44 41 21 29 35 45 59 51 47 22 58 5 32 14 20 22 3 11 38 21 35 29 44 47 23 41 59 58 55 45 51 24	N_{33} :	4 56 60 23 42 43 13 48 26 34 58 49 40 14 52 35 16 29 15 7 9 4 48 52 26 35 34 16 56 23 43 49 58 29 15 60 42 13 40 14 7 9
N_{10} :	4 3 63 26 35 22 31 56 59 61 25 32 21 36 60 55 62 12 5 11 6 4 56 60 59 55 61 62 3 26 22 32 25 12 5 63 35 31 21 36 11 6	N_{22} :	3 55 59 17 40 28 37 47 29 32 10 7 34 19 51 20 21 18 43 53 46 3 47 51 29 20 32 21 55 17 28 7 10 18 43 59 40 37 34 19 53 46	N_{34} :	3 55 59 48 52 1 2 4 20 15 23 38 45 58 63 29 33 42 27 49 54 3 4 63 20 29 15 33 55 48 1 38 23 42 27 59 52 2 45 58 49 54
N_{11} :	1 53 57 20 38 26 40 45 32 30 10 5 35 17 49 18 24 19 41 56 47 1 45 49 32 18 30 24 53 20 26 5 10 19 41 57 38 40 35 17 56 47	N_{23} :	2 54 58 19 37 25 39 46 27 35 30 28 12 8 50 33 14 56 51 26 44 2 46 50 27 33 35 14 54 19 25 28 30 56 51 58 37 39 12 8 26 44	N_{35} :	4 63 3 23 42 38 27 48 62 47 11 6 5 12 52 61 51 24 37 41 28 4 48 52 62 61 47 51 63 23 38 6 11 24 37 3 42 27 5 12 41 28
N_{12} :	61 11 12 7 8 1 2 62 24 28 29 30 57 58 63 23 27 34 33 53 54 61 62 63 24 23 28 27 11 7 1 30 29 34 33 12 8 2 57 58 53 54	N_{24} :	4 56 60 18 39 27 38 48 30 31 10 8 33 20 52 19 22 17 44 54 45 4 48 52 30 19 31 22 56 18 27 8 10 17 44 60 39 38 33 20 54 45	N_{36} :	4 26 12 18 5 25 16 48 35 27 32 38 39 34 52 56 28 53 41 50 60 4 18 27 12 28 5 16 56 39 38 25 34 32 41 60 48 52 26 53 35 50

Tabelle 3: Die gemäß (8.4) konstruierten 36 Paare $\{H_i, H'_i\} = N_i$

(c) Auf der Menge der durch Satz 8.4 gegebenen 36 Paare $\{H_i, H'_i\}$ sei nun der Graph Γ'_2 definiert. Sind $N_i = \{H_i, H'_i\}$ und $N_j = \{H_j, H'_j\}$ solche Paare, so seien sie genau dann verbunden, wenn $|H \cap H'| = 3$ für ein $H \in N_i$ und ein $H' \in N_j$ gilt.

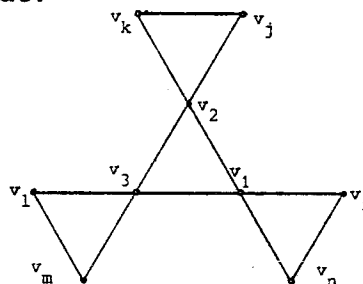
Wir zeigen nun, daß $PSU(3,3^2)$ als transitive Automorphismengruppe auf Γ'_2 wirkt. Bei Konjugation mit Elementen der $PSU(3,3^2)$ gehen die 21 Involutionen, die in $V_{k_1} \cup V_{k_2} \cup \dots \cup V_{k_7}$ enthalten sind (wo V_{k_i} die Vierergruppen in H_i bezeichnet) auf 21 paarweise verschiedene Involutionen über. Entsprechend gehen die Mengen H_i und H'_i in ebensolche über. Für $g \in PSU(3,3^2)$ gilt auch $H_i^g \cap H'_i^g = \emptyset$. Konjugation mit einem Element der $PSU(3,3^2)$ bewirkt also eine Permutation der 36 Paare N_i . Die Transitivität dieser Wirkung ergibt sich daraus, daß die 36 Untergruppen der Ordnung 168 in der $PSU(3,3^2)$ konjugiert sind.

Sind nun N_i und N_j adjazent, so gibt es 3 Vierergruppen, die sowohl in H_i bzw. H'_i als auch in H_j bzw. H'_j enthalten sind. Für deren Konjugierte trifft dann dasselbe zu.

(d) Es soll gezeigt werden, daß $F_2 \cong \Gamma'_2$ gilt.

Der Punkt N_i von Γ'_2 ist mit 14 anderen Punkten verbunden, also ist wegen der Transitivität der Automorphismengruppe von Γ'_2 dieser Graph regulär mit der Valenz 14.

Betrachten wir die 36 Paare N_i als Untergraphen des Vertauschbarkeitsgraphen der Involutionen der $PSU(3,3^2)$, so ist die in (c) getroffene Definition der Adjazenz in Γ'_2 äquivalent zu folgender: Zwei Punkte (also Untergraphen des Vertauschbarkeitsgraphen der 63 Involutionen) sind genau dann miteinander verbunden, wenn sie einen aus 9 Involutionen bestehenden Untergraphen gemeinsam haben, der folgende Gestalt hat:



(Hinweis: dieser Untergraph ist isomorph zum Vertauschbarkeitsgraph der Involutionen der S_4)

Zwei verbundene Punkte N_i, N_j haben - so betrachtet - einen solchen Untergraphen gemeinsam. Es gibt dann noch je 4 derartige Untergraphen, die das Dreieck $v_1 v_2 v_3$ nicht enthalten. Daraus folgt, daß in Γ'_2 $\lambda = 4$ gilt. Wegen der Transitivität der Automorphismengruppe von Γ'_2 ist Γ'_2 ein streng regulärer Graph mit den Parametern $n = 36$, $k = 14$ und $\lambda = 4$. Da nach [24] ein Graph durch diese Parameter eindeutig bestimmt ist, gilt $\Gamma_2 \cong \Gamma'_2$. Wir haben damit nochmals gesehen, daß $G_2^* \cong \text{PSU}(3, 3^2)$ ist.

(Nebenbei wurde gezeigt, daß der Vertauschbarkeitsgraph der Involutionen der $\text{PSU}(3, 3^2)$ 36 Untergraphen enthält, die isomorph zum Vertauschbarkeitsgraphen der Involutionen der $\text{PSL}(2, 7)$ sind. Diese wiederum enthalten 14 Untergraphen, die isomorph zum Vertauschbarkeitsgraphen der Involutionen der S_4 sind.)

(e) Nach [8] sind alle Untergruppen der Ordnung 168 in der $\text{PSU}(3, 3^2)$ konjugiert, d.h. ein äußerer Automorphismus der $\text{PSU}(3, 3^2)$ ist eindeutig durch seine Wirkung auf die 36 Konjugierten der $\text{PSL}(2, 7)$ in $\text{PSU}(3, 3^2)$, also durch seine Wirkung auf die 36 Punkte des Graphen Γ'_2 bestimmt. Ein äußerer Automorphismus erhält die Kanten des Graphen, denn für ihn trifft dieselbe Überlegung wie in (c) für einen inneren Automorphismus zu.

