Geometrische Invarianten und Endlichkeitseigenschaften von Gruppen

Inaugural-Dissertation zur Erlangung
des Doktorgrades der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität zu Frankfurt am Main

von
Burkhardt Renz
aus Tübingen

Frankfurt am Main 1988

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Mathematik der Universität Frankfurt am Main.

Dekan: Prof. Dr. Helmut Behr
Erster Berichterstatter: Prof. Dr. Robert Bieri
Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. Helmut Behr
Tag der Promotion: 26. Januar 1988

Vorwort

Beim Studium *unendlicher* diskreter Gruppen ist man oft darauf verwiesen, eine womöglich *endliche* Beschreibung der interessierenden Gruppen zur Verfügung zu haben. Umso besser, daß es mit dem Eilenberg-MacLane-Komplex K(G,1) ein *topologisches Modell* der Gruppe G gibt, das *Endlichkeitseigenschaften* der Gruppe auf natürliche Weise widerspiegelt: eine endlich erzeugte Gruppe hat einen K(G,1) mit endlichem 1-Gerüst, eine endlich präsentierte Gruppe läßt sich in einem K(G,1) mit endlichem 2-Gerüst 'modellieren'. Allgemein nennt man eine Gruppe G vom (Endlichkeits-)Typ F_k, wenn sie einen K(G,1) mit endlichem k-Gerüst besitzt.

Wir untersuchen die Frage, welche Endlichkeitseigenschaften Untergruppen in Gruppen vom Typ F_k haben. Im allgemeinen vererbt eine Gruppe G ihren Endlichkeitstyp nicht auf Untergruppen. Selbst in vergleichsweise "einfachen" Gruppen ist nicht bekannt, welche Endlichkeitseigenschaften die Untergruppen besitzen. So ist zum Beispiel die Frage offen, ob in Ein-Relator-Gruppen jede endlich erzeugte Untergruppe auch endlich präsentierbar ist. Besser unter Kontrolle ist die Situation, wenn man sich auf Normalteiler von G mit Abelscher Faktorgruppe konzentriert. Bieri, Neumann und Strebel [3] haben für eine endlich erzeugte Gruppe die Vererbung der Endlichkeitseigenschaft F_1 auf solche Normalteiler charakterisiert.

Diese Charakterisierung gelingt durch die *geometrische Invariante* Σ einer endlich erzeugten Gruppe G. Ist $\chi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Homomorphismus von G in die additive Gruppe der reellen Zahlen, dann bezeichnet man das Untermonoid der Elemente $g \in G$ mit $\chi(g) \geq 0$

als G_χ. Die Kommutatoruntergruppe G' von G ist endlich erzeugt als G-Operatorgruppe. Anders ist es, wenn man die Operatoren auf das Monoid G_χ beschränkt: es hängt dann von χ ab, ob G' auch als G_χ-Operatorgruppe endlich erzeugbar ist oder nicht. Die geometrische Invariante Σ besteht aus Äquivalenzklassen $[\chi]$ der Homomorphismen $\chi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$, für die G diese *lokale* Endlichkeitseigenschaft hat. Ist N ein Normalteiler von G mit Abelscher Faktorgruppe, dann ist N genau dann endlich erzeugt, wenn G' für jedes $\chi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ mit $\chi(N) = 0$ als G_χ-Operatorgruppe endlich erzeugt ist.

In dieser Arbeit verallgemeinere ich das Resultat von Bieri, Neumann und Strebel für die höheren Endlichkeitseigenschaften F_k, $k \geq 1$. Die Idee für diese Verallgemeinerung kommt von der Beobachtung her, daß man die lokale Endlichkeitseigenschaft in der Definition von Σ_{BNS} *topologisch* interpretieren kann: G' ist genau dann endlich erzeugbar über G_χ, wenn ein gewisser, von χ abhängiger Teilkomplex der universellen Überlagerung C eines K(G,1) mit endlichem 1-Gerüst zusammenhängend ist.

Die Fortsetzung eines Charakters $\chi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ zu einer Bewertung $v_\chi\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$ auf der universellen Überlagerung C eines Eilenberg-MacLane-Komplexes K(G,1) mit endlichem k-Gerüst erlaubt in der Tat die Definition eines Bewertungsunterkomplexes C_v, dessen höhere Zusammenhangseigenschaften die *lokalen* höheren Endlichkeitseigenschaften der Gruppe G widerspiegeln. Ich definiere eine Kette *höherer geometrischer Invarianten*

$$^*\Sigma^1 \supseteq {}^*\Sigma^2 \supseteq \cdots \supseteq {}^*\Sigma^k \supseteq \cdots,$$

die Σ_{BNS} als den Spezialfall $-{}^*\Sigma^1$ enthält und für die wieder der Schluß von den lokalen Endlichkeitseigenschaften aufs Globale möglich ist:

Ein Normalteiler N mit Abelscher Faktorgruppe in einer Gruppe G vom Typ F_k ist genau dann seinerseits vom Typ F_k, wenn alle Charaktere der Gruppe, die auf N verschwinden in $^*\Sigma^k$ liegen.

Im Fall $k = 2$ kann man $^*\Sigma^2$ kombinatorisch charakterisieren. Eine Klasse $[\chi]$ von Charakteren einer endlich präsentierten Gruppe G liegt in $^*\Sigma^2$, wenn es eine endliche Präsentation $\langle X;R \rangle$ von G gibt, so daß der Bewertungsunterkomplex C_v des Cayley-Komplexes $C = C(X;R)$ einfach zusammenhängend ist. Der Bewertungsunterkomplex C_v ist dabei der volle Teilkomplex von C, der von der Teilmenge $G_\chi = \{ g \in G \mid \chi(g) \geq 0 \}$ der Eckenmenge G von C aufgespannt wird. In dieser Situation wird besonders anschaulich, wie man die "Halbierung" der Gruppe G, die Halbgruppe G_χ, topologisch "nachbauen" kann als die "Hälfte" C_v des Cayley-Komplexes. Unser Hauptresultat erlaubt es insbesondere zu "entscheiden", welche Untergruppen N einer endlich präsentierten Gruppe G, die G' enthalten, ebenfalls endlich präsentierbar sind.

Die Verbindung von algebraischer Topologie und Gruppentheorie läßt sich auch in der anderen Richtung fruchtbar verwenden: Gemeinsam mit Robert Bieri haben wir eine *homologische* Version der höheren geometrischen Invariante definiert [4]. Für eine endlich erzeugte Gruppe G und einen G-Modul A enthält $\Sigma^k G;A)$ diejenigen Klassen $[\chi]$ von Charakteren der Gruppe G, für die der G-Modul A links vom Typ FP_k über dem Monoidring $\mathbf{Z}G_\chi$ ist. Im Fall, daß A der triviale G-Modul $\mathbf{Z}$ ist, erhalten wir die Verallgemeinerung des Satzes von Bieri, Neumann und Strebel für die homologischen Endlichkeitseigenschaften FP_k.

Eine interessante Anwendung des Satzes über die Vererbung der Endlichkeitseigenschaft F_k auf Normalteiler mit Abelscher Faktorgruppe ist das folgende Korollar: Es ist für Epimorphismen $\chi\colon G \twoheadrightarrow \mathbf{Z}^j$ eine "offene Bedingung", ob der Kern von χ vom Endlichkeitstyp F_k ist. Diese Folgerung verallgemeinert das Ergebnis von Fried, Lee [12]. Ferner kann man mit den Techniken der kombinatorischen Charakterisierung von $^*\Sigma^2$ entscheiden, für welche Epimorphismen $\chi\colon G \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$ eine endlich präsentierte Gruppe als HNN-Erweiterung über einer auch endlich präsentierten Basisgruppe und assoziiertem Homomorphismus χ dargestellt werden kann.

Das Beispielmaterial, in dem man die höheren geometrischen Invarianten ${}^*\Sigma^k$ explizit berechnen kann, ist zur Zeit noch nicht sonderlich üppig. Immerhin kann man für Ein-Relator-Gruppen und für 3-Mannigfaltigkeitsgruppen beweisen, daß ${}^*\Sigma^k$ für alle $k \geq 1$ mit ${}^*\Sigma^1$ übereinstimmt. Daraus folgt zum Beispiel, daß endlich erzeugte Untergruppen von Ein-Relator-Gruppen, die die Kommutatoruntergruppe umfassen, stets endlich präsentierbar sind. Auch für metabelsche Gruppen kann man einiges über die höheren geometrischen Invarianten zeigen: hier erhält man starke Indizien dafür, daß die Bieri-Strebel-Invariante Σ [6] eine so starke Invariante der Gruppe ist, daß die rationalen Punkte von ${}^*\Sigma^k$ für $k > 1$ durch sie bestimmt sind.

Ich möchte Stephan Holz danken für die Gespräche zu Beginn, Michael Heusener für viele Diskussionen in der Endphase der Arbeit an diesem Thema. Besonders danke ich Prof. Dr. Robert Bieri, daß er mich in die 'Σ-Theorie' eingeführt hat und mir beim Finden und Aufschreiben der Resultate dieser Arbeit mit wertvollen kritischen Anregungen geholfen hat.

Notation

Die Verweise werden durch die Angabe von Kapitel, Abschnitt und Ziffer gegeben. Zum Beispiel verweist (III.2.1) auf Ziffer (2.1), die in Abschnitt 2 von Kapitel III zu finden ist. Fehlt die Kapitelangabe, dann handelt es sich um die entsprechende Ziffer des aktuellen Kapitels. Auf das Literaturverzeichnis verweisen wir mit eckigen Klammern, z.B. [3].

Wir verwenden die übliche Notation für Gruppen, Elemente von Gruppen, Untergruppen, Normalteiler etc. Sofern nicht anders erwähnt, ist mit dem Kommutator von x und y $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$ gemeint.
Ist eine Gruppe G durch eine Präsentation $\langle X;R \rangle$ gegeben und ist $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ eine Teilmenge der Erzeugendenmenge X, dann bezeichnet w(b) ein Wort in den Erzeugenden $b_1, b_2, \ldots, b_n$.
Ist G eine Gruppe und C ein G-Komplex, dann schreiben wir $C/_G$ für den Bahnenraum, auch wenn G von links auf C operiert.

Für einen CW-Komplex K bezeichnen wir mit K^n das n-Gerüst von K. Mit σ^n wird eine abgeschlossene n-dimensionale Zelle von K notiert. Es ist dann $\partial\sigma^n = \sigma^n \cap K^{n-1}$ der Rand und $\mathring{\sigma}^n$ das Innere der Zelle. S^n bezeichnet die Einheitssphäre des $\mathbb{R}^{n+1}$ und D^{n+1} den Einheitsball. Mit ch_σ und att_σ bezeichnen wir die charakteristische, respektive die anheftende Abbildung einer Zelle σ.

Am Ende geben wir eine Liste der in dieser Arbeit verwendeten speziellen Symbole.

Inhaltsverzeichnis

I VERERBUNG VON ENDLICHKEITSEIGENSCHAFTEN – EIN ÜBERBLICK

1 Endlichkeitseigenschaften von Gruppen

Der Eilenberg-MacLane-Komplex $K(G,1)$, i.e. ein asphärischer CW-Komplex mit Fundamentalgruppe G ist bis auf Homotopieäquivalenz ein eindeutiges topologisches Modell der Gruppe G. Das Bestreben, für die Gruppe ein möglichst "kleines" Modell zu wählen, führt zu den Endlichkeitseigenschaften F_k für die Gruppe G. Eng verwandt sind die homologischen Endlichkeitseigenschaften FP_k: Hat G einen $K(G,1)$ mit endlichem k-Gerüst, dann ist der zelluläre Kettenkomplex der universellen Überlagerung eine G-projektive Auflösung des trivialen G-Moduls $\mathbf{Z}$, die bis zur Dimension k endlich erzeugte freie $\mathbf{Z}G$-Moduln hat.

(1.1) Definition. *Sei* G *eine Gruppe und* k *eine natürliche Zahl oder* $k=\infty$.

G *heißt vom Typ* F_k*, wenn* G *einen Eilenberg-MacLane-Komplex* $K(G,1)$ *mit endlichem* k*-Gerüst besitzt.*

Ein G*-Modul* A *heißt vom Typ* FP_k *über* $\mathbf{Z}G$*, wenn* A *eine* G*-projektive Auflösung*

$$\mathbf{P}: \cdots \longrightarrow P_{k+1} \longrightarrow P_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

mit der Eigenschaft hat, daß die $\mathbb{Z}G$*-Moduln* P_i *für* $0 \le i \le k$ *endlich erzeugt sind.*
Ist der triviale G*-Modul* $\mathbb{Z}$ *vom Typ* FP_k *über* $\mathbb{Z}G$*, dann heißt* G *vom Typ* FP_k.

Diese Endlichkeitseigenschaften von Gruppen haben folgende Eigenschaften:

(1.2) Jede Gruppe ist vom Typ F_0 und vom Typ FP_0.

Denn erstens ist ein jeder $K(G,1)$ homotopieäquivalent zu einem Komplex, der genau eine 0-Zelle hat. Zweitens findet man stets eine G-projektive Auflösung $\mathbf{P}$ von $\mathbb{Z}$ mit $P_0 = \mathbb{Z}G$; die Abbildung $\mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ ist die Augmentationsabbildung $\varepsilon : \sum n_g\, g \mapsto \sum n_g$.

(1.3) Eine Gruppe G ist genau dann vom Typ F_1 (vom Typ FP_1), wenn sie endlich erzeugt ist.

Hat G einen $K(G,1)$-Komplex K mit endlichem 1-Gerüst K^1, dann ist G Quotient der endlich erzeugten freien Gruppe $\pi_1(K^1)$. Wird G von der endlichen Menge X erzeugt, dann gibt es einen $K(G,1)$, dessen 1-Gerüst eine Rosette $\bigvee_{x\in X} S^1_x$ von 1-Sphären ist. Die Äquivalenz für die Endlichkeitseigenschaft FP_1 folgt aus der Tatsache, daß der Kern der Augmentation, das Augmentationsideal IG des Gruppenrings, genau dann endlich erzeugbar ist als Linksideal, wenn die Gruppe G

endlich erzeugt ist.

(1.4) Eine Gruppe G ist genau dann vom Typ F_2, wenn G endlich präsentierbar ist.

Gibt es zu G einen K(G,1)-Komplex K mit endlichem 2-Gerüst, dann ist der von den Homotopieklassen der Bilder der anheftenden Abbildungen der 2-Zellen in $\pi_1(K^1)$ erzeugte Normalteiler der Kern des Präsentationsepimorphismus $\pi_1(K^1) \twoheadrightarrow G$. Also ist G endlich präsentiert. Umgekehrt gibt es zu jeder Präsentation $G = \langle X;R \rangle$ der Gruppe einen Standard-2-Komplex K^2, der konstruiert wird als

$$\Big(\bigvee_{x\in X} S^1_x\Big) \cup \sigma^2_{r_1} \cup \sigma^2_{r_2} \cup \cdots$$

wobei mit $\sigma^2_{r_i}$ 2-Zellen bezeichnet sind, die via einer durch die Relation $r_i \in R$ bestimmten anheftenden Abbildung an K^1 eingeklebt sind (siehe (II.4)). Dieser 2-Komplex ist genau dann endlich, wenn G eine endliche Präsentation hat. Durch das "Töten" der höheren Homotopiegruppen erhält man aus K^2 einen K(G,1) mit endlichem 2-Gerüst.

(1.5) Der zelluläre Kettenkomplex der universellen Überlagerung $C = \tilde{K}$ eines K(G,1)-Komplexes K der Gruppe G ist eine G-freie Auflösung $\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ des trivialen G-Modul $\mathbb{Z}$, und die Erzeugenden der auflösenden Moduln P_i stehen in bijektiver Korrespondenz zu den i-Zellen von K. Also gilt:

Ist eine Gruppe G vom Typ F_k, dann ist sie auch vom Typ FP_k.

(1.6) Die Umkehrung dieser Aussage ist eine offene Frage: es ist nicht bekannt, ob jede Gruppe vom Typ FP_2 endlich präsentierbar ist. Setzt man voraus, daß G endlich präsentiert ist, dann sind für alle $k \geq 2$ die Endlichkeitseigenschaften F_k und FP_k äquivalent. [16]

(1.7) Die beiden Endlichkeitsbedingungen verhalten sich anständig, wenn man zu Untergruppen von endlichem Index übergeht:
Ist $H \leq G$ eine Untergruppe von endlichem Index, dann gilt: G ist genau dann vom Typ F_k (vom Typ FP_k), wenn H vom Typ F_k (vom Typ FP_k) ist. (siehe z.B. [9], [16]).

2 Geometrische Invarianten

Die geometrische Invariante Σ wurde von R. Bieri und R. Strebel definiert, um unter den endlich erzeugten metabelschen Gruppen die endlich präsentierbaren zu charakterisieren (1980). Wir wollen die Entwicklung der Σ-Theorie seit diesem Startpunkt Revue passieren lassen:

Sei G eine endlich erzeugte Gruppe, der $\mathbb{Z}$-Rang der Kommutatorfaktorgruppe $G^{ab} = G/G'$ sei endlich und mit d bezeichnet. Die Menge $Hom(G,\mathbb{R}) = Hom(G^{ab},\mathbb{R})$ der Homomorphismen von G in die additive Gruppe der reellen Zahlen bildet einen d-dimensionalen reellen Vektorraum, den man via eines Koordinatenisomorphismus mit $\mathbb{R}^d$ identifizieren kann. Für nicht-triviale Homomorphismen $\chi: G \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert man Äquivalenzklassen $[\chi] = \{ \lambda\chi \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \}$. $[\chi]$ ist der Strahl vom Ursprung des $\mathbb{R}^d = \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$ durch den Punkt χ.

(2.1) Definition. *Die Charaktersphäre* $S(G)$ *einer endlich erzeugten Gruppe* G *ist*

$$S(G) = \{ [\chi] \mid \chi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R}) \setminus \{0\} \}.$$

$S(G)$ hat die von der Topologie des Vektorraums $\mathbb{R}^d \cong \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$ induzierte Topologie: $S(G)$ ist homöomorph zur Einheitssphäre S^{d-1} in $\mathbb{R}^d$. Explizit wird die Charaktersphäre $S(G)$ mit

$$\left\{ \frac{\chi}{\|\chi\|} \mid \chi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} \text{ identifiziert.}$$

$\|\cdot\|$ bezeichnet dabei die Norm von $\mathbb{R}^d$.

Wir werden sowohl für die Homomorphismen $\chi: G \longrightarrow \mathbb{R}$ als auch für die Klassen $[\chi]$ die Bezeichnung *Charakter* verwenden.

Von besonderem Interesse sind solche Charaktere, deren Bild unendlich zyklisch ist. Sie heißen *vom Rang* 1 oder auch *diskrete Homomorphismen*. Die Teilmenge $S\mathbb{Q}(G)$ der rationalen Punkte von $S(G)$ besteht aus den Klassen diskreter Homomorphismen und ist dicht in $S(G)$. Für eine Teilmenge Σ von $S(G)$ schreiben wir $\mathrm{dis}\,\Sigma$ für $\{ [\chi] \in \Sigma \mid \chi \text{ ist diskret} \}$.

Ist N eine Untergruppe von G, die G' enthält, so bezeichnen wir mit $S(G,N)$ die Untersphäre von $S(G)$ bestehend aus den Charakteren, die auf N verschwinden: $S(G,N) = \{ [\chi] \in S(G) \mid \chi(N) = 0 \}$.

Ein nicht-trivialer Homomorphismus $\chi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ gestattet es, die Ordnung der reellen Zahlen im Urbild von χ zu interpretieren: Mit G_χ bezeichnet man das Untermonoid $G_\chi = \{ g \in G \mid \chi(g) \geq 0 \}$ von G. G_χ hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten $\chi \in [\chi]$ ab.

Metabelsche Gruppen: die Invariante Σ

Wir wollen die Definition der Invariante Σ einer endlich erzeugten metabelschen Gruppe sowie einige Resultate der Arbeiten von Bieri, Strebel, Groves und Åberg referieren, auf die später Bezug genommen wird. Einen lesenswerten Überblick gibt die Arbeit von Ralph Strebel "Finitely presented soluble groups" in: Group Theory – essays for Philip Hall [17].

Auf den Zusammenhang der Invariante $\Sigma_A(Q)$ [Q eine endlich erzeugte Abelsche Gruppe und A ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}Q$-Modul] mit Bewertungen des kommutativen Rings A im Fall, daß A ein zyklischer $\mathbb{Z}Q$-Modul ist, wollen wir hier nicht eingehen. Es ist eine höchst interessante Frage, in welchem Zusammenhang in dieser Situation die höheren Invarianten $^*\Sigma^k$ (I.3) zu Ringbewertungen von A stehen (siehe (VII.3)).

Sei Q eine endlich erzeugte Abelsche Gruppe und A ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}Q$-Modul. Für $\chi \in \mathrm{Hom}(Q,\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ bezeichne $\mathbb{Z}Q_\chi$ den

Monoidring von Q_χ. A ist dann im allgemeinen nicht endlich erzeugt als $\mathbb{Z}Q_\chi$-Modul. Die endliche Erzeugbarkeit von A über $\mathbb{Z}Q_\chi$ ist eine bezüglich $[\chi]$ lokale Endlichkeitseigenschaft von A.

(2.2) Definition. Q *sei eine endlich erzeugte Abelsche Gruppe und* A *ein endlich erzeugter* $\mathbb{Z}Q$*-Modul. Dann sei*

$$\Sigma_A = \{ [\chi] \in S(Q) \mid A \textit{ ist endlich erzeugt als } \mathbb{Z}Q_\chi\textit{-Modul} \}.$$

Σ_A ist eine offene Teilmenge der Charaktersphäre S(G) [6].

Ist G eine endlich erzeugte metabelsche Gruppe, dann induziert die Konjugation von G auf der Kommutatorgruppe G' eine Operation von G^{ab}. In dieser Situation schreibt man Σ für $\Sigma_{G'}(G^{ab})$. Σ enthält die Information, ob G endlich präsentierbar ist:

(2.3) Satz. (Bieri, Strebel [6]) *Sei* G *eine endlich erzeugte Gruppe. Es gilt:*
G *ist genau dann endlich präsentierbar, wenn* Σ^c, *das Komplement von* Σ, *keine antipodalen Punkte enthält.*

Åberg hat dieses Resultat für die Endlichkeitseigenschaft FP_k verallgemeinert unter der Voraussetzung, daß G endlichen Prüfer-Rang hat. Eine Gruppe G hat endlichen Prüfer-Rang, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß jede endlich erzeugte Untergruppe von $\leq$ n Elementen erzeugt wird.

(2.4) Satz. (Åberg [1]) G *sei eine endlich erzeugte metabelsche Gruppe von endlichem Prüfer-Rang. Dann gilt:*
G *ist genau dann vom Typ* FP_k, *wenn jede* k-*elementige Teilmenge von* Σ^c *in einer offenen Hemisphäre von* S(G) *enthalten ist.*

Da für metabelsche Gruppe die Endlichkeitseigenschaft FP_2 äquivalent ist zur endlichen Präsentierbarkeit der Gruppe [6], gibt der Satz von Åberg das entsprechende Resultat für den Endlichkeitstyp F_k.

Unser Interesse richtet sich besonders auf die Charakterisierung der Vererbung von Endlichkeitseigenschaften auf Normalteiler mit Abelscher Faktorgruppe:

(2.5) Satz. (Bieri, Strebel [6]) *Sei* G *eine endlich erzeugte metabelsche Gruppe und* N *ein Normalteiler mit Abelscher Faktorgruppe. Es gilt:*

N *ist endlich erzeugt* $\Longleftrightarrow$ $\Sigma \supseteq S(G,N)$

Für Σ sind konsequenzenreiche Aussagen über die Geometrie der Invariante bewiesen worden. Eine endliche Vereinigung von endlichen Schnitten offener Hemisphären einer Sphäre S heißt eine *polyedrische Teilmenge*. Von einem *rationalen Polyeder* spricht man, wenn jede der offenen Hemisphären durch eine rationale Ungleichung definiert ist.

(2.6) Satz. (Bieri, Groves [2]) *Sei* G *eine endlich erzeugte metabelsche Gruppe. Dann ist* Σ *eine rationale polyedrische Teilmenge der Charaktersphäre* S(G).

Das Komplement Σ^c ist somit der Abschluß der rationalen Punkte dis Σ^c. Man kann sich bei der Bestimmung von Σ folglich auf die diskreten Homomorphismen $G \longrightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ konzentrieren und die Charakterisierung der rationalen Punkte von Σ durch die Präsentierbarkeit von G als aufsteigende HNN-Erweiterung über einer endlich erzeugten Basisgruppe benutzen (siehe (VI.1)).

Die Invariante Σ_{BNS} endlich erzeugter Gruppen

Bieri, Neumann, Strebel haben die Invariante Σ verallgemeinert für beliebige endlich erzeugte Gruppen:

(2.7) Definition. ([3]) *Sei* G *eine endlich erzeugte Gruppe und* A *eine endlich erzeugte* G*-Operator-Gruppe, wobei* G *von rechts auf* A *wirkt.* G' *operiere via innerer Automorphismen auf* A. *Dann sei*

$$\Sigma_A = \{\, [\chi] \in S(G) \mid A \textit{ ist endlich erzeugt über einem endlich erzeugten Untermonoid von } G_\chi \}.$$

Ist A = G' mit der Operation von G durch Konjugation, dann schreiben wir Σ_{BNS} für $\Sigma_{G'}$. Wenn die Kommutatorgruppe G' Abelsch ist, stimmt Σ_{BNS} mit Σ überein.

Der "Preis" für die Verallgemeinerung besteht darin, daß Σ_{BNS} im allgemeinen nicht mehr eine Endlichkeitseigenschaft der Gruppe G selbst zu charakterisieren vermag, sondern "nur" noch Auskunft über der Vererbung der endlichen Erzeugbarkeit von G auf Normalteiler mit Abelscher Faktorgruppe gibt. "Positiver" ausgedrückt: Bieri, Neumann, Strebel zeigen unter anderem, daß es möglich ist, von den lokalen Endlichkeitseigenschaften der Gruppe bezüglich gewisser Charaktere aufs Globale zu schließen:

(2.8) Satz. (Bieri, Neumann, Strebel [3]) *Sei* G *eine endlich erzeugte Gruppe und* N *ein Normalteiler mit Abelscher Faktorgruppe. Dann gilt:*

$$N \text{ ist endlich erzeugt} \iff \Sigma_{BNS} \supseteq S(G,N).$$

Weitere Ergebnisse aus [3] werden wir in Kapitel III (Charakterisierung von Σ_{BNS} durch Gleichungen), IV (rationale Punkte der Bieri-Neumann-Strebel-Invariante und HNN-Erweiterungen) sowie bei den Beispielen (Kapitel VII) verwenden.

Im Unterschied zu Σ ist Σ_{BNS} im allgemeinen keine rationale polyedrische Teilmenge von S(G). Dafür geben Bieri, Neumann, Strebel das Beispiel von PL-Homöomorphismengruppen des Einheitsintervalls, deren Σ^c_{BNS} aus zwei irrationalen Punkten besteht.

Verallgemeinerung für die höheren Endlichkeitseigenschaften FP_k

Die Aussage von Satz (2.8) legt die Frage nahe, ob man ein analoges Resultat für die Endlichkeitseigenschaften FP_k erhalten kann. Robert Bieri und der Autor definieren in [4] *höhere geometrische Invarianten*

$$S^{d-1} \supseteq \Sigma^0(G;A) \supseteq \Sigma^1(G;A) \supseteq \cdot\cdot\cdot \supseteq \Sigma^k(G;A) \supseteq \cdot\cdot\cdot$$

für eine endlich erzeugte Gruppe G und einen G-Modul A [d bezeichnet den $\mathbf{Z}$-Rang von G^{ab}]:

(2.9) Definition. *Sei* G *eine endlich erzeugte Gruppe und* A *ein (linker)* G*-Modul. Dann sei*

$$\Sigma^k(G;A) = \{ [\chi] \in S(G) \mid A \textit{ ist vom Typ } FP_k \textit{ über dem Monoidring } \mathbf{Z}G_\chi \}$$

Im Fall $A = \mathbf{Z}$ schreiben wir Σ^k für $\Sigma^k(G;\mathbf{Z})$. Ist $\Sigma^k(G;A)$ nicht leer, dann ist A vom Typ FP_k über $\mathbf{Z}G$. Unsere Resultate sind Verallgemeinerungen der Eigenschaften von Σ_{BNS}. Es gilt $\Sigma_{BNS} = -\Sigma^1$. [– bezeichnet die antipodale Abbildung von S(G). Dieses Vorzeichen tritt auf, weil wir linke G-Moduln betrachten, während in [3] rechte G-Operation auf G' zugrundegelegt wird.]

(2.10) Satz. ([4])

$\Sigma^k(G;A)$ *ist eine offene Teilmenge von* $S(G)$.

(2.11) Satz. ([4]) G *sei eine endlich erzeugte Gruppe,* N *ein Normalteiler in* G *mit Abelschem Quotienten und* A *ein linker* G*-Modul. Es gilt:*

A *ist vom Typ* FP_k *über* $\mathbb{Z}N \Longleftrightarrow \Sigma^k(G;A) \supseteq S(G,N)$.

