Übungen Logik und formale Methoden – Aussagenlogik

[Viele der Übungen sind aus dem Buch von Huth und Ryan.]

A Aussagen

1. Aussagen

Welche der folgenden Sätze sind *wahrheitsdefinite* Aussagen?

(a) Ich gratuliere Dir zum Geburtstag.
(b) Es zieht.
(c) Schließen Sie bitte das Fenster.
(d) Gießen ist nördlich von Frankfurt.
(e) Gießen ist südlich von Frankfurt.
(f) Geht es Hans gut?
(g) Die Heckklappe ist offen.

2. Formalisierung von Aussagen

Formalisieren Sie folgende Aussagen mit Hilfe der Junktoren $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$ und $\vee$. Geben Sie jeweils an, welche Aussagensymbole P, Q, $\ldots$ Sie verwenden.

(a) Wenn die Sonne heute scheint, wird sie morgen nicht scheinen.
(b) Wenn das Barometer fällt, wird es regnen oder schneien.
(c) Wenn eine Anfrage eingeht, wird sie irgendwann bestätigt oder die Anfragebearbeitung macht überhaupt keinen Fortschritt mehr.
(d) Wenn die Zinsen steigen, sinken die Aktienkurse.
(e) Heute wird es regnen oder die Sonne wird scheinen, aber nicht beides.
(f) Krebs wird nicht heilbar sein, ehe nicht die Ursache gefunden wird und ein neues Medikament entwickelt wird.
(g) Wenn der Mond ein gelber Käse ist, ist 6 eine Primzahl.

B Die formale Sprache der Aussagenlogik

3. Klammern in Ausdrücken

Wir erinnern uns an die Regeln über die logischen Operatoren:

$\neg$ bindet stärker als $\wedge$
$\wedge$ bindet stärker als $\vee$
$\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$
$\rightarrow$ ist rechts-assoziativ, d.h. $P \rightarrow Q \rightarrow R$ ist kürzer für $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$.

Fügen Sie in die folgenden Ausdrücken die Klammern entsprechend der angegebenen Regeln ein.

(a) $\neg P \wedge Q \rightarrow R$
(b) $(P \rightarrow Q) \wedge \neg(R \vee P \rightarrow Q)$

(c) $(P \to Q) \to (R \to S \lor T)$

(d) $P \lor (\neg Q \to P \land R)$

(e) $P \lor Q \to \neg P \land R$

(f) $P \lor Q \to \neg Q$

(g) Weshalb ist der Ausdruck $P \lor Q \land R$ (trotz unserer Regeln) problematisch?

4. Syntaxbaum finden

Zeichnen Sie zu folgenden Formeln den abstrakten Syntaxbaum

(a) P

(b) $P \land Q$

(c) $P \land \neg Q \to \neg P$

(d) $P \land (\neg Q \to \neg P)$

(e) $P \to (\neg Q \land (Q \to P))$

(f) $\neg((\neg Q \land (P \to R)) \land (R \to Q))$

(g) $\neg P \lor (P \to Q)$

(h) $(P \land Q) \to (\neg R \lor (Q \to R))$

(i) $((S \lor \neg P) \to \neg P)$

(j) $(((S \to (R \lor L)) \lor (\neg Q \land R)) \to (\neg(P \to S) \to R))$

(k) $(P \to Q) \land (\neg R \to (Q \lor (\neg P \land R)))$

5. Formeln in Präfix-Notation (d.h. *lispy*)

Formen Sie folgende Formeln in Präfix-Notation um, so wie die Syntax in der *Logic Workbench* definiert ist.