Also ist $\text{Aut}(\text{PSU}(3, 3^2))$ in G_2 enthalten und wegen $|G_2| = 12\,096$ gilt $\text{Aut}(\Gamma'_2) \cong G_2 \cong \text{Aut}(\text{PSU}(3, 3^2)) \cong G_2(2)$.

Dabei bezeichnet $G_2(2)$ die Chevalley-Gruppe vom Typ G_2 über $\text{GF}(2)$. Die Isomorphie $\text{Aut}(\text{PSU}(3, 3^2)) \cong G_2(2)$ wird z.B. gezeigt in [21]. Der Stabilisator eines Punktes in der primitiven Permutationsdarstellung von $G_2(2)$ auf 36 Punkten ist isomorph zu $\text{PGL}(2, 7)$ und hat drei Bahnen auf den 36 Punkten.

§ 9 Die Hall-Janko-Gruppe HJ als Rang-3-Erweiterung der $\text{PSU}(3, 3^2)$

(9.1) Konstruktion des Hall-Janko-Graphen

Da in $\text{PSU}(3, 3^2)$ die Zentren der 2-Sylow-Gruppen die Ordnung 2 haben, können wir die Eckenmenge von Σ_2 mit den 63 Involutionen der $\text{PSU}(3, 3^2)$ identifizieren, die gemäß (A) in §6 zu verbinden sind.

Ist u eine Involution, so ist u in genau 3 elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung 4 der $\text{PSU}(3, 3^2)$ enthalten (8.4), es gibt also genau 6 Involutionen v_i mit $[u, v_i] = 1$ ($i = 1, 2, \dots, 6$). Jedes dieser v_i ist in zwei weiteren Vierergruppen enthalten, die je zwei von u und v_i verschiedene Involutionen enthalten. Es gibt also $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ Involutionen w , die die Bedingung $[u, w] \neq 1$, aber es existiert ein v_i mit $[u, v_i] = [w, v_i] = 1$ erfüllen.

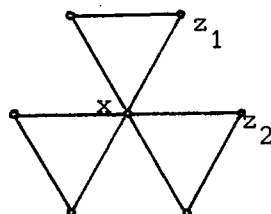
Daß diese 24 Involutionen tatsächlich paarweise verschieden sind, sieht man folgendermaßen ein:

Setze $G = \text{PSU}(3, 3^2)$ und x, y seien verschiedene Involutionen in G mit $[x, y] \neq 1$.

Behauptung: Dann enthält $C_G(x) \cap C_G(y)$ höchstens eine (zentrale) Involution.

(Für $[x, y] = 1$ ist diese Aussage klar, deshalb wird nur $[x, y] \neq 1$ betrachtet.)

Beweis: $C_G(x)$ enthält genau 7 Involutionen, nämlich x selbst und 6 weitere Involutionen, die 3 Paare vertauschbarer Involutionen bilden. x ist zentrale Involution, also gibt es eine 2-Sylow-Gruppe S von G , so daß gilt $x \in Z(S) < S \leq C_G(x)$ und alle Involutionen in $C_G(x)$ liegen bereits in S . Seien nun z_1 und z_2 nicht-vertauschbare Involutionen in S , so ist $\langle z_1, z_2 \rangle$ eine Diedergruppe mit durch 4 teilbarer Ordnung, etwa $|\langle z_1, z_2 \rangle| = 4n$. Dann ist $z = (z_1 z_2)^n$ eine Involution in $\langle z_1, z_2 \rangle$, die mit z_1 und z_2 vertauschbar ist. Da der Vertauschbarkeitsgraph in $C_G(x)$ folgende Gestalt hat:



folgt $z = x$. Wären nun z_1 und z_2 in $C_G(x) \cap C_G(y)$ enthalten, so wäre auch $z = x$ in $C_G(y)$ enthalten, also wäre $[x, y] = 1$, was der Voraussetzung widerspricht.

Σ_2 ist also ein regulärer Graph der Valenz 24, auf dem die $PSU(3, 3^2)$ als transitive Automorphismengruppe wirkt.

Nach Vorschrift (B) bildet man nun den Graphen Γ_3 mit der Eckenmenge $\{P_2\} \cup \Gamma'_2 \cup \Sigma_2$. Wegen der in (8.4) gezeigten Isomorphie von Γ_2 mit Γ'_2 kann man die beiden Graphen identifizieren, die Konstruktion von Γ_3 stimmt also mit der Definition in §6 überein.

P_2 ist mit jedem Element von Γ'_2 , aber keinem Element in Σ_2 verbunden. Ein Element $u \in \Sigma_2$ ist mit genau den Paaren $\{H_i, H'_i\}$ aus Γ'_2 verbunden, für die gilt: es existiert ein $V_k \in H_i$ mit $u \in V_k$; denn genau dann fixiert u das Paar $\{H_i, H'_i\}$ bei Konjugation.

Da jede Involution u in genau 3 Gruppen V_k enthalten ist, und jede dieser in 8 Mengen H_i bzw. H'_i liegt, folgt: es gibt genau $\frac{3 \cdot 8}{2} = 12$ Paare $\{H_i, H'_i\}$, so daß in H_i ein V_k enthalten ist mit $u \in V_k$. Also ist jeder Punkt von Σ_2 mit 12 Punkten in Γ'_2 verbunden.

Umgekehrt ist jedes der Paare $\{H_i, H'_i\}$ mit genau den 21 Involutionen in Σ_2 verbunden, die in den in H_i und H'_i enthaltenen Vierergruppen liegen.

Daraus ergibt sich, daß Γ_3 ein regulärer Graph der Valenz 36 ist, der überdies die Parameterbedingungen eines Rang-3-Graphen erfüllt. Dabei ist (zunächst formal):

$n = 100$, $k = 36$, $l = 63$, $\lambda = 14$, $\mu = 12$, $s = 6$, $t = -4$, $f_2 = 36$ und $f_3 = 63$.

In Abbildung 10 wird die Adjazenzmatrix des Hall-Janko-Graphen angegeben. Dabei sind die Zeilen und Spalten dieser Matrix folgendermaßen 'numeriert': Zunächst P_2 , dann die 36 Paare $\{H_i, H'_i\}$ in der Reihenfolge von Tabelle 3 und schließlich die 63 Involutionen der $PSU(3, 3^2)$ in der Reihenfolge von Tabelle 1.