Das entscheidende Hilfsmittel zum Beweis dieser Aussagen sind Bewertungen v auf einer G-freien Auflösung von A, die Charaktere χ fortsetzen. Weil wir in (IV.3) und (V.2) wesentlichen Bezug auf Σ^k und Satz (2.11) nehmen, wollen wir hier die Definition und Konstruktion solcher Bewertungen wiederholen:

(2.12) Definition. *Sei* A *ein linker* G*-Modul. Eine Abbildung* $v\colon A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *heißt eine Bewertung auf* A*, die* $\chi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$ $(\chi \neq 0)$ *fortsetzt, wenn gilt:*

(1) $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ *für alle* $a, b \in A$

(2) $v(ga) = \chi(g) + v(a)$ *für alle* $g \in G$, $a \in A$

(3) $v(-a) = v(a)$ *für alle* $a \in A$

(4) $v(0) = \infty$

Ist P ein freier G-Modul über der Basis X, dann kann man eine gegebene Abbildung $v\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ zu einer Bewertung $v_X\colon P \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ folgendermaßen fortsetzen:

$v_X(0) = \infty$

$v_X(gx) = \chi(g) + v_X(x)$ für alle $g \in G$ und alle $x \in X$

$v_X(f) = \min \{ v_X(y) \mid n_y \neq 0 \}$ in der eindeutigen Darstellung von f als $f = \sum n_y y$ in der $\mathbf{Z}$-Basis GX von P.

Es gilt dann

(5) $v_X(f) = \infty \Longleftrightarrow f = 0.$

(2.13) Man kann einen nicht-trivialen Homomorphismus $\chi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht nur zu einer Bewertung v auf einem freien G-Modul fortsetzen, sondern auch auf (zulässige) freie G-Auflösungen eines G-Moduls A.

Eine Auflösung $\mathbf{P} \twoheadrightarrow A$ heißt *zulässig* , wenn sie folgender Bedingung genügt: Für alle $i \geq 0$ hat der freie G-Modul P_i eine fest gewählte Basis X_i, so daß $\delta_i x \neq 0$ gilt für alle $x \in X_i$. [Als δ_0 ist hier die Augmentation $\varepsilon\colon P_0 \twoheadrightarrow A$ zu nehmen.]

Sei $c \in \mathbf{P}$. Mit dem *Träger* $\operatorname{supp}_X c$ bezüglich unserer fest gewählten Basen X_i bezeichnen wir die induktiv wie folgt definierte endliche Teilmenge von G:

Ist $c = \sum n_y y$ die eindeutige Darstellung von c in der $\mathbf{Z}$-Basis $Y = GX$ mit $n_y \in \mathbf{Z}$ und $y \in Y$, dann sei

$$\operatorname{supp}_X c = \bigcup_{n_y \neq 0} \operatorname{supp}_X y.$$

Ist $c = y \in GX_i$ mit $i > 0$, dann sei

$$\operatorname{supp}_X y = \operatorname{supp}_X(\delta y)$$

Ist schließlich $c = gx \in GX_0$, dann definieren wir

$$\operatorname{supp}_X(gx) = \{g\}.$$

Eine Bewertung $v\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, die χ fortsetzt, erhält man, indem man

$$v(c) = \min \chi(\operatorname{supp}_X c) \text{ für alle } c \in \mathbf{P},\ c \neq 0 \text{ setzt.}$$

Außer den Eigenschaften (1) – (5) gilt für eine so konstruierte Bewertung v dann

(6) $v(\delta c) \geq v(c)$ für alle $c \in \mathbf{P}$.

Ist $\mathbf{P} \twoheadrightarrow A$ eine zulässige G-freie Auflösung von A und $v\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine χ fortsetzende Bewertung auf $\mathbf{P}$, dann definieren wir den *Bewertungsunterkomplex* $\mathbf{P}_v$ durch $\mathbf{P}_v = \{ c \in \mathbf{P} \mid v(c) \geq 0 \}$. Ferner bezeichne für eine reelle Zahl r $\mathbf{P}_{v,r}$ den Unterkomplex $\mathbf{P}_{v,r} = \{ c \in \mathbf{P} \mid v(c) \geq -r \}$.

(2.14) Definition. *Der Komplex $\mathbf{P}_v$ heißt im wesentlichen k-exakt für ein $k \geq 0$, wenn es ein $r > 0$ gibt, so daß die durch die Inklusion induzierten Homomorphismen $\tilde{H}_i(\mathbf{P}_v) \longrightarrow \tilde{H}_i(\mathbf{P}_{v,r})$ der reduzierten Homologie für alle $i \leq k$ trivial sind.*

(2.15) Satz. ([4], Theorem 3.2) *Sei $\mathbf{P} \twoheadrightarrow A$ eine zulässige G-freie Auflösung von A mit endlich erzeugten G-Moduln bis in die Dimension k. Es gilt dann:*

$[\chi] \in \Sigma^k(G;A)$ *genau dann, wenn der Bewertungsunterkomplex* $\mathbf{P}_v \twoheadrightarrow A$ *im wesentlichen* (k-1)*-exakt ist.*

[v bezeichnet selbstverständlich eine Bewertung auf **P**, die χ fortsetzt.]

Als zweites der Kriterien für $\Sigma^k(G;A)$ sei noch das folgende zitiert, von dem wir in (IV.2) eine topologische Version geben.

(2.16) ([4], Theorem 4.1) *Sei* $\mathbf{P} \twoheadrightarrow A$ *eine zulässige* G*-freie Auflösung von* A *mit endlichem* k*-Gerüst. Folgende Aussagen sind dann äquivalent:*

(i) $[\chi] \in \Sigma^k(G;A)$

(ii) *Es existiert ein Kettenendomorphismus* $\varphi\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P}$, *der die Identität auf* A *liftet und für den gilt:* $v(\varphi(x)) > v(x)$ *für jedes Basiselement* $x \in \bigcup_{i=0}^{k} X_i$.

Der Definition einer Bewertung auf einer freien Auflösung von A sowie dem Beweis von Satz (2.11), dem Hauptresultat von [4], liegt eine geometrische Idee zugrunde, die in der algebraischen Version etwas "versteckt" ist. Sie kommt zum Vorschein, wenn man das analoge Resultat für die Endlichkeitseigenschaften F_k erzielen möchte.

3 Resultate

Eine Gruppe G vom Typ F_k hat einen Eilenberg-MacLane-Komplex $K = K(G,1)$ mit endlichem k-Gerüst. Ist $\chi: G \longrightarrow \mathbb{R}$ ein nicht-trivialer Homomorphismus, dann kann man χ zu einer stetigen Abbildung $v_\chi: C \longrightarrow \mathbb{R}$ der universellen Überlagerung C von K fortsetzen. Wir sprechen von einer Bewertung v_χ auf C, die zu χ assoziiert ist, wenn die Abbildung v_χ mit der G-Operation auf C verträglich ist und gewissen Normalisierungsbedingungen genügt (II.1). Bezüglich einer Bewertung v_χ definieren wir in (II.3.1) einen Teilkomplex C_v von C, der als voller Teilkomplex von den 0-Zellen σ von C aufgespannt wird, für die $v_\chi(\sigma) \geq 0$ gilt.

In dieser Situation fragen wir nach lokalen Endlichkeitseigenschaften: C ist zusammenziehbar, insbesondere also (k-1)-zusammenhängend, während dies für C_v im allgemeinen nicht der Fall ist. Die Invariante ${}^*\Sigma^k$ umfasst die Charaktere $[\chi] \in S(G)$, für die es einen K(G,1)-Komplex gibt, so daß sich der (k-1)-Zusammenhang von der universellen Überlagerung C auf den Teilkomplex C_v vererbt (II.3) .

Wir erhalten so eine Kette *höherer geometrischer Invarianten* der Gruppe G:

$$S(G) \supseteq {}^*\Sigma^1 \supseteq {}^*\Sigma^2 \supseteq \cdot \cdot \cdot \supseteq {}^*\Sigma^k \supseteq \cdot \cdot \cdot$$

[Da sich nicht vererben läßt, was nicht vorhanden ist, ist ${}^*\Sigma^k = \emptyset$, falls G nicht vom Typ F_k ist.]

Wir zeigen folgende Sätze:

Satz A (IV.2.7)

$^*\Sigma^k$ *ist eine offene Teilmenge der Charaktersphäre* $S(G)$.

Den Zusammenhang der Invarianten $^*\Sigma^k$ mit ihren homologischen Geschwistern beschreibt

Satz B (IV.3.5) *Sei* G *eine Gruppe vom Typ* F_k *für* $k \geq 1$. *Dann gilt:*

(1) $^*\Sigma^1 = \Sigma^1$

(2) $^*\Sigma^n = \Sigma^n \cap {}^*\Sigma^2$ *für* $n \geq 2$

Satz C (V.2) G *sei eine Gruppe vom Typ* F_k *und* N *ein Normalteiler mit Abelscher Faktorgruppe.. Es gilt dann:*

N *ist genau dann vom Typ* F_k, *wenn* $^*\Sigma^k \supseteq S(G,N)$ *gilt.*
Insbesondere ist G' *vom Typ* F_k *genau dann, wenn* $^*\Sigma^k = S(G)$ *ist.*

Offensichtlich können wir Satz C mit Satz B und (1.6) auf das analoge Ergebnis (2.11) für die Endlichkeitseigenschaft FP_k reduzieren, vorausgesetzt, Satz C ist für $k = 2$ richtig. Wir werden uns deshalb in (V.2) auf die Charakterisierung der endlichen Präsentierbarkeit von N konzentrieren. Das hat überdies den Vorteil, daß wir den Cayley-Komplex $C(X;R)$ der Gruppe G in einer endlichen Präsentation $\langle X;R \rangle$ betrachten können, und somit eine kombinatorische Beschreibung von $^*\Sigma^2$ zur Verfügung haben (IV.4). Diese Beschreibung von $^*\Sigma^2$ durch

Diagramme über dem Cayley-Komplex einer Präsentation von G verallgemeinert die Beschreibung von Σ_{BNS} durch Gleichungen (siehe (III.1)).

Satz C hat die folgende Anwendung: Die Menge $\mathfrak{N}$ der Untergruppen N von G mit $G' \leq N \leq G$ und $\mathbb{Z}$-Rang von $G/_N = j$ hat eine natürliche Einbettung in den Grassmann-Raum $\mathfrak{G}_{d,j}$ aller j-dimensionaler Unterräume des $\mathbb{R}^d = \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$. $\mathfrak{N}$ hat die von der Grassmann-Topologie induzierte Topologie.
Ist $N \in \mathfrak{N}$ vom Typ F_k, dann gilt $S(G,N) \subseteq {}^*\Sigma^k$ (Satz C). Da ${}^*\Sigma^k$ nach Satz A offen ist und S(G,N) kompakt ist, gibt es eine offene Umgebung U von N, so daß für alle N_1 in U $S(G,N_1)$ in ${}^*\Sigma^k$ enthalten ist. Es gilt also

Korollar AC

Die Menge aller $N \in \mathfrak{N}$ *vom Typ* F_k *ist eine offene Teilmenge von* $\mathfrak{N}$. □

Korollar AC verallgemeinert das Resultat von Fried, Lee [12], die gezeigt haben, daß die Menge der endlich präsentierbaren Normalteiler $N \in \mathfrak{N}$ offen in $\mathfrak{N}$ ist.

Für diskrete Homomorphismen $\chi\colon G \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ erhalten wir eine Charakterisierung der Präsentierbarkeit von G als absteigende HNN-Erweiterung über einer *endlich präsentierten* Basisgruppe in Ker χ. Wir verwenden den Satz von Bieri, Neumann und Strebel über absteigende HNN-Erweiterungen und rationale Charaktere in ${}^*\Sigma^1$:

Sei $t \in G$ mit $\chi(t) = 1$ und $N = \mathrm{Ker}\ \chi$. Dann kann man G genau dann als absteigende HNN-Erweiterung $G = \langle B, t\ ;\ B^t = B_2 \rangle$ mit endlich erzeugter Basisgruppe $B \subseteq N$ präsentieren, wenn $[\chi] \in {}^*\Sigma^1$ gilt (siehe (VI.1)). In dieser Situation gilt

Satz D (VI.2.3) *Sei* G *eine endlich präsentierte Gruppe, die als absteigende HNN-Erweiterung* $G = \langle B, t\ ;\ B^t = B_2 \rangle$ *mit endlich erzeugter Basisgruppe präsentiert ist.* χ *sei der durch* $\chi(t) = 1$ *und* $B \subseteq \mathrm{Ker}\ \chi$ *gegebene Epimorphismus* $G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$. C *bezeichne den Cayley-Komplex von* G *in dieser Präsentation. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $[\chi] \in {}^*\Sigma^2$ *und die Zusammenhangskomponente* D_{-v} *der* 1 *in* C_{-v} *ist einfach zusammenhängend.*

(ii) G *ist eine absteigende HNN-Erweiterung* $G = \langle B, t\ ;\ B^t \leq B \rangle$ *mit endlich präsentierter Basisgruppe* $B \subseteq N$.

[C_{-v} bezeichnet den vollen Teilkomplex von C aufgespannt von den 0-Zellen σ mit $v_\chi(\sigma) \leq 0$.]

Schließlich behandeln wir im letzten Kapitel als Beispiele die Ein-Relator-Gruppen, 3-Mannigfaltigkeitsgruppen und enden mit einer Diskussion der höheren geometrischen Invarianten für metabelsche Gruppen.

II BEWERTUNGEN AUF EINEM FREIEN G-KOMPLEX

1 Freie G-Komplexe und Bewertungen

Ein G-Komplex ist ein CW-Komplex C mit einer Operation der Gruppe G durch Homöomorphismen, die die Zellen von C permutieren. Wenn der Stabilisator jeder Zelle von C unter der Operation von G trivial ist, dann heißt die Aktion von G auf C frei und C ein *freier G-Komplex*. Das kanonische Beispiel eines freien G-Komplexes ist die universelle Überlagerung eines Komplexes K vom Typ K(G,1) mit G als Gruppe der Decktransformationen. Ist G eine Gruppe vom Typ F_k ($k \geq 1$), dann gibt es einen freien G-Komplex C, dessen k-Gerüst C^k modulo der Aktion von G endlich viele Zellen hat - eben die universelle Überlagerung eines Eilenberg-MacLane-Komplexes K mit endlichem k-Gerüst. Wir werden in der Regel solche G-Komplexe betrachten.

Zu einem nicht-trivialen Homomorphismus $\chi: G \longrightarrow \mathbb{R}$ der Gruppe G wollen wir auf einem freien G-Komplex C eine stetige Abbildung $v_\chi: C \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren, die es erlaubt, Endlichkeitseigenschaften der Einbettung des Monoids G_χ in G via topologischer Eigenschaften des G-Komplexes C bezüglich der Bewertung v_χ zu interpretieren.

(1.1) Definition. *Sei* $\chi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ *und* C *ein freier* G-*Komplex. Eine stetige Abbildung* $v_\chi : C \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt eine zu* χ *assoziierte Bewertung auf* C, *wenn gilt:*

(V1) $\quad v_\chi(gc) = \chi(g) + v_\chi(c) \quad$ *für alle* $c \in C,\ g \in G$

(V2) $\quad v_\chi(C^0) \subseteq \chi(G)$

(V3) $\quad$ *Ist* σ *eine Zelle von* C *mit Rand* $\partial\sigma$, *dann ist*

$$\min v_\chi(\partial\sigma) \le v_\chi(c) \le \max v_\chi(\partial\sigma) \quad \textit{für alle } c \in \sigma.$$

Wir schreiben im folgenden oft einfach v für v_χ.

(1.2) Bemerkungen.

1. Sind zwei Bewertungen v_1 und v_2 gegeben, die zum selben Charakter $\chi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$ gehören, dann gilt wegen (V1) für alle $c \in C$:

$$v_1(gc) - v_2(gc) = v_1(c) - v_2(c)$$

Die Differenz $v_1(c) - v_2(c)$ hängt also nur von der G-Bahn von c ab, nicht von c selbst.

Ist C/G endlich und zusammenhängend, dann hat die durch $c \mapsto v_1(c) - v_2(c)$ definierte stetige Abbildung $C/G \longrightarrow \mathbb{R}$ kompaktes Bild in $\mathbb{R}$. Es gibt also eine reelle Zahl $r > 0$, so daß für alle $c \in C$ gilt:

$$v_1(c) - r \le v_2(c) \le v_1(c) + r$$

Diese Zahl r hängt von v_1 und v_2 ab.

2. Betrachtet man alle diejenigen Bewertungen v', die auf C^0 mit einer

gegebenen Bewertung v übereinstimmen und ist C/G endlich und zusammenhängend, dann gibt es wegen (V3) eine reelle Zahl $s > 0$, so daß für *alle* v' gilt:

$$|v(c) - v'(c)| \leq s \qquad \text{für alle } c \in C.$$

3. Notation: Für eine Zelle σ von C bezeichne $v(\sigma)$ das Minimum von $\{v(c) \mid c \in \sigma\}$. Es ist also $v(\sigma) = \min \{v(c) \mid c \in \partial\sigma\}$. Aus (V1) folgt dann $v(g\sigma) = \chi(g) + v(\sigma)$ für alle $g \in G$ und alle Zellen $\sigma \in C$.

2 Konstruktion einer Bewertung

Sei G eine Gruppe und K ein Eilenberg-MacLane-Komplex K(G,1). Wir setzen für die gesamte Arbeit voraus:

(2.1) Voraussetzungen.

(C1) *Das 0-Gerüst* K^0 *des Komplexes* $K = K(G,1)$ *besteht aus einem Punkt* σ^0.

(C2) K *hat eine simpliziale Unterteilung und die anheftenden Abbildungen der Zellen von* K *sind stückweise linear* .

Die erste Voraussetzung ist durch eine Homotopieäquivalenz zu erreichen, die einen maximalen Baum im 1-Gerüst von K auf den Punkt

σ^0 zusammenzieht. Durch simpliziale Approximation kann man auch (C2) stets sicherstellen. Man spricht dann auch von einem CW-Polyeder. Speziell hat eine Gruppe G vom Typ F_k ein K(G,1)-CW-Polyeder mit endlich vielen Zellen in den Dimensionen $\leq k$.

(2.2) Konstruktion. Gegeben sei ein Charakter $\chi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Wir konstruieren eine Bewertung $v_\chi = v\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$ auf der universellen Überlagerung C eines Eilenberg-MacLane Komplexes $K = K(G,1)$:

C hat nach Voraussetzung (C1) nur eine G-Bahn von 0-Zellen: $C^0 = \{ g\tilde{\sigma}^0 \mid g \in G \}$, wobei $\tilde{\sigma}^0$ einen Lift der 0-Zelle σ^0 von K bezeichnet. Setze $v(\tilde{\sigma}^0) = 0$, dann ist v mit (V1) auf C^0 definiert. Es gilt $v(g\tilde{\sigma}^0) = \chi(g)$ für alle $g \in G$, also ist (V2) ebenfalls erfüllt.

Für $i \geq 0$ sei v auf dem i-Gerüst von C bereits definiert. Sei σ^{i+1} eine (i+1)-Zelle von K mit Lift $\tilde{\sigma}^{i+1}$ in C. Da K eine simpliziale Verfeinerung K_{simp} besitzt, kann man $\tilde{\sigma}^{i+1}$ als die Realisierung eines simplizialen Teilkomplexes D_{simp} von C_{simp} auffassen. Es gibt also für eine geeignete simpliziale Unterteilung des Paares (D^{i+1}, S^i) eine simpliziale Abbildung $f\colon (D^{i+1}, S^i) \longrightarrow (\tilde{\sigma}^{i+1}, \partial\tilde{\sigma}^{i+1})$ für die respektiven simplizialen Unterteilungen. Da die Bewertung v auf C^i gegeben ist, gibt es eine stetige Abbildung $\varphi_v\colon S^i \longrightarrow \mathbb{R}$, die durch $\varphi_v(s) = v(f(s))$ für $s \in S^i$ definiert ist. Die Abbildung φ_v kann man stetig und stückweise linear auf D^{i+1} fortsetzen, und zwar so, daß für die Fortsetzung $\hat{\varphi}_v$ gilt:

$$\min\{\varphi_v(s) \mid s \in S^i\} \leq \hat{\varphi}_v(d) \leq \max\{\varphi_v(s) \mid s \in S^i\}$$

für alle $d \in \mathring{D}^{i+1}$. Da die Abbildung f charakteristische Abbildung der Zelle $\tilde{\sigma}^{i+1}$ ist, bildet sie $\mathring{D}^{i+1}$ homöomorph auf das Innere der Zelle $\tilde{\sigma}^{i+1}$ ab und es existiert somit eine Fortsetzung der Bewertung v auf $C^i \cup \tilde{\sigma}^{i+1}$. Mit der G-Operation auf C erweitern wir diese Konstruktion gemäß (V1) für jede (i+1)-Zelle von K zu einer stetigen Abbildung $v\colon C^{i+1} \longrightarrow \mathbb{R}$. Es ist durch die Konstruktion sichergestellt, daß v die Eigenschaften (V1) - (V3) hat.

Wegen dieser Konstruktion gilt ferner:

(2.3) (1) *v ist linear auf den 1-Zellen von C.*

(2) *v ist stückweise linear auf den i-Zellen σ^i von C. Gilt* $v(\sigma^i) < \max\{v(c) \mid c \in \sigma^i\}$, *dann ist für jeden inneren Punkt* c *der Zelle* $v(\sigma^i) < v(c) < \max v(\sigma^i)$.

In Abschnitt IV.3 spielen Zellen σ von C, sage der Dimension $i+1 \geq 1$, deren Klebeabbildung $att_{\sigma^{i+1}}: S^i \longrightarrow C$ von spezieller Form ist, eine wesentliche Rolle.
Sei $S^i \equiv D^i_0 \cup (S^{i-1} \times [0,1]) \cup D^i_1$ mit den Identifikationen $\partial D^i_j \equiv S^{i-1} \times \{j\}$ für $j = 0, 1$ und $D^{i+1} \equiv D^i_0 \times [0,1]$. Bezüglich einer Bewertung $v\colon C^i \longrightarrow \mathbb{R}$ gelte ferner:

(1) $\max v(att_{\sigma^{i+1}}(D^i_0)) < \min v(att_{\sigma^{i+1}}(D^i_1))$ und

(2) $v(att_{\sigma^{i+1}}(s,t)) > v(att_{i+1}(s,0))$ für $s \in S^{i-1}$, $t > 0$.

Daraus folgt, daß $att_{\sigma^{i+1}}(D^i_0) \cap att_{\sigma^{i+1}}(D^i_1) = \emptyset$ gilt. Wir können dann eine gegebene Bewertung v_χ auf C^i derart auf $C^i \cup \sigma^{i+1}$ fortsetzen, daß gilt:

(2.4) für alle $t > 0$ und alle $d \in D^i_0$ ist

$$v(ch_{\sigma^{i+1}}(d,t)) > v(ch_{\sigma^{i+1}}(d,0)),$$

wobei $ch_{\sigma^{i+1}} : D^i_0 \times [0,1] \longrightarrow C^{i+1}$ die charakteristische Abbildung von σ^{i+1} bezeichnet.

3 Definition von ${}^*\Sigma^k$

Ist C ein CW-Komplex, dann versteht man unter einem *vollen* Teilkomplex $C' \subseteq C$ einen Teilkomplex mit folgender Eigenschaft: Ist σ eine Zelle von C und gilt $\partial\sigma \subseteq C'$, dann ist auch $\sigma \subseteq C'$. Ein voller Teilkomplex von C ist durch sein 0-Gerüst vollständig bestimmt. Für eine Menge M von 0-Zellen von C spricht man auch vom vollen Teilkomplex von C, der von M aufgespannt wird.

Sei C ein freier G-Komplex, (der den Voraussetzungen (2.1) genügt) und $C^0 = \{ g\tilde{\sigma}^0 \mid g \in G \}$ sein 0-Gerüst. v bezeichne eine zu einem nicht-trivialen Charakter $\chi: G \longrightarrow \mathbb{R}$ assoziierte Bewertung auf C.

(3.1) Definition. *Für ein* $r \in \mathbb{R}$ *sei* $C_{v,r}$ *der volle Teilkomplex von* C, *der durch die Teilmenge* $\{ g\tilde{\sigma}^0 \mid v(g\tilde{\sigma}^0) \geq -r \}$ *von* C^0 *aufgespannt wird.*

Insbesondere bezeichne C_v *den Teilkomplex* $C_{v,0}$. C_v *heißt auch der Bewertungsunterkomplex von* C *zur Bewertung* v.

Der Teilkomplex $C_{v,r}$ von C ist sowohl abhängig von der Wahl des Repräsentanten χ der Klasse $[\chi] \in S(G)$ als auch von der zu χ assoziierten Bewertung v_χ auf C. Man beobachtet:

1. Zwei Bewertungen zu χ, die auf dem 0-Gerüst von C übereinstimmen, bestimmen wegen (V3) für jedes $r \in \mathbb{R}$ denselben Teilkomplex $C_{v,r}$.

2. Seien v und v' zum Homomorphismus χ gehörende Bewertungen auf C. Es gibt dann wegen (V2) eine Decktransformation von C, welche den mit 0 unter v bewerteten Repräsentanten der G-Bahn C^0 auf eine 0-Zelle τ mit $v'(\tau) = 0$ überführt. D.h. für jedes $r \in \mathbb{R}$ sind $C_{v,r}$ und $C_{v',r}$ homöomorph.

3. Ist $\chi' \in S(G)$, dann gilt $\chi' = \lambda\chi$ für ein reelles $\lambda > 0$. Für eine Bewertung v' zu χ', die auf C^0 mit v_χ übereinstimmt, ist dann $C_{v'} = C_v$ und für jedes r gibt es stets ein $s \in \mathbb{R}$, so daß $C_{v,r} = C_{v',s}$.

Aus diesen Beobachtungen folgt:

(3.2) Lemma. *Sind* v *und* v' *zu einem Charakter* χ *assoziierte Bewertungen auf* C, *dann sind die Teilkomplexe* $C_{v,r}$ *und* $C_{v',r}$ *homöomorph.* □

(3.3) Fundamentallemma. *Sei* v *eine Bewertung auf* C. *Dann sind für alle* $r, s \in \mathbb{R}$ *die Teilkomplexe* $C_{v,r}$ *und* $C_{v,s}$ *homöomorph.* □

Wir können nun die höheren geometrischen Invarianten ${}^*\Sigma^k$ definieren:

(3.4) Definition von ${}^*\Sigma^k$. *Ein Charakter* $[\chi] \in S(G)$ *liegt genau dann in* ${}^*\Sigma^k$*, wenn es einen* $K(G,1)$*-Komplex* K *mit endlichem* k*-Gerüst gibt, so daß der Teilkomplex* C_v *der universellen Überlagerung* C *von* K *bezüglich einer Bewertung* $v = v_\chi$ $(k-1)$*-zusammenhängend ist.*

(3.5) Bemerkungen.

1. Die Definition von ${}^*\Sigma^k$ hängt weder von der Wahl des Repräsentanten χ der Klasse $[\chi] \in S(G)$ ab noch von der Wahl der zu χ assoziierten Bewertung v_χ auf C.

2. Die Definition von ${}^*\Sigma^k$ formuliert bezüglich eines Charakters $[\chi] \in S(G)$ eine *lokale* Endlichkeitsbedingung im Sinne der Endlichkeitseigenschaft F_k. Ist $\Sigma \neq \emptyset$, so hat G einen $K(G,1)$-Komplex K mit endlichem k-Gerüst, ist also vom Typ F_k. Die Bedingung, daß K endliches k-Gerüst besitze, kann nicht abgeschwächt werden, da sonst durch eine geeignete Wahl des Komplexes K die Forderung an C_v stets erfüllbar wäre.

3. Wir können (in der Definition und bei späteren Betrachtungen) die explizite Angabe eines Basispunkts von C_v vernachlässigen, da in Kapitel III gezeigt wird, daß für $[\chi] \in {}^*\Sigma^1$ C_v für jede Wahl von C und einer Bewertung v, die (2.3) erfüllt, zusammenhängend ist.

Ist $[\chi] \in {}^*\Sigma^k$, dann ist die in Definition (3.4) formulierte Bedingung nicht für jeden K(G,1)-Komplex mit endlichem k-Gerüst erfüllt. Im allgemeinen wird man nur eine schwächere Eigenschaft für den Bewertungsunterkomplex C_v erhalten, die folgendermaßen definiert ist:

(3.6) Definition. *Der Teilkomplex* C_v *zu einer Bewertung* v *von* C *heiße im wesentlichen* (k-1)-*zusammenhängend, wenn eine reelle Zahl* $r > 0$ *existiert, so daß die durch die Inklusion induzierten Homomorphismen*

$$\pi_i(C_v, *) \longrightarrow \pi_i(C_{v,r}, *) \quad \textit{für } 1 \le i \le k, \textit{ sowie die}$$

Abbildung $$\pi_0(C_v) \longrightarrow \pi_0(C_{v,r})$$

trivial sind.