(a) P

(b) $P \land Q$

(c) $P \land \neg Q \to \neg P$

(d) $P \land (\neg Q \to \neg P)$

(e) $P \to (\neg Q \land (Q \to P))$

(f) $\neg((\neg Q \land (P \to R)) \land (R \to Q))$

(g) $\neg P \lor (P \to Q)$

(h) $(P \land Q) \to (\neg R \lor (Q \to R))$

(i) $((S \lor \neg P) \to \neg P)$

(j) $(((S \to (R \lor L)) \lor (\neg Q \land R)) \to (\neg(P \to S) \to R))$

(k) $(P \to Q) \land (\neg R \to (Q \lor (\neg P \land R)))$

6. Subformeln finden

Geben Sie zu folgenden Formeln alle Subformeln an:

(a) $P \to (\neg P \lor (\neg\neg Q \to (P \land Q)))$

(b) $(S \to R \lor L) \lor (\neg Q \land R) \to \neg(P \to S) \to R$

(c) $(P \to Q) \land (\neg R \to (Q \lor (\neg P \lor R)))$

7. Syntaxbaum zeichnen

Zeichnen Sie den Syntaxbaum zu einer Formel ϕ folgender Form:

(a) ϕ ist die Negation einer Implikation

(b) ϕ ist eine Konjunktion von Disjunktionen

(c) ϕ ist eine Konjunktion von Konjunktionen

8. Überprüfung der Syntax von Formeln

Geben Sie zu folgenden Formeln an, ob sie wohlgeformt sind nach den Syntaxregeln und den Regeln zu den Klammern (siehe oben). Begründung!

(a) $P \land \neg(P \lor \neg Q) \to (R \to S)$

(b) $P \land \neg(P \lor Q \land S) \to (R \to S)$

(c) $P \land \neg(P \land \lor S) \to (R \to S)$

C Semantik der Aussagenlogik

9. Wahrheitstafeln

Konstruieren Sie Wahrheitstafeln für folgende Formeln:

(a) $P \to Q$ und $\neg P \lor Q$

(b) $((P \to Q) \to P) \to P$

(c) $P \lor (\neg(Q \land (R \to Q)))$

(d) $(P \land Q) \to (P \lor Q)$

(e) $((P \to \neg Q) \to \neg P) \to Q$

(f) $(P \to Q) \lor (P \to \neg Q)$

(g) $((P \lor Q) \to R) \to ((P \to R) \lor (Q \to R))$

(h) $(P \to Q) \to (\neg P \to \neg Q)$

10. Gültigkeit etc.

Geben Sie zu folgenden Formeln an, ob sie (a) allgemeingültig, (b) erfüllbar, (c) falsifizierbar, (d) unerfüllbar sind.

(a) Q

(b) $Q \lor P$

(c) $P \lor \neg P$

(d) $P \to \neg P$

(e) $\neg P \to P$

(f) $P \to (Q \to P)$

(g) $P \to (P \to Q)$

(h) $((P \to Q) \land P) \to Q$

11. Äquivalenz von Formeln

Prüfen Sie mittels Wahrheitstafeln, ob folgende Äquivalenzen gelten:

(a) $(P \to Q) \to R \equiv P \to (Q \to R)$

(b) $(P \to Q) \to R \equiv (P \land Q) \to R$

(c) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R \equiv P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

(d) $P \lor (Q \land R) \equiv (P \lor Q) \land (P \lor R)$

12. Formel zur Wahrheitstafel

Gegeben sei die folgende Wahrheitstafel

P_1	P_2	P_3	ϕ
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

(a) Finden Sie eine Formel ϕ, die diese Wahrheitstafel hat.

(b) Welchem Sprachkonstrukt von Programmiersprachen entspricht diese Wahrheitstafel?

13. Zusammenhang von Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über Formeln ϕ und ψ:

(a) Wenn ϕ allgemeingültig ist, dann ist ϕ erfüllbar.

(b) Wenn ϕ erfüllbar ist, dann ist $\neg\phi$ unerfüllbar.

(c) Wenn ϕ allgemeingültig ist, dann ist $\neg\phi$ unerfüllbar.

(d) Wenn ϕ unerfüllbar ist, dann ist $\neg\phi$ allgemeingültig.

(e) Wenn ϕ und $(\phi \to \psi)$ allgemeingültig sind, dann ist auch ψ allgemeingültig.

(f) Wenn ϕ und $(\phi \to \psi)$ erfüllbar sind, dann ist auch ψ erfüllbar.