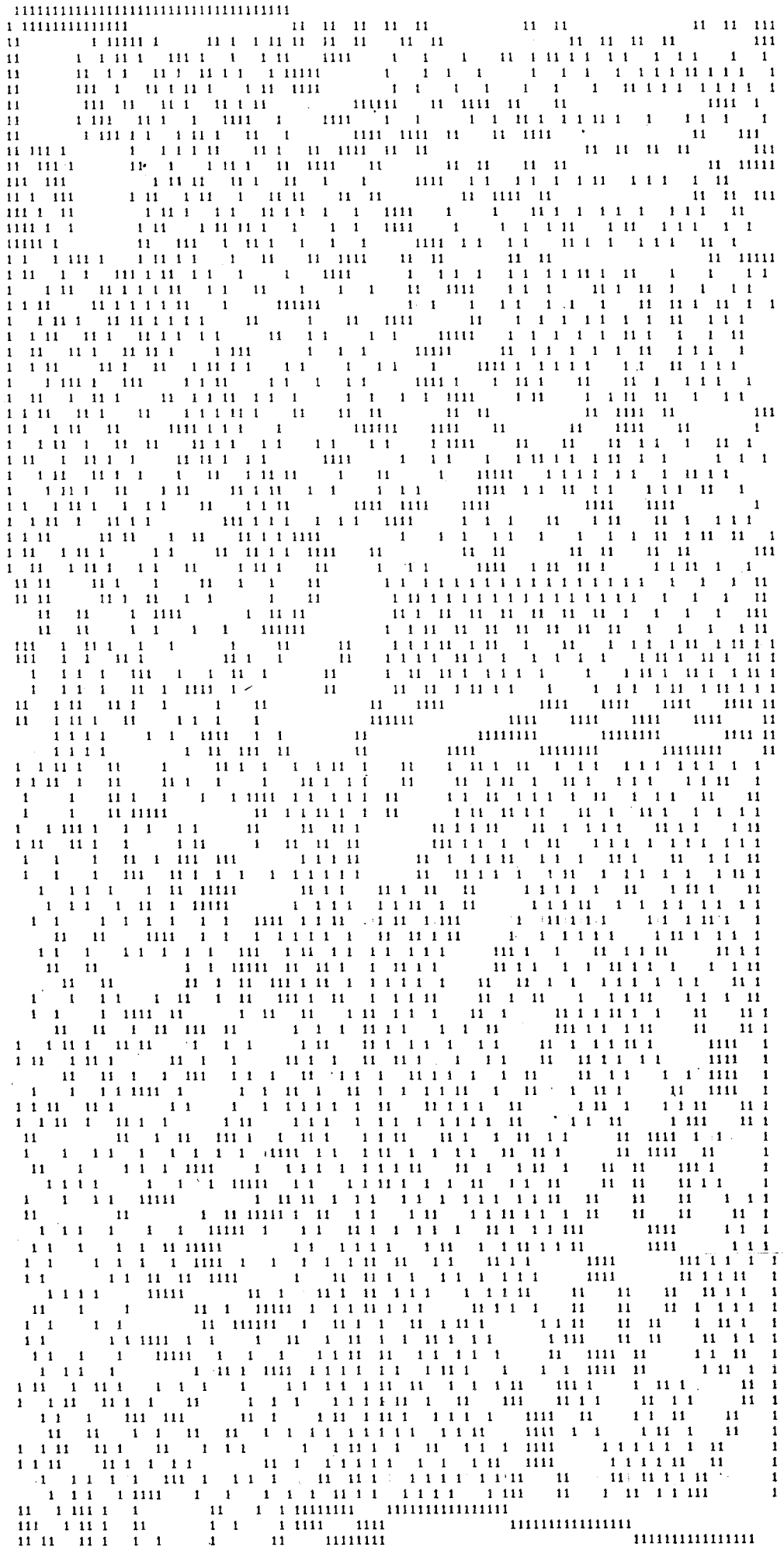


Abbildung 10: Adjazenzmatrix des Hall-Janko-Graphen

(9.2) Beweis der Transitivität der Automorphismengruppe von Γ_3 .

Um zu zeigen, daß $\text{Aut}(\Gamma_3)$ transitiv auf den Punkten des Graphen wirkt, genügt es, einen Automorphismus des Graphen zu konstruieren, der P_2 , Γ_2' und Σ_2 bewegt. Die folgende Konstruktion eines solchen Automorphismus hat mir M. SUZUKI in einem Brief [21] mitgeteilt, wofür ich ihm an dieser Stelle herzlich danken möchte.

Man betrachtet den Graphen folgendermaßen:

$\Gamma(P_2)$ ist die Menge der zentralen Involutionen der $G_2(2)$

$\Delta(P_2)$ ist die Menge der Konjugierten der $\text{PGL}(2,7)$ in $G_2(2)$

Sei $Q \in \Delta(P_2)$.

Sei a eine Abbildung von Γ_3 auf sich mit:

(1) a vertausche P_2 und Q ,

(2) a lasse jedes Element von $\Delta(P_2) \cap \Delta(Q)$ fest.

(3) Die Punkte in $\Delta(P_2) \setminus \{Q, \Delta(P_2) \cap \Delta(Q)\}$ sind im Graphen Γ_2 gerade die zentralen Involutionen von $G_1 \cong \text{PGL}(2,7)$. Also gibt es eine natürliche Identifikation der Elemente von

$\Delta(P_2) \setminus \{Q, \Delta(P_2) \cap \Delta(Q)\}$ mit den Elementen von $\Gamma(P_2)$, die in Q , einer Konjugierten der $\text{PGL}(2,7)$, enthalten sind.

a sei diese Identifikation der Elemente von $\Delta(P_2) \setminus \{Q, \Delta(P_2) \cap \Delta(Q)\}$ mit den Elementen von $\Gamma(P_2) \cap \Delta(Q)$.

(4) Sei $y \in Q \cap \Gamma(P_2)$, dann kann man y als Involution der $\text{PSL}(2,7)$ auffassen. Nach (7.3) gibt es genau 4 Involutionen in $Q \cap \Gamma(P_2)$, die mit y kommutieren. Da y gleichermaßen als Involution der $\text{PSU}(3,3^2)$ aufgefaßt werden kann, gibt es insgesamt 6 Involutionen, die mit y vertauschbar sind, also müssen 2 derselben in

$\Gamma(P_2) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)\}$ liegen. Da $|Q \cap \Gamma(P_2)| = 21$ und

$|\Gamma(P_2) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)\}| = 42$ gilt, folgt:

Zu jedem $x \in \Gamma(P_2) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)\}$ existiert ein eindeutig bestimmtes $y \in Q \cap \Gamma(P_2)$ mit $[x, y] = 1$ und $xy \in \Gamma(P_2) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)\}$.

Sei $x^a = xy$.

Es ist nun zu zeigen, daß damit tatsächlich ein Automorphismus von Γ_3 definiert ist, d.h. daß a die Ecken von Γ_3 kantenerhaltend permutiert.

Beweis:

Sei Δ die Menge der Kanten in Γ_3 . Sind $M_1 = \{P_2, Q\}$, $M_2 = \Delta(Q) \cap \Delta(P_2)$, $M_3 = \Delta(P_2) \setminus \{Q, \Delta(Q) \cap \Delta(P_2)\}$, $M_4 = \Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)$ und $M_5 = \Gamma(P_2) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)\}$, so sind die Fälle /i.j/ für $i, j = 1, 2, \dots, 5$ zu betrachten: dabei ist in Fall /i.j/ zu zeigen, daß genau dann $(x_i^a, x_j^a) \in \Delta$ für ein Eckenpaar von Γ_3 mit $x_i \in M_i$ und $x_j \in M_j$ gilt, wenn $(x_i, x_j) \in \Delta$. Da a eine Involution ist, genügt es die Fälle /i.j/ mit $j \geq i$ zu betrachten.