Wir sagen dann auch, daß C_v *in* $C_{v,r}$ im wesentlichen (k-1)-zusammenhängend ist.

(3.7) Bemerkung. Ein gerichtetes System $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ von Gruppen heißt *im wesentlichen trivial*, wenn es für jedes $\alpha \in I$ ein $\beta \ge \alpha$ gibt, derart daß die Abbildung $G_\alpha \longrightarrow G_\beta$ trivial ist [10]. Die Filtration von C durch die Teilkomplexe $C_{v,r}$ für $r > 0$ ergibt für die Homotopiegruppen $\pi_i(C_{v,r})$ mit den durch die Inklusion induzierten Homomorphismen offenbar ein gerichtetes System von Gruppen. Unsere Definition in dieser speziellen Situation ist eine Anwendung der Notation von K. Brown. Denn ist der Teilkomplex C_v im wesentlichen (k-1)-zusammenhängend, dann ist das gerichtete System der Homotopiegruppen (in den Dimensionen $i \le k$) im wesentlichen trivial. Wegen dem Fundamentallemma gibt es sogar eine feste Schranke $s \ge 0$, so daß für alle $r \in \mathbb{R}$ der

Homomorphismus $\pi_i(C_{v,r},*) \longrightarrow \pi_i(C_{v,r+s},*)$ die Nullabbildung ist.

4 Bewertung des Cayley-Komplexes einer (endlich präsentierten) Gruppe

Die Gruppe G sei durch die Präsentation $G = \langle X, R \rangle$ gegeben, wobei die definierenden Relationen in R zyklisch reduziert sein sollen. Unter der *geometrischen Realisierung der Präsentation* versteht man einen 2-dimensionalen CW-Komplex K, der folgendermaßen gebildet wird:

K besitze eine einzige 0-Zelle σ^0. Für jedes Erzeugende $x \in X$ bezeichne σ^1_x eine 1-Zelle von K. Die Fundamentalgruppe des 1-Gerüsts von K ist also isomorph zur freien Gruppe, die von X erzeugt wird. Für jede definierende Relation $r \in R$ wird eine 2-Zelle σ^2_r über einen Repräsentanten von r in $F(X) \cong \pi_1(K^1)$ in K^1 eingeklebt. Der Homotopietyp des so entstehenden 2-Komplexes K ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten von r , der die anheftende Abbildung definiert. G ist dann isomorph zur Fundamentalgruppe von K.

Die universelle Überlagerung C von K ist ein 2-dimensionaler freier G-Komplex, den man auch den *Cayley-Komplex* der Gruppe G in der Präsentierung $\langle X, R \rangle$ nennt. Der Cayley-Komplex besitzt eine *kombinatorische* Beschreibung, die für viele Anwendungen in der kombinatorischen Gruppentheorie von Nutzen ist.

(4.1) Der kombinatorische Cayley-Komplex einer Präsentation.

Die Gruppe G wird von X erzeugt, d.h. G ist Quotient der von X erzeugten freien Gruppe F(X). Wir setzen nicht voraus, daß X in G eingebettet ist. Trotzdem unterscheiden wir in der Notation der Einfachheit halber nicht zwischen den Elementen von F(X) und ihrem Bild in G. Aus dem Zusammenhang wird jeweils deutlich, ob von Elementen der freien Gruppe die Rede ist, z.B. wenn *Worte* in $X^{\pm 1}$ betrachtet werden, oder ob *Elemente* in G gemeint sind.

Der *Cayley-Graph* der Gruppe G in den Erzeugenden X und der *Cayley-Komplex* von G in der Präsentation $\langle X;R \rangle$ sind folgendermaßen definiert (vgl. [15], III.4):

Die Menge V der Ecken des Cayley-Komplexes C besteht aus der Menge der Elemente der Gruppe G, V = G.

Die Kantenmenge E ist die Menge $G \times X^{\pm 1}$. Eine Kante (g,x) soll dabei die Ecken g und gx verbinden. [Die Ecke gx ist Element von G, d.h. gx ist das Produkt (in G) von g mit dem Bild des Erzeugenden x unter $F(X) \twoheadrightarrow G$.] Ihre invers orientierte Kante $\overline{(g,x)}$ ist dann die Kante (gx,x^{-1}). Jede Kante wird durch eine Funktion $\varphi\colon E \longrightarrow X^{\pm 1}$, die durch $\varphi(g,x) = x$ definiert ist, bezeichnet. Es gilt dann $\varphi\,\overline{(g,x)} = (\varphi(g,x))^{-1}$. Diese Auszeichnung vererbt sich multiplikativ auf Kantenwege: Ist $p = e_1 e_2 \cdots e_n$ ein Kantenweg, dann erhält man ein Wort $\varphi(p) = \varphi(e_1)\,\varphi(e_2) \cdots \varphi(e_n)$ in den Erzeugenden $X^{\pm 1}$. $\varphi(p)$ ist genau dann ein reduziertes Wort, wenn p ein stachelfreier Weg ist. Ist p ein geschlossener Kantenweg, dann liegt $\varphi(p)$ im von R erzeugten Normalteiler von F(X); ist also eine Konsequenz der definierenden

Relationen. Ist umgekehrt $\varphi(p)$ ein Relator, dann ist p ein geschlossener Weg.

Man bezeichnet das kombinatorische 1-Gerüst Γ des Cayley-Komplexes als den *Cayley-Graphen* $\Gamma = \Gamma(X)$ der Gruppe in den Erzeugenden X.

Die Flächenstücke des Cayley-Komplexes C von G sind die Elemente der Menge $F = G \times R^{\pm 1}$. Ein Flächenstück (g,r) hat als Rand den Kantenweg, der beginnend bei g durch das Wort r im Cayley-Graphen abgelaufen wird. Die invers orientierte Fläche ist dann (g,r^{-1}).

(4.2) Kantenweggruppe

Für kombinatorische 2-Komplexe C definiert man die *Kantenweggruppe* . Zwei Kantenwege in C sind äquivalent, wenn sie durch endlich viele der folgenden Elementarschritte auseinander hervorgehen:

(1) Streichen oder Einfügen von Stacheln, d.h. von Teilwegen der Form $e\,\overline{e}$. (für $e \in E$)

(2) Übergang von einem Kantenweg p_1 der Form $q_1\, q_2\, q_3$ zu einem Kantenweg $p_2 = q_1\, q_2'\, q_3$, falls der Kantenweg $\overline{q}_2\, q_2'$ der Randweg eines Flächenstücks ist.

Die Äquivalenzklassen geschlossener Kantenwege mit festem Anfangspunkt bilden dann die Kantenweggruppe von C, die isomorph zur Fundamentalgruppe des (geometrisch realisiert gedachten) 2-Komplexes C ist.

Sei C der Cayley-Komplex der Gruppe G = ⟨X,R⟩. Die Fundamentalgruppe von C ist dann trivial. Also ist jeder geschlossene Kantenweg mit Basispunkt $1 \in V$ äquivalent zum trivialen Kantenweg. Diese Äquivalenz läßt sich graphisch durch ein Diagramm darstellen.

(4.3) Diagramme.

Ein Diagramm M über der Präsentation ⟨X;R⟩ von G ist eine endliche, planare Konfiguration von Ecken, Kanten und Flächenstücken mit folgenden Eigenschaften:

Den orientierten Kanten von M wird durch die Funktion φ eine Bezeichnung in den Erzeugenden $X^{\pm 1}$ von G zugeordnet. Trägt die Kante e die Auszeichnung x, dann ist die zu e inverse Kante $\overline{e}$ mit x^{-1} ausgezeichnet. Der Randweg eines jeden Flächenstücks von M korrespondiert via der Kantenbezeichnung zu einem Wort in den Erzeugenden $X^{\pm 1}$. Es wird verlangt, daß für den Randweg p eines Flächenstücks von M das Wort $\varphi(p)$ bis auf zyklische Permutation und Inversenbildung eine definierende Relation $r \in R$ ist.

Ein zusammenhängendes und einfach zusammenhängendes Diagramm M mit Randweg $\partial M = p$ beschreibt die Äquivalenz des Kantenwegs p zum trivialen Weg. Gleichzeitig beschreibt das Diagramm somit eine Herleitung der Relation $\varphi(p)$ aus den definierenden Relationen der Gruppe G. (vgl. [15] V.1).

Wir bezeichnen ein zusammenhängendes und einfach zusammenhängendes Diagramm als *einfaches Diagramm.*

Wenn ein einfaches Diagramm M einen geschlossenen Kantenweg enthält, dessen Ablesung unter φ bereits als Wort in der freien Gruppe F(X) identisch 1 ist, dann kann man M reduzieren. Wir benötigen den einfachsten Typ von Reduktionen, die *Lyndon-Reduktion*: M enthalte zwei benachbarte Flächenstücke, die derselben definierenden Relation entsprechen, aber invers zueinander orientiert sind. Ferner seien die beiden Flächenstücke an derselben Kante benachbart, wie in Abb. II.1 skizziert.

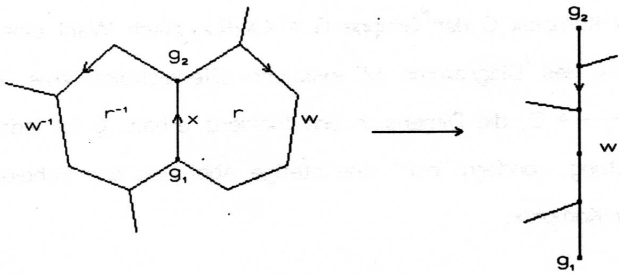

Abb. II.1 Lyndon-Reduktion

Man zieht das Innere des mit $w \cdot w^{-1}$ ausgezeichneten geschlossenen Kantenwegs zusammen. Das neu enstehende Diagramm enthält die beiden Flächenstücke r und r^{-1} nicht mehr und die Ecken g_2 und g_1 sind durch den Weg w verbunden.

Vorausgesetzt, der Randweg p des Diagramms M ist $\neq 1$ in F(X), dann können Lyndon-Reduktionen nur im Innern des Diagramms vorgenommen werden und sie ändern den Rand von M nicht. Nach einer

Lyndon-Reduktion erhalten wir also wieder ein den Relator $\varphi(p)$ herleitendes Diagramm über $\langle X;R\rangle$.

Abweichend von der üblichen Definition von Diagrammen wollen wir für eine ausgezeichnete Erzeugende t der Gruppe triviale Flächenstücke mit Randweg der Form $tt^{-1}t^{-1}t$ zulassen. Der Grund liegt in der Vereinfachung der Darstellung von Diagrammen, in denen Wege vorkommen, die durch die Konjugation eines Wortes mit t entstehen.

Einfache Diagramme stehen in folgendem Zusammenhang zum Cayley-Komplex C der Gruppe $G = \langle X;R\rangle$. Nach Wahl eines Basispunktes des Diagramms M existiert offensichtlich eine Abbildung $\psi\colon M \longrightarrow C$, die Dimension und Inzidenz erhält. ψ ist jedoch keine Einbettung, sondern "nur" eine stetige Abbildung der Scheibe in den Cayley-Komplex.

(4.4) Bewertung des Cayley-Komplexes und von Diagrammen.

Auf dem kombinatorischen Cayley-Komplex kann man das kombinatorische Analogon zu einer Bewertung eines CW-Komplexes im Sinne von (II.1) definieren:

Sei χ ein reellwertiger Homomorphismus von G und C der Cayley-Komplex von G in der Präsentation $\langle X,R\rangle$. Für eine Ecke $g \in V$ sei $v(g) = \chi(g)$. Damit sind die Werte von v auf den Endpunkten der Kanten definiert.

Für eine Kante (g,x) setzen wir $v(g,x) = \min\{v(g), v(gx)\}$. Daraus ergibt sich die Bewertung auf Kantenwegen: Ist $p = e_1 e_2 \cdots e_n$

ein Kantenweg, der an der Ecke g beginnt, dann definiert man die χ-*Spur* von p als die Sequenz

$$(v(g),\ v(g\varphi(e_1)),\ .\ .\ .\ ,\ v(g\varphi(e_1)\,\varphi(e_2)\cdots\varphi(e_n))\ ).$$

Mit $v(p)$ bezeichnen wir das Minimum der χ-Spur von p. Auf den Flächenstücken $D = (g,r)$ definiert man $v(D) = v(r)$ als das Minimum der χ-Spur auf dem bei g beginnenden Randweg r von D. Ist $w = x_1 \cdots x_n$ ein Wort in den Erzeugenden von G, dann setzen wir $v(w) = \min\{v(x_1),\ v(x_1x_2),\ .\ .\ .\ v(x_1 \cdots x_n)\}$. $v(w)$ ist das Minimum der χ-Spur des Wortes w, also auch Minimum der χ-Spur eines bei $1 \in V$ beginnenden Kantenwegs p mit $\varphi(p) = w$.

Eine Bewertung auf dem geometrisch realisierten Cayley-Komplex, die die Bedingungen (V1) bis (V3) sowie (2.3) erfüllt, induziert eine kombinatorische Bewertung des kombinatorischen Cayley-Komplexes. Umgekehrt erhält man durch stückweise lineare Fortsetzung aus einer kombinatorischen Bewertung des (kombinatorischen) Cayley-Komplexes eine Bewertung seiner geometrischen Realisierung.

Ist auf C eine kombinatorische Bewertung v gegeben, dann können wir einfache Diagramme mit Bewertung betrachten. Wir wählen einen Basispunkt des einfachen Diagramms M, dem wir ein Element $g \in G$ zuordnen. Da jeder geschlossene Kantenweg in M via der Kantenauszeichnung einen Relator in G beschreibt, ist nach der Wahl des Basispunktes jede Ecke von M eindeutig mit einem Element der Gruppe G bezeichnet, und zwar verträglich mit der Kantenauszeichnung. Jede

Ecke von M besitzt damit einen Wert unter der Bewertung v. Er wird durch den Charakter der Gruppe gegeben. Wir können ein bewertetes Diagramm auch so auffassen: Sei M ein einfaches Diagramm und $\psi: M \longrightarrow C$ eine stetige (kombinatorische) Abbildung in den bewerteten Cayley-Komplex, dann wird die Bewertung auf M durch ψ induziert.

Die zusätzliche Information, die bewertete Diagramme enthalten, erlaubt es uns, von der *Wölbung* von einfachen Diagrammen zu sprechen:

(4.5) Definition. *Ein einfaches Diagramm* M *zu einer Gruppe* $G = \langle X,R \rangle$ *heiße*

(1) *nicht-negativ gewölbt, wenn für alle inneren Ecken* g

$v(g) \geq v(\partial M)$ *gilt*

(2) *negativ gewölbt, wenn eine innere Ecke* g *existiert mit*

$v(g) < v(\partial M)$.

Der volle Teilkomplex C_v von C zu einer Bewertung v ist in der kombinatorischen Version analog zu (II.3) definiert. Der *Bewertungsunterkomplex* C_v des Cayley-Komplexes C von $G = \langle X;R \rangle$ ist der von der Teilmenge G_χ der Ecken $V = G$ von C aufgespannte volle Teilkomplex von C. D.h. C_v enthält alle Ecken $g \in V$ mit $v(g) \geq 0$, alle Kanten $e \in E$ mit $v(e) \geq 0$ und alle Flächenstücke $f \in F$ mit $v(f) \geq 0$. Für ein $r \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $C_{v,r}$ den von $\{g \mid v(g) \geq -r\}$ aufgespannten vollen Teilkomplex von C.

Der *Bewertungsteilgraph* Γ_v des Cayley-Graphen $\Gamma = \Gamma(X)$ von G ist das 1-Gerüst des Bewertungsunterkomplexes C_v von C. Analog wird mit $\Gamma_{v,r}$ der von $\{ g \mid v(g) \geq -r \}$ aufgespannte volle Teilgraph von Γ bezeichnet.

Offensichtlich gilt dann:

(4.6) Satz. *Sei* G *eine endlich präsentierte Gruppe,* $G = \langle X,R \rangle$, C *der Cayley-Komplex der Präsentation mit einer Bewertung* v_χ, *die zu einem Homomorphismus* $\chi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ *assoziiert ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) C_v *ist 1-zusammenhängend.*

(ii) C_v *ist zusammenhängend und für jeden reduzierten geschlossenen Kantenweg* p *mit Basispunkt* 1 *und* $v(p) \geq 0$ *in* C *gibt es ein nicht-negativ gewölbtes einfaches Diagramm* M *mit* $\partial M = p$. □

III DIE BIERI-NEUMANN-STREBEL-INVARIANTE – GEOMETRISCH INTERPRETIERT

1 Die Bieri-Neumann-Strebel-Invariante Σ_{BNS}

Die Bieri-Neumann-Strebel-Invariante Σ_{BNS} kann man durch den Zusammenhang des Bewertungsteilgraph des Cayley-Graphen der Gruppe G charakterisieren. Diese Interpretation von Σ_{BNS} suggeriert die Verallgemeinerung zu den höheren geometrischen Invarianten $^{*}\Sigma^{k}$.

Wir behalten die Notation aus dem vorigen Kapitel bei und erinnern an die Definition von Σ_{BNS} (I.2.7):

Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und A eine endlich erzeugte G-Operator-Gruppe, wobei G von rechts auf A wirkt. G' operiere via innerer Automorphismen auf A. Dann ist $\Sigma_A = \{ [\chi] \in S(G) \mid A$ ist endlich erzeugt über einem endlich erzeugten Untermonoid von $G_\chi \}$.

Wir möchten in diesem Abschnitt A als *linke* G-Operatorgruppe A^* betrachten. Der Anti-Automorphismus $g \mapsto g^{-1}$ erlaubt es von der Rechtsoperation auf A zur Linksoperation überzugehen, indem man ${}^{g}a = a^{g^{-1}}$ für $a \in A$ und $g \in G$ setzt. Ist

$$\Sigma_{A^*} = \{\ [\chi] \in S(G) \mid A \text{ ist von links endlich erzeugt über einem endlich erzeugten Untermonoid von } G_\chi \},$$

dann gilt $\Sigma_{A^*} = -\Sigma_A$, wobei $-\Sigma_A$ das Bild von Σ_A unter der antipodalen Abbildung von $S(G)$ bezeichnet. Wir erhalten Aussagen über die antipodale Menge, wenn man die Definitionen von [3] zugrundelegt.

Das entscheidende Mittel für die Analyse der endlichen Erzeugbarkeit von Normalteilern in endlich erzeugten Gruppen in der Arbeit von Bieri, Neumann und Strebel ist die Charakterisierung der geometrischen Invariante Σ_A durch Gleichungen. Wir formulieren dieses Kriterium hier für eine linke G-Operator-Gruppe A:

Sei X ein Erzeugendensystem von G, d.h. G ist gegeben als Quotient der von X erzeugten freien Gruppe F(X). Es sei vorausgesetzt, daß die Bilder der Erzeugenden in $G \neq 1$ sind.

Die Gruppe G sei von X, und A als linke G-Operator-Gruppe von Z erzeugt. Es gelte

Bedingung C: Jeder Kommutator $[x,y]$ für $x,y \in X^{\pm 1}$ operiert auf A durch Konjugation mit einem Element $c(x,y) \in \langle Z \rangle$.

Das Kriterium für Σ_{A^*} lautet dann:

(1.2) Satz. *Unter obigen Voraussetzungen sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $[\chi] \in \Sigma_{A^*}$

(ii) *Jedes* $a \in A$ *hat eine Darstellung*

$$(*) \qquad a = {}^{w_1}a_1 \cdot {}^{w_2}a_2 \cdot\cdot\cdot {}^{w_n}a_n$$

mit $a_i \in \langle Z \rangle$ *und Worten* w_i *in* $X^{\pm 1}$ *mit positiver* χ*-Spur.*

(iii) *Für alle* $z \in Z$ *und alle* $x \in X^{\pm 1}$ *hat das Element* $a = {}^{x}z$ *eine Darstellung* $(*)$

(iv) *Das Element* $a = {}^{x}z$ *hat für alle* $z \in Z$ und alle $x \in X^{\pm 1}$ *eine solche Darstellung, aber mit nicht-negativer* χ*-Spur.*

(v) *Es existiert ein* $t \in X^{\pm 1}$ *mit* $\chi(t) < 0$ *, so daß für alle* $z \in Z$ *das Element* ${}^{t}z$ *eine Darstellung* $(*)$ *besitzt.*

BEWEIS: Die Äquivalenz der Aussagen (i) - (iv) ist die Aussage von [3], Proposition 2.1. Um (v) $\Rightarrow$ (iii) zu zeigen, genügt es, für ein $s \in X^{\pm 1}$ mit $s \neq t$ und $\chi(s) < 0$ eine Darstellung von ${}^{s}z$ für ein beliebiges $z \in Z$ zu finden.

1. Hat ${}^{t}z$ eine Darstellung $(*)$, dann trifft dies auch auf ${}^{t^k}z$ für alle $k \in \mathbb{N}$ zu.

Wegen Bedingung C hat man eine einfache Formel für die Vertauschung von Exponenten: Für $X^{\pm 1}$-Worte w und v, sowie $x, y \in X^{\pm 1}$ gilt

$$(1.3) \qquad {}^{wxyv}z = {}^{w}c \; {}^{wyxv}z \; {}^{w}c^{-1} \text{ für } c = c(x,y) \in \langle Z \rangle$$

Ist ${}^{t}z = {}^{w_1}z_1 \, {}^{w_2}z_2 \cdots {}^{w_n}z_n$, dann ist ${}^{t^2}z = {}^{tw_1}z_1 \cdots {}^{tw_n}z_n$.

Mit (1.3) kann man zunächst in den Exponenten sukzessive t mit w_i vertauschen und dann die nach (v) existenten Darstellungen vom Typ (∗) für ${}^{t}z_1, \ldots, {}^{t}z_n$ einsetzen. So erhält man die gewünschte Darstellung für ${}^{t^2}z$. Induktiv folgt damit die Behauptung von 1.

2. Wegen Bedingung C operiert der Kommutator $[s,t^{-1}]$ wie ein $b \in \langle Z \rangle$. Also operiert $[s,t^{-k}]$ auf A wie $b \cdot {}^{t^{-1}}b \cdots {}^{t^{-k+1}}b$. Da $\chi(t^{-1}) > 0$, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß die χ-Spur von $t^{-k}\,s$ positiv ist. Also operiert s wie $b \cdot {}^{t^{-1}}b \cdots {}^{t^{-k+1}}b \cdot t^{-k} \cdot s \cdot t^{k}$. Folglich ist

$$ {}^{s}z = b \cdot {}^{t^{-1}}b \cdots {}^{t^{-k+1}}b \cdot {}^{t^{-k}st^{k}}z \cdot (b \cdot {}^{t^{-1}}b \cdots {}^{t^{-k+1}}b)^{-1} $$

Da ${}^{t^k}z$ nach 1. eine Darstellung der Form (∗) besitzt, gilt dies auch für ${}^{s}z$. □

Sei nun speziell $A = G'$. Um das Σ-Kriterium von Satz (1.2) anwenden zu können, muß man für G ein spezielles Erzeugendensystem wählen:

Ist G eine endlich erzeugte Gruppe, dann heiße ein endliches Erzeugendensystem $X \cup Z$ von G *angepaßt*, wenn G erzeugt wird von $X \cup Z$, so daß gilt:

(1) G' wird als Normalteiler von Z erzeugt

(2) G^{ab} wird erzeugt von $\pi(X)$, wenn π die kanonische Projektion $\pi: G \longrightarrow G^{ab}$ bezeichnet, und

(3) alle nicht-trivialen Kommutatoren $[x,y]$ für $x, y \in X^{\pm 1}$ haben eine Darstellung als Worte in Z.

Jede endlich erzeugbare Gruppe besitzt ein angepaßtes Erzeugendensystem, für das sich die Charakterisierung von $\Sigma_{G'}$ aus Satz (1.2) wörtlich übertragen läßt. Die geometrische Interpretation des Σ-Kriteriums im Cayley-Graph von G zeigt, daß man das Kriterium auch für beliebige Erzeugendensysteme formulieren kann.

2 Der Cayley-Graph und die Invariante Σ_{BNS}

Wir verwenden die Notation von (II.4): Γ bezeichnet den Cayley-Graph $\Gamma(X)$ von G in den Erzeugenden X und Γ_v den Bewertungsteilgraph bezüglich einer Bewertung v_χ von Γ. Es gilt dann:

(2.1) Satz. *Die endlich erzeugte Gruppe* G *sei durch ein angepaßtes Erzeugendensystem* $X \cup Z$ *erzeugt,* Γ *sei der Cayley-Graph von* G *bezüglich* $X \cup Z$, $[\chi]$ *in* S(G) *und* v_χ *eine Bewertung zu* $[\chi]$ *auf* Γ. *Dann sind äquivalent:*

(i) $[\chi] \in -\Sigma_{BNS}$

(ii) Γ_v *ist zusammenhängend*

BEWEIS: Sei $g \in G_\chi$. Ist $g \in G'$, dann hat g nach (1.2) eine Darstellung durch ein Wort in den Erzeugenden mit nicht-negativer χ-Spur. Es gibt also in Γ_v einen Kantenweg, der g mit dem Basispunkt 1 verbindet. Ist $g \in G'$, dann ist g in einer Nebenklasse von G mod G', als deren Repräsentanten man ein Wort w in $X^{\pm 1}$ mit nicht-negativer χ-Spur wählen kann. Die Darstellung $g = g' \cdot w$ mit $g' \in G'$ liefert einen Kantenweg in Γ_v, der 1 mit g verbindet. Also folgt (ii).

Ist Γ_v zusammenhängend, dann gibt es für jede Ecke $g = {}^t z$ (für ein $t \in X^{\pm 1}$ und ein $z \in Z$) einen Kantenweg in Γ_v mit Anfangspunkt 1 und Endpunkt g, also eine Darstellung, wie sie in (1.2) (iv) verlangt wird. □

(2.2) Korollar. *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Dann gilt :*

$$\Sigma_{BNS} = - {}^*\Sigma^1$$

(2.3) Bemerkung. Die Interpretation (2.1) von Σ ist der Grund, weshalb wir die χ-Spur für Anfangssegmente von Worten definiert haben, und nicht für Endsegmente wie in [3]. Denn dies entspricht der Konvention, Kantenwege im Cayley-Graph von links nach rechts zu lesen. Entsprechend hatten wir in (III.1) linke G-Operator-Gruppen A zu betrachten. Wir betrachten im folgenden nur $\Sigma_{G'}$, d.h. G' mit der Operation von G durch Konjugation. Wie üblich wollen wir dann die Konjugation in der Form x^t schreiben, wenn $t^{-1}xt$ gemeint ist, und ${}^t x$ für txt^{-1}.

Die Bedingung (ii) von Satz (2.1) bleibt bei einem Wechsel des (endlichen) Erzeugendensystems von G erhalten - auch dann, wenn man die Voraussetzung, daß G ein angepaßtes Erzeugendensystem besitzen möge, fallen läßt.

(2.4) Satz. *Die Gruppe* G *sei von der endlichen Menge* X *einerseits, der endlichen Menge* Y *andererseits erzeugt. Dann ist* $\Gamma_v(X)$ *genau dann zusammenhängend, wenn* $\Gamma_v(Y)$ *zusammenhängend ist.*

BEWEIS: Jedes Erzeugende $x \in X^{\pm 1}$ hat eine Darstellung in den Erzeugenden Y. Sei r das Minimum der χ-Spuren der $x \in X^{\pm 1}$ in diesen Y-Darstellungen. Ist $\Gamma_v(X)$ zusammenhängend, dann ist $\Gamma_v(Y)$ im wesentlichen zusammenhängend, d.h für alle g in $\Gamma_v(Y)$ existiert ein Kantenweg in $\Gamma_{v,r}(Y)$, der g mit dem Basispunkt 1 verbindet.