(g) Wenn $\phi \equiv \psi$ gilt, dann ist $\phi \leftrightarrow \psi$ allgemeingültig.

14. Semantische Äquivalenz – Beispiel

Welche der folgenden Formeln ist zu $P \to (Q \lor R)$ semantisch äquivalent?

(a) $Q \lor (\neg P \lor R)$

(b) $Q \land \neg R \to P$

(c) $P \land \neg R \to Q$

(d) $\neg Q \land \neg R \to \neg P$

15. Semantische Äquivalenz – Eigenschaften

Zeigen Sie, dass die Relation $\equiv$ folgende Eigenschaften hat:

(a) $\equiv$ ist reflexiv, d.h. es gilt
für alle Formeln ϕ: $\phi \equiv \phi$.

(b) $\equiv$ ist symmetrisch, d.h. es gilt
für alle Formeln ϕ, ψ: Wenn $\phi \equiv \psi$ gilt, dann auch $\psi \equiv \phi$.

(c) $\equiv$ ist transitiv, d.h. es gilt
für alle Formeln ϕ, ψ, χ: Aus $\phi \equiv \psi$ und $\psi \equiv \chi$ folgt $\phi \equiv \chi$.

Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt auch *Äquivalenzrelation*.

16. Semantische Äquivalenz – Eigenschaften von Operatoren

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Booleschen Operatoren

(a) $\wedge$ und $\vee$ sind kommutativ, d.h.
$\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$ und
$\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$.

(b) $\wedge$ und $\vee$ sind assoziativ, d.h.
$\phi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\psi \wedge \phi) \wedge \chi$ und
$\phi \vee (\psi \vee \chi) \equiv (\psi \vee \phi) \vee \chi$.

(c) $\wedge$ und $\vee$ sind absorptiv (erfüllen die Verschmelzungsregeln), d.h.
$\phi \wedge (\phi \vee \psi) \equiv \phi$ und
$\phi \vee (\phi \wedge \psi) \equiv \phi$.

(d) $\wedge$ und $\vee$ sind distributiv, d.h.
$\phi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$ und
$\phi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)$.

(e) Die Negation $\neg$ erfüllt die Komplementregeln d.h.
$\phi \wedge \neg\phi \equiv \bot$ und
$\phi \vee \neg\phi \equiv \top$.

Eine Menge mit den Operatoren $\wedge, \vee, \neg$ und den Konstanten $\top, \bot$ mit diesen Eigenschaften nennt man *Boolesche Algebra*.

D Natürliches Schliessen

Programme zur Lösung bzw. der Überprüfung der Lösungen der Aufgaben zum natürlichen Schließen

Richard Bornat und Bernard Sufrin haben den *Jape proof calculator*[1] entwickelt, mit dem man Herleitungen mit den Regeln des natürlichen Schließens interaktiv entwickeln kann. Ich hatte beim „Spielen“ mit diesem Programm den Eindruck, dass man schnell rausfindet, wie man bei den Herleitungen mit dem Programm vorzugehen hat.
Die Dateien zur Installation von Jape findet man auf der Webseite `http://www.cs.ox.ac.uk/people/bernard.sufrin/personal/jape.org`. Für unsere Übungen habe ich die Dateien, die man zum natürlichen Schließen braucht etwas angepasst und bereits die Aufgaben eingegeben. Um dies zu verwenden, laden Sie die Datei `lfm-jape.zip` von meiner Webseite herunter, entpacken Sie in ein Verzeichnis. Nach dem Start von Jape wählen Sie den Menüpunkt File/Open new theory... und wählen die Datei `I2L-LfM.jt` aus dem Verzeichnis, in das Sie `lfm-jape.zip` entpackt haben.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, das natürliche Schließen in der Logic Workbench (lwb) auszuführen. Das geht am einfachsten mit dem Programm lwb-gui, einer grafischen Oberfläche für die Logic Workbench. Man geht so vor:

(a) Man installiert das Programm, siehe `https://github.com/esb-lwb/lwb-gui/releases`.