Die Fälle /1.j/ ergeben sich unmittelbar aus der Definition von a .

Sei jetzt $R \in \Delta(Q) \cap \Delta(P_2)$. Also ist $R^a = R$.

/2.2/: Ist $S \in \Delta(Q) \cap \Delta(P_2)$ und $(R, S) \in \Delta$, so ist $(R^a, S^a) = (R, S)$, also in Δ .

/2.3/: Betrachte ein mit R benachbartes S in $\Delta(P_2) \setminus \{Q, \Delta(Q) \cap \Delta(P_2)\}$. Dann ist $S^a \in Q \cap \Gamma(P_2)$. Da $(R, S) \in \Delta$ gilt, läßt S , aufgefaßt als Involution in Γ_2 R bei Konjugation fest. Dies trifft dann auch auf S^a zu, denn a ist die natürliche Identifikation der Elemente in $\Delta(P_2) \setminus \{Q, \Delta(Q) \cap \Delta(P_2)\}$ mit den Involutionen in $Q \cap \Gamma(P_2)$.

/2.4/: Ist nun $x \in Q \cap \Gamma(P_2)$ und $(x, R) \in \Delta$, so folgt mit demselben Argument wie in /2.3/, daß dann auch $(x^a, R) \in \Delta$ gilt.

/2.5/: Sei $x \in \Gamma(P_2) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)\}$ und $(x, R) \in \Delta$. Dann ist $x^a = xy$, wie oben definiert und $R^{xy} = R^y = R^{yx}$. Es ist zu zeigen, daß $R^y = R$ gilt.

Für ein $x \in \Gamma(P_2) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)\}$ gibt es in $\Delta(R) \cap \Gamma(P_2)$ genau 4 Involutionen, mit denen x kommutiert. Diese können nicht alle in $(\Gamma(P_2) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)\}) \cap \Delta(R)$ liegen. Also gibt es ein y' in $\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2) \cap \Delta(R)$, das mit x kommutiert. Da y eindeutig bestimmt ist, gilt $y' = y$, also ist $y \in \Delta(R)$, und folglich $R^y = R$.

Für die folgenden Fälle sei $R \in \Delta(P_2) \setminus \{Q, \Delta(Q) \cap \Delta(P_2)\}$. R^a liegt dann in $Q \cap \Gamma(P_2)$ und wir setzen $z = R^a$.

/3.3/: Sei $S \in \Delta(P_2) \setminus \{Q, \Delta(Q) \cap \Delta(P_2)\}$ und $(R, S) \in \Delta$. Die natürliche Identifikation in der Definition von a ergibt, daß dann $(R^a, S^a) \in \Delta$ gilt.

/3.4/: Sei $x \in Q \cap \Gamma(P_2)$ und x sei mit R verbunden. x läßt R bei Konjugation fest, folglich ist $[z, x] = 1$. Daraus folgt, daß z auch

x^a bei Konjugation festläßt, daß also $(z, x^a) \in \Delta$ gilt.

/3.5/: Sei $x \in \Gamma(P_2) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)\}$ und $(x, R) \in \Delta$. Gemäß der Definition von x^a sei y das eindeutig bestimmte Element in $\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)$, das mit x vertauschbar ist und $x^a = xy$.

(a) Ist $y \in \Delta(R)$, so auch xy . Dann ist $[x, z] \neq 1$, da $z \neq y$ gilt. Ferner gilt $[z, y] = 1$, denn die 4 Involutionen in $\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)$, mit denen z vertauschbar ist, sind alle Nachbarn von R und $|\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2) \cap \Delta(R)| = 5$. Also ist $[x, z] \neq 1$ und $[xy, y] = [z, y] = 1$, also gilt $(x^a, z) \in \Delta$.

(b) Ist nun $y \notin \Delta(R)$, so ist auch $xy \notin \Delta(R)$. Dann ist $[z, x] \neq 1$ und $[z, y] \neq 1$ und weder x noch y sind mit z verbunden. Dann ist $(xy, z) \in \Delta$. Grund:

z ist mit 24 Involutionen der $PSU(3, 3^2)$ verbunden, die in 12 elementar-abelschen Gruppen vom Typ $(2; 2)$ liegen. Jede dieser 12 Vierergruppen enthält also 2 Elemente, die mit z adjazent sind. Jede der 24 Involutionen liegt in 2 weiteren dieser Gruppen; unter den 63 Untergruppen dieser Art in $PSU(3, 3^2)$ bleibt also ein Rest von 3 Vierergruppen, in denen z selbst enthalten ist. Die Gruppe bestehend aus $\{1, x, y, xy\}$ enthält also mindestens eine Involution, die mit z verbunden ist. Da x und y nicht mit z verbunden sind, muß $(xy, z) \in \Delta$ gelten.

Sei nun $x \in Q \cap \Gamma(P_2)$. x^a ist dann in $\Delta(P_2) \setminus \{Q, \Delta(Q) \cap \Delta(P_2)\}$ enthalten und dieselben Argumente wie in /3.3/ und /3.5/ liefern die Behauptung von /4.4/ und /4.5/.

/5.5/: Wir betrachten ein $x \in \Gamma(P_2) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)\}$ und es ist $x^a = xy$, wie oben definiert. Es ist zu zeigen, daß das Bild eines mit x verbundenen Elements in M_5 in $\Delta(xy)$ liegt.

Es ist $|(\Gamma(P_2) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)\}) \cap \Delta(x)| = 16$ und in dieser Menge gibt es 4 Involutionen z , für die gilt: $[x, z] \neq 1$ und $[x, x^a] = [z, x^a] = 1$. Für diese z ist $[z^a, z] = [xy, z] = 1$, aber $[z^a, xy] \neq 1$.

Zu jedem dieser mit x verbundenen Elemente z mit $[z, x^a] = 1$ gibt es dann 3 Elemente z' in $(\Gamma(P_2) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)\}) \cap \Delta(x)$, für die gilt: $[z'^a, z] = [xy, z] = 1$ und $[z'^a, xy] \neq 1$.

(Darunter befindet sich jeweils z selbst auch, also ist für weitere $12 - 4 = 8$ Elemente von $M_5 \cap \Delta(x)$ die Behauptung gezeigt.)

Ferner gibt es noch 4 Elemente z , für die gilt:

$[x, z] \neq 1$ und $[x, z^a] = [z, z^a] = 1$ Für sie gilt dann:

$[z^a, x] = [x^a, x] = 1$, aber $[x^a, z^a] \neq 1$.