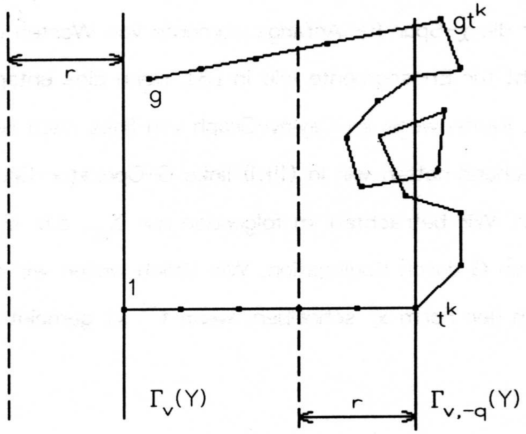

Abb. III.1

Sei $t \in Y^{\pm 1}$ mit $\chi(t) > 0$ und $k \in \mathbb{N}$, so daß $\chi(t^k) = q > |r|$ gilt. Ist $g \in G_\chi$, dann ist gt^k Ecke von $\Gamma_{v,-q}(Y)$. Da dieser Teilkomplex homöomorph ist zu $\Gamma_v(Y)$, gibt es einen Kantenweg in $\Gamma_{v,r-q}(Y)$, der gt^k mit t^k verbindet. Also gibt es einen 1 und g verbindenen Kantenweg in $\Gamma_v(Y)$ (siehe Abb. III.1). □

Damit erhalten wir für eine endlich erzeugte Gruppe G mit einer beliebigen (endlichen) Erzeugendenmenge das folgende ${}^*\Sigma^1$-Kriterium:

(2.5) Korollar. *Die Gruppe* G *sei von* X *endlich erzeugt. Dann sind äquivalent:*

(i) $[\chi] \in {}^*\Sigma^1$, *d.h.* $\Gamma_v(X)$ *ist zusammenhängend*

(ii) *Jedes Element des Untermonoids* G_χ *hat eine Darstellung als Wort in den Erzeugenden mit nicht-negativer* χ*-Spur.*

(iii) *Für ein* $t \in X^{\pm 1}$ *mit positivem* χ*-Wert und alle* $x \in X^{\pm 1} \setminus \{t, t^{-1}\}$ *hat das Element* $x^t \in G$ *eine Darstellung* $x^t = w$ *als Wort in* $X^{\pm 1}$ *mit* $v_\chi(x^t) < v_\chi(w)$ *für die Worte* x^t *und* w. □

Man kann die Aussage von (2.5) folgendermaßen umformulieren: C bezeichne die universelle Überlagerung eines K(G,1)-Komplexes K und $\overline{C}$ die universelle Abelsche Überlagerung. Wir gehen ferner davon aus, daß wir das 1-Gerüst von C mit dem Cayley-Graph $\Gamma(X)$ der Gruppe in den Erzeugenden X identifizieren können. Eine zu χ assoziierte Bewertung $v_\chi : C \longrightarrow \mathbb{R}$ induziert dann eine stetige Abbildung $\overline{v}_\chi : \overline{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, denn für alle $g \in G'$ und alle $x \in C$ gilt $v_\chi(gx) = v_\chi(x)$. Mit $\overline{C}_v$ bezeichnen wir den Unterkomplex von $\overline{C}$, der durch C_v induziert wird. Unter diesen Voraussetzungen gilt:

(2.6) Korollar. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $[\chi] \in {}^*\Sigma^1$

(ii) *Der durch die Inklusion induzierte Homomorphismus*

$\pi_1(\overline{C}_v) \longrightarrow \pi_1(\overline{C})$ *ist ein Epimorphismus.*

BEWEIS: p bezeichne die Überlagerungsabbildung $C \longrightarrow \overline{C}$. Es gilt $C_v = p^{-1}(\overline{C}_v)$. Ist $\pi_0(C_v) = 1$, dann ist $\pi_1(C,C_v)$ trivial wegen der Exaktheit der Homotopiesequenz des Paars (C,C_v) und der Zusammenziehbarkeit von C. Da $\pi_1(C,C_v)$ und $\pi_1(\overline{C},\overline{C}_v)$ in bijektiver Korrespondenz stehen, folgt (ii) aus der exakten Homotopiesequenz des Paars $(\overline{C},\overline{C}_v)$. Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) ergibt sich aus dem gleichen Argument: $\overline{C}_v$ ist zusammenhängend, also ist $\pi_1(\overline{C},\overline{C}_v)$ wegen (ii) trivial. Aus der exakten Homotopiesequenz für (C,C_v) folgt, daß C_v zusammenhängend ist. □

(2.7) Bemerkung. Für endlich präsentierte Gruppen G ist (2.6) die Aussage von Theorem G in [3]. Man beachte allerdings:

1. Die Fortsetzung χ' des Homomorphismus $\chi: G \longrightarrow \mathbb{R}$ auf die universelle Abelsche Überlagerung von K ist in [3] mittels der aus der de Rham-Cohomologie folgenden Identifikation von $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$ mit $H^1(T^d;\mathbb{R})$ definiert. [T^d ist der d-dimensionale Torus.] χ' ist mit

der G-Operation verträglich, erfüllt also Bedingung (V1) einer Bewertung ; aber die Bedingung (V3) muß für χ' nicht erfüllt sein. In [3] wird für die Definition von χ' nicht auf eine Zellenstruktur von K rekurriert. Folglich ist $\chi'^{-1}([0,\infty))$ auch im allgemeinen kein Teilkomplex.

2. Bieri, Neumann, Strebel lesen Kantenwege in $\overline{C}$ von rechts nach links , während wir Kantenwege von links nach rechts lesen.

3. Die Definition von χ' von Bieri, Neumann, Strebel erweist sich für die Analyse auch der höheren Invarianten $^*\Sigma^k$ für $k > 1$ von 3-Mannigfaltigkeitsgruppen als sehr nützlich (siehe (VII.2)).

IV KRITERIEN FÜR $^{*}\Sigma^{k}$

1 Monoid-Operation auf einem CW-Komplex

Sei M ein in eine Gruppe einbettbares Monoid und D ein CW-Komplex. Man kann analog zur Operation einer Gruppe durch Homöomorphismen auf einem CW-Komplex eine Monoid-Operation von M auf D in folgender Weise definieren:

(1.1) Definition. *Eine Monoid-Operation von* M *auf dem CW-Komplex* D *ist ein unitärer Homomorphismus von* M *in das Monoid aller injektiven, zellulären, stetigen Abbildungen* $D \longrightarrow D$.

(1.2) Bemerkung. Operiert das Monoid M auf dem CW-Komplex D, dann gibt es für jedes $m \in M$ einen zu D homöomorphen Teilkomplex mD von D und einen Homöomorphismus $\varphi_m: D \longrightarrow mD$, so daß gilt:
(1) Für die Identität 1 des Monoids ist φ_1 die Identität auf D,
(2) Für alle $m, m' \in D$ ist der Homöomorphismus $\varphi_{mm'}: D \longrightarrow mm'D$ die Komposition von $\varphi_{m'}$ mit der Restriktion von φ_m auf m'D.

Wir schreiben $m\sigma$ für $\varphi_m(\sigma)$, wenn σ eine Zelle von D ist. Die

Menge $M\sigma = \{m\sigma \mid m \in M\}$ für eine Zelle σ von D heiße eine Monoid-Bahn von Zellen. Monoid-Bahnen haben entweder leeren Durchschnitt oder sie enthalten eine gemeinsame Monoid-Bahn. Wir sagen, daß D bezüglich der Operation von M *endlich viele Monoid-Bahnen* besitzt, wenn es eine endliche Menge $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ von Zellen von D gibt, so daß für jede Zelle τ in D ein i existiert mit $\tau \in M\sigma_i$. M operiert *frei* auf dem CW-Komplex D, wenn für alle Zellen σ aus $m\sigma = \sigma$ stets $m = 1$ folgt.

Ist $[\chi] \in {}^*\Sigma^k$, dann gibt es einen k-dimensionalen CW-Komplex C mit einer Bewertung v_χ, so daß der volle Teilkomplex C_v (k-1)-zusammenhängend ist. Wir wollen C_v als einen CW-Komplex mit einer Operation des Monoids $G_\chi \subset G$ auffassen. Das Element $g \in G_\chi$ operiert auf C_v durch den von der Decktransformation auf C induzierten Homöomorphismus $C_v \longrightarrow gC_v$.

C_v hat als G_χ-Komplex folgende Eigenschaften:

(1.3) Ist $G\sigma$ eine G-Bahn von Zellen von C, dann gibt es einen Repräsentanten σ' in C_v mit $g\sigma' \not\subset C_v$ für alle $g \in G$ mit $\chi(g) < 0$. Wir wählen für jede G-Bahn von C einen solchen Repräsentanten σ_i. Ist τ eine beliebige Zelle von C_v, dann liegt τ in einer Monoid-Bahn $G_\chi\sigma_i$ für ein σ_i. C_v hat also als G_χ-Komplex endlich viele Monoid-Bahnen.

(1.4) Sind g_1 und $g_2 \in G_\chi$, dann ist $g_1^{-1}g_2 \in G_\chi$ oder $g_2^{-1}g_1 \in G_\chi$. Daraus folgt, daß zwei G_χ-Bahnen von Zellen von C_v entweder disjunkt sind oder aber die eine die andere enthält. Insbesondere kann man eine Menge von Repräsentanten $\{ \sigma_i \mid i \in I \}$ der endlich vielen Monoid-Bahnen von C_v finden, so daß für alle $i \neq j$ $G_\chi \sigma_i \cap G_\chi \sigma_j = \emptyset$ gilt.

C_v ist also ein (k-1)-zusammenhängender CW-Komplex mit freier G_χ-Operation und endlich vielen Monoid-Bahnen von Zellen.

Das erste Kriterium für die Invariante ${}^*\Sigma^k$ ergibt sich aus der Beobachtung, daß die Existenz eines G_χ-Komplexes mit diesen Eigenschaften für $[\chi] \in {}^*\Sigma^k$ nicht nur notwendig, sondern hinreichend ist:

(1.5) Satz. *Gegeben sei eine Gruppe* G *und ein nicht-trivialer Charakter* $[\chi] \in S(G)$. *Folgende Aussagen sind dann äquivalent:*

(i) $[\chi] \in {}^*\Sigma^k$

(ii) *Es existiert ein (k-1)-zusammenhängender CW-Komplex* D *mit freier* G_χ*-Monoid-Operation und endlich vielen* G_χ*-Bahnen von Zellen der Dimension* $\leq k$.

BEWEIS: Für jedes $i \in \mathbb{N}$ bezeichne D_i eine Kopie des G_χ-Komplexes $D = D_0$. Wähle ein $g \in G$ mit $\chi(g) < 0$. Dann ist $g^{-1} \in G_\chi$ und die Abbildung $\varphi: D_i \longrightarrow g^{-1}D_i$ ist ein Homöomorphismus von D_i auf den Teilkomplex $g^{-1}D_i$, den wir mit D_{i-1} identifizieren. Auf diese Weise erhalten wir für jedes i die Inklusion $D_{i-1} \longrightarrow D_i$. Sei C die Vereinigung der Komplexe D_i mit der schwachen Topologie. Die Gruppe G ist die aufsteigende Vereinigung der isomorphen Monoide $g^iG_\chi \subset g^{i+1}G_\chi$

für $i \geq 0$. C ist also ein freier G-Komplex und $(k-1)$-zusammenhängend. C hat endlich viele G-Bahnen von Zellen der Dimension $\leq k$. Also ist $[\chi] \in {}^*\Sigma^k$. □

Die Homologie eines CW-Komplexes D kann man berechnen, indem man die Homologie des Kettenkomplexes **P** mit $P_i = H_i(D^i, D^{i-1})$ und Differential δ gegeben durch die Komposition

$$\delta\colon H_i(D^i, D^{i-1}) \longrightarrow H_{i-1}(D^{i-1}) \longrightarrow H_{i-1}(D^{i-1}, D^{i-2})$$

bestimmt. P_i ist die frei Abelsche Gruppe, deren freie Erzeugende in bijektiver Korrespondenz zu den i-Zellen des Komplexes D stehen.

Ist D ein freier G_χ-Komplex mit endlich vielen Monoid-Bahnen von Zellen, dann kann man die Repräsentanten der G_χ-Bahnen der Zellen unter der Monoid-Operation nach (1.4) so wählen, daß die Monoid-Bahnen paarweise disjunkt sind. Somit kann man die Kettengruppen P_i als freie $\mathbb{Z}G_\chi$-Moduln auffassen: es gilt $P_i = \oplus\, \mathbb{Z}G_\chi \sigma^i$, wobei die σ^i diese Repräsentanten der i-Zellen von D durchlaufen. Das Differential δ ist dann ein $\mathbb{Z}G_\chi$-Homomorphismus und somit ist der Kettenkomplex **P** in dieser Situation ein Komplex endlich erzeugter freier Moduln über dem Monoidring $\mathbb{Z}G_\chi$.

Wenn $[\chi] \in {}^*\Sigma^k$ gilt, dann gibt es nach (1.5) einen freien G_χ-Komplex D mit endlich vielen Monoid-Bahnen, der $(k-1)$-zusammenhängend ist. Die (reduzierte) Homologie von D verschwindet also in den Dimensionen $< k$ und der Kettenkomplex $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P}:\ P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{Z}$$

ist eine partielle Auflösung von $\mathbb{Z}$ über dem Monoidring $\mathbb{Z}G_\chi$ durch endlich erzeugte freie (linke) $\mathbb{Z}G_\chi$-Moduln. D.h. der triviale G_χ-Modul $\mathbb{Z}$ ist (links) vom Typ FP_k über $\mathbb{Z}G_\chi$. Diese homologische Endlichkeitseigenschaft liegt der Definition der geometrischen Invariante Σ^k zugrunde (I.2.9). Also gilt

(1.6) Korollar. *Sei* G *eine endlich erzeugte Gruppe. Für alle* $k \geq 1$ *gilt:*

$$^*\Sigma^k \subseteq \Sigma^k. \qquad \square$$

2 v - Homotopie

G bezeichne eine Gruppe vom Typ F_k und $[\chi]$ einen Charakter in $S(G)$. K sei ein $K(G,1)$-Komplex mit endlichem k-Gerüst und C seine universelle Überlagerung. Auf C sei eine zu χ assoziierte Bewertung v_χ gegeben. Die Aussage $[\chi] \in {}^*\Sigma^k$ läßt sich dann charakterisieren durch die Existenz eines solchen Komplexes K mit der Eigenschaft, daß C eine zur Identität homotope Abbildung besitzt, die - anschaulich gesprochen - den Komplex C in positiver Richtung bezüglich v_χ "verschiebt". Dieses Kriterium für die geometrische Invariante ${}^*\Sigma^k$ ist das

Analogon in der Homotopie zu dem in [4] Satz C formulierten Kriterium für die Invariante Σ^k (I.2.16).

(2.1) Definition. *Sei* K *ein* K(G,1)-*Komplex mit endlichem* k-*Gerüst,* C *seine universelle Überlagerung und* v *eine Bewertung auf* C. *Eine* v-Homotopie *von* C *in der Dimension* i ($i \leq k$) *ist eine zelluläre Homotopie*

$$h: \quad C^i \times [0,1] \longrightarrow C^{i+1}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(H1) $h_0(c) = h(c,0) = c$ und $h_1(c) = h(c,1) \in C^i$ *für alle* $c \in C^i$

(H2) $h(gc,t) = g\,h(c,t)$ *für alle* $g \in G$, $t \in [0,1]$ *und* $c \in C^i$

(H3) $v(h(c,t)) > v(h(c,0)) = v(c)$ *für alle* $c \in C^i$ *und alle* $t > 0$.

Eine v-Homotopie hat folgende elementare Eigenschaften:

(2.2) Für $c \in C^i$ und $g \in G$ gilt wegen (H2) und der Gleichung $v(gc) = \chi(g) + v(c)$:

$$v(h(gc,1)) - v(gc) = v(h(c,1)) - v(c).$$

Die Differenz $v(h_1(c)) - v(c)$ hängt also nur von der G-Bahn von c, nicht von c selbst ab. Da C^i/G für $i \leq k$ kompakt ist, ist $\varepsilon = \inf\{v(h_1(c)) - v(c) \mid c \in C^i\} > 0$. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $c \in C^i$ gilt:

$$v(h(c,1)) - v(c) \geq \varepsilon.$$

Man kann eine v-Homotopie h iterieren. Sei

$$h'(c,t) = \begin{cases} h(c,2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ h(h(c,1),2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Die Homotopie h' erfüllt dann die Bedingungen (H1) - (H3). Ist ferner für ein $\varepsilon > 0$ die Differenz $v(h_1(c)) - v(c) \ge \varepsilon$, dann ist $v(h'(c,1)) - v(c) \ge 2\varepsilon$. Wir haben somit gezeigt:

(2.3) Lemma. *Hat C eine v-Homotopie in der Dimension i, dann gibt es für jede reelle Zahl $r > 0$ auch eine v-Homotopie h' auf C mit der Eigenschaft, daß für alle $c \in C^i$ gilt:*

$$v(h'(c,1)) - v(c) \ge r. \qquad \square$$

Wir betrachten nun einen freien G-Komplex C mit endlichem k-Gerüst modulo G und setzen voraus, daß der Teilkomplex C_v bezüglich einer Bewertung v im wesentlichen (k-1)-zusammenhängend ist. Im allgemeinen besitzt C in dieser Situation keine v-Homotopie, man kann jedoch zeigen, daß man dann aus C einen Komplex C' konstruieren kann, der C als Teilkomplex enthält und für eine Fortsetzung v' der Bewertung v auf C' eine v'-Homotopie zuläßt.

(2.4) Satz. *Gibt es zu einer Gruppe G einen K(G,1)-Komplex mit endlichem k-Gerüst, so daß der Teilkomplex C_v der universellen Überlagerung C bezüglich einer Bewertung v im wesentlichen (k-1)-zusammenhängend ist, dann gilt:*

G hat einen Eilenberg-MacLane-Komplex K' *mit endlichem* k-*Gerüst und universeller Überlagerung* $C' \supseteq C$, *die eine* v'-*Homotopie der Dimension* k *besitzt (zu einer Fortsetzung* v' *der Bewertung* v*).*

BEWEIS: Wir argumentieren durch Induktion über die Dimension der Gerüste von K, bzw. C.

C_v besitzt stets eine v-Homotopie in der Dimension 0: Man wähle ein $s \in G$ mit $\chi(s) > 0$. σ^0 sei eine fest gewählte 0-Zelle von C mit $v(\sigma^0) = 0$. Es gibt zu jeder 0-Zelle $g\sigma^0$ in C eine 1-Zelle τ_s^1 mit $\partial\tau = \{g\sigma^0, gs\sigma^0\}$. Die Zelle τ hat die charakteristische Abbildung $ch_\tau\colon [0,1] \longrightarrow C$. Man definiert $h(g\sigma^0,t) = ch_\tau(t)$. Es gilt dann $h_1(g\sigma^0) = gs\sigma^0$ und $h(g'g\sigma^0,t) = g'h(g\sigma^0,t)$. Wegen der Eigenschaft (II.2.3) der Bewertung v ist auch die dritte Bedingung für eine v-Homotopie erfüllt.

Für $0 < i \leq k$ sei σ^i eine i-Zelle mit charakteristischer Abbildung $ch_{\sigma^i}\colon D^i \longrightarrow C^i$ und anheftender Abbildung $att_{\sigma^i}\colon \partial D^i = S^{i-1} \longrightarrow C^{i-1}$. C besitze gemäß der Induktionsvoraussetzung eine (i-1)-dimensionale v-Homotopie. Also gibt es für $r > 0$ eine stetige Abbildung α

$$\alpha\colon S^{i-1} \xrightarrow{att} C^{i-1} \xrightarrow{h(\cdot,1)} C^{i-1}$$

mit $v(\alpha(s)) > v(att_{\sigma^i}(s)) + r$ $(s \in S^{i-1})$ für eine - nach (2.3) geeignet zu wählende - v-Homotopie h.

C_v ist im wesentlichen (k-1)-zusammenhängend. Jede stetige Abbildung $S^{i-1} \longrightarrow C^{i-1}$ läßt sich infolgedessen so zu einer Abbildung $D^i \longrightarrow C^i$ fortsetzen, daß die Bewertung v auf dem Bild von D^i

höchstens um einen festen Betrag, sage s, kleiner ist als auf dem Bild von S^{i-1}. Insbesondere gibt es somit zu α eine stetige Fortsetzung $\alpha'\colon D^i \longrightarrow C^i$, für die gilt:

$$v(\alpha'(d)) \geq v(\alpha(S^{i-1})) - q \qquad \text{für alle } d \in D^i \text{ und ein reelles } q \geq 0.$$

Durch geeignete Wahl von r und dementsprechend der v-Homotopie h in der Dimension i-1 kann man erreichen, daß

$$v(\alpha'(d)) > v(att_{\sigma^i}(S^{i-1})) \geq v(ch_{\sigma^i}(D^i)) \qquad \text{und sogar}$$
$$v(\alpha'(d)) > \max\{v(c) \mid c \in ch_{\sigma^i}(D^i)\} \quad \text{gilt.}$$

Sei $S^i \equiv D^i_0 \cup (S^{i-1} \times [0,1]) \cup D^i_1$ mit den Identifikationen $\partial D^i_j = S^{i-1} \times \{j\}$ für $j = 0,1$. Wir definieren eine stetige Abbildung $\beta\colon S^i \longrightarrow C^i$ auf folgende Weise:

$$\beta\,|D'^i_0 = ch_{\sigma^i}, \ \beta\,|D'^i_1 = \overline{\alpha} \text{ und } \beta\,|S^{i-1} \times [0,1]\,(s,t) = h(att_{\sigma^i}(s),t)$$

Via der Abbildung ß kleben wir eine (i+1)-Zelle σ^{i+1} in C ein. Die Bewertung v kann man auf den so entstehenden Komplex gemäß (II.2.4) zu einer Abbildung v' fortsetzen, so daß für die charakteristische Abbildung $ch_{\sigma^{i+1}}\colon D^i_0 \times [0,1] \equiv D^{i+1} \longrightarrow C^{i+1}$ gilt:

$$(*) \qquad v'(ch_{\sigma^{i+1}}(d,t)) > v'(ch_{\sigma^{i+1}}(d,0)) \text{ für alle } d \in D'^i_0 \text{ und alle } t > 0.$$

Die anheftende Abbildung $att_{\sigma^{i+1}} = \beta\colon S^i \longrightarrow C^i$ besitzt in C eine stetige Fortsetzung $\beta'\colon D^{i+1} \longrightarrow C$, da C zusammenziehbar ist. Also können wir eine elementare Expansion im Sinne des einfachen Homotopietyps durchführen und neben der $(i+1)$-Zelle σ^{i+1} eine $(i+2)$-Zelle σ^{i+2} einkleben, so daß der Homotopietyp von C erhalten bleibt.

Da C^i modulo der Aktion von G nur endlich viele i-Zellen besitzt und unsere Konstruktion mit der G-Aktion verträglich ist, können wir sie für alle i-Zellen von C durch endlich viele elementare Expansionen am Grundkomplex $K = C/_G$ durchführen. Dadurch erhalten wir den freien G-Komplex $C' \supseteq C$ und eine Fortsetzung v' der Bewertung v auf C'.

Wichtig ist die Beobachtung, daß K' wieder endliches k-Gerüst besitzt und für den Teilkomplex $C'_{v'}$ der universellen Überlagerung von K' die Voraussetzung erhalten bleibt, daß $C'_{v'}$ im wesentlichen $(k-1)$-zusammenhängend ist. Dies werden wir im nächsten Abschnitt beweisen (Lemma (3.3)).

Ist $c \in C^i \setminus C^{i-1}$, also im Innern einer i-Zelle σ^i, dann gibt es nach Konstruktion eine $(i+1)$-Zelle σ^{i+1} mit anheftender Abbildung vom Typ β und charakteristischer Abbildung $ch_{\sigma^{i+1}}$, die $(*)$ erfüllt. Die Homotopie $h'\colon C^i \times [0,1] \longrightarrow C^{i+1}$, definiert durch

$$h'(c,t) = ch_{\sigma^{i+1}}(d,t) \text{ mit } d = ch_{\sigma^i}{}^{-1}(c) \in D^i_0 \text{ für alle } c \in C^i \setminus C^{i-1}$$

und

$$h'(c,t) = h(c,t) \text{ für alle } c \in C^{i-1},$$

ist dann eine v'-Homotopie in der Dimension i. □

Die induktive Konstruktion der v-Homotopie im Beweis von Satz (2.4) sichert gleichzeitig die Existenz von *kompatiblen* v-Homotopien in allen Dimensionen $\leq k$. Eine v-Homotopie h^i von C in der Dimension i heißt *kompatibel* mit einer v-Homotopie h^j in Dimension $j < i$, wenn die Restriktion von h^i auf das j-Gerüst von C gerade h^j ist. Diese Eigenschaft impliziert den (k-1)-Zusammenhang des Teilkomplexes C_v:

(2.5) Satz. *Ist K ein K(G,1)-Komplex mit endlichem k-Gerüst, dessen universelle Überlagerung C kompatible v-Homotopien in den Dimensionen $\leq k$ bezüglich einer Bewertung v besitzt, dann ist der Teilkomplex C_v von C (k-1)-zusammenhängend.*

BEWEIS: C_v ist zusammenhängend (III.2.5). Sei $\alpha: (S^i,*) \longrightarrow (C^i_v,*)$ für ein $i < k$ eine stetige Abbildung. Da C zusammenziehbar ist, hat α eine stetige Fortsetzung $\alpha': (D^{i+1},*) \longrightarrow (C,*)$. Sei $r = \min v(\alpha'(D^{i+1}))$. Es gibt eine v-Homotopie h in der Dimension i+1, die um einen Betrag $\geq r$ verschiebt, also ist

$$\beta' : (D^{i+1},*) \longrightarrow (C,*) \xrightarrow{h} (C_v,h(*))$$

eine stetige Fortsetzung von $\beta : (S^1,*) \longrightarrow (C,*) \xrightarrow{h} (C_v,h(*))$. α ist frei homotop zu β und β ist nullhomotop in C_v, d.h. C_v ist i-zusammenhängend. □

(2.6) Korollar. *Sei G eine Gruppe vom Typ F_k, $[\chi] \in S(G)$ ein Charakter der Gruppe. Dann sind äquivalent:*

(i) $[\chi] \in {}^*\Sigma^k$

(ii) G *hat einen* K(G,1)*-Komplex mit endlichem* k*-Gerüst und universeller Überlagerung* C *mit Bewertung* v_χ *zu* $[\chi]$*, so daß* C *kompatible* v*-Homotopien in den Dimensionen* $\leq$ k *besitzt.* □

(2.7) Satz A. ${}^*\Sigma^k$ *ist offen in* S(G).

BEWEIS: Da $C^k/_G$ endlich ist und eine v-Homotopie nach Definition G-äquivariant ist, gibt es zu jedem Charakter $[\chi] \in {}^*\Sigma^k$ auch eine Umgebung in S(G), in der die Bedingung (ii) von Korollar (2.6) erfüllt ist. □

3 Deformationen im Sinne des einfachen Homotopietyps

Ein Charakter $[\chi]$ einer endlich erzeugten Gruppe G ist genau dann in ${}^*\Sigma^k$, wenn ein endlicher CW-Komplex K der Dimension k existiert mit $\pi_1(K) \cong G$ und $\pi_i(K) = 0$ für $1 < i < k$, so daß für eine Bewertung v_χ auf der universellen Überlagerung C von K der Teilkomplex C_v (k-1)-zusammenhängend ist. Der Komplex K ist dann das (endliche) k-Gerüst eines CW-Komplexes vom Typ K(G,1). Der Eilenberg-Mac-Lane-Komplex K(G,1) ist bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig durch

G bestimmt. In diesem Abschnitt wollen wir analysieren, wie sich die Zusammenhangseigenschaften des Teilkomplexes zu einer Bewertung v_χ verhalten, wenn man einen anderen K(G,1)-Komplex mit endlichem k-Gerüst L betrachtet.

Unter einer (k-1)-Homotopieäquivalenz versteht man eine stetige Abbildung $f\colon K \longrightarrow L$ zweier CW-Komplexe K und L, die Isomorphismen der Homotopiegruppen bis zur Dimension k-1 induziert. K und L heißen *vom gleichen* k-*Typ*, wenn es zwischen ihnen eine (k-1)-Äquivalenz gibt. Insbesondere ist die Restriktion einer Homotopieäquivalenz zweier K(G,1)-Komplexe auf ihre k-Gerüste eine (k-1)-Äquivalenz. Ferner gilt, daß zwei endliche Komplexe K und L der Dimension k mit isomorpher Fundamentalgruppe und verschwindenden Homotopiegruppen in den Dimensionen i für $1 < i < k$ vom gleichen k-Typ sind, weil in dieser Situation die Obstruktion für die Realisierung einer (k-1)-Äquivalenz verschwindet.

(3.1) Satz. (Whitehead [18]). K *und* L *seien endliche CW-Komplexe vom selben* k-*Typ. Dann gibt es eine endliche Folge von elementaren Deformationen im Sinne des einfachen Homotopietyps zusammen mit dem Anheften oder Weglassen von Zellen der Dimension* $> k$, *die* K *in* L *überführt.*

Für unsere Fragestellung genügt es also, die Wirkung von elementaren Deformationen der Dimension $\leq k$ auf den Teilkomplex C_v der universellen Überlagerung C von K zu studieren. Wir betrachten die folgende Situation:

Der Komplex L entstehe aus K durch eine elementare Expansion der Dimension i ($1 < i \leq k$). D.h. es gilt:

$$L = K \cup \sigma^{i-1} \cup \sigma^{i} \quad ,$$

wobei das Innere der Zellen σ^{i-1} und σ^i nicht in K enthalten ist und es ein Paar von Bällen (D^i, D^{i-1}) gibt zusammen mit einer Abbildung $\varphi\colon D^i \longrightarrow L$, die folgenden Bedingungen genügt:

(1) φ ist charakteristische Abbildung für σ^i

(2) $\varphi|_{D^{i-1}}$ ist charakteristische Abbildung für σ^{i-1}, und

(3) für P^{i-1}, den Abschluß von $\partial D^i - D^{i-1}$ gilt $\varphi(P^{i-1}) \subseteq K^{i-1}$.