[1] „Jape is a synonym for a practical joke“ [`https://en.wikipedia.org/wiki/Jape`], steht aber tatsächlich für „just another proof editor“.

(b) Um mit dem natürlichen Schließen zu starten, wählt man den Menüpunkt *Session > New > Natural Deduction*.

(c) Danach entfernt man eines der Kommentarzeichen „;" der Logik, die man verwenden möchte.

(d) Man positioniert im linken Fenster den Cursor in einen Ausdruck. Mit der Tastenkombination `Ctrl-Shift-T` wird der Ausdruck ausgewertet und das Ergebnis im rechten Fenster angezeigt.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, eine Entwicklungsumgebung für Clojure zu verwenden, z.B. IntelliJ IDEA mit Cursive. In diesem Fall geht man so vor:

(a) Man „clont" das Projekt lwb von https://github.com/esb-dev/lwb

(b) Man lädt die Datei `src/lwb/nd/repl.clj`

(c) Man startet eine REPL, lädt die Datei in die REPL und wechselt in der REPL in den Namensraum `lwb.nd.repl`

Um Herleitungen im natürlichen Schließen in der lwb durchzuführen, startet man mit der Funktion `(proof...)`. Dabei muss man natürlich die Voraussetzungen und die zu beweisende Formel in Präfix-Notation angeben.
Mit `(show)` wird der aktuelle Stand des Beweises angezeigt. Mit `(show-rules)` kann man sehen, welche Regeln man anwenden kann.
Regeln werden vorwärts mit `(step-f ...)` und rückwärts mit `(step-b ...)` angewandt. Den letzten Schritt kann man mit `(undo)` rückgängig machen.
Mehr über natürliche Deduktion in Clojure steht in der Masterarbeit von Tobias Völzel, siehe https://esb-dev.github.io/mat/dpa-voelzel.pdf sowie in der Dokumentation zur *Logic Workbench*, siehe https://github.com/esb-lwb/lwb/wiki

17. Zusätzliche Regeln für Herleitungen

Zeigen Sie folgende Aussagen. (Die ersten vier dieser Aussagen wurden in der Vorlesung als Beispiele bewiesen, es sind die zusätzlichen Regeln auf der Übersicht über die Regeln des natürlichen Schließens.)

(a) $P \vdash \neg\neg P$ (¬¬i)

(b) $\neg\neg P \vdash P$ (¬¬e)

(c) $P \to Q,\ \neg Q \vdash \neg P$ (MT Modus tollens)

(d) $\vdash P \vee \neg P$ (TND Tertium non datur)

(e) $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ (Kontraposition)

(f) $P \to Q, \neg P \to Q \vdash Q$

18. Herleitungen

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $(P \wedge Q) \wedge R, S \wedge T \vdash Q \wedge S$

(b) $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$

(c) $(P \wedge Q) \wedge R \vdash P \wedge (Q \wedge R)$

(d) $P \to (P \to Q), P \vdash Q$

(e) $Q \to (P \to R), \neg R, Q \vdash \neg P$

(f) $\vdash (P \land Q) \to P$

(g) $P \vdash (P \to Q) \to Q$

(h) $(P \to R) \land (Q \to R) \vdash P \land Q \to R$

(i) $Q \to R \vdash (P \to Q) \to (P \to R)$

(j) $P \to Q, R \to S \vdash P \lor R \to Q \lor S$

(k) $(P \lor (Q \to P)) \land Q \vdash P$

(l) $P \to Q, R \to S \vdash P \land R \to Q \land S$

(m) $P \to Q \land R \vdash (P \to Q) \land (P \to R)$

(n) $P \lor (P \land Q) \vdash P$

(o) $(P \land Q) \lor (P \land R) \vdash P \land (Q \lor R)$

19. Klassische Gesetze

Zeigen Sie folgende Aussagen (Peirce's Gesetz und die De Morgan-Gesetze[2]):

(a) $\vdash ((P \to Q) \to P) \to P$

(b) $\neg(P \land Q) \vdash \neg P \lor \neg Q$

(c) $\neg P \lor \neg Q \vdash \neg(P \land Q)$

(d) $\neg(P \lor Q) \vdash \neg P \land \neg Q$

(e) $\neg P \land \neg Q \vdash \neg(P \lor Q)$

20. Herleitung aus der Wahrheitstafel

Stellen Sie die Wahrheitstafel für die Formel ϕ gegeben durch $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ auf.