Wir haben für alle Elemente in $\Gamma(P_2) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_2)\}$, die mit x verbunden sind, gezeigt, daß ihr Bild dann mit x^a verbunden ist. \square

Damit ist gezeigt, daß a tatsächlich ein Automorphismus von Γ_3 ist, also wirkt $\text{Aut}(\Gamma_3)$ transitiv auf Γ_3 .

Seien P_2 mit 00, die Punkte von Γ'_2 mit 01, 02, ..., 36 entsprechend Tabelle 3 und die Punkte von Σ_2 mit 37, 38, ..., 99 in der Reihenfolge von Tabelle 1 numeriert, so ergibt sich mit $Q = 01$ folgender Automorphismus a :

$a = (00\ 01)(02\ 03)(04\ 05)(06\ 07)(08\ 09)(10\ 11)(12\ 13)(14\ 15)(16\ 97)(17\ 42)(18\ 90)(19\ 37)(20\ 49)(21\ 71)(22\ 54)(23\ 94)(24\ 53)(25\ 89)(26\ 99)(27\ 45)(28\ 72)(29\ 41)(30\ 93)(31\ 67)(32\ 46)(33\ 50)(34\ 38)(35\ 98)(36\ 68)(39\ 40)(43\ 44)(47\ 48)(51\ 52)(55\ 56)(57\ 95)(58\ 96)(59\ 65)(60\ 66)(61\ 91)(62\ 92)(63\ 69)(64\ 70)(73\ 78)(74\ 77)(75\ 84)(76\ 83)(79\ 88)(80\ 87)(81\ 85)(82\ 86)$

(9.3) Identifizierung der Automorphismengruppe von Γ_3 .

(a) Wir haben gesehen, daß G_3 , die Automorphismengruppe von Γ_3 transitiv auf den Ecken des Graphen wirkt. Nach Konstruktion ist der Stabilisator eines Punktes in G_3 isomorph zu $G_2(2)$.

Also ist $|G_3| = 100 \cdot |G_2(2)| = 1\ 209\ 600$.

G_3 wirkt primitiv, da $\mu \neq 0, k$ gilt.

Behauptung: G_3 enthält eine einfache Untergruppe G_3^* der Ordnung 604 800.

Beweis: Die in (9.2) konstruierte Involution a hat 14 Fixpunkte auf Γ_3 , ist also Produkt von 43 Transpositionen, also eine ungerade Permutation. Da $G_2(2)$ eine maximale Untergruppe von G_3 ist, gilt $G_3 = \langle a, G_2(2) \rangle$ und G_3 enthält eine ungerade Permutation, besitzt also eine Untergruppe G_3^* vom Index 2. Da $\text{PSU}(3, 3^2)$ nur gerade Permutationen enthält und Untergruppe von $G_2(2)$ ist,

gilt $\text{PSU}(3,3^2) \leq G_3^*$.

Es existiert nun eine gerade Permutation \bar{a} in G_3^* , die P_2 , Γ_2 und Σ_2 bewegt. Man wähle das Produkt einer ungeraden Permutation in $G_2(2)$ mit a in $\langle G_2(2), a \rangle$. †)

Der Stabilisator des Punktes P_2 in G_3^* ist isomorph zu $\text{PSU}(3,3^2)$ und da G_3^* transitiv auf Γ_3 ist, können wir G_3^* mit $\langle \text{PSU}(3,3^2), \bar{a} \rangle$ identifizieren.

Da die $\text{PSU}(3,3^2)$ auf den Punkten von Γ_3 Bahnen der Länge 1, 36 und 63 hat, ist G_3^* primitiv und nach (5.1) einfach. Also ist G_3^* eine einfache Gruppe der Ordnung 604 800. ¶

Nach [8] ist jede einfache Gruppe der Ordnung 604 800 isomorph zur sporadischen einfachen Gruppe HJ von Hall-Janko, also gilt

$G_3^* \cong \text{HJ}$. HJ ist folgendermaßen definiert [16]:

HJ ist eine einfache Gruppe G , so daß das Zentrum einer 2-Sylow-Gruppe von G zyklisch ist und der Zentralisator einer zentralen Involution isomorph zur Erweiterung einer Gruppe E der Ordnung 32 mit der A_5 ist und G zwei konjugierten Klassen von Involutionen besitzt. Die Ordnung von HJ ist 604 800. Die Gruppe E ist zentrales Produkt einer Quaternionengruppe der Ordnung 8 mit einer Diedergruppe der Ordnung 8.

†) Eine Involution in $\text{PGL}(2,7)$, die in Γ_1 die M_i 's mit den N_j 's vertauscht, ist ungerade, z.B.

(02 09) (03 11) (04 13) (05 14) (06 12) (07 15) (08 10)

Daraus läßt sich unter Zuhilfenahme der Adjazenzmatrix von Γ_3 leicht folgende ungerade Permutation in G_3 berechnen:

(00) (01) (02 09) (03 11) (04 13) (05 14) (06 12) (07 15) (08 10) (16)
 (17 24) (18 28) (19 33) (20 34) (21 25) (22 29) (23 30) (26 27) (31)
 (32 35) (36) (37 50) (38 49) (39 51) (40 52) (41 54) (42 53) (43 55)
 (44 56) (45 99) (46 98) (47) (48) (57) (58) (59 60) (61 63) (62 64) (65 66)
 (67) (68) (69 91) (70 92) (71 89) (72 90) (73 76) (74 75) (77 84) (78 83)
 (79 82) (80 81) (85 87) (86 88) (93 94) (95) (96) (97)

Das Produkt von a mit dieser Involution hat keinen Fixpunkt und ist eine gerade Permutation:

(00 01) (02 09) (03 11) (04 13) (05 14) (06 12) (07 15) (08 10) (16 97)
 (17 53) (18 72) (19 50) (20 38) (21 89) (22 41) (23 93) (24 42) (25 71)
 (26 45) (27 99) (28 90) (29 54) (30 94) (31 67) (32 98) (33 37) (34 49)
 (35 46) (36 68) (39 52) (40 51) (43 56) (44 55) (47 48) (57 95) (58 96)
 (59 66) (60 65) (61 69) (62 70) (63 91) (64 92) (73 83) (74 84) (75 77)
 (76 78) (79 86) (80 85) (81 87) (82 88)

Da nach [8] HJ genau 100 konjugierte Untergruppen der Ordnung 6 048 enthält, die isomorph zu $PSU(3,3^2)$ sind, ist ein äußerer Automorphismus der HJ eindeutig durch seine Wirkung auf die 100 konjugierten Punktstabilisatoren, also durch seine Wirkung auf die 100 Ecken von Γ_3 bestimmt.

Sei $G = G_3^*$ und seien $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$.

Der Stabilisator des Punktes α in G hat 2 Bahnen auf $\Omega - \{\alpha\}$, nämlich $\Delta(\alpha)$ und $\Gamma(\alpha)$. Ist $\beta \in \Delta(\alpha)$, so ist $G_{\alpha\beta}$, der Stabilisator von α und β , isomorph zu $PSL(2,7)$, ist hingegen $\gamma \in \Gamma(\alpha)$, so gilt $|G_\alpha : G_{\alpha\gamma}| = 63$, also $|G_{\alpha\gamma}| = 96$. Ist nun a ein Automorphismus von G , so erhält a Schnitte von Untergruppen von G , d.h. sind α und β verbunden, also ist $|G_\alpha \cap G_\beta| = 168$, so gilt auch $|G_\alpha^a \cap G_\beta^a| = 168$. Also wirkt a kantenerhaltend auf Γ_3 .