Mit C bzw. D sei die universelle Überlagerung von K resp. L bezeichnet. Eine auf C gegebene Bewertung $v\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$ läßt sich dann zu einer Bewertung auf D fortsetzen. Da die Zellenstruktur der (universellen) Überlagerung eines CW-Komplexes durch die Lifts der charakteristischen Abbildungen und damit der Zellen gegeben ist, enthält der Komplex D ein Paar von G-Bahnen von Zellen $\{(g\tilde{\sigma}^i, g\tilde{\sigma}^{i-1}) \mid g \in G\}$, wobei $\tilde{\sigma}^i$ und $\tilde{\sigma}^{i-1}$ einen Lift von σ^i und σ^{i-1} bezeichnet. Durch die kanonische Wahl von $\tilde{\sigma}^{i-1}$ in Abhängigkeit von der Wahl des Lifts von σ^i ist für alle $g \in G$ die Zelle $g\tilde{\sigma}^{i-1}$ freie Seite von $g\tilde{\sigma}^i$. Für jede Fortsetzung $v'\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ einer gegebenen Bewertung $v\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt dann:

(3.2) $\qquad v'(g\tilde{\sigma}^i) \le v'(g\tilde{\sigma}^{i-1})$ für alle $g \in G$.

Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

(3.3) Lemma. *Der CW-Komplex* L *sei das Resultat einer elementaren Expansion des Komplexes* K *in der Dimension* i . *Für die Teilkomplexe* $D_{v'}$ *und* C_v *der universellen Überlagerung ist dann gültig:*
$D_{v'}$ *ist genau dann im wesentlichen* $(k-1)$*-zusammenhängend, wenn* C_v *im wesentlichen* $(k-1)$*-zusammenhängend ist.*

BEWEIS: Ist $g\tilde{\sigma}^i \subseteq D_{v'}$, dann ist wegen (3.2) auch $g\tilde{\sigma}^{i-1} \subseteq D_{v'}$. Für alle diese Zellen entsprechen somit der elementaren Expansion von K elementare Expansionen von C_v. Sei D' der Komplex, der aus C_v durch diese Expansionen entsteht.

Ist C_v im wesentlichen $(k-1)$-zusammenhängend, dann ist der durch die Inklusion induzierte Homomorphismus $\pi_i(C_v) \longrightarrow \pi_i(D_{v',r})$ für ein $r \ge 0$ die Nullabbildung. Da der Teilkomplex D' von $D_{v'}$ homotopieäquivalent zu C_v ist, ist D' in $D_{v',r}$ im wesentlichen $(k-1)$-zusammenhängend. N bezeichne den Kern des Homomorphismus χ, zu dem v und v' assoziiert sind. $D_{v'}$ entsteht aus D' durch das N-äquivariante Anheften der Zellen $g\tilde{\sigma}^{i-1} \subseteq D_{v'}$, für die $g\tilde{\sigma}^i \not\subseteq D_{v'}$ gilt. Da der v-Wert der zugehörigen Zellen $g\tilde{\sigma}^i$ nach unten beschränkt ist, gibt es ein $s \ge r$, so daß $D_{v'}$ in $D_{v',s}$ im wesentlichen $(k-1)$-zusammenhängend ist.

Ist die durch die Inklusion induzierte Abbildung
$\pi_i(D_{v'}) \longrightarrow \pi_i(D_{v',s})$ trivial für $1 \le i < k$ und ein $s \ge 0$, dann gibt es

ein $t \geq s$, so daß D' in $C_{v,t}$ im wesentlichen (k-1)-zusammenhängend ist. Da C_v ein Deformationsretrakt von D' ist, folgt, daß die induzierten Homomorphismen $\pi_i(C_v) \longrightarrow \pi_i(C_{v,t})$ für $1 \leq i < k$ die trivialen sind. □

(3.4) Satz. G *sei eine Gruppe vom Typ* F_k *und* $[\chi] \in S(G)$. *Dann sind äquivalent:*

(i) $[\chi] \in {}^*\Sigma^k$

(ii) *Ist* L *ein* K(G,1)*-Komplex mit endlichem k-Gerüst und universeller Überlagerung* D, *dann ist für eine Bewertung* v_χ *auf* D *der Teilkomplex* D_v *im wesentlichen* (k-1)*-zusammenhängend.*

BEWEIS: Ist (ii) erfüllt, dann gibt es nach (2.4) einen K(G,1)-Komplex K mit endlichem k-Gerüst, dessen universelle Überlagerung C eine v-Homotopie für eine Bewertung v_χ besitzt. Dann ist wegen (2.5) der Teilkomplex C_v von C (k-1)-zusammenhängend. □

Wir können nun den Zusammenhang der Invariante ${}^*\Sigma^k$ mit ihrem homologischen Analogon Σ^k vollständig bestimmen:

Sei $[\chi] \in \Sigma^k \cap {}^*\Sigma^2$. G ist dann endlich präsentiert und vom Typ FP_k. Also gibt es einen K(G,1)-Komplex K mit endlichem k-Gerüst und universeller Überlagerung C, so daß C_v jedenfalls einfach zusammenhängend ist.

Man kann K so wählen, daß gilt:

(*)
1. Für jede Zelle σ in K ist $\partial\sigma$ Vereinigung von Zellen von K.
2. $\mathbf{C} \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$, der zelluläre Kettenkomplex der universellen Überlagerung C von K ist eine im Sinne von [4] zulässige Auflösung, d.h. für jede Erzeugende x_σ in $\mathbf{C}$ gilt $\delta x_\sigma \neq 0$ (siehe (I.2.13)).

Diese Wahl von K gelingt durch folgende Konstruktion. Wir beginnen mit einer Präsentation $\langle X;R \rangle$ von G, für die gilt: jedes Erzeugende $x \in X$ ist $\neq 1$ in G und R enthalte keine triviale Relation, für die bereits $r = 1$ in F(X) gelten würde. Ist $[\chi] \in {}^*\Sigma^2$, dann gibt es stets eine solche Präsentation, so daß im Cayley-Komplex C der Teilkomplex C_v 1-zusammenhängend ist. Für den Induktionsschritt im Gang des Beweises benötigen wir die Fortsetzung dieser Konstruktion. Ist G vom Typ F_k $(k \geq 3)$, dann ist dies äquivalent dazu, daß G vom Typ F_{k-1} ist und für jeden endlichen Zellenkomplex K mit $\pi_1(K) \cong G$ und $\pi_i(K) = 0$ $(1 < i < k-1)$ ist $\pi_{k-1}(K)$ ein endlich erzeugter $\pi_1(K)$-Modul [16]. Für jedes Erzeugende von $\pi_{k-1}(K)$ als G-Modul wählen wir eine anheftende Abbildung für eine k-Zelle und "töten" $\pi_{k-1}(K)$ damit so, daß K die verlangten Bedingungen erfüllt. Da die zu $[\chi]$ assoziierte Bewertung v_χ (V3) erfüllt und C_v durch sein 0-Gerüst bestimmt ist, gibt es im Falle $[\chi] \in {}^*\Sigma^k$ stets einen auf diese Weise konstruierten Komplex K, so daß C_v $(k-1)$-zusammenhängend ist.

Sei $k \geq 3$. Der zelluläre Kettenkomplex der universellen Überlagerung C: $\mathbf{C} \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$ ist dann eine zulässige freie Auflösung von $\mathbf{Z}$ über $\mathbf{Z}G$ mit endlich erzeugtem 3-Gerüst. Die auf dem CW-Komplex C gegebene Bewertung v induziert dann eine Bewertung der Auflösung $\mathbf{C}$, die wir auch v nennen wollen. C_v ist einfach zusammenhängend und $\mathbf{C}_v$ ist bis zur Dimension 2 nach Proposition 3.2 von [4] im wesentlichen exakt. Da die Homologie eines CW-Komplexes isomorph zur Homologie seines zellulären Kettenkomplexes ist, erhalten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H_2(C_v) & \xrightarrow{0} & H_2(C_{v,r}) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \pi_2(C_v) & \longrightarrow & \pi_2(C_{v,r}) \end{array}$$

h bezeichnet die Hurewicz-Isomorphismen und die waagrechten Abbildungen sind die durch die Inklusion induzierten. Da $\mathbf{C}_v$ im wesentlichen 2-exakt ist, ist $H_2(C_v) \longrightarrow H_2(C_{v,r})$ der triviale Homomorphismus. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt, daß dann C_v auch im wesentlichen 2-zusammenhängend ist. Also gilt $[\chi] \in {}^*\Sigma^3$. Die Konstruktion im Beweis von (2.4) kann man so durchführen, daß die Eigenschaften (*) von K und **C** erhalten bleiben. Induktiv folgt also mit Satz (3.4) die Behauptung von Satz B.

(3.5) Satz B. *Sei* G *eine Gruppe vom Typ* F_n $(n \geq 1)$. *Dann gilt*

(1) ${}^*\Sigma^1 = \Sigma^1$

(2) ${}^*\Sigma^k = \Sigma^k \cap {}^*\Sigma^2$ *für* $2 \leq k \leq n$. □

4 Ein kombinatorisches Kriterium für ${}^*\Sigma^2$

Für die Analyse der geometrischen Invariante ${}^*\Sigma^2$ betrachten wir den durch eine Präsentation $\langle X;R\rangle$ von G bestimmten Cayley-Komplex der Gruppe G. Ist ${}^*\Sigma^2 \neq \emptyset$, dann ist G endlich präsentiert, was wir jetzt stets voraussetzen wollen. Wir verwenden die Definitionen und die Notation von (II.4). Insbesondere bezeichnet v_χ eine zu einem Charakter $[\chi] \in S(G)$ gehörende kombinatorische Bewertung auf dem Cayley-Komplex $C = C(X;R)$ der Gruppe. Wir leiten ein kombinatorisches Kriterium für ${}^*\Sigma^2$ her, das das Kriterium für ${}^*\Sigma^1$ (III.2.5) für die Dimension 2 verallgemeinert.

Es gelte $[\chi] \in {}^*\Sigma^1$. Sei $t \in X^{\pm 1}$ ein Buchstabe mit $\chi(t) > 0$. Für jedes $x \in X^{\pm 1}$, $x \neq t$ gibt es für x^t eine Darstellung w_x als Wort in den Erzeugenden $X^{\pm 1}$ mit $v_\chi(w_x) > v_\chi(x^t)$. Es gibt also eine endliche Präsentation $G = \langle X;R\rangle$, so daß die Menge R der definierenden Relation von G als Teilmenge $\{x^t = w_x \mid x \in X^{\pm 1} \setminus \{t,t^{-1}\}\}$ enthält.

Ist r eine Relation $r = x_1 x_2 \cdots x_n$ mit $x_i \in X^{\pm 1}$, dann schreiben wir $\hat{r}$ für das Wort, das aus r entsteht, indem man für alle x_i den Ausdruck w_{x_i} für x_i^t einsetzt: $\hat{r} = w_{x_1} w_{x_2} \cdots w_{x_n}$. $\hat{r}$ ist dann eine Relation der Gruppe G. Ein einfaches Diagramm, welches diese Relation herleitet, bezeichnen wir mit $M_{\hat{r}}$.

Man wähle einen Basispunkt b_0 des mit r bezeichneten Kantenwegs. Wir verlangen, daß das *bewertete* Diagramm $M_{\hat{r}}$ bezogen auf den Basispunkt b_0 von r zu betrachten ist. In Abb. IV.1 ist dargestellt, daß der Basispunkt $b_1 \in G$ von $M_{\hat{r}}$ in Abhängigkeit von b_0 zu wählen ist. Es gilt dann: $v(b_1) = v(b_0) + \chi(t)$.

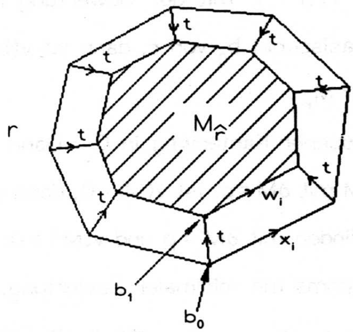

Abb IV.1

(4.1) Satz. *Es gelte für eine endlich präsentierte Gruppe* G $[\chi] \in {}^*\Sigma^1$. *Unter obigen Voraussetzungen sind dann folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $[\chi] \in {}^*\Sigma^2$

(ii) *Es gibt eine endliche Präsentation von G, so daß es für jeden geschlossenen Kantenweg* p *in* C_v *ein einfaches Diagramm* M *gibt mit* $\partial M = p$ *und* $v(M) \geq 0$.

(iii) *Es existiert eine endliche Präsentation von G, so daß gilt: Für jede Relation* $r \in R^{\pm 1}$ *gibt es ein einfaches Diagramm* $M_{\hat{r}}$ *mit* $\partial M_{\hat{r}} = \hat{r}$ *und* $v(M_{\hat{r}}) > v(r)$.

BEWEIS: Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen wurde in (II.4.6) bewiesen. Wenn (ii) erfüllt ist, dann gibt es insbesondere ein $\hat{r}$ herleitendes Diagramm M mit $v(M) \geq 0$. Hier ist die Bewertung unter v auf einen Basispunkt b_1 von $\hat{r}$ bezogen. Betrachten wir – mit den Bezeichnungen von Abb. IV.1 – $\hat{r}$ mit der Bewertung bezogen auf den korrespondierenden Basispunkt b_0 von r, dann ist $v(b_1) = \chi(t) + v(b_0)$. Also folgt (iii) mit $M = M_{\hat{r}}$.

Sei p ein geschlossener Kantenweg in C_v. Dann gibt es in C ein einfaches Diagramm M mit $\partial M = p$. Ist $v(M) < 0$, dann gestattet es (iii), ein Diagramm M' zu finden mit $\partial M' = p$ und $v(M') \geq 0$: Sei g eine Ecke im Inneren des Diagramms mit minimaler Bewertung, d.h. $v(g) = v(M)$. Für alle Flächenstücke $r_1, r_2, \ldots, r_n$, die g als Ecke enthalten, gilt $v(r_i) \geq v(g)$. Diese Situation einer "kritischen" Ecke im Diagramm M ist in Abb. IV.2 dargestellt.

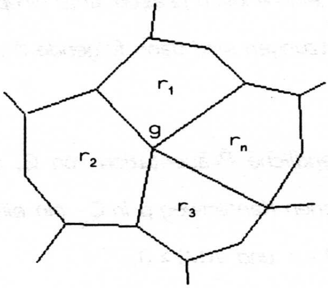

Abb.IV.2

Wir konjugieren nun jede der Relationen r_i mit t und setzen die Diagramme $M_{\hat{r}_i}$ ein. Auf diese Weise erhalten wir ein Diagramm M_1, das in der Nähe des Punktes g die in Abbildung IV.3 dargestellte Gestalt hat.

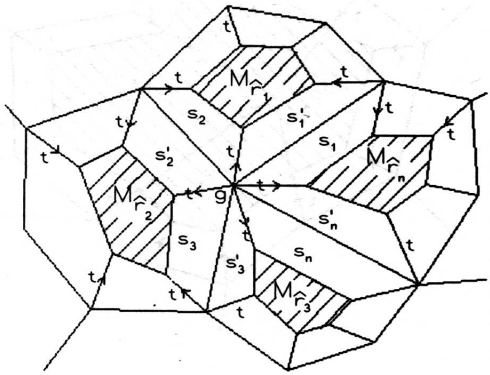

Abb.IV.3

Offensichtlich stellen die Flächenstücke s_i und s_i' geometrisch dieselbe Relation mit umgekehrter Orientierung dar und sie sind an ein und derselben Kante benachbart. Also kann man durch Lyndon-Reduktionen alle diese Flächenstücke reduzieren. Dadurch verschwindet auch der Punkt g. Wir erhalten also eine Diagramm M_2, welches den kritischen Punkt g nicht mehr enthält und ferner wegen (iii) gegenüber M nur solche neuen Ecken h aufweist, für welche $v(h) > v(g)$ gilt.

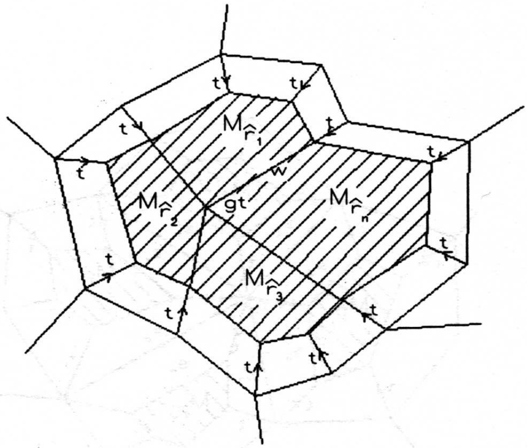

Abb.IV.4

Durch die sukzessive Anwendung dieses Arguments für die kritischen Punkte des Diagramms M erreicht man nach endlich vielen Schritten schließlich das gesuchte einfache Diagramm M', das (ii) erfüllt. □

(4.2) Bemerkung. Das Kriterium (4.1) für $^*\Sigma^2$ ist die kombinatorische Version einer v-Homotopie in der Dimension 2, denn für jede Relation $r \in R$, also 2-Zelle von C, beschreibt (4.1) das Bild $h(\cdot,1)$ unter einer v-Homotopie h: gerade $M_{\hat r}$. Die Bedingung (iii) von (4.1) ist eine offene Bedingung, woraus wir wieder Satz A für $k = 2$ erhalten.

Wir wollen noch für den Fall $k=2$ ein Kriterium für kompakte Teilmengen $\Gamma \subseteq S(G)$ bereitstellen.

(4.3) Satz. *Folgende Aussagen sind für eine nicht-leere kompakte Teilmenge* $\Gamma \subseteq {}^*\Sigma^1 \subseteq S(G)$ *gleichwertig:*

(i) $\Gamma \subseteq {}^*\Sigma^2$

(ii) *Es gibt eine endliche Präsentation* $G=\langle X;R\rangle$ *mit der Eigenschaft: Für alle* $[\chi] \in \Gamma$ *gibt es ein* $t \in X^{\pm 1}$ *mit* $\chi(t) > 0$, *so daß die Bedingung* (4.1)(iii) *erfüllt ist.*

(iii) *Es existiert eine endliche Präsentation* $G=\langle X;R\rangle$ *bezüglich der es eine endliche Menge* $\mathfrak{M}$ *von einfachen Diagrammen* $M_{\hat{r}}$ *gibt, in welcher für jedes* $[\chi] \in \Gamma$ *und alle* $r \in R^{\pm 1}$ *ein* $M_{\hat{r}}$ *mit* $\partial M_{\hat{r}} = \hat{r}$ *und* $v_\chi(M_{\hat{r}}) > v_\chi(r)$ *zu finden ist.*

BEWEIS: Da jedes $[\chi] \in \Gamma$ in ${}^*\Sigma^1$ liegt, gibt es zu $[\chi]$ ein $t \in X^{\pm 1}$ mit $\chi(t) > 0$ und einem Weg $w_\chi(x) = x^t$ mit $v_\chi(w) > v_\chi(x^{\ t})$. Da ${}^*\Sigma^1$ offen ist, genügen endlich viele solcher Wege, um diese Bedingung für alle $[\chi] \in \Gamma$ zu erfüllen. Wir wählen eine endliche Präsentation von G, die diese endliche Menge ausgezeichneter Wege als definierende Relationen enthält.

Ist $[\chi] \in {}^*\Sigma^2$, dann ist die Aussage (4.1)(iii) wahr. Also folgt (ii) aus (i).

Da ${}^*\Sigma^2$ offen und Γ kompakt ist, genügen endlich viele Diagramme aus (ii), die fragliche Bedingung für alle Charaktere in Γ zu erfüllen. Also ist (iii) richtig. □

V ENDLICHKEITSEIGENSCHAFTEN VON NORMALTEILERN

1 Filtration des Cayley-Komplexes von G

Sei G eine Gruppe vom Typ F_k $(k \geq 1)$ und N ein Normalteiler mit Abelscher Faktorgruppe Q. Wir setzen voraus, daß Q eine frei Abelsche Gruppe vom Rang n sei. Q kann man identifizieren mit dem ganzzahligen Gitter $\mathbb{Z}^n$ in $\mathbb{R}^n$. Es existiert dann ein Isomorphismus $\mathbb{R}^n \cong \mathrm{Hom}(Q,\mathbb{R})$, unter dem ein $x \in \mathbb{R}^n$ auf den Homomorphismus $(q \mapsto \langle x,q \rangle)$ abgebildet wird, wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Dieser *Koordinatenisomorphismus* induziert einen Homöomorphismus $S^{n-1} \longrightarrow S(Q)$.

Die kanonische Projektion $\pi: G \twoheadrightarrow Q$ induziert eine Einbettung $\pi^*: S(Q) \rightarrowtail S(G)$, die S(Q) isomorph auf die Untersphäre S(G,N) abbildet. Jedem $u \in S^{n-1}$ wird somit der Punkt $[\chi_u] \in S(G)$ zugeordnet, der repräsentiert wird durch χ_u mit $\chi_u(g) = \langle u, \pi(g) \rangle$ für $g \in G$.

Die Identifikation von Q mit $\mathbb{Z}^n$ gestattet es, auf G eine *Norm* $\|\cdot\|: G \longrightarrow \mathbb{R}$ zu definieren: Für ein $g \in G$ sei $\|g\| = \|\pi(g)\|$.

Die Normabbildung hat folgende Eigenschaften:

(1.1) $\|gh\| \leq \|g\| + \|h\|$ für alle g und h in G

(1.2) $\|ng\| = \|g\|$ für alle $g \in G$ und alle $n \in N$.

Ist C das modulo G endliche k-Gerüst der universellen Überlagerung eines K(G,1)-Komplexes, dann induziert die Normabbildung der Gruppe eine Norm auf C.

Dies gilt insbesondere für den Cayley-Komplex C einer endlich präsentierten Gruppe $G = \langle X;R \rangle$. Ist $p = e_1 e_2 \cdots e_n$ ein Kantenweg in C, dann definieren wir die Norm von p (bezogen auf den Anfangspunkt g von p) durch

$$\|p\| = \max\{\|g\|, \|g\varphi(e_1)\|, \ldots, \|g\varphi(e_1)\cdots\varphi(e_n)\|\}.$$

Ebenso kann man für ein einfaches Diagramm M über $\langle X;R \rangle$ die Norm definieren bezogen auf einen Basispunkt g des Diagramms:

$$\|M\| = \max\{\|gh\| \mid h \text{ ist Ecke von } M\}.$$

Wir benutzen die Norm, um eine Filtration des freien G-Komplexes C durch freie N-Komplexe zu definieren:

(1.3) Definition. *Für jede reelle Zahl* $r \geq 0$ *sei* C_r *der volle Teilkomplex von C, der von den 0-Zellen* σ^0 *erzeugt wird, für die* $\|\sigma^0\| \leq r$ *gilt.*

(1.4) Lemma. C_r *ist für alle* $r \geq 0$ *ein freier* N-*Komplex mit endlich vielen Zellen modulo der Aktion von* N.

BEWEIS: Wegen (1.2) ist C_r ein N-Komplex. Die Stabilisatoren der Zellen unter der Operation von N sind trivial, weil G frei auf C operiert. Das 0-Gerüst der zur Untergruppe N von G gehörenden Abelschen Überlagerung $\overline{C}$ des Standardkomplexes der Präsentation von G besteht aus den Elementen von Q, also von $\mathbf{Z}^n$. C_r/N ist also ein endlicher Teilkomplex von $\overline{C}$. □

(1.5) Lemma. N *ist genau dann endlich präsentierbar, wenn es ein* $q \geq 0$ *gibt, so daß der Teilkomplex* C_q *des Cayley-Komplexes* C *zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.* □

2 Beweis von Satz C

Wir betrachten eine Gruppe G vom Typ F_k $(k \geq 1)$ und in G einen Normalteiler N mit Abelscher Faktorgruppe $Q = G/N$. N ist dann im allgemeinen nicht selbst vom Typ F_k. Die geometrische Invariante $^*\Sigma^k$ erlaubt es jedoch, die Endlichkeitseigenschaften von N zu kontrollieren:

Satz C. N ist genau dann vom Typ F_k, wenn $S(G,N) \subseteq {}^*\Sigma^k$ gilt.

S(G,N) bezeichnet die Untersphäre all derjenigen Charaktere $[\chi] \in S(G)$, die auf N verschwinden.

(2.1) Reduktion.

Der Normalteiler N ist genau dann vom Typ F_k, wenn er endlich präsentierbar und vom Typ FP_k ist. Da die Aussage von Satz C für die Endlichkeitseigenschaft FP_k und die Invariante Σ^k gilt, genügt es wegen Satz B, den Fall $k=2$ zu beweisen.

Ist N_1 eine Untergruppe in N von endlichem Index, dann ist N_1 genau dann endlich präsentierbar, wenn dies für N der Fall ist. Ferner ist $S(G,N) = S(G,N_1)$. Also können wir uns darauf beschränken, das Urbild der Torsionsuntergruppe von $Q = G/N$ unter der kanonischen Projektion $G \twoheadrightarrow Q$ zu betrachten. D.h. man kann voraussetzen, daß Q frei Abelsch vom Rang n ist.

(2.2) Der Cayley-Komplex der Erweiterung einer endlich präsentierten Gruppe mit $\mathbb{Z}^n$.

Wir setzen für die einfachere Richtung des Beweises von Satz C voraus, daß N endlich präsentiert ist. Sei $N = \langle x_1,\dots,x_m ; r_1,\dots,r_k\rangle$ und Q die frei Abelsche Gruppe vom Rang n. Q sei präsentiert durch $\langle y_1,\dots,y_n ; s_1,\dots,s_\ell\rangle$, wobei die definierenden Relationen von Q gerade die Kommutatoren zwischen den Erzeugenden sind.

Die Gruppe G, Erweiterung von N mit Q, wird dann erzeugt von $x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_n$ mit den definierenden Relationen

$$R = \{ r_i(x) = 1 \mid i = 1,\dots,k \}$$

$$S_1 = \{ s_j(y) = w_j(x) \mid j = 1,\dots,\ell \} \quad \text{und}$$

$$S_2 = \{ y_j^{-1} x_i y_j = u_{ij}(x),\ y_j x_i y_j^{-1} = v_{ij}(x) \mid i = 1,\dots,m\ j = 1,\dots,n \}$$

Wir betrachten einen Charakter $[\chi] \in S(G,N)$, repräsentiert durch den Homomorphismus $\chi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$. Es gilt dann $\chi(N)=0$, also $\chi(x_i)=0$ für die Erzeugenden von N in G. Da N endlich erzeugbar ist und die Aussage von Satz C für die Invariante ${}^*\Sigma^1$ richtig ist, gilt $[\chi] \in {}^*\Sigma^1$. Man kann das auch leicht mit dem Kriterium (III.2.5) nachprüfen:

Wähle ein $t \in \{y_1,\ldots,y_n\}^{\pm 1}$ mit $\chi(t) > 0$. Ohne Einschränkung sei $t = y_1$. Dann gilt:

(2.3) $t^{-1}x_i t = u_{i1}(x)$ und $t^{-1}x_i^{-1}t = u_{i1}(x)^{-1}$ für $i=1,\ldots,m$

(2.4) $t^{-1}y_j t = y_j w_j(x)$ und $t^{-1}y_j^{-1}t = w_j(x)y_j^{-1}$ für $j=2,\ldots,n$

Also folgt:

$$v_\chi(t^{-1}x_i t) < v_\chi(u_{i1}(x)), \quad v_\chi(t^{-1}x_i^{-1}t) < v_\chi(u_{i1}(x)^{-1}), \text{ sowie}$$

$$v_\chi(t^{-1}y_j t) < v_\chi(y_j w_j(x)) \text{ und } v_\chi(t^{-1}y_j^{-1}t) < v_\chi(w_j(x)y_j^{-1}).$$

Um zu zeigen, daß auch $[\chi] \in {}^*\Sigma^2$ gilt, werden wir die Gültigkeit der Bedingung (IV.4.1) (iii) für die Relationen von G verifizieren.

Ist r eine Relation in R, dann enthält die Relation $\hat{r}$ (in der Notation von (IV.4), die wir beibehalten) wegen (2.3) nur Buchstaben aus der Erzeugendenmenge von N. $\hat{r}$ ist also eine Relation in N, die sich aus den definierenden Relationen von N ableiten läßt. Also gibt es für alle $r \in R^{\pm 1}$ ein Diagramm $M_{\hat{r}}$ mit $\partial M = \hat{r}$ und $v_\chi(M) > v_\chi(r)$.

Sei s eine Relation in S_1. Dann sind zwei Fälle zu betrachten; im ersten kommt t in s vor, im zweiten nicht. In Abbildung V.1 und V.2 ist die Konstruktion der Diagramme M für diese beiden Fälle dargestellt.

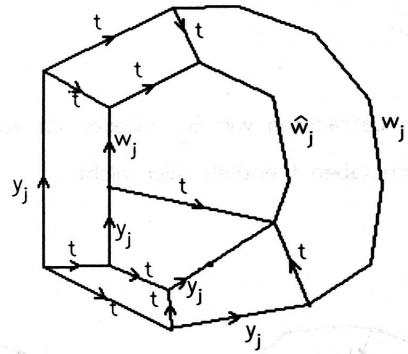

Abb.V.1 Diagramm $M_{\hat{s}}$ für eine Relation s in S_1, die t enthält.