Verwenden Sie die Wahrheitstafel, um eine Herleitung $\vdash \phi$ zu generieren, so wie wir das im Beweis der Vollständigkeit des natürlichen Schließens getan haben.

E Normalformen

21. Konjunktive Normalform CNF

Bestimmen Sie für folgende Formeln die konjunktive Normalform CNF:

(a) $\neg(P \leftrightarrow Q)$

(b) $((P \to Q) \to Q) \to Q$

(c) $(P \to (P \land \neg Q)) \land (Q \to (Q \land \neg P))$

22. Disjunktive Normalform DNF

Bestimmen Sie für folgende Formeln die disjunktive Normalform DNF:

(a) $\neg(P \leftrightarrow Q)$

(b) $((P \to Q) \to Q) \to Q$

(c) $(P \to (P \land \neg Q)) \land (Q \to (Q \land \neg P))$

[2] Charles Sanders Peirce, amerikanischer Logiker 1839 - 1914, Augustus De Morgan, englischer Mathematiker 1806 - 1871

23. Algorithmus CNF etc.

Berechnen Sie schrittweise nachvollziehbar

`cnf(nnf(impl_free(`$\neg(P \to (\neg(Q \wedge (\neg P \to Q))))$`)))`.

24. Ampel

(a) Drücken Sie in einer aussagenlogischen Formel aus, dass eine Ampel genau eine der Farben rot, gelb, grün anzeigt. Aussagen dieser Art werden üblicherweise in der konjunktiven Normalform ausgedrückt, tun Sie das auch.

(b) Wie muss man die Formel ändern, wenn auch die Kombination von rot und gelb möglich ist.

F Entscheidungsfragen der Aussagenlogik

25. Horn-Formeln

Wenden Sie den Algorithmus für Horn-Formeln an:

(a) $(P \wedge Q \wedge W \to \bot) \wedge (T \to \bot) \wedge (R \to P) \wedge (\top \to R) \wedge (\top \to Q) \wedge (U \to S) \wedge (\top \to U)$

(b) $(P \wedge Q \wedge S \to P) \wedge (Q \wedge R \to P) \wedge (P \wedge S \to S)$

(c) $(P \wedge Q \wedge S \to \bot) \wedge (Q \wedge R \to P) \wedge (\top \to S)$

(d) $(\top \to Q) \wedge (\top \to S) \wedge (W \to \bot) \wedge (P \wedge Q \wedge S \to \bot) \wedge (V \to S) \wedge (\top \to R) \wedge (R \to P)$

26. Horn-Klauseln

Eine Formel in konjunktiver Normalform heißt Horn-Formel, wenn jede Klausel in der Formel höchstens ein positives Literal hat.

Stellen Sie die Formeln der vorherigen Aufgabe in dieser Form dar und zeigen Sie, dass die Formeln jeweils tatsächlich semantisch äquivalent sind.

27. Alles Horn-Formeln?

Beweisen Sie, dass es nicht zu jeder Formel eine semantisch äquivalente Horn-Formel gibt.

G SAT-Solver

28. Ratschlag

„Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?“ wurde ein 100-jähriger gefragt. „Ich halte mich streng an die Diätregeln: wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit trinke, dann verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.“

Der Fragesteller fand diesen Ratschlag ziemlich verwirrend. Können Sie ihn vereinfachen? [Schöning, p.12]

(a) Formalisieren Sie die Aussagen des Greises.

(b) Verwenden Sie `lwb` und ermitteln Sie Wahrheitswerte für die Atome, unter denen die Aussagen wahr sind.