Da $|\text{Aut}(HJ)| = |\text{Aut}(\Gamma_3)|$ gilt, folgt: $G_3 \cong \text{Aut}(HJ)$.

(b) Wir wollen nun zeigen, daß in G_3^* eine zentrale Involution b liegt, so daß $C_{G_3^*}(b) \cong E \cdot A_5$ gilt, wo E zentrales Produkt einer Quaternionengruppe mit einer Diedergruppe der Ordnung 8 ist.

(Beweis wie in [8].)

Wir wählen eine Involution der $PSU(3,3^2)$, z.B. v_{11} . Wie man der Adjazenzmatrix von Γ_3 entnimmt, hat v_{11} folgende Fixpunkte in $\Delta(P_2)$: 06,08,10,12,18,21,25,26,27,32,35. Damit läßt sich die folgende Involution b in G_3^* berechnen:

(00) (06) (08) (10) (12) (18) (21) (25) (26) (27) (28) (32) (35) (47) (48)
 (57) (58) (59) (60) (97)
 (03 34) (07 19) (11 20) (15 33) (65 94) (66 93) (77 83) (78 84)
 (39 41) (40 42) (49 55) (50 56) (71 91) (72 92) (73 88) (74 87)
 (01 16) (02 09) (23 30) (31 36) (45 46) (61 62) (63 64) (98 99)
 (37 44) (38 43) (51 54) (52 53) (69 89) (70 90) (75 85) (76 86)
 (04 29) (05 17) (13 22) (14 24) (67 96) (68 95) (79 82) (80 81)

Für die folgenden Überlegungen seien die Mengen der Punkte in den letzten 5 Zeilen von b zeilenweise mit A, B, C, D, E bezeichnet.

Die folgenden 3 Elemente von G_3^* sind mit b vertauschbar:

$z =$

(00 60 10 12 57) (06 48 26 18 21) (08 25 28 35 97) (27 32 58 47 59)
 (03 55 36 44 96) (34 49 31 37 67) (07 39 01 69 04) (19 41 16 89 29)
 (11 92 99 43 22) (20 72 98 38 13) (15 74 61 90 80) (33 87 62 70 81)
 (65 71 23 86 17) (94 91 30 76 05) (66 73 02 52 95) (93 88 09 53 68)
 (77 50 45 75 79) (83 56 46 85 82) (78 40 63 51 14) (84 42 64 54 24)

$t =$ (00 18) (06 58) (08 12) (10 59) (21 28) (25 47) (26 32) (27 60)
 (35 57) (48 97)

(03 67) (34 96) (07 22) (19 13) (11 79) (20 82) (15 17) (33 05)
 (65 24) (94 14) (66 95) (77 04) (83 29) (84 81) (93 68) (78 80)
 (39 88) (40 71) (41 73) (42 91) (49 74) (50 92) (55 87) (56 72)
 (01 70) (02 86) (09 76) (16 90) (23 52) (30 53) (31 43) (36 38)
 (45 37) (46 44) (61 75) (62 85) (63 89) (64 69) (98 54) (99 51)

$y =$ (00) (47) (59 60) (48 57) (58 97) (08 10 26 27) (12 21 32 28)
 (06 18 35 25)

(03 20 33 19 34 11 15 07) (65 83 78 66 94 77 84 93)
 (39 85 55 90 41 75 49 70) (37 56 53 42 44 50 52 40)
 (69 71 86 88 89 91 76 73) (38 74 54 72 43 87 51 92)
 (01 17 09 14 16 05 02 24) (04 30 22 31 29 23 13 36)
 (45 96 99 81 46 67 98 80) (61 79 64 95 62 82 63 68)

Sei $C = \langle z, y, t \rangle$. C ist Untergruppe von $C_{G_3^*}(b)$. C hat auf den 100 Punkten 2 Bahnen, nämlich die 20 Fixpunkte von b und die restlichen 80 Punkte. Die Wirkung von C auf den 20 Fixpunkten von b ist nicht treu, denn b liegt im Kern dieser Wirkung.

Die Wirkung von C auf der anderen Bahn mit 80 Punkten ist treu, jedoch imprimitiv. Die Blöcke dieser Wirkung sind gerade die Mengen A, B, C, D, E . Wir untersuchen die Wirkung von C auf der

Menge der 5 Blöcke. Es ist $z = (A B C D E)$, $y = (A) (B D) (C E)$ und

$t = (A E) (B) (C D)$. Also gibt es einen Homomorphismus $C \rightarrow A_5$.

Der Kern dieses Homomorphismus sei K . K wird durch die Konjugierten von y^2 erzeugt. Es ist $(zt)^3 = 1$ und $z^5 = t^2 = 1$, also ist

$\langle z, t \rangle \cong A_5$ und folglich $C \cong K \cdot A_5$.

Analyse der Struktur von K:

Sei $x_1 = y^2$ und $x_i = z^{-1}x_{i-1}z$ für $i = 2, 3, \dots$

Es ist dann $z^{-1}x_5z = x_1$ und $K = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$.

Es gelten folgende Relationen:

$x_i^2 = b$ ($i = 1, 2, \dots, 5$), $(x_i x_{i+1})^2 = 1$, $(x_i x_{i+2})^2 = b$ ($i = 1, \dots, 5 \pmod{5}$)
und $(x_1 z^{-1})^5 = 1$, also $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 1$.

K hat auf den 80 Punkten die 5 Bahnen A, B, C, D, E, auf denen K treu wirkt.

Für $\langle x_1, x_3 \rangle$ gilt: $x_1^2 = x_3^2 = b$, $b^2 = 1$, sowie
 $x_1^{-1}x_3(x_1x_3) = 1$, d.h. es gilt:
 $\langle x_1, x_3 \rangle \cong Q_8$

Für $\langle x_2, x_1x_5 \rangle$ gilt:
 $(x_1x_5)^2 = 1$ und $x_2^{x_1x_5} = x_2^{-1}$, also gilt:
 $\langle x_2, x_1x_5 \rangle \cong D_8$

Diese beiden Gruppe haben das gemeinsame Zentrum $\langle b \rangle$ und ihre Elemente sind miteinander vertauschbar. Also ist K das zentrale Produkt von $\langle x_1, x_3 \rangle$ und $\langle x_2, x_1x_5 \rangle$. Es gilt $|K| = 32$, also ist $|C| = 32 \cdot 60$.

Da 2^7 ein Teiler von 1 920 ist und $604\ 800 = 2^7 \cdot 4\ 725$ gilt, ist b eine zentrale Involution von G_3^* .

Da nach [8] der Zentralisator einer zentralen Involution in einer einfachen Gruppe der Ordnung 604 800 die Ordnung 1 920 hat, gilt $C = C_{G_3^*}(b)$ und die Charakterisierung von JANKO ist gezeigt.