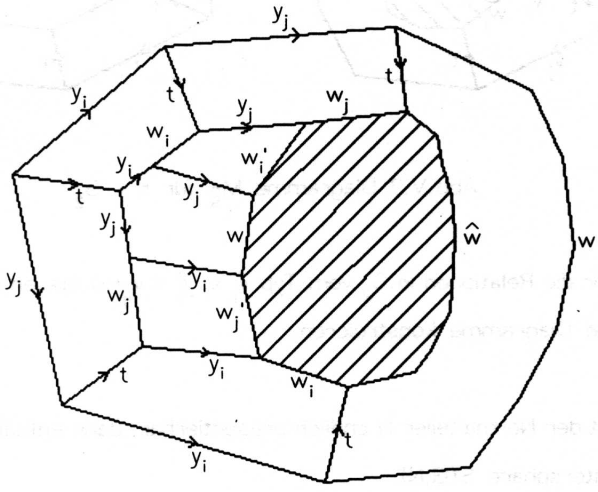

Abb.V.2 Diagramm $M_{\hat{s}}$ für eine Relation s in S_1, die t nicht enthält.

Ein schraffierter Teil bedeutet dabei ein Teildiagramm, welches ungewölbt ist, da es nur Flächenstücke enthält, die Relationen in R als Randweg haben.

Schließlich betrachten wir S_2. Wieder ist zu unterscheiden, ob $s \in S_2$ den Buchstaben t enthält oder nicht.

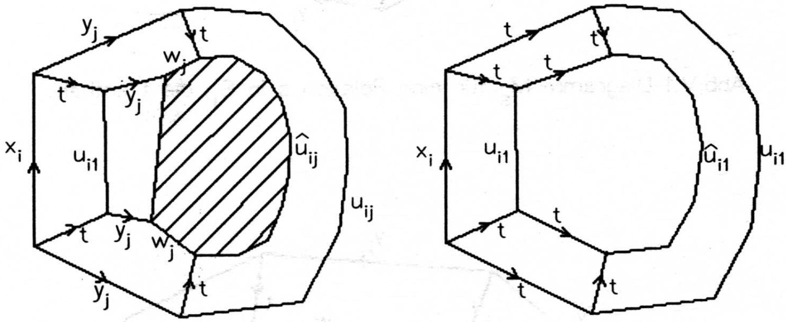

Abb.V.3 Diagramme $M_{\hat{s}}$ für $s \in S_2$

Für die Relationen in S_2 vom Typ $y_j\, x_i\, y_j = v_{ij}(x)$ lassen sich leicht analoge Diagramme konstruieren.

Ist der Normalteiler N endlich präsentierbar, dann enthält also ${}^*\Sigma^2$ die Untersphäre S(G,N).

(2.5) Es gelte $S(G,N) \subseteq {}^*\Sigma^2$. Also ist $S(G,N)$ Teilmenge von ${}^*\Sigma^1$ und N endlich erzeugbar. Beweise für diese erste Schlußfolgerung liegen in [3] für Σ und in [4] für Σ^1 vor. Wir möchten zeigen, daß N unter dieser Voraussetzung auch endlich präsentierbar ist. Die Konzeption des Beweises ist identisch mit der Argumentation in [4] Theorem 5.1.

Da N endlich erzeugbar ist, gibt es ein Erzeugendensystem von G, so daß der Teilkomplex C_q des Cayley-Komplexes C von G für alle $q \geq 0$ zusammenhängend ist. Wegen (IV.4.3) können wir ferner über die Präsentation $\langle X;R \rangle$ von G voraussetzen, daß es für jedes $[\chi] \in S(G,N)$ ein Erzeugendes $t \in X^{\pm 1}$ mit $\chi(t) > 0$ gibt und für jede Relation ein Diagramm $M_{\hat{r}}$ mit $\partial M = \hat{r}$ und $v_\chi(M) > v_\chi(r)$. Die Menge dieser Diagramme $M_{\hat{r}}$ für alle $[\chi] \in S(G,N)$ ist endlich und sei mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Die Charaktere $[\chi] \in S(G,N)$ sind via des Koordinatenisomorphismus mit S^{n-1} identifiziert, wir schreiben für eine zu dem Homomorphismus χ_u ($u \in S^{n-1}$) gehörende Bewertung v_u.

Wir benötigen zwei reelle Parameter:

(2.6) Für jedes $u \in S(G,N)$ sei

$$\rho(u) = \max_{\mathfrak{M}} \min_{r \in R} \{ v_u(M_{\hat{r}}) - v_u(r) \}$$

Da zu einem $u \in S(G,N)$ stets ein Diagramm $M_{\hat{r}}$ existiert mit $v_u(M_{\hat{r}}) > v_u(r)$, ist $\rho(u) > 0$ für alle u. ρ ist eine stetige Funktion des Kompaktum $S(G,N)$ in die positiven reellen Zahlen, also ist

(2.7) $$a = \inf\{ \rho(u) \mid u \in S(G,N) \} > 0.$$

Die Bewertung auf den Diagrammen $M_{\hat{r}}$ ist relativ zur Wahl eines Basispunkts von r bestimmt, dies gilt also auch für die Norm $\|M_{\hat{r}}\|$ des Diagramms. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{M}'$ aller bewerteten Diagramme $M_{\hat{r}}$ bezogen auf jede Ecke des Kantenwegs r als Basispunkt mit Bewertung 0. Anders gesagt: die Diagramme $M_{\hat{s}}$ für die zyklischen Permutationen s von r. Dann sei

(2.8) $$b = \max \{ \|M_{\hat{s}}\| \mid M_{\hat{s}} \in \mathfrak{M}' \}$$

Es gilt dann:

(2.9) Lemma. *Für jeden geschlossenen Kantenweg* p *mit Basispunkt* 1 *in* C *und* $\|p\| > \frac{b^2}{2a}$ *gibt es ein einfaches Diagramm* M_p *mit* $\partial M_p = p$ *und* $\|M_p\| \leq \|p\|$.

Ist $q > \frac{b^2}{2a}$, dann – unterstellt Lemma (2.9) ist wahr – besitzt jeder geschlossene Kantenweg p in C_q ein einfaches Diagramm M_p im Teilkomplex C_q, d.h. die Kantenweggruppe von C_q ist trivial. Also ist dieser Teilkomplex ein zusammenhängender und einfach zusammenhängender freier N-Komplex mit endlichem Bahnenraum modulo der Aktion von N. Folglich erweist sich N als endlich präsentierbar. Satz C folgt also aus Lemma (2.9).

BEWEIS von Lemma (2.9): Sei p ein geschlossener Kantenweg mit $\|p\| > \frac{b^2}{2a}$. In C gibt es ein einfaches Diagramm M_p mit $\partial M = p$. Ist $\|M_p\| > \|p\|$, dann gibt es mindestens einen inneren Punkt g des Diagramms mit $\|g\| = \|M_p\| = c \in \mathbb{R}$. Sei $u = -\frac{\pi(g)}{\|g\|} \in S(G,N)$. Der zu diesem Punkt u gehörende Homomorphismus $\chi_u: G \longrightarrow \mathbb{R}$ hat auf M_p das Minimum $-c$ und dieses wird am Punkt g angenommen. Wir wählen die Erzeugende $t \in X^{\pm 1}$ mit $\chi_u(t) > 0$, so daß für die Menge $\mathfrak{M}_t$ der Diagramme $M_{\hat{r}}$ aus $\mathfrak{M}$, die durch Konjugation der Relationen r mit t entstehen, gilt: $\rho(u) = \min\{v_u(M_{\hat{r}}) - v_u(r) \mid M_{\hat{r}} \in \mathfrak{M}_t\}$. Diese Diagramme können wir in all diejenigen Flächenstücke von M_p einsetzen, die die kritische Ecke g als eine Ecke haben. Das im Beweis von (II.4.1) verwendete Verfahren, durch Lyndon-Reduktionen eine kritische Ecke zu beseitigen, wenden wir auf die Ecke g an (siehe die Abbildungen IV.2 - IV.4). Man erhält auf diese Weise ein einfaches Diagramm M'_p mit $\partial M = p$, welches den Punkt g nicht mehr enthält und ferner nur neue Ecken h hat, für die $v_u(h) > -c + a$ gilt.

Da jedes der zur Modifikation von M verwendeten Diagramme $M_{\hat{r}}$ Norm $\leq b$ hat, sind die neuen Ecken h von M' im schraffierten Bereich von Abbildung V.4 enthalten.

Es ist $c > \frac{b^2}{2a}$ (nach Pythagoras) und folglich ist die Norm $\|h\|$ jeder neuen Ecke h von M'_p kleiner als c. $\|M'_p\| \leq \|M_p\| = c$ und die Ecken der Norm c, die in M' enthalten sind, waren bereits Punkte von M. Da g aber nicht mehr in M' ist, haben wir die Zahl der Ecken mit maximaler Norm um 1 reduziert. Induktiv folgt daraus die Behauptung von Lemma (2.9). □

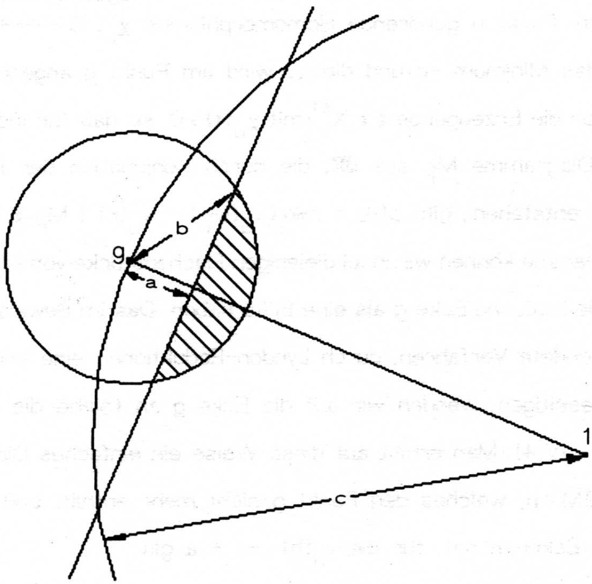

Abb.V.4

VI DISKRETE CHARAKTERE UND HNN-ERWEITERUNGEN

1 Aufsteigende HNN-Erweiterungen mit endlich erzeugter Basisgruppe

Eine HNN-Erweiterung $H = \langle B, t ; B_1^t = B_2 \rangle$ mit Basisgruppe B, den assoziierten Untergruppen B_1, B_2 und stabilem Buchstaben t heißt eine *aufsteigende HNN-Erweiterung*, wenn die Basisgruppe mit der zweiten assoziierten Untergruppe B_2 identisch ist. Der von B in H erzeugte Normalteiler N ist dann die aufsteigende Vereinigung der Kette $\ldots B \subseteq B^t \subseteq B^{t^2} \subseteq \ldots$ Im Fall, daß B mit der ersten assoziierten Untergruppe übereinstimmt, spricht man von einer *absteigenden* HNN-Erweiterung. [Für die Struktur der Gruppe ist dieser Unterschied unwesentlich; wir müssen ihn beachten, wenn Charaktere der Gruppe ins Spiel kommen, dann macht er nämlich ein Vorzeichen aus.]

Ist die endlich erzeugte Gruppe G eine HNN-Erweiterung $G = \langle B, t ; B_1^t = B_2 \rangle$, dann bestimmt der assoziierte Homomorphismus definiert durch $\chi(B) = 0$ und $\chi(t) = 1$ auf kanonische Weise einen diskreten Charakter $[\chi] \in S(G)$. Ist G aufsteigende HNN-Erweiterung, dann ist G mit dem stabilen Buchstaben $s = t^{-1}$ als absteigende HNN-Erweiterung präsentierbar. Für die beiden diskreten Charaktere gilt dann $[\chi_s] = -[\chi_t]$. Der antipodalen Abbildung der Charaktersphäre

S(G) entspricht für rationale Punkte also der Übergang von aufsteigenden zu absteigenden HNN-Erweiterungen - vorausgesetzt, daß G eine solche Präsentation zum Homomorphismus χ_t besitzt.

Wir setzen voraus, daß G als absteigende HNN-Erweiterung mit endlich erzeugter Basisgruppe geschrieben werden kann. Für jedes Erzeugende b_i von B hat dann b_i^t eine Darstellung als Wort in den Erzeugenden von B. Für den Charakter χ_t ist also das Kriterium (III.2.5) offensichtlich erfüllt, d.h. es gilt $[\chi_t] \in {}^*\Sigma^1$.

Sei nun umgekehrt der diskrete Charakter $[\chi]$ in ${}^*\Sigma^1$. Es gibt dann eine Erzeugendenmenge X von G, die ein t mit $\chi(t) = 1$ enthält, während alle anderen Erzeugenden im Kern von χ liegen. Der Bewertungsteilgraph Γ_v des Cayley-Graphen Γ von G ist wegen (III.2.5) zusammenhängend. Γ_0 sei der volle Teilgraph, der von den Ecken g von Γ mit $\chi(g) = 0$ erzeugt wird. Da $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_v$ gilt, folgt, daß N, der Kern von χ, endlich erzeugt ist über dem Untermonoid $\langle t^{-1} |$, etwa durch die endliche Menge $\{b_0, b_1, \ldots, b_k\}$. Sei B_0 die von dieser Menge erzeugte Untergruppe von N. Der normale Abschluß von B_0 in G ist dann N und insbesondere gilt $B_0^t \subseteq N$. Da $N = B_0^{\langle t|}$ gilt, gibt es ein ℓ, so daß die Gruppe $B = \langle B_0 \cup B_0^{t^{-1}} \cup \cdots \cup B_0^{t^{-\ell}} \rangle$ B_0^t enthält. B ist dann unter Konjugation mit t abgeschlossen, es gilt demzufolge $B^t \subseteq B$ und G ist eine absteigende HNN-Erweiterung mit endlich erzeugter Basisgruppe.

Die rationalen Punkte in ${}^{*}\Sigma^1$ charakterisieren also die Präsentierbarkeit von G als absteigende HNN-Erweiterung über einer endlich erzeugten Basisgruppe. Bieri, Neumann und Strebel formulieren in [3] den folgenden Satz, von dem wir eben die Äquivalenz von (i) und (iii) gezeigt haben.

(1.1) Satz. ([3] Proposition 4.3) *Sei* χ: $G \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ *ein Homomorphismus,* $N = \mathrm{Ker}\,\chi$ *und* t *ein Element von* G *mit* $\chi(t) = 1$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $[\chi] \in {}^{*}\Sigma^1$

(ii) N *ist endlich erzeugt als* $\langle t^{-1} \rangle$-*Operatorgruppe*

(iii) G *ist eine absteigende HNN-Erweiterung* $G = \langle B, t; B^t = B_2 \rangle$ *mit endlich erzeugter Basisgruppe* $B \subseteq N$.

(iv) *Ist* G *eine aufsteigende HNN-Erweiterung* $G = \langle C, t; C_1^t = C \rangle$ *und* $C \subseteq N$, *dann gilt* $C = N$.

(1.2) Satz. ([3] Proposition 4.4) G *sei eine HNN-Erweiterung* $\langle B, t; B_1^t = B_2 \rangle$ *über einer endlich erzeugten Basisgruppe* B *mit assoziierten Untergruppen* B_1, B_2 *und stabilem Buchstaben* t. *Ist* χ: $G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ *der durch* $\chi(B) = 0$ *und* $\chi(t) = 1$ *definierte Homomorphismus, dann gilt:*

$$[\chi] \in {}^{*}\Sigma^1 \text{ genau dann, wenn gilt } B = B_1.$$

2 Aufsteigende HNN-Erweiterungen mit endlich präsentierter Basisgruppe

Wir setzen voraus, daß die Gruppe G endlich präsentiert und χ: $G \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$ ein surjektiver Homomorphismus ist. Dann hat G nach [5] eine Präsentation als HNN-Erweiterung $G = \langle B, t; B_1^t = B_2 \rangle$ mit endlich erzeugter Basisgruppe B. Der Isomorphismus $B_1 \cong B_2$ wird induziert durch Konjugation mit der Erzeugenden t eines Komplements von $N = \operatorname{Ker} \chi$ in G. Die geometrische Invariante $^*\Sigma^1$ erlaubt es zu entscheiden, für welche Epimorphismen $G \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$ diese HNN-Erweiterungen aufsteigend, bzw. absteigend sind.

Die Basisgruppe ist in dieser Situation im allgemeinen nicht endlich präsentierbar. So ist zum Beispiel in der Gruppe von Baumslag und Remeslennikov

$$G = \langle a, s, t\ ;\ [a,a^s] = 1,\ a^t = aa^s,\ s^t = s \rangle$$

die von a und s erzeugte Basisgruppe B als Kranzprodukt zweier unendlich zyklischer Gruppen nicht endlich präsentierbar [17] .

Für den Fall, daß ein diskreter Charakter $[\chi]$ in $^*\Sigma^1$ ist, in dem also bereits bekannt ist, daß G als absteigende HNN-Erweiterung präsentiert werden kann, wollen wir die endliche Präsentierbarkeit der Basisgruppe charakterisieren. Wir verwenden in diesem Abschnitt die Notation von (IV.4).

Betrachten wir zunächst eine absteigende HNN-Erweiterung G mit endlich präsentierter Basisgruppe B. Explizit hat G folgende Präsentierung:

G wird erzeugt von den Elementen $b_1, \ldots, b_n$, den Erzeugenden von B, sowie dem Buchstaben t. G hat die definierenden Relationen

$$R = \{ r_i(b) \mid i = 1, \ldots, k \}$$

$$S = \{ b_j^{\,t} = u_j(b) \mid j = 1, \ldots, n \},$$

wobei R die Menge der definierenden Relationen von B ist.

Sei C der Cayley-Komplex von G in dieser Präsentation zusammen mit der Bewertung $v = v_\chi$, die zum Homomorphismus $\chi\colon G \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$ mit $\chi(B) = 0$ und $\chi(t) = 1$ gehört.

Für die definierenden Relationen von G gilt dann:

(2.1) Ist r in R, dann ist $\hat{r}$ ein Wort in den Erzeugenden von B, also ein Relator in B. Folglich gibt es ein Diagramm $M_{\hat{r}}$ mit $v(M_{\hat{r}}) > v(r)$.

(2.2) Für die Relationen in S konstruiert man folgende Diagramme $M_{\hat{s}}$:

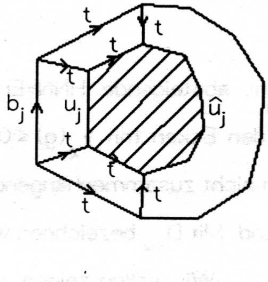

Abb.VI.1 Diagramm $M_{\hat{s}}$ für eine Relation $s \in S$.

Die schraffierte Fläche in Abb.VI.1 stellt ein ungewölbtes Diagramm dar, da Konjugation von u_j mit t gerade den Kantenweg $\hat{u}_j$ ergibt. Also ist auch für die Relationen in S die Bedingung (IV.4.5) erfüllt.

Aus (2.1) und (2.2) folgt, daß der Teilkomplex C_v des Cayley-Komplexes zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Also ist $[\chi] \in {}^*\Sigma^2$.

Ist G keine echt absteigende HNN-Erweiterung, sondern gleichzeitig mit dem stabilen Buchstaben t^{-1} eine aufsteigende HNN-Erweiterung mit endlich erzeugter Basisgruppe, dann ist N = Ker χ selbst endlich erzeugt. G ist die Erweiterung der endlich erzeugten Basisgruppe N mit einer unendlich zyklischen Gruppe. Wir wissen dann wegen Satz C, daß N in dieser Situation genau dann endlich präsentierbar ist, wenn sowohl $[\chi]$ als auch $-[\chi]$ in ${}^*\Sigma^2$ sind. Dies mag motivieren, weshalb wir auch im Falle einer echt absteigenden HNN-Erweiterung nicht nur den Teilkomplex C_v, sondern auch C_{-v} berücksichtigen müssen.

Wenn G eine echt absteigende HNN-Erweiterung ist, dann ist $-[\chi] \notin {}^*\Sigma^1$. Der von den Ecken mit $v_\chi(g) \leq 0$ aufgespannte Teilkomplex C_{-v} von C ist dann nicht zusammenhängend, auch nicht im wesentlichen zusammenhängend. Mit D_{-v} bezeichnen wir die Zusammenhangskomponente der 1 in C_{-v}. Wir wollen zeigen, daß unter den gegebenen Voraussetzungen für G der Teilkomplex D_{-v} einfach zusammenhängend ist. Dazu betrachten wir einen geschlossenen Kantenweg p in D_{-v} mit

Basispunkt 1. Wenn p Kanten mit der Auszeichnung t oder t^{-1} enthält, kann man zu einem Kantenweg p' übergehen, für den das nicht zutrifft. Der Elementarschritt dieses Übergangs ist von folgender Art: man ersetzt den Teilweg $t^{-1}\ b_i\ b_j$ in p durch $u_i\ t^{-1}\ b_j$. Siehe Abb. VI.2. Da die Exponentensumme von t in p Null ist, erhält man schließlich einen Teilweg $t^{-1}\ b_j\ t$, den man durch u_j ersetzen kann. Dadurch hat man die Zahl der t-Kanten um 2 vermindert.

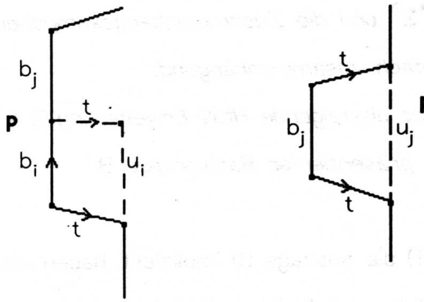

Abb.VI.2

Schließlich erreicht man so einen t-freien Kantenweg p', der zu p homotop ist (in D_{-v}). p' kann dann (als Relation von B) in D_{-v} ungewölbt hergeleitet werden. Hieraus folgt, daß D_{-v} einfach zusammenhängend ist.

Diese Zusammenhangseigenschaften von C_v und D_{-v} sind in der Tat äquivalent zur Darstellbarkeit von G als absteigende HNN-Erweiterung mit endlich präsentierter Basisgruppe.

(2.3) Satz D. G *sei eine endlich präsentierte Gruppe, die als absteigende HNN-Erweiterung* $G = \langle B, t \,;\, B^t = B_2 \rangle$ *mit endlich erzeugter Basisgruppe präsentiert ist.* χ *sei der durch* $\chi(t) = 1$ *und* $B \subseteq \operatorname{Ker} \chi$ *gegebene Epimorphismus von* G *auf* $\mathbf{Z}$. C *bezeichne den Cayley-Komplex von* G *in dieser Präsentation. Die beiden folgenden Aussagen sind dann gleichwertig:*

(i) $[\chi] \in {}^*\Sigma^2$ *und die Zusammenhangskomponente* D_{-v} *der* 1 *in* C_{-v} *ist einfach zusammenhängend.*

(ii) G *ist eine absteigende HNN-Erweiterung* $G = \langle B, t; B^t = B_2 \rangle$ *mit endlich präsentierter Basisgruppe* B.

BEWEIS: Daß (ii) die Aussage (i) impliziert, haben wir bereits gezeigt. Es gelte (i). G hat explizit folgende Präsentation:

$$G = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n, t \,;\, R, S = \{ b_i^t = u_i(b) \} \rangle.$$

Dabei sind die b_i die Erzeugenden von B und es gelte $R \cap S = \emptyset$. Die Exponentensumme von t in einer Relation r in R ist Null. Man kann dann — weil man die Relationen in S zur Verfügung hat – durch endlich viele Tietze-Transformationen sicherstellen, daß R nur Worte in den Erzeugenden von B enthält. Diese Tietze-Transformationen sind von folgender Form: Man ersetzt eine Relation $r = r_1 b_i^t r_2$ durch

$r' = r_1 u_i(b) r_2$. Solche Tietze-Transformationen ändern den Homotopietyp des Standard-Komplexes K der Präsentation nicht, da nur der Repräsentant der anheftenden Abbildungen von 2-Zellen geändert wird.

Die Voraussetzung (i) bedeutet nicht automatisch, daß in C der Teilkomplex C_v einfach zusammenhängend sind, da (i) nur die Existenz eines Komplexes mit diesen Eigenschaften verlangt. In Wahrheit ist C_v jedoch nicht nur im wesentlichen einfach zusammenhängend (Lemma (IV.3.3)), sondern 1-zusammenhängend: Da die Relationen von S als Flächenstücke in C auftreten, folgt aus dem Beweis von Satz (IV.4.1), daß C_v 1-zusammenhängend ist. Ferner ändern die Tietze-Transformationen mit denen wir die Präsentation von G normalisiert haben, nichts an der Fundamentalgruppe von D_{-v} : Das 1-Gerüst von D_{-v} bleibt unberührt und eine 2-Zelle von D_{-v} wurde höchstens frei homotop umgeklebt.

Der Teilkomplex C_0 von C, der von den Elementen im Kern von χ erzeugt wird, enthält die Elemente von B als Ecken. Die Zusammenhangskomponente der 1 von C_0 sei mit C_B bezeichnet. Das 1-Gerüst von C_B ist der Cayley-Graph Γ_B von B in den Erzeugenden $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Es soll gezeigt werden, daß - nach eventuellem Hinzufügen von endlich vielen Relationen zur Präsentation von G - C_B einfach zusammenhängend ist. Wir haben dann einen zusammenhängenden und einfach zusammenhängenden freien B-Komplex mit endlichem Bahnenraum mod B, an dem man eine endliche Präsentation von B ablesen kann.

p bezeichne einen reduzierten geschlossenen Kantenweg in C_B. p ist dann in D_{-v} und dort nullhomotop. Also gibt es in D_{-v} ein einfaches Diagramm M_1 mit $\partial M_1 = p$. Da andererseits C_v 1-zusammenhängend ist, kann man Ecken g im Innern von M_1 mit $v(g) = v(M_1)$ durch den Übergang zu einem Diagramm M_2 mit Rand p zum Verschwinden bringen. Wir verfahren wie in (IV.4.1).

Sei $a = \max\{v(h) \mid h \in M_{\hat{r}}, r \in R\}$. Es gibt dann für p ein einfaches Diagramm M mit $\partial M = p$ und $v(M) \geq -a$ sowie $\max\{v(x) \mid x \in M\} = 0$, also ein Diagramm im von $-a$ und 0 begrenzten "Streifen" des Cayley-Komplexes.

Für alle $j = 1, 2, \ldots, a$ sei $\hat{r}^{(j)}$ das Wort in den Erzeugenden von B, das durch Konjugation von $r \in R$ mit t^j entsteht. Wir fügen zu R diese Relationen als definierende Relationen hinzu, d.h. wir setzen $R' = R \cup \{\hat{r}^{(j)}\}$. R' ist eine endliche Menge von definierenden Relationen von B. C' sei der Cayley-Komplex $C(X;R')$, er enthält C als Teilkomplex. Für die Zusammenhangskomponente C'_B der 1 in C'_0 gilt: $C'_B \supseteq C_B$ und die 1-Gerüste Γ'_B und Γ_B stimmen überein. Das Diagramm M kann unter Benutzung der zusätzlichen Relationen $\hat{r}^{(j)}$ zu einem ungewölbten Diagramm M' mit Rand p homotop abgeändert werden. p ist also über $\langle X;R' \rangle$ ungewölbt herleitbar und folglich ist C'_B einfach zusammenhängend. □

(2.4) Beispiel. G sei die von Baumslag und Remeslennikov gefundene metabelsche Gruppe

$$G = \langle a, s, t \,;\, [a,a^s] = 1,\ a^t = aa^s,\ s^t = s \rangle$$

χ sei der zum stabilen Buchstaben t gehörende Epimorphismus $G \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$ mit $\chi(t) = 1$ und $\chi(s) = 0$.

Aus der Präsentation von G können wir unmittelbar ablesen, daß Kriterium (III.2.5) erfüllt ist, es gilt also $[\chi] \in {}^*\Sigma^1$.

C bezeichne den Cayley-Komplex dieser Präsentation und v sei eine zu χ assoziierte Bewertung auf C. D_{-v} ist wieder die Zusammenhangskomponente der 1 in C_{-v}. Sei p ein Kantenweg in D_{-v}, p hat dann nicht-positive χ-Spur. Wir verwenden die Relationen $a^t = a\,a^s$ und $s^t = s$, um p homotop zu einem Kantenweg p' abzuändern, der nur noch mit a, a^{-1} und s, s^{-1} bezeichnete Kanten enthält. Da die Basisgruppe $B = \langle\, a, s \,\rangle$ die Präsentation $B = \langle\, a, s \;;\; [a,a^{s^j}] = 1,\ j > 0 \,\rangle$ hat, fassen wir p' als Produkt von Konjugierten dieser Relationen in der von a und s erzeugten freien Gruppe auf.
Es gilt ([17]): Wenn für $1 \le i \le n$ a und a^{s^i} kommutieren, dann ist

$$1 = [a, a^{s^n}]^t = [a^t, a^{ts^n}] = [a a^s, a^{s^n} a^{s^{n+1}}] = [a, a^{s^{n+1}}],$$

d.h. in G kann man durch Konjugation mit t die Relationen von B aus $[a,a^s]$ herleiten. Interpretiert man diese Gleichungen geometrisch im Cayley-Komplex von C, dann ist leicht zu sehen, daß es für alle $j > 1$ ein einfaches Diagramm M mit Randweg $\partial M = [a,a^{s^j}]$ gibt, so daß für jede Ecke h von M $v_\chi(h) \le 0$ gilt. Also ist p' in D_{-v} nullhomotop und D_{-v} einfach zusammenhängend. Da B als das Kranzprodukt von zwei unendlich zyklischen Gruppen nicht endlich präsentierbar ist, folgt wegen Satz D: $[\chi] \notin {}^*\Sigma^2$. Kürzlich haben Bieri und Strebel gezeigt, daß für diese Gruppe ${}^*\Sigma^2 = \emptyset$ gilt.