(c) Ermitteln Sie eine Vereinfachung des Rats als Formel und drücken Sie die einfachere Formel in natürlicher Sprache aus.

29. Zeit-Rätsel

Die Wochenzeitung „Die Zeit“ veröffentlicht Rätsel der folgenden Art:

Von den Unsen ist bekannt, dass sie entweder immer lügen oder immer die Wahrheit sagen.
Ansen, der Magier: „Wenn Honsen, der Medizinmann, lügt, dann sagt genau einer von Donsen, dem Wächter, und Insen, dem Späher, die Wahrheit.“
Bonsen, der Häuptling: „Wenn Consen, der Krieger, und Ensen, der Stallbursche, lügen, dann sagt Konsen, der älteste, die Wahrheit.“
Consen, der Krieger: „Wenn Konsen, der Älteste, lügt, dann lügt auch Donsen, der Wächter.“
Donsen, der Wächter: „Wenn Insen, der Späher, die Wahrheit sagt, dann lügt entweder Gonsen oder Ensen.“
Ensen, der Stallbursche: „Wenn Ansen, der Magier, lügt, dann sagt Insen die Wahrheit.“
Fonsen, der Jäger: „‘Wenn Insen, der Späher, und Ansen, der Magier, beide die Wahrheit sagen, dann lügt Gonsen, der Gärtner.“
Gonsen, der Gärtner: „Wenn Insen lügt, dann lügt auch Fonsen.“
Honsen, der Medizinmann: „Wenn Ensen die Wahrheit sagt, dann sagt auch Donsen, der Wächter, die Wahrheit.“
Insen, der Späher: „Wenn Honsen, der Medizinmann, lügt, dann sagt Bonsen, der Häuptling, die Wahrheit.“
Konsen, der Älteste: „Wenn Ensen, der Stallbursche, lügt, dann sagt von Insen, dem Späher, und Ansen, dem Magier, genau einer die Wahrheit.“

So was kann ein Informatiker doch maschinell lösen, oder?

30. Noch ein Zeit-Rätsel

Logelei aus dem Zeit Magazin Nr.48/2007 22.November 2007

Eines Tages kommt die Katze des Dorflehrers mit einem rosa Hut auf dem Kopf nach Hause.
Der Lehrer empört: „Das waren bestimmt wieder einige der acht Lausbuben in meiner Klasse!“
Im Dorf läuft ihm Simon über den Weg, von dem er erfährt:
„Wenn Detlev an der Aktion beteiligt war, dann auch Rolf!“
Als er gerade den Laden betreten will, sieht er Michel.
Der beteuert: „Wenn Friedl mitgemacht hat, dann hat aber Detlev nichts mit der Sache zu tun.“
Im Laden trifft er Detlev, welcher bekundet: „Das hat Simon angezettelt.“
Auf dem Heimweg begegnet er schließlich Tobias und erfahrt von diesem: „Klaus hat nichts mit der Sache zu tun!“
Am nächsten Morgen, bevor der Unterricht anfängt, begegnet der Lehrer im Schulhof Friedl, der sagt:
„Wenn Tobias unschuldig ist, dann war Michel daran beteiligt!“
In der großen Pause nimmt er sich der Reihe nach Klaus und Rolf vor.
Klaus: „Wenn Rolf dabei war, dann auch Simon!“
Rolf: „Torsten war’s!“
Fehlt nur noch Torsten, der muss ohnehin heute nachsitzen. Eine gute Gelegenheit, um auch ihn zu befragen.
Ergebnis: „Soweit ich weiß, war Klaus einer von denen, die der Katze den Hut aufgebunden haben.“

Die Schuldigen haben natürlich gelogen, die anderen nicht. Wer war’s?

31. Färbungen

Man möchte oft auf planaren Karten Länder so färben, dass benachbarte Länder nicht dieselbe Farbe haben. Interessant ist die Frage, ob man dabei mit drei Farben auskommt. Bekannt ist, dass vier Farben genügen – der sogenannte Vier-Farben-Satz.