§ 10 Die $G_2(4)$ als Rang-3-Erweiterung der Hall-Janko-Gruppe HJ

(10.1) Konstruktion des Graphen Γ_4

Ist b eine zentrale Involution in HJ, so ist nach [8] $|C_{HJ}(b)| = 1\,920$; es gibt also in der HJ 315 zentrale Involutionen. Da 2-Sylow-Gruppen der HJ ein Zentrum der Ordnung 2 haben [7], identifizieren wir die Eckenmenge von Σ_3 mit der Menge der 315 zentralen Involutionen der HJ. Aus dem in [8] gegebenen Permutationscharakter für die eindeutig bestimmte Darstellung der HJ auf 315 Punkten ergibt sich, daß es zu einer Involution u in Σ_3 genau 10 zentrale Involutionen v mit $[u,v] = 1$ gibt. Da diese 10 Involutionen in $C_{HJ}(u)$ paarweise kommutieren [7], liegt u in genau 5 zur Klein'schen Vierergruppe isomorphen Untergruppen der HJ.

Jede der 10 mit u vertauschbaren Involutionen v liegt ihrerseits in genau 4 von $\langle v, u \rangle$ verschiedenen Vierergruppen in HJ. Also gibt es zu u insgesamt $10 \cdot 4 \cdot 2 = 80$ Involutionen w in Σ_3 mit $[u,w] \neq 1$, aber es existiert ein v mit $[u,v] = [w,v] = 1$.

Da die 11 zentralen Involutionen in $C_{HJ}(v)$ in einer 2-Sylow-Gruppe S von HJ mit $v \in Z(S) < S \leq C_{HJ}(v)$ liegen und (ohne v) 5 Paare vertauschbarer Involutionen bilden [7], folgt mit demselben Argument wie in (9.1), daß die 80 mit u zu verbindenden zentralen Involutionen tatsächlich paarweise verschieden sind.

Wie bilden nun gemäß Vorschrift (B) aus §6 den Graphen Γ_4 , dessen Eckenmenge aus einem zusätzlichen Punkt P_3 , sowie Γ_3 und Σ_3 besteht.

Aus dem Permutationscharakter für die Rang-3-Darstellung der HJ auf 100 Punkten [8] erfahren wir, daß jede zentrale Involution 20 Punkte von Γ_3 festläßt. Andererseits wird jeder Punkt in Γ_3 von 63 zentralen Involutionen festgelassen. (Betrachte $\Delta(P_3)$ als die Menge der Konjugierten der $PSU(3,3^2)$ in HJ, dann wird ein Punkt von $\Delta(P_3)$ gerade von den 63 Involutionen festgelassen, die er enthält.)

Der so definierte reguläre Graph Γ_4 erfüllt (zunächst formal) die Parameterbedingungen eines Rang-3-Graphen mit $n = 416$, $k = 100$, $l = 315$, $\lambda = 36$, $\mu = 20$, $s = 20$, $t = -4$, $f_2 = 65$ und $f_3 = 350$.

(10.2) Nun besteht die Aufgabe darin, zu zeigen, daß $G_4 = \text{Aut}(\Gamma_4)$ transitiv auf den Punkten des Graphen wirkt. Wieder konstruiert man einen Automorphismus a' , der P_3 , Γ_3 und Σ_3 bewegt. Die Definition von a' stimmt mit der in (9.2) gegebenen Definition überein. Auch der Nachweis, daß es sich bei a' in der Tat um einen Automorphismus handelt, läuft - unter Berücksichtigung der in Γ_4 gegebenen Mächtigkeiten von Schnitten von Bahnen - im Prinzip gleich durch.

Da nach Konstruktion der Stabilisator des Punktes P_3 in G_4 isomorph zu G_3 ist, ergibt sich, daß

$$|G_4| = 416 \cdot 1\,209\,600 = 2^{13} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \quad \text{gilt.}$$

Da G_4 eine primitive Gruppe ist, gilt: $G_4 = \langle G_3, a' \rangle$.

a' hat 36 Fixpunkte, ist also eine gerade Permutation, folglich ist $G_4^* = \langle G_3^*, a' \rangle$ echte Untergruppe von G_4 . Der Stabilisator eines Punktes in G_4^* ist isomorph zu HJ , G_4^* besitzt also eine primitive Permutationsdarstellung vom Rang 3 auf 416 Punkten.

Deshalb folgt mit (5.1) die Einfachheit von G_4^* .

Man kann mit Verwendung von [22] zeigen, daß gilt:

$$G_4^* \cong G_2(4) \quad \text{und} \quad G_4 \cong \text{Aut}(G_2(4)).$$

§ 11 Die sporadische einfache Gruppe Suz als Rang-3-Erweiterung der $G_2(4)$

(11.1) Zunächst wird der Graph Σ_4 konstruiert. Die Ecken dieses Graphen sind die Zentren der 2-Sylow-Gruppen der $G_2(4)$. Nach [22] ist das Zentrum einer 2-Sylow-Gruppe der $G_2(4)$ elementar-abelsch der Ordnung 4. Ist z eine zentrale Involution von $G_2(4)$, so gilt $|C_{G_2(4)}(z)| = 4^6(4^2 - 1) = 61\,440$, d.h. es gibt 4 095 zentrale Involutionen in der $G_2(4)$ [22]. Daraus folgt, daß der Graph Σ_4 $\frac{4\,095}{3} = 1\,365$ Ecken besitzt.

Man kann zeigen, daß es in der $G_2(4)$ zu jedem Zentrum U einer 2-Sylow-Gruppe 5 elementar-abelsche Untergruppen E_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) der Ordnung 16 gibt, die U als Untergruppe enthalten und für die $E - \{1\}$ in 5 Mengen U_i zerfällt, so daß $U_i \cup \{1\} \in \Sigma_4$ ist. Ferner kann bewiesen werden, daß es zu einem $U \in \Sigma_4$ genau $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 320$ paarweise verschiedene Elemente V in Σ_4 gibt, so daß $[U, V] \neq 1$ ist, aber ein $W \in \Sigma_4$ existiert mit $[U, W] = [V, W] = 1$.

Σ_4 ist somit ein regulärer Graph der Valenz 320, auf dem $G_2(4)$ als transitive Automorphismengruppe wirkt.

Gemäß Vorschrift (B) von §6 wird nun Γ_5 mit der Eckenmenge $\{P_4\} \cup \Gamma_4 \cup \Sigma_4$ konstruiert. Wir betrachten die Punkte von Σ_4 als die Konjugierten der HJ in $G_2(4)$. Ein $Q \in \Gamma_4$ wird genau dann mit einem $U \in \Sigma_4$ verbunden, wenn $Q \cap U \neq \{1\}$ gilt.

Man kann zeigen, daß $|Q \cap U| \leq 2$ gilt. Also enthält jedes U höchstens eine der zentralen Involutionen der HJ, d.h. jeder Punkt in Γ_4 wird von genau 315 Punkten von Σ_4 festgelassen. Umgekehrt läßt jede Konjugierte des Zentrums einer 2-Sylow-Gruppe der $G_2(4)$ 96 Elemente in Γ_4 fest.

Γ_5 erfüllt die Parameterbedingungen eines Rang-3-Graphen mit $n = 1\,782$, $k = 416$, $l = 1\,365$, $\lambda = 100$, $\mu = 96$, $s = 20$, $t = -16$, $f_2 = 780$ und $f_3 = 1\,001$.

(11.2) Wieder soll nun ein Automorphismus von Γ_5 konstruiert werden, der P_4 , Γ_4 und Σ_4 bewegt. Ich gebe die Konstruktion, die mir M. SUZUKI [21] mitgeteilt hat, ohne Beweis an:

$\Delta(P_4)$ sei die Menge der konjugierten Untergruppen von $\text{Aut}(HJ)$ in $\text{Aut}(G_2(4))$ und

$\Gamma(P_4)$ die Menge der konjugierten Zentren der 2-Sylow-Gruppen in $G_2(4)$

a'' sei folgendermaßen definiert:

Sei $Q \in \Delta(P_4)$.

(1) a'' vertausche Q und P_4 .

(2) Die Punkte in $\Delta(P_4) \cap \Delta(Q)$ solle von a'' festgelassen werden.

(3) Die Elemente von $\Delta(P_4) \setminus \{Q, \Delta(P_4) \cap \Delta(Q)\}$ werden als Involutionen in G_4 identifiziert. Es besteht somit eine natürliche Korrespondenz zwischen den 315 zentralen Involutionen in G_4 und den Elementen in $\Gamma(P_4)$, die mit Q nichttrivialen Schnitt besitzen a'' sei diese natürliche Identifikation.

(4) Man kann zeigen, daß für Q und ein $U \in \Sigma_4$ folgendes gilt:

Ist $Q \cap U = \{1\}$, so gibt es eine elementar-abelsche Untergruppe E der Ordnung 16 in $\text{Aut}(G_2(4))$, so daß $E - \{1\}$ in fünf Mengen

$U_i - \{1\}$ zerfällt. Dabei sind die U_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) in $\Gamma(P_4)$, so daß $U_1 = U$ gilt und für genau eines der U_i mit $i = 2, 3, 4, 5$ gilt $Q \cap U_i = \{1\}$.

Ist nun $U \in \Gamma(P_4) \setminus \{\Delta(Q) \cap \Gamma(P_4)\}$, dann sei $U^{a''} = U'$, wobei U' die eben genannte Bedingung erfüllt.

Da der Stabilisator des Punktes P_4 in G_5 isomorph zu G_4 ist und G_5 transitiv auf den 1 782 Ecken von Γ_5 wirkt, gilt:

$$|G_5| = 2^{13} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 1782 = 2^{14} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Der Graph Γ_5 erfüllt $\mu \neq 0, k$, also ist G_5 primitive Permutationsgruppe der 1 782 Punkte des Graphen und dasselbe gilt für

$G_5^* = \langle G_4^*, a'' \rangle$, eine echte Untergruppe von G_5 , denn a'' hat 100 Fixpunkte, ist also eine gerade Permutation.

Mit (5.1) folgt: G_5^* ist eine einfache Gruppe der Ordnung 448 345 497 600. G_5^* ist die sporadische einfache Gruppe Suz von Suzuki, eine primitive Erweiterung der einfachen Gruppe $G_2(4)$ in ihrer primitiven Permutationsdarstellung auf 416 Punkten.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aschbacher, M.: The non existence of rank three permutation group of degree 3 250 and subdegrees 57, 3 192, J. Algebra 19 (1971), 538-540
- [2] Benson, C. T., Losey, N. E.: On a Graph of Hoffman and Singleton, J. Combin. Theory (B) 11 (1971), 67-79
- [3] Bose, R.C., Chakravarti, I.M.: Hermitian varieties in a finite projective space $PG(N, q^2)$, Canad. J. Math. 18 (1966), 1161-1182
- [4] Brauer, R.: On groups whose order contains a prime to the first power I, Amer. J. Math. 64 (1942), 401-420
- [5] Chakravarti, I.M.: Some Properties and Applications of Hermitian Varieties in a Finite Projective Space $PG(N, q^2)$ in the Construction of Strongly Regular Graphs (Two-Class Association Schemes) and Block Designs, J. Combin. Theory (B) 11 (1971), 268-283
- [6] Edge, W.L.: A second note on the simple group of order 6 048, Proc. Cambridge Philos. Soc. 59 (1963), 1-9
- [7] Gorenstein, D., Harada, K.: A characterization of Janko's two new simple groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.I 16 (1970), 331-406
- [8] Hall, M. jr., Wales, D.: The simple group of order 604,800, J. Algebra 9 (1968), 417-450
- [9] Hestenes, M.D.: On the Use of Graphs in Group Theory, in: Harary, F. (Hrsg.): New Directions in the Theory of Graphs, New York, London, 1973
- [10] Hestenes, M.D., Higman, D.G.: Rank 3 Groups and Strongly Regular Graphs, Computers in Algebra and Number Theory, SIAM-AMS Proceedings 4 (1971), 141-159
- [11] Higman, D.G.: Finite permutation groups of rank 3, Math. Z. 86 (1964), 145-156
- [12] Higman, D.G.: Solvability of a class of rank 3 permutation groups, Nagoya Math. J. 41 (1971), 89-96
- [13] Hoffman, A.J., Singleton, R.R.: On Moore graphs with diameter 2 and 3, IBM J. Res. Develop. 4 (1960) 497-504
- [14] Hubaut, X.L.: Strongly Regular Graphs, Discrete Math. 13 (1975), 357-381
- [15] Hughes, D.R., Piper, F.C.: Projective Planes, New York, Heidelberg, Berlin, 1973
- [16] Janko, Z.: Some new simple groups of finite order I, Symposia Mathematica I (1968), 25-69

- [17] Jordan, C.: *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris, 1870
- [18] McKay, J.: The non-abelian simple groups G , $|G| < 10^6$ - character tables, *Comm. Algebra* 7 (1979), 1407-1445
- [19] O'Meara, O.T.: *Lectures on Linear Groups*, AMS Regional Conference Series in Mathematics, Nr.22, 1974
- [20] Suzuki, M.: A simple group of order 448,345,497,600, in: Brauer, R., Sah, C.S. (Hrsg.): *Theory of Finite Groups*, A symposium, New York, 1969, 113-119
- [21] Suzuki, M.: Persönliche Mitteilung
- [22] Thomas, G.: A Characterization of the Groups $G_2(2^n)$, *J. Algebra* 13 (1969), 87-118
- [23] Tits, J.: Groupes finis simples sporadiques, *Séminaire Bourbaki*, 375 (1969/70), 187-207
- [24] Wales, D.: Uniqueness of the Graph of a Rank Three Group, *Pacific J. Math.* 30 (1969), 271-276
- [25] Wielandt, H.: *Finite Permutation Groups*, New York, 1964