(2.5) Bemerkung. Sei $G = \langle\, a, s, t \;;\; a^s = a^2,\ a^t = a^3,\ [s,t] = 1 \,\rangle$. G hat dann auch die Präsentation $\langle\, a, y, t;\ a^{3y} = a^2,\ a^t = a^3,\ y^t = y \,\rangle$, ist also absteigende HNN-Erweiterung über der von a und y erzeugten Untergruppe B. B ist der metabelsche Kopf der nicht-Hopfschen Gruppe H, die durch $\langle\, a,\ y\ ;\ a^{3y} = a^2 \,\rangle$ präsentiert ist. B ist nicht endlich präsentierbar [17]. Sei χ der durch $\chi(t) = 1$ und $\chi(y) = 0$ gegebene Homomorphismus $G \longrightarrow \mathbb{Z}$. Es ist leicht zu sehen, daß $[\chi] \in {}^{*}\Sigma^2$ gilt. Demzufolge ist nach Satz D die Zusammenhangskomponente D_{-v} der 1 in C_{-v} nicht 1-zusammenhängend. Dieses Beispiel zeigt, daß man in Satz D auf die Bedingung über D_{-v} nicht verzichten kann. [In diesem Beispiel gilt $B = \mathrm{Ker}\ \chi$, es handelt sich also um eine triviale HNN-Erweiterung. Wir berechnen ${}^{*}\Sigma^2$ für G in (VII.3.6). Mir ist kein Beispiel einer *echt* absteigenden HNN-Erweiterung mit endlich erzeugter Basisgruppe bekannt, in dem $[\chi] \in {}^{*}\Sigma^2$ gelten würde, aber D_{-v} nicht 1-zusammenhängend ist.]

VII BEISPIELE

1 Ein-Relator-Gruppen

Die Methode von Magnus, etwa im Fall des Freiheitssatzes, Ein-Relator-Gruppen zu analysieren, beruht darauf, die Ein-Relator-Gruppe G als HNN-Erweiterung über einer Basisgruppe zu präsentieren, die selbst eine Ein-Relator-Gruppe (mit kürzerer Relation) ist. Ist G als aufsteigende HNN-Erweiterung präsentierbar, dann ist die Basisgruppe frei, weil sie mit einer der assoziierten Untergruppen identisch ist. G hat in diesem Fall die Struktur eines semidirekten Produkts $G = N \rtimes \langle t \rangle$ mit Normalteiler N, der die aufsteigende Vereinigung freier Gruppen ist. Nach Satz (VI.1.1) charakterisiert ${}^*\Sigma^1$ diejenigen Epimorphismen $\chi\colon G \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$, für die G in dieser Weise präsentiert werden kann.

Die schöne Eigenschaft von Ein-Relator-Gruppen, daß die definierende Relation bereits viel Information über die Gruppe enthält – man denke etwa an die Torsionselemente von G – bestätigt sich auch für die Invariante ${}^*\Sigma^k$. Das Kriterium von K. S. Brown [11] gestattet es, die Invariante ${}^*\Sigma^1$ von Ein-Relator-Gruppen an der definierenden Relation abzulesen. W. D. Neumann hat beobachtet, daß für Ein-Relator-

Gruppen ${}^*\Sigma^k$ für $k > 1$ mit ${}^*\Sigma^1$ übereinstimmt. Dieses Resultat impliziert, daß jede endlich erzeugte Untergruppe einer Ein-Relator-Gruppe G, die G' enthält, auch endlich präsentierbar ist: es reduziert die offene Frage nach der Cohärenz von Ein-Relator-Gruppen auf die Betrachtung von endlich erzeugten Untergruppen, die G' nicht umfassen. [Eine Gruppe heißt cohärent, wenn jede endlich erzeugte Untergruppe endlich präsentierbar ist.]

Unabhängig von der Argumentation hier, die [11] folgt, wurde in [4] das Kriterium für Σ^1 von Ein-Relator-Gruppen und die Aussage $\Sigma^k = \Sigma^1$ gezeigt.

G bezeichne nun stets eine Ein-Relator-Gruppe $G = \langle X; r\rangle$ mit endlich vielen Erzeugenden und zyklisch reduzierter definierender Relation r. r sei nicht-trivial in der von X erzeugten freien Gruppe.

(1.1) Lemma. *Sei G eine Ein-Relator-Gruppe. Dann gilt:*
Ist $|X| \geq 3$, *dann ist* ${}^*\Sigma^1 = \emptyset$.

BEWEIS (Brown [11]): Sei $[\chi]$ ein diskreter Charakter von G. Wir wählen eine Ein-Relator-Präsentation $\langle X; r\rangle$ von G und einen Homomorphismus $\chi \in [\chi]$, so daß gilt: es gibt eine Erzeugende t mit $\chi(t) = 1$ und für alle $x \in X \setminus \{t\}$ gilt $\chi(x) = 0$. t hat dann in r Exponentensumme 0. Man kann also die Konstruktion von Magnus durchführen und r umschreiben zur Relation s in den Buchstaben $x_i = t^{-i}x\,t^i$. Es gibt dann für jedes $x \in X \setminus \{t\}$ ein Intervall $I(x) = [\mu(x), \nu(x)]$, das alle Indices der x_i enthält, die in s vorkommen. Ferner soll gelten, daß für mindestens ein x $\mu(x)$ das Minimum und $\nu(x)$ das Maximum der Indices ist, die in s vorkommen.

Man erhält damit eine Präsentation von G als HNN-Erweiterung über der Basisgruppe B, die von den x_i für $x \in X \setminus \{t\}$ und $i \in I(x)$ erzeugt wird und die definierende Relation s hat. Die assoziierten Untergruppen sind die freien Untergruppen $B_1 = \langle x_i \mid \mu(x) \leq i < \nu(x) \rangle$ und $B_2 = \langle x_i \mid \mu(x) < i \leq \nu(x) \rangle$.

Da $|X| \geq 3$ gilt, hat die Basis von B_1 mindestens zwei Elemente weniger als die Basisgruppe Erzeugende hat. Eine dieser Erzeugenden kommt nach Konstruktion in der Relation s von B vor, also folgt mit dem Freiheitssatz: B_1 liegt echt in B. Die HNN-Erweiterung ist nicht absteigend, d.h. $[\chi] \notin {}^*\Sigma^1$. Also ist $\operatorname{dis}{}^*\Sigma^1 = \emptyset$. Da ${}^*\Sigma^1$ offen ist und die diskreten Charaktere dicht in S(G) sind, folgt ${}^*\Sigma^1 = \emptyset$. □

(1.2) Bemerkung. Die Aussage von Lemma (1.1) folgt auch aus dem allgemeineren Resultat in [3], daß $\Sigma_{BNS}(G) = \emptyset$ gilt, wenn der Defekt der Gruppe G größer als 1 ist.

Sei $|X| = 2$. Wir behandeln zuerst den Fall, daß der $\mathbf{Z}$-Rang von $G^{ab} = 1$ ist. Dann hat G eine Ein-Relator-Präsentierung $G = \langle t, x \,;\, r \rangle$, so daß die Exponentensumme von t in r 0 ist und x Exponentensumme $\neq 0$ in r hat. S(G) ist die 0-Sphäre S^0 und besteht aus den Charakteren $[\chi]$ und $[-\chi]$ gegeben durch $\chi(t) = 1$ und $\chi(x) = 0$. Es gilt dann (in der Notation wie im Beweis von (1.1)):

(1.3) Lemma. ([11]) G *kann genau dann als absteigende HNN-Erweiterung mit stabilem Buchstaben* t *präsentiert werden, wenn in der umgeschriebenen Relation* s *der Buchstabe* x_ν *mit maximalem Index* $\nu(x)$ *genau einmal auftritt.*

BEWEIS: Kann man G als absteigende HNN-Erweiterung mit stabilem Buchstaben t präsentieren, so gibt es wegen $B = B_1$ in B eine Relation, die den Buchstaben x_ν mit maximalen Index ν in den restlichen Erzeugenden x_i ausdrückt, denn x_ν ist nicht in der Basis von B_1. Diese Relation ist dann definierende Relation s' der Ein-Relator-Gruppe B in den Erzeugenden $x_\mu \leq x_i \leq x_\nu$. Da die definierende Relation einer Ein-Relator-Gruppe bis auf zyklische Permutation und Inversenbildung eindeutig bestimmt ist, kommt auch in s der Buchstabe x_ν genau einmal vor.
Tritt x_ν genau einmal in s auf, dann ist $B = B_1$ und G die absteigende HNN-Erweiterung $\langle B, t \,;\, B^t = B_2 \leq B \rangle$. □

Es gelte nun $\mathbb{Z}$-Rang $(G^{ab}) = 2$. Die Exponentensumme beider Erzeugender t und x in der definierenden Relation r ist dann 0. Wir betrachten G^{ab} via eines Koordinatenisomorphismus als Gitter im $\mathbb{R}^2$ und jeden Homomorphismus $\chi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$ als Element des Dualraums des $\mathbb{R}^2$. Ist $\pi\colon G \longrightarrow G^{ab}$ die kanonische Projektion, dann gilt für jeden Punkt $u \in S^1$: $\chi_u(g) = \langle u, \pi(g)\rangle$.

Man kann die Relation r in dieser Situation als Kantenweg im $\mathbb{R}^2$ auffassen. Ist etwa $r = t^2x^3t^{-2}x^{-1}txt^{-1}x^{-2}t^{-1}x^{-1}t$, dann erhält man den in Abbildung VII.1 dargestellten Kantenweg. [Wir haben dort, wo eine Kante mehrfach durchlaufen wird, den Weg etwas abgehoben gezeichnet.]

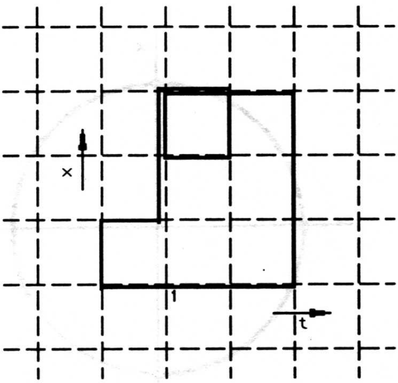

Abb.VII.1 Kantenweg für $r = t^2x^3t^{-2}x^{-1}t\ x\ t^{-1}x^{-2}t^{-1}x^{-1}t$

(1.4) Definition. *Sei* $[\chi] \in S(G)$. *Wir sagen, daß die Relation* r *bezüglich* $[\chi]$ *ein einsames Minimum hat, wenn gilt:*

- *es gibt genau eine Ecke* v_i *mit* $\chi(v_i) < \chi(v_j)$ *für alle* $j \neq i$, *falls* $\chi(t) \neq 0$ *und* $\chi(x) \neq 0$ *gilt*
- *es gibt genau eine Kante, deren Ecken minimalen* χ*-Wert haben, falls* $\chi(t) = 0$ *oder* $\chi(x) = 0$ *gilt.*

[Mit v_i seien die Ecken des zur Relation r gehörenden Kantenwegs bezeichnet.]

In unserem Beispiel besteht die in Abb.VII.2 hervorgehobene Menge aus denjenigen Punkten in S(G), für die r ein einsames Minimum hat – und diese Menge ist gerade $^*\Sigma^1$.

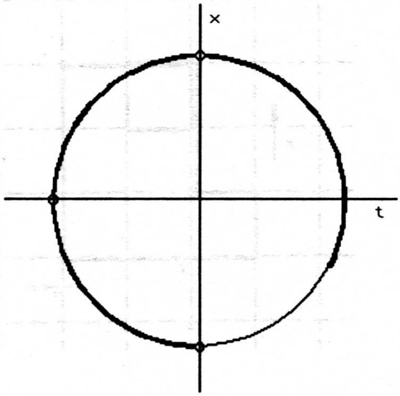

Abb.VII.2 $^*\Sigma^1$ für $G = \langle t, x \; ; \; t^2x^3t^{-2}x^{-1}txt^{-1}x^{-2}t^{-1}x^{-1}t \rangle$

(1.5) Satz. (Brown [11]) *Sei* $G = \langle t, x \; ; \; r \rangle$ *eine Ein-Relator-Gruppe mit zwei Erzeugenden.* r *sei zyklisch reduziert und* $\neq 1$ *in der von* x *und* t *erzeugten freien Gruppe. Der* $\mathbb{Z}$*-Rang von* G^{ab} *sei 2.* χ *bezeichne einen nicht-trivialen Homomorphismus* $\chi: G \longrightarrow \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

$$[\chi] \in {}^*\Sigma^1 \Longleftrightarrow r \text{ hat bezüglich } [\chi] \text{ ein einsames Minimum.}$$

BEWEIS: Wenn r ein einsames Minimum bezüglich $[\chi]$ hat, dann ist Kriterium (III.2.5) für $^*\Sigma^1$ offensichtlich erfüllt. Wir setzen voraus, daß r kein einsames Minimum bezüglich $[\chi]$ hat und zeigen, daß dann

$[\chi]$ im Komplement von ${}^*\Sigma^1$ liegt.

Fall 1: Es gelte $\chi(t) = 1$ und $\chi(x) = 0$. Die Indices, die bei der Magnus-Umschreibung der Relation r bezüglich t auftreten, sind genau die negativen χ-Werte der Spur von r. Der minimale Wert unter χ auf dem Kantenweg von r entspricht dem maximalen Index von x in der umgeschriebenen Relation s. Wegen (1.3) ist die HNN-Darstellung von G mit stabilem Buchstaben nicht absteigend, falls r ein wiederholtes Minimum hat.

Fall 2: χ sei ein diskreter Homomorphismus $\chi\colon G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ und es gelte $\chi(t) = p$, $\chi(x) = q$ für $p, q \in \mathbb{Z}$. Sei $H = \langle t, x, z \,;\, r, z^p = t \rangle$ und $\chi'\colon H \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ eine Fortsetzung von χ auf H mit $\chi'(z) = 1$. H ist dann eine Ein-Relator-Gruppe $H = \langle x, z \,;\, r' \rangle$. Da die Relation r' aus r entsteht, indem man jedes vorkommende t durch z^p ersetzt, hat s bezüglich χ' ein wiederholtes Minimum, wenn dies für r der Fall ist. Ferner beobachtet man: Ist $[\chi] \in {}^*\Sigma^1$, dann gilt auch $[\chi'] \in {}^*\Sigma^1(H)$. Also kann man annehmen, daß $p = 1$ ist. Nun führt man Tietze-Transformationen durch: man ersetzt x durch $x' = xt^{-q}$ und erhält $G = \langle t, x' \,;\, r'' \rangle$. Die Relation r'' hat ein wiederholtes Minimum bezüglich χ, wenn r ein solches hat. Also haben wir Fall 2 auf Fall 1 reduziert.

Fall 3: χ sei nicht diskret, $\chi(t)$ und $\chi(x)$ sind also linear unabhängig über $\mathbb{Z}$. Die Werte auf den Ecken v_i des Kantenwegs von r sind von der Form $a_i\chi(t) + b_i\chi(x)$, wobei a_i und b_i ganze Zahlen sind, die nur von r abhängen. Hat r bezüglich χ ein wiederholtes Minimum, dann gibt es in jeder offenen Umgebung von $[\chi]$ ein $[\chi']$ bezüglich dessen r auch ein wiederholtes Minimum hat. Also gibt es auch in jeder Umgebung von $[\chi]$ einen diskreten Charakter $[\chi']$, auf den das zutrifft; und für diesen gilt $[\chi'] \in {}^*\Sigma^{1c}$. Da das Komplement von ${}^*\Sigma^1$ in S(G) abgeschlossen ist und die diskreten Homomorphismen dicht in Hom(G,$\mathbb{R}$) liegen, folgt $[\chi] \in {}^*\Sigma^{1c}$. □

Wir schließen die Diskussion von ${}^*\Sigma^1$ für Ein-Relator-Gruppen mit einer einfachen Anwendung des Kriteriums ab:

(1.6) Beispiel. G sei eine Ein-Relator-Gruppe mit zwei Erzeugenden und der $\mathbb{Z}$-Rang von G^{ab} sei 2. Wenn ${}^*\Sigma^1$ eine abgeschlossene Hemisphäre enthält, dann gilt ${}^*\Sigma^k = S(G)$ und G ist frei Abelsch vom Rang 2.

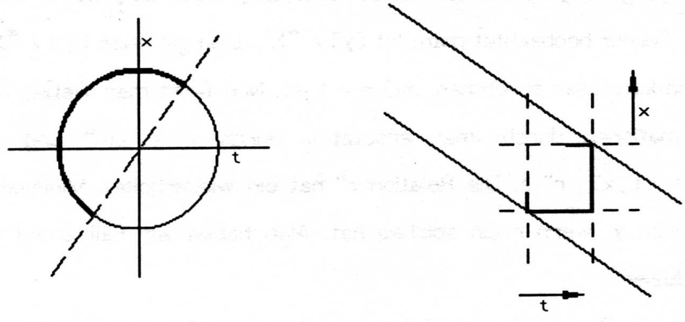

Abb. VII.3 Beispiel (1.6)

Wir ermitteln den zur Relation von G gehörenden Kantenweg und seine Ecken v_i: Durch die Voraussetzung sind 3 Eckpunkte der konvexen Hülle der v_i im $\mathbb{R}^2$ festgelegt, sowie ein offenen Streifen im $\mathbb{R}^2$, in dem eventuelle weitere Ecken nur liegen können. Da die Breite dieses Streifen $\leq \sqrt{2}$ ist, kann er nur eine weitere Ecke enthalten. Die definierende Relation von G ist gerade der Kommutator der beiden Erzeugenden. (siehe Abb. VII.3)

(1.7) Satz. *Sei* $G = \langle X; r\rangle$ *eine Ein-Relator-Gruppe. Dann gilt für alle* $k \geq 1$: $\quad {}^*\Sigma^k = {}^*\Sigma^1$.

BEWEIS: Es genügt, den Fall $|X| = 2$ zu betrachten. C sei der Cayley-Komplex der Präsentation und v_χ eine zu $[\chi] \in {}^*\Sigma^1$ assoziierte Bewertung auf C. Nach dem Kriterium für ${}^*\Sigma^1$ hat die Relation r bezüglich χ ein einsames Minimum. Ohne Einschränkung können wir an-

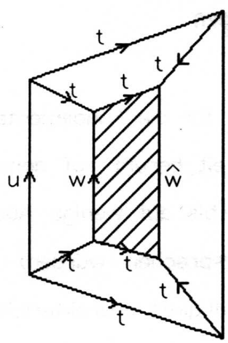

Abb. VII.4

nehmen, daß es eine Erzeugende t mit $\chi(t) > 0$ gibt und eine Darstellung von x^t der Form $x^t = w$ mit $v_\chi(x^t) < v_\chi(w)$ für ein Wort w in den Erzeugenden. Dank Browns Kriterium wissen wir jedoch, daß $x^t w^{-1}$ in der freien Gruppe $F(x,t)$ als zyklisch reduziertes Wort eine zyklische Permutation der definierenden Relation ist. Dies ermöglicht es, Kriterium (IV.4.1) für ${}^*\Sigma^2$ direkt nachzuprüfen. In Abbildung VII.4 ist das zu r gehörende Diagramm $M_{\hat{r}}$ dargestellt. Der schraffierte Teil des Diagramms ist ungewölbt herleitbar.

Ist ${}^*\Sigma^1 \neq \emptyset$, dann ist G torsionsfrei und der 2-dimensionale Cayley-Komplex C ist die universelle Überlagerung eines K(G,1)-Komplexes der Gruppe. Der Teilkomplex C_v ist für ein $[\chi] \in {}^*\Sigma^2$ somit zusammenziehbar, d.h. es gilt ${}^*\Sigma^k = {}^*\Sigma^1$ für alle $k \geq 1$. □

2 3-Mannigfaltigkeitsgruppen

Die Bestimmung von Σ_{BNS} für die Fundamentalgruppe einer glatten, kompakten 3-Mannigfaltigkeit beruht auf dem Satz, daß für diese Gruppen die Invariante Σ (bis auf wenige Ausnahmen, die alle der Poincaré-Vermutung widersprechen würden) durch nicht-singuläre 1-Formen auf der Mannigfaltigkeit charakterisiert werden kann [3].

Sei G die Fundamentalgruppe einer kompakten, zusammenhängenden, glatten 3-Mannigfaltigkeit M. Dann ist $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{R}) = H^1(M;\mathbb{R})$ und – nach Konstruktion der deRham Cohomologie – jedes Element von $H^1(M;\mathbb{R})$ kann durch eine geschlossene 1-Form repräsentiert werden. Die Invariante $\Sigma(M)$ wird dann so definiert:

(2.1) Definition. *Unter obigen Voraussetzungen sei*

$\Sigma(M) = \{ [\chi] \in S(G) \mid \chi$ *ist durch eine nicht-singuläre 1-Form auf* M *repräsentierbar, deren Restriktion auch auf* ∂M *nirgends verschwindet.* $\}$

Diese Invariante wurde zuerst von Thurston betrachtet, der auch gezeigt hat, daß $\Sigma(M)$ eine konvexe polyedrische Teilmenge von $S(G)$ ist. Ferner gilt $\Sigma(M) = -\Sigma(M)$ [– ist die antipodale Abbildung der Charaktersphäre].

(2.2) Satz. ([3]) *Sei* M *eine glatte, kompakte 3-Mannigfaltigkeit ohne falsche Zellen. Dann gilt (außer im Fall* $\pi_1(M) \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_2$*):*

$$\Sigma_{BNS} = \Sigma(M).$$

Wenn die 3-Mannigfaltigkeit M P^2-irreduzibel ist und unendliche Fundamentalgruppe hat, dann ist M selbst ein $K(G,1)$ für die Fundamentalgruppe G von M [13, S.171]. In dieser Situation erhalten wir

(2.3) Satz. *Sei* M *eine* P^2*-irreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit Fundamentalgruppe G. Dann gilt:*

$$^{*}\Sigma^k = {}^{*}\Sigma^1 \quad \textit{für alle} \quad k > 1.$$

BEWEIS: (W.D. Neumann) Da $^{*}\Sigma^1 = \Sigma(M)$ gilt, kann man ein $[\chi] \in {}^{*}\Sigma^1$ durch eine geschlossene 1-Form ω repräsentieren, die weder auf M noch auf ∂M eine Singularität hat. Diese Form liftet zu einer exakten Form df auf der universellen Abelschen Überlagerung $\hat{M}$. f ist dann eine stetige Funktion $f\colon \hat{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ und man definiert $\hat{M}_\chi$ als $f^{-1}([0,\infty))$. Bieri, Neumann, Strebel [3] zeigen unter der Voraussetzung, es gilt $[\chi] \in {}^{*}\Sigma^1$, daß dann $\hat{M}$ diffeomorph zu $\mathbb{R} \times f^{-1}(0)$ ist und daß dieser Diffeomorphismus $\hat{M}_\chi$ auf $[0,\infty) \times f^{-1}(0)$ abbildet. Daraus folgt, daß für alle $k \geq 1$ gilt: $\pi_k(\hat{M}_\chi) \cong \pi_k(f^{-1}(0)) \cong \pi_k(\hat{M})$. Also ist der Unterraum $\tilde{M}_\chi$ der universellen Überlagerung von M, definiert als das Urbild von $\hat{M}_\chi$ unter der Überlagerungsabbildung, zusammenziehbar. Da $\tilde{M}_\chi$ nach Bemerkung (III.2.6) und [3] in dieser Situation als der durch f induzierte Teilraum der universellen Überlagerung von M die Rolle des Bewertungsunterkomplexes spielt, folgt daraus die Behauptung des Satzes. □

3 Metabelsche Gruppen

Nach dem Satz von Bieri und Strebel (siehe (I.2.3)) hat die geometrische Invariante Σ für eine metabelsche Gruppe G die Kraft, die endliche Präsentierbarkeit von G selbst zu charakterisieren. Wegen der Funktorialität von Σ läßt sich für einen Normalteiler N von G, der G' enthält, $\Sigma(N)$ aus $\Sigma(G)$ berechnen. Für metabelsche Gruppen enthält also die Invariante Σ die vollständige Information über die endliche Präsentierbarkeit von Normalteilern mit Abelscher Faktorgruppe. Das Resultat von Åberg (I.2.4) impliziert,. daß für eine metabelsche Gruppe G mit endlichem Prüfer-Rang $\Sigma(G)$ die Information über die höheren Endlichkeitseigenschaften von G und damit auch von Normalteilern mit Abelscher Faktorgruppe enthält.

Wir nutzen diese Überlegung, um in einem Spezialfall Aussagen über die Invariante ${}^*\Sigma^2$ zu erhalten. Wünschenswert wäre ein Zugang zu den höheren geometrischen Invarianten metabelscher Gruppen, der sich nicht dieser Krücke bediente. Insbesondere ist ein besseres Verstehen des Resultats von Åberg im Lichte der höheren Invarianten von großem Interesse.

Sei $N \leq G$ mit $G' \leq N$, und N sei endlich erzeugt. Mit $f: N \longrightarrow G$ bezeichnen wir die Inklusionsabbildung. f induziert eine Abbildung $f^*: S(G) \setminus S(G,N) \longrightarrow S(N)$ durch $f^*([\chi]) = [\chi \circ f]$. Es gilt dann der folgende Spezialfall der Funktorialität von Σ_{BNS} ([3], Theorem H):

(3.1) Satz. (Bieri, Neumann, Strebel [3]) *Sei* G *eine endlich erzeugte metabelsche Gruppe und* N *ein endlich erzeugter Normalteiler, der* G' *enthält. Dann ist*

$$\Sigma^c(N) = f^*(\Sigma^c(G)).$$

Seien Σ_1 und Σ_2 Teilmengen der Charaktersphäre S(G). Die *konvexe Summe* $\Sigma_1 + \Sigma_2$ ist dann definiert als

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = \{ [\chi] \mid \chi = \lambda_1\chi_1 + \lambda_2\chi_2 \neq 0,\ 0 \leq \lambda_i \in \mathbb{R},\ [\chi_i] \in \Sigma_i \}.$$

Falls es keinen Punkt in Σ_1 gibt, dessen Antipode in Σ_2 liegt, besteht $\Sigma_1 + \Sigma_2$ aus allen Geodätischen zwischen den Punkten von Σ_1 und Σ_2.

(3.2) Lemma. G *sei eine endlich präsentierte metabelsche Gruppe und* $[\chi]$ *ein diskreter Charakter in* S(G), *so daß* N = Ker χ *endlich erzeugt ist. Dann sind äquivalent:*

(i) N *ist endlich präsentiert*

(ii) *Weder* $[\chi]$ *noch* $[-\chi]$ *sind in* ${}^*\Sigma^{1c}(G) + {}^*\Sigma^{1c}(G)$ *enthalten.*

BEWEIS: Unter der Annahme $[\chi] \in {}^*\Sigma^{1c}(G) + {}^*\Sigma^{1c}(G)$ kann man $\chi = \lambda_1\chi_1 + \lambda_2\chi_2$ mit $\lambda_i \geq 0$ und $[\chi_1]$, $[\chi_2] \in {}^*\Sigma^{1c}(G)$ schreiben. Da für alle n $\in$ N dann $\lambda_1\chi_1(n) = -\lambda_2\chi_2(n)$ gilt, enthält $\Sigma^c(N)$ mit $f^*([\chi_1])$ und $f^*([\chi_2])$ ein Paar antipodaler Punkte. Nach dem Satz von Bieri und Strebel (I.2.3) ist N somit nicht endlich präsentierbar. Derselbe Schluß ist richtig, wenn man $[-\chi] \in {}^*\Sigma^{1c}(G) + {}^*\Sigma^{1c}(G)$ annimmt. Also folgt (ii) aus (i).

Ist N nicht endlich präsentiert, dann hat ${}^*\Sigma^{1c}(N)$ ein Paar antipodaler Punkte, und weil Σ eine rationale polyedrische Teilmenge von S(G) ist, enthält ${}^*\Sigma^{1c}(N)$ sogar zwei rationale antipodale Punkte. Nach (3.1) existieren also diskrete $[\chi_1], [\chi_2] \in {}^*\Sigma^{1c}(G)$ mit $f^*([\chi_1]) = - f^*([\chi_2])$. Es gibt also Repräsentanten χ_1, χ_2 und ein rationales $\lambda \geq 0$ mit $\lambda\chi_1(n) = -\chi_2(n)$ für alle $n \in N$. Sei $\chi' = \lambda\chi_1(n) + \chi_2(n)$, dann ist $N = \operatorname{Ker} \chi'$ und $[\chi']$ liegt nach Konstruktion in ${}^*\Sigma^{1c}(G) + {}^*\Sigma^{1c}(G)$; d.h. $[\chi]$ oder $[-\chi]$ liegt in ${}^*\Sigma^{1c}(G) + {}^*\Sigma^{1c}(G)$. □

Man beachte: Ist G endlich präsentiert, dann enthält ${}^*\Sigma^{1c}$ kein Paar antipodaler Punkte. Im andern Fall gilt ${}^*\Sigma^2 = \emptyset$.