Überlegen Sie, wie man diese Fragestellung in der Aussagenlogik formulieren kann, und zeigen Sie, dass man die Karte der Staaten und Territorien Australiens mit drei Farben färben kann.

32. DPLL-Algorithmus

Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf folgende Formel in CNF an:

$$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee S) \wedge (R \vee \neg S) \wedge (\neg P \vee \neg S) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee S)$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis in lwb.

33. DPLL-Algorithmus

Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf folgende Formel in CNF an:

$$Y_1 \wedge Y_2 \wedge (\neg Y_1 \vee X \vee Z) \wedge (\neg Y_2 \vee \neg X \vee Z) \wedge (Y_3 \vee \neg Z) \wedge (\neg Y_3 \vee \neg Z)$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis in lwb.

H Anwendungen

34. Spezifikation überprüfen

In einem technischen Dokument stehen die folgenden Aussagen[3]:

(a) If the file system is not locked, then
  a) new messages will be queued;
  b) new messages will be sent to the message buffer;
  c) the system is functioning normally, and conversely.

(b) If new messages are not queued, then they will be sent to the message buffer.

(c) New messages will not be sent to the message buffer.

Sind diese Spezifikationen konsistent, oder gibt es einen inneren Widerspruch?

(a) Übersetzen Sie zunächst die einzelnen Teile der Spezifikation in Formeln der Aussagenlogik. Verwenden Sie die folgenden vier atomaren Aussagen:
L für „file system locked“
Q für „new messages are queued“
B für „new messages are sent to the message buffer“
N für „system functioning normally“

(b) Wie kann man feststellen, ob die Spezifikation konsistent ist?

35. Feature-Diagramm in Aussagenlogik umsetzen

In dem Buch „Feature-Oriented Software Product Lines“ von Sven Apel, Don Batory, Christian Kästner und Gunter Saake, findet sich Abbildung 1 eines (teilweisen) Feature-Modells (die grauen Features sind nicht vollständig ausmodelliert).

[3] aus: Rosen *Discrete Mathematics and Its Applications, 5th edition*, Aufgabe 1.1.48

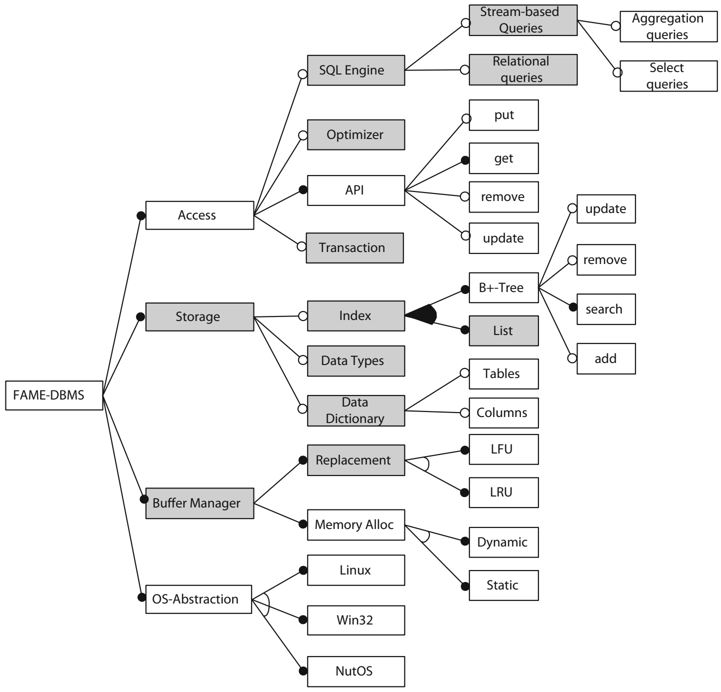

Abbildung 1: Feature-Diagramm für ein eingebettetes DBMS

Formulieren Sie ein Formel der Aussagenlogik, die dieses Feature-Diagramm ausdrückt. (Es genügt, wenn Sie zeigen, wie man eine solche Formel aufbaut, sie muss nicht das vollständige Diagramm wiedergeben.)