(3.3) Korollar. *Sei G eine endlich präsentierte metabelsche Gruppe und $[\chi]$ ein diskreter Charakter mit $[\chi], [-\chi] \in {}^*\Sigma^1$. Dann gilt:*

Es sind äquivalent

(i) $[\chi], [-\chi] \in {}^*\Sigma^2$

(ii) $[\chi], [-\chi] \notin {}^*\Sigma^{1c} + {}^*\Sigma^{1c}$

und es sind äquivalent

(iii) $[\chi]$ *oder* $[-\chi] \in {}^*\Sigma^{1c} + {}^*\Sigma^{1c}$

(iv) $[\chi]$ *oder* $[-\chi] \notin {}^*\Sigma^2$

BEWEIS: Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt aus Lemma (3.2) und Satz C. Ist (iii) erfüllt, dann ist N nicht endlich präsentiert, also hat $S(G,N) = \{[\chi], [-\chi]\}$ nicht-leeren Schnitt mit ${}^*\Sigma^{2c}$. Ist umgekehrt S(G,N) nicht in ${}^*\Sigma^2$ enthalten, dann ist N nicht endlich präsentierbar, also gilt (iii). □

Wir können wenigstens im Spezialfall der konstruierbaren metabelschen Gruppen die Alternative in (3.3) (iv) entscheiden:

(3.4) Beispiel.

Eine auflösbare Gruppe heißt *konstruierbar*, wenn sie aus der trivialen Gruppe durch endlich viele Schritte vom Typ (1) oder (2) konstruiert werden kann:

(1) Bildung einer aufsteigenden HNN-Erweiterung über einer konstruierbaren auflösbaren Basisgruppe

(2) Übergang zu einer auflösbaren Obergruppe, die eine bereits konstruierte von endlichem Index enthält.

Konstruierbare auflösbare Gruppen sind endlich präsentiert.

Wir betrachten nun eine konstruierbare metabelsche Gruppe G und setzen ferner voraus, daß $G^{ab} \cong \mathbf{Z}^d$ für eine natürliche Zahl d gilt. Dann besteht $^*\Sigma^{1c}$ aus endlich vielen rationalen Punkten, die in einer offenen Hemisphäre von S(G) liegen [8].

Mit [7], Theorem 4.6 findet man eine explizite Präsentierung von G. Wir bezeichnen G^{ab} mit Q und G' mit A. G ist die Erweiterung von A mit Q. Wir wählen für Q Erzeugende $t_1, t_2, \ldots, t_d$ und setzen $t = t_1 \cdot t_2 \cdot \cdot \cdot t_d$. Dann gibt es eine endlich erzeugte Untergruppe $B_0 \leq A$, für die nach [7] gilt:

(1) $B_0^{t_i} \subseteq B_0$ für alle $1 \leq i \leq d$, sowie

(2) A ist die aufsteigende Vereinigung der Gruppen $B_0^{t^\ell}$ für $\ell \in \mathbf{Z}$.

Es gibt dann eine Obergruppe $B = \langle B_0 \cup B_0^{t^{-1}} \cup \cdot \cdot \cup B_0^{t^{-n}} \rangle$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so daß G folgende Präsentation besitzt:

$\langle b_1, b_2, \ldots, b_m \,;\, r_1, r_2, \cdot\cdot, r_k \rangle$ sei eine Präsentation von B und Q sei präsentiert durch $\langle t, t_1, t_2, \ldots, t_d \,;\, s_1, s_2, \ldots, s_\ell, t = t_1 \cdot t_2 \cdot \cdot \cdot t_d \rangle$ wobei die mit s bezeichneten Relationen gerade die Kommutatoren $[t_i, t_j] = 1$ und $[t, t_i] = 1$ sind.

G wird dann erzeugt von $\{ b_1, b_2, \ldots, b_m, t, t_1, t_2, \ldots, t_d \}$ und hat die definierenden Relationen

$R = \{ r_1, r_2, \cdot\cdot, r_k \}$,

$S = \{ [t_i, t_j] = w_{ij}(b),\ [t, t_i] = w_i(b) \}$ und

$V = \{ b_i^{t_j} = v_{ij}(b),\ b_i^{t} = u_i(b) \}$ sowie $t^{-1} \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \cdot \cdot t_d = w_t(b)$.

H_{t-1} bezeichne die Hemisphäre von S(G) bestehend aus den Charakteren, für die $\chi(t) < 0$ gilt; mit $\overline{H}_{t-1}$ bezeichnen wir die abgeschlossene Hemisphäre. Ein Blick auf die Relationen zeigt, daß nach (III.2.5) $^*\Sigma^{1c} \subseteq \overline{H}_{t-1}$ gilt. Bieri, Strebel [7] zeigen, daß sogar $^*\Sigma^{1c} \subseteq H_{t-1}$ erfüllt ist.

Man kann nun zeigen, daß auch $^*\Sigma^{2c} \subseteq \overline{H}_{t-1}$ gilt. Dazu konstruiert man für die definierenden Relationen r von G in der oben angegebenen Präsentation ganz analog zu (V.2.2) die Diagramme $M_{\hat{r}}$, die dann (IV.4.1) erfüllen. Für die Relation $t^{-1} \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \cdot \cdot t_d = w_t(b)$ geben wir in Abbildung VII.5 das Diagramm an, weil es sich von den aus (V.2.2) bekannten Diagrammen leicht unterscheidet. Mit dem Kriterium (IV.4.1) folgt, daß $H_t \subseteq {}^*\Sigma^2$ gilt.

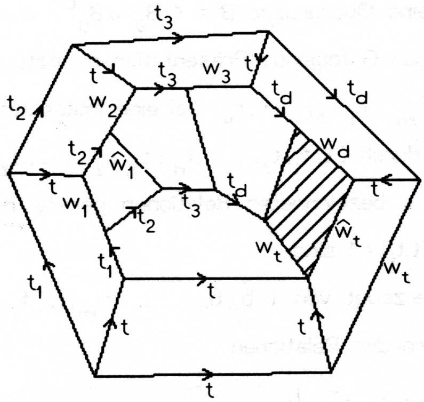

Abb. VII.5

(3.5) Satz. G *sei eine konstruierbare metabelsche Gruppe mit* $G^{ab} \cong \mathbb{Z}^d$. *Dann gilt:*

$$\operatorname{dis} {}^*\Sigma^{2c} = \operatorname{dis}({}^*\Sigma^{1c} + {}^*\Sigma^{1c}). \qquad \square$$

(3.6) Beispiel. Wir betrachten die konstruierbare metabelsche Gruppe präsentiert durch $G = \langle a, s, t \,;\, a^s = a^2, a^t = a^3, [s,t] = 1 \rangle$. In diesem Beispiel kann man leicht zeigen, daß $S(G) \setminus ({}^*\Sigma^{1c} + {}^*\Sigma^{1c}) \subseteq {}^*\Sigma^2$ gilt. Aus (3.5) und der Abgeschlossenheit von ${}^*\Sigma^{2c}$ folgt dann

$${}^*\Sigma^{2c} = {}^*\Sigma^{1c} + {}^*\Sigma^{1c}.$$

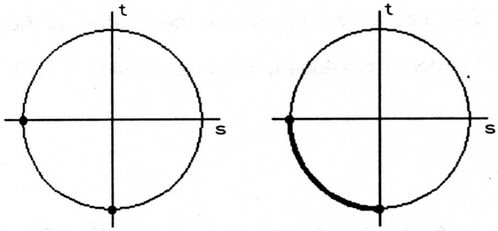

Abb. VII.6 $^*\Sigma^{1c}$ und $^*\Sigma^{2c}$ für $G = \langle a, s, t\ ;\ a^s = a^2,\ a^t = a^3,\ [s,t] = 1 \rangle$

(3.7) Beispiel. Wir nehmen das obige Beispiel als Basisgruppe einer weiteren HNN-Erweiterung und betrachten die von a, s, t und u erzeugte Gruppe G mit den definierenden Relationen $a^s = a^2$, $a^t = a^3$, $a^u = a^5$, $[s,t] = 1$, $[t,u] = 1$ und $[s,u] = 1$.

Sei zunächst $[\chi] \in S(G)$ mit $\chi(s) > 0$ oder $\chi(t) > 0$ oder $\chi(u) > 0$. Es gilt dann $[\chi] \in {}^*\Sigma^2$, wie mit Kriterium (IV.4.1) rasch nachzuprüfen ist. Wir möchten nun eine Dimension höher gehen und zeigen, daß für solche Charaktere auch $[\chi] \in {}^*\Sigma^3$ gilt. Sei $C^2 = C(X;R)$ der Cayley-Komplex von G in der obigen Präsentation. $\pi_2(C^2)$ ist dann als G-Modul isomorph zum G-Modul $\pi_{X;R}$ der Identitäten von Relationen von $G = \langle X;R \rangle$. Wir bestimmen eine Menge von erzeugenden Identitäten von $\pi_{X;R}$ als G-Modul. In Abb.VII.7 sind die 4 Erzeugenden von $\pi_{X;R}$ geometrisch dargestellt. Die Abbildung beschreibt zugleich, wie für eine Identität i eine 3-Zelle σ^3_i in die geometrische Realisierung

K der Präsentation $\langle X;R \rangle$ anzuheften ist, damit wir einen 3-dimensionalen zusammenhängenden freien G-Komplex C^3 mit $\pi_2(C^3) = 0$ erhalten. Die Tatsache, daß die 4 Identitäten in Abb.VII.7 in der Tat $\pi_{X;R}$ als G-Modul erzeugen, folgt aus [14], II.7.10.

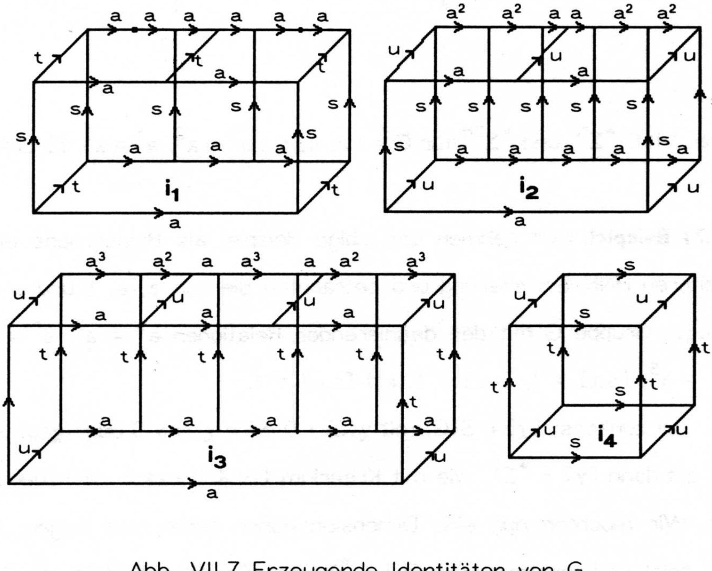

Abb. VII.7 Erzeugende Identitäten von G

Es ist nun nicht schwierig, Bild und Urbild einer 3-Zelle von C^3 unter einer v-Homotopie h in der Dimension 3 explizit zu beschreiben. Wir tun dies in einem Fall für die Identität i_1 und eine Bewertung v_χ zu $[\chi] \in S(G)$ mit $\chi(s) > 0$ in Abb.VII.8.

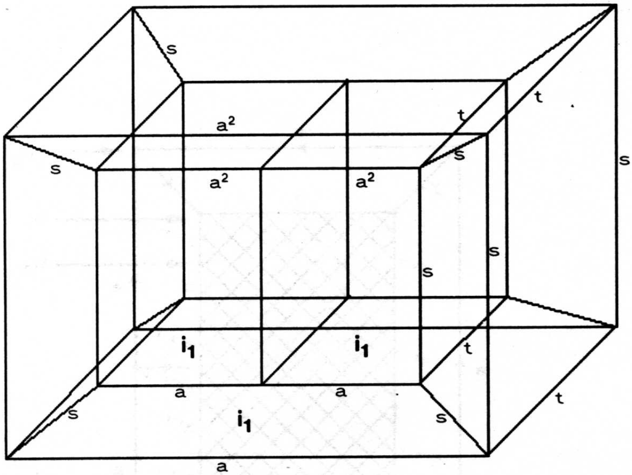

Abb.VII.8

Ganz analog beobachtet man, daß für alle Charaktere $[\chi] \in S(G)$ mit $\chi(s) > 0$ oder $\chi(t) > 0$ oder $\chi(u) > 0$ v-Homotopien in der Dimension 3 existieren. Also folgt für diese Charaktere $[\chi] \in {}^*\Sigma^3$.

Wenden wir uns einem Charakter $[\chi]$ mit $\chi(s) < 0$ und $\chi(t) < 0$ und $\chi(u) < 0$ zu. Die Gleichung

$$(*) \qquad a^{s^{-1}t^{-1}u^{-1}} = a^{-s^{-1}} a^{t^{-1}} a^{u^{-1}}$$

zeigt, daß $[\chi] \in {}^*\Sigma^1$ gilt. Wir möchten mit Kriterium (IV.4.1) beweisen, daß auch $[\chi] \in {}^*\Sigma^2$ gilt. Für die Kommutatoren r in der Relationenmenge ist es einfach bezüglich der Konjugation mit $y = s^{-1}t^{-1}u^{-1}$ Diagramme $M_{\hat{r}}$ zu finden, die (IV.4.1) genügen. Sei nun r die Relation

$a^s = a^2$. Wir erhalten durch die Konjugation mit y das Diagramm in Abb. VII.9.

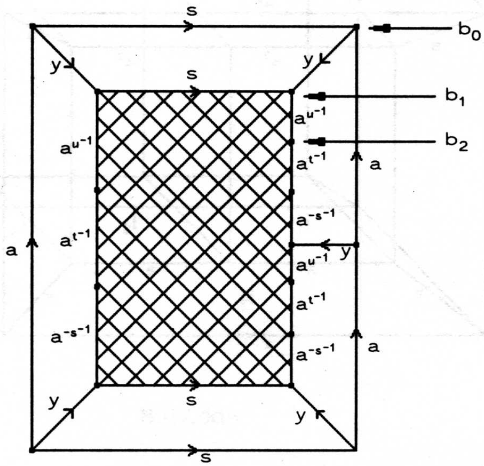

Abb.VII.9

Für den Basispunkt b_0 gilt $v_\chi(b_0) = 0$, folglich ist für die Ecken b_i $(i \geq 1)$ $v_\chi(b_i) = \chi(s^{-1}t^{-1}u^{-1}) > 0$. Die in Abb. VII.9 karierte Fläche ist nun so herzuleiten, daß keine innere Ecke g auftritt mit $v_\chi(g) \leq 0$. Wenn es gelingt, die Teilwege der Form $a^{-s^{-1}}$, $a^{t^{-1}}$ und $a^{u^{-1}}$ auf der rechten Seite der karierten Fläche in VII.9 zu vertauschen, ohne daß die Bedingung (IV.4.1) verletzt ist, dann findet man leicht ein Diagramm $M_{\hat{r}}$ mit $v_\chi(M_{\hat{r}}) > v_\chi(r)$.

In Abb. VII.10 vertauschen wir als Beispiel den Weg $a^{-s^{-1}}$ mit $a^{t^{-1}}$.

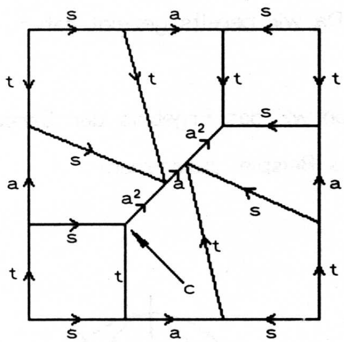

Abb.VII.10

Die inneren Ecken c des Diagramms in VII.10 haben den Wert $\chi(u^{-1})$. Analog findet man Diagramme für die weiteren Vertauschungen, so daß die inneren Ecken positiven v_χ-Wert haben. Also gibt es für die Relation $a^s = a^2$ ein Diagramm, das (IV.4.1) erfüllt. Dasselbe gilt auch für die anderen definierenden Relationen von G.

Gemäß unserer Konstruktion in Kapitel IV haben wir die Relation (∗) zu den definierenden Relationen der Präsentation hinzuzufügen, um zu erreichen, daß C_v in der Tat 1-zusammenhängend ist. Also ist auch für diese Relation (IV.4.1) zu prüfen. In diesem Fall sieht man indessen sofort, daß man ein Diagramm $M_{\hat{r}}$ für die Relation r = (∗) findet, welches keine inneren Ecken enthält.

Also folgt: $[\chi] \in {}^*\Sigma^2$, falls $\chi(s) < 0$, $\chi(t) < 0$ und $\chi(u) < 0$ gilt.

Andererseits gilt für solche Charaktere $[\chi] \in {}^*\Sigma^3$: Ist ein diskreter Charakter $[\chi] \in {}^*\Sigma^{1c} + {}^*\Sigma^{2c}$, dann ist wegen Åbergs Resultat der

Kern von χ nicht vom Typ F_3 und deshalb nach Satz C $[\chi] \in {}^*\Sigma^3$ oder $[-\chi] \in {}^*\Sigma^3$. Da wir bereits gezeigt haben, daß $[-\chi] \in {}^*\Sigma^3$ gilt, ist $[\chi] \in {}^*\Sigma^3$.

In Abb.VII.11 fassen wir das Ergebnis der Berechnung von ${}^*\Sigma^1$, ${}^*\Sigma^2$ und ${}^*\Sigma^3$ für dieses Beispiel zusammen:

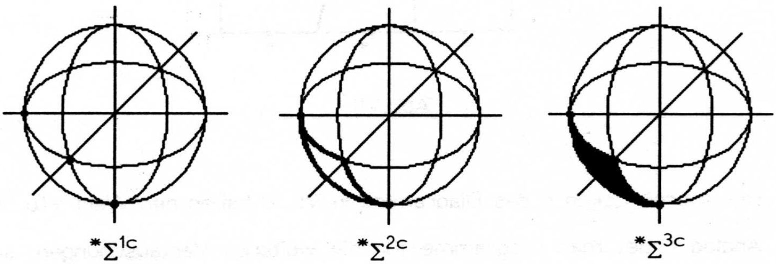

Abb.VII.11 ${}^*\Sigma^{1c}$, ${}^*\Sigma^{2c}$ und ${}^*\Sigma^{3c}$ von G

(3.8) Diskussion. Bei der Berechnung der höheren geometrischen Invarianten ${}^*\Sigma^k$ einer metabelschen Gruppe nach der Methode, die wir in diesem Abschnitt verwendet haben, ist man mit zwei Problemen konfrontiert:

1. Wenn nach dem Satz von Bieri und Strebel bekannt ist, daß ein endlich erzeugter Normalteiler N in G mit unendlich zyklischer Faktorgruppe nicht endlich präsentiert ist, dann läßt Satz C offen, ob der zugehörige Charakter oder sein Antipode oder beide in ${}^*\Sigma^{2c}$ sind. Nur im Spezialfall der konstruierbaren metabelschen Gruppen konnte

nen haben wir für metabelsche Gruppen von endlichem Prüferrang und diskrete Charaktere dieselbe Situation: Sei $[\chi]$ ein diskreter Charakter und $N = \operatorname{Ker} \chi$. Wenn für ein $k > 1$ $[\chi] \in {}^*\Sigma^{1c} + {}^*\Sigma^{(k-1)c}$ gilt, dann enthält $\Sigma^c(N)$ k Punkte, die nicht in einer offenen Hemisphäre von $S(G)$ liegen. Nach dem Resultat von Åberg ist dann N nicht vom Typ F_k. Wieder läßt Satz C die Entscheidung offen, ob $[\chi] \in {}^*\Sigma^{kc}$ oder $[-\chi] \in {}^*\Sigma^{kc}$ oder beides gilt.

2. Es ist nicht bekannt, ob wie ${}^*\Sigma^1$ auch ${}^*\Sigma^k$ für $k > 1$ eine rationale polyedrische Teilmenge von $S(G)$ ist. Deshalb ist es nicht möglich, aus der Kenntnis der rationalen Punkte von ${}^*\Sigma^{kc}$ durch den Übergang zum Abschluß die höheren Invarianten zu erhalten. Im Fall der konstruierbaren metabelschen Gruppen kann ich nur ${}^*\Sigma^{2c} \supseteq {}^*\Sigma^{1c} + {}^*\Sigma^{1c}$ zeigen. Dieses zweite Problem tritt auch dann auf, wenn man Satz D zur Bestimmung von ${}^*\Sigma^2$ heranzieht, weil auch Satz D nur Auskunft über rationale Punkte in $S(G)$ gibt.

3. Es gelingt bisher nur in Spezialfällen zu zeigen, daß für eine endlich präsentierte metabelsche Gruppe ${}^*\Sigma^{2c} = {}^*\Sigma^{1c} + {}^*\Sigma^{1c}$ gilt, etwa für die Gruppe in (3.6). Ein weiteres Beispiel ist die Gruppe von Baumslag und Remeslennikov. In (3.7) haben wir ein Beispiel, in dem ${}^*\Sigma^{3c} = {}^*\Sigma^{1c} + {}^*\Sigma^{2c}$ gilt. Immerhin ist das empirisches Material genug, um zu fragen:

Sei G eine metabelsche Gruppe vom Typ F_k für $k \geq 2$. Gilt dann

$${}^*\Sigma^{kc} = {}^*\Sigma^{1c} + {}^*\Sigma^{(k-1)c} \ ? \qquad ^{*)}$$

*) Robert Bieri hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß eine genaue Analyse des Åbergschen Satzes obige Vermutung nahelegt.

[illegible] für metabelsche Gruppen von endlichem Rang [illegible] und [illegible] Gruppen [illegible] Wort [illegible] γ [illegible] eine Gruppe [illegible] Wenn [illegible] $[\gamma] = {}^*\Sigma^1$ [illegible] [illegible] Punkte, die nicht in [illegible] von [illegible] liegen. Nach dem [illegible] ist [illegible] nicht [illegible] [illegible] Satz [illegible] oder [illegible] oder beides gilt.

[illegible] nicht bekannt, ob [illegible] Σ [illegible] eine [illegible] polyedrische [illegible] ist. [illegible] nicht möglich, aus der Kenntnis der [illegible] $^*\Sigma^c$ durch den Übergang [illegible] der [illegible] zu erhalten. Im Fall der [illegible] Gruppen kann [illegible] $^*\Sigma^c$ [illegible] zeigen [illegible] auch dann [illegible], wenn man Satz [illegible] zur Bestimmung von $^*\Sigma^c$ heranzieht, weil [illegible] gibt.

Es gelingt [illegible] zu zeigen, daß [illegible] eine endlich präsentierte metabelsche Gruppe [illegible] gilt [illegible] die Gruppe [illegible] Ein [illegible] Beispiel ist die Gruppe [illegible] und [illegible] haben wir ein Beispiel, in dem [illegible] $^*\Sigma^c$ gilt. Immerhin ist [illegible] zu fragen:

[illegible] bei G eine metabelsche Gruppe [illegible] Gilt dann

$$^*\Sigma^c = {}^*\Sigma^c \cup {}^*\Sigma^c \quad ?$$

*) [illegible] Analyse des [illegible]

Literaturverzeichnis

[1] Åberg, H., Bieri-Strebel valuations (of finite rank), *Proc. London Math. Soc.* (3) **52** (1986), 269 - 304.

[2] Bieri, R., Groves, J.R.J., On the geometry of the set of characters induced by valuations, *J. reine angew. Math. (Crelle)* **347** (1984), 168 - 195.

[3] Bieri, R., Neumann, W.D., Strebel, R., A geometric invariant of discrete groups, *Invent. math.* **90** (1987), 451 - 477.

[4] Bieri, R., Renz, B., Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups, erscheint in *Comment. Math. Helv.*

[5] Bieri, R., Strebel, R., Almost finitely presented soluble groups, *Comment. Math. Helv.* **53** (1978), 258 - 278.

[6] Bieri, R., Strebel, R., Valuations and finitely presented groups, *Proc. London Math. Soc.* (3) **41** (1980), 439 - 464.

[7] Bieri, R., Strebel, R., A geometric invariant for modules over an abelian group, *J. reine angew. Math. (Crelle)* **322** (1981), 170 - 189.

[8] Bieri, R., Strebel, R., A geometric invariant for nilpotent-by-abelian-by-finite groups, *J. Pure Appl. Algebra* **25** (1982), 1 - 20.

[9] Brown, K.S., *Cohomology of groups*, Grad. Texts Math. 87, New York Heidelberg Berlin, 1982.

[10] Brown, K.S., Finiteness properties of groups, *J. Pure Appl. Algebra* **44** (1987), 45 - 75.

[11] Brown, K.S., Trees, valuations, and the Bieri-Neumann-Strebel invariant, *Invent. math.* **90** (1987), 479 - 504.

[12] Fried D., Lee, R., Realizing group automorphisms, *Contemp. Math.* **36** (1985), 427 - 432.

[13] Hempel, J., *3-manifolds*, Annals of Math. Studies 86, Princeton New Jersey, 1976.

[14] Holz, S., Endliche Identifizierbarkeit von Gruppen, Dissertation, Bielefeld, 1985.

[15] Lyndon, R.C., Schupp, P.E., *Combinatorial Group Theory*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete 89, Berlin Heidelberg New York, 1977.

[16] Ratcliffe, J.G., Finiteness conditions for groups, *J. Pure Appl. Algebra* **27** (1983), 173 - 185.

[17] Strebel, R., Finitely presented soluble groups, in: *Group theory - essays for Philip Hall*, edit. K.W. Gruenberg, J.E. Roseblade, London, 1984.

[18] Whitehead, J.H.C., Simple homotopy types, *Amer. J. Math.* **72** (1950), 1 - 57.

Symbole

$C(X;R)$	30	[Cayley-Komplex der Gruppe G in der Präsentation $\langle X;R \rangle$]
C_v	25	[Bewertungsunterkomplex der universellen Überlagerung C eines K(G,1) bezüglich der Bewertung v]
χ, $[\chi]$	5	[Charakter einer Gruppe G: $\chi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, bzw. $[\chi] \in S(G)$]
dis Σ	5	[Die Teilmenge der diskreten Charaktere in $\Sigma \subseteq S(G)$]
G_χ	6	[Untermonoid $\{ g \in G \mid \chi(g) \geq 0 \}$ für einen Charakter χ der Gruppe G]
$\Gamma(X)$	31	[Cayley-Graph der Gruppe G in den Erzeugenden X]
Γ_v	37	[Bewertungsteilgraph des Cayley-Graph Γ bezüglich der Bewertung v]
$h(\cdot,\cdot)$	53	[v-Homotopie]
M_p	32	[Diagramm über einer Präsentation $\langle X;R \rangle$ mit Randweg p]
$\hat{r}$	66	[Relator in $\langle X;R \rangle$, der für ein $r \in R$ durch Konjugation mit $t \in X$ entsteht]
$S(G)$	5	[Charaktersphäre der Gruppe G]
$S(G,N)$	5	[Untersphäre der Charaktere in S(G), die auf dem Normalteiler $N \geq G'$ verschwinden]
Σ	7	[Bieri-Strebel-Invariante]
Σ_{BNS}	9	[Bieri-Neumann-Strebel-Invariante]
$\Sigma^k(G;A)$	11	[Höhere geometrische Invariante einer Gruppe G und eines G-Moduls A]
$^*\Sigma^k$	27	[Höhere geometrische Invariante einer Gruppe G]
$\Sigma_1 + \Sigma_2$	108	[Konvexe Summe der Teilmengen Σ_1 und Σ_2 von S(G)]

LEBENSLAUF

30. 8. 1955	geboren in Tübingen als Sohn von Alfred Renz, Betriebswirt und Hella Renz, geb. Wolf.
1. 4. 1962	Einschulung in der Grundschule Kusterdingen, Kreis Tübingen
19. 4. 1966	Übergang auf das Kepler-Gymnasium in Tübingen
28. 5. 1974	Abitur am Kepler-Gymnasium Tübingen
14. 10. 1974	Immatrikulation an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen im Fach Mathematik Diplom mit Wahlfach Wirtschaftswissenschaften
1. 10. 1975	Zivildienst beim Internationalen Bund für Sozialarbeit, Jugendsozialwerk e.V. in Tübingen
1. 4. 1977	Wiederaufnahme des Studiums
2. 10. 1978	Vorprüfung zur Diplomprüfung im Fach Mathematik
25. 2. 1982	Diplomprüfung im Fach Mathematik mit Nebenfach Betriebswirtschaftslehre. Thema der Diplomarbeit: Permutationsgruppen vom Rang 3 und die Konstruktion der sporadischen einfachen Gruppe von Suzuki.
1. 10. 81 - 15. 5. 83	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Didaktik der Mathematik und am Mathematischen Seminar der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt.
ab 16. 5. 83	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Seminar der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt.