

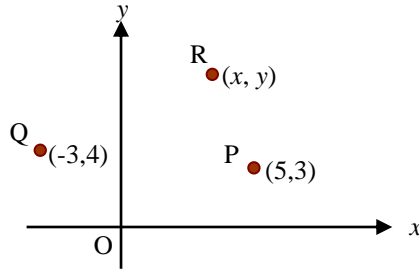
1.BÖLÜM

VEKTÖRLER

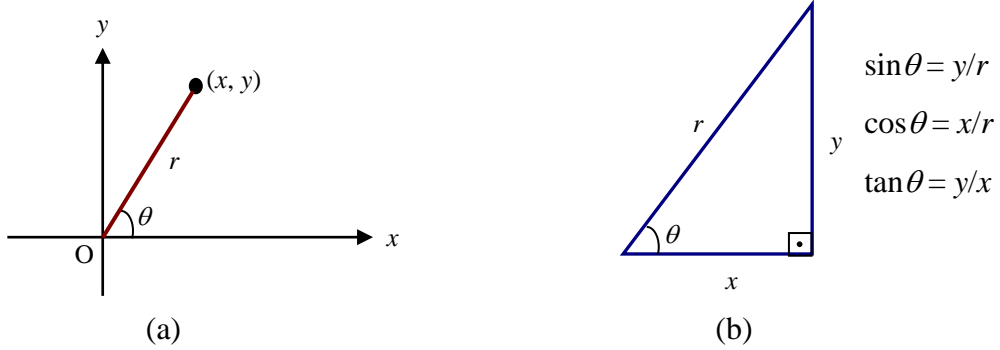
1.1. KOORDİNAT VE REFERANS SİSTEMLERİ

Uzaydaki herhangi bir cismin konumunu belirlemek için kullanılan koordinat sistemi, orijin denilen belli bir O referans noktası, üzerleri ölçeklenmiş ve isimlendirilmiş belli eksen veya doğrultuları, uzaydaki bir noktanın konumunu nasıl işaretleyeceğimizi söyleyen bilgileri içermelidir.

Uygun bir koordinat sistemi, dik koordinat sistemi de denilen kartezyen koordinat sistemidir. İki-boyutta böyle bir koordinat sistemi Şekil 1.1’de görülmektedir. Bu sistemde, rasgele bir noktanın konum bilgisi (x, y) koordinatıyla verilmektedir.



Şekil 1.1. Kartezyen koordinat sisteminde noktaların yerlerinin gösterilmesi.



Şekil 1.2. (a) Bir noktanın düzlem kutupsal koordinatları r uzaklığı ve θ açısıyla temsil edilir. (b) (x,y) 'nin (r,θ) ile bağlantısını kurmak için yararlanılan dik üçgen.

Bazen düzlemdeki bir nokta, Şekil 1.2a’daki gibi, (r, θ) düzlem kutupsal koordinatları ile temsil edilir. Bu koordinat sisteminde r , orijinden (x, y) kartezyen koordinatlarına sahip noktaya olan uzaklık ve θ , çoğu zaman pozitif x ekseninden itibaren saat ibrelerinin yönünün aksi yönünde ölçülen açıdır. Şekil 1.2b’deki dik

üçgenden, $\sin\theta = y/r$ ve $\cos\theta = x/r$ olduğunu buluruz. Bu nedenle, düzlem kutupsal koordinatlar ile başlayarak, kartezyen koordinatlar

$$x = r\cos\theta \quad \text{ve} \quad y = r\sin\theta \quad (1.1)$$

denklemlerinden elde edilebilir. Ayrıca,

$$\tan\theta = y/x \quad \text{ve} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.2)$$

olduğu hesaplanabilir.

Örnek : (x,y) noktasının kutupsal koordinatları (r,q) ise, aşağıdaki noktaların kutupsal koordinatları ne olur?

(a) (-x,y)

(b) (-2x,-2y)

(c) (3x,-3y)

Çözüm :

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $\theta = \tan^{-1} y/x$ olduğunu biliyoruz.

$$(a) \quad r = \sqrt{(-x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$\theta = \tan^{-1} y/-x = 180 - \theta \quad (\text{ikinci çeyrekte})$$

$$(b) \quad r = \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$$

$$\theta = \tan^{-1} -2y/-2x = \tan^{-1} y/x = 180 + \theta \quad (\text{üçüncü çeyrekte})$$

$$(c) \quad r = \sqrt{(3x)^2 + (-3y)^2} = 3\sqrt{x^2 + y^2} = 3r$$

$$\theta = \tan^{-1} -3y/3x = \tan^{-1} -y/x = -\theta \quad (\text{dördüncü çeyrekte})$$

1.2. SKALERLER VE VEKTÖRLER

Sayısal büyüklüğü ve birimi verildiğinde, tamamen belirli olan nicelikler skaler büyüklükler olup doğrultuları yoktur. Örneğin, sıcaklık, hacim, kütle, yoğunluk gibi nicelikler skaler büyüklüklerdir. Bilinen aritmetik kurallar, skaler nicelikler ile işlem yapmak için kullanılırlar.

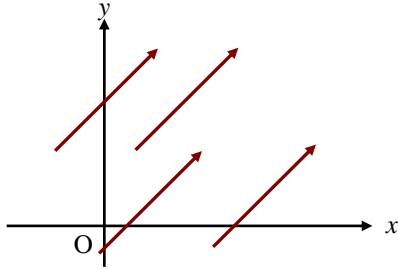
Tamamen belli olabilmesi için sayısal büyüklüğü ve birimi yanında doğrultu ve yönünün de belirlenmesi gereken niceliklere vektörel büyüklükler denir. Hız, uzaklık, kuvvet, ivme, elektrik alan gibi büyüklükler vektörel büyüklüklerdir.

Rasgele bir vektörü temsil etmek için **A** gibi, koyu harfler kullanılır. Diğer bir gösterim tarzı ise harfin üzerinde ok kullanmaktır: \vec{A} gibi. **A** vektörünün büyüklüğü A veya $|\mathbf{A}|$ şeklinde yazılır.

1.3. VEKTÖRLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

1.3.1. İki Vektörün Eşitliği

Aynı yönde ve aynı büyüklükteki **A** ve **B** vektörleri eşit vektörlerdir. Bu özellik, vektörü etkilemeden kendisine paralel olarak öteleme hareketi yapmaya izin verir.

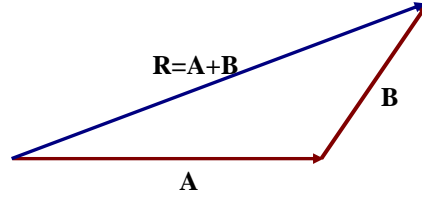


Şekil 1.3. Aynı vektörün dört gösterimi.

1.3.2. Vektörlerin Toplanması

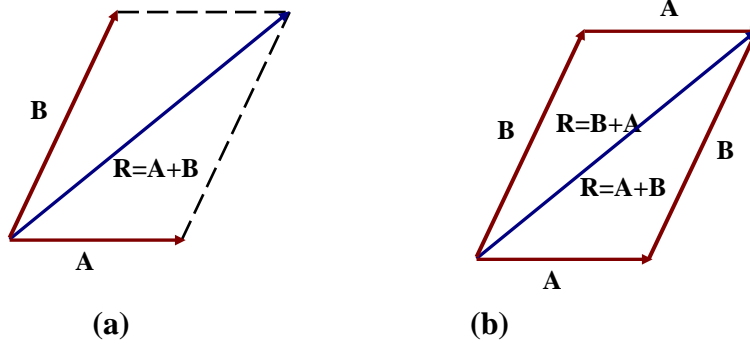
İki veya daha fazla vektör birbirleriyle toplandığı zaman, işe karışan bütün vektörlerin birimleri aynı olmalıdır.

B vektörünü **A** vektörüyle toplamak için, önce **A** vektörü çizilir ve sonra **B** vektörünün başlangıcı **A**'nın ucundan başlayarak aynı ölçekte çizilir. Bu toplama işlemi, üçgen yöntemi olarak bilinir.



Şekil 1.4. **A** vektörü **B** vektörü ile toplandığı zaman bileşke **R**, **A**'nın başlangıcından **B**'nin ucuna giden vektördür.

İki vektörü toplamak için diğer bir yöntem toplamada paralel kenar kuralıdır. Bu yöntemde, **A** ve **B** vektörünün başlangıçları aynı noktadadır ve bileşke **R** vektörü, kenarları **A** ve **B** olan bir paralel kenarın köşegenidir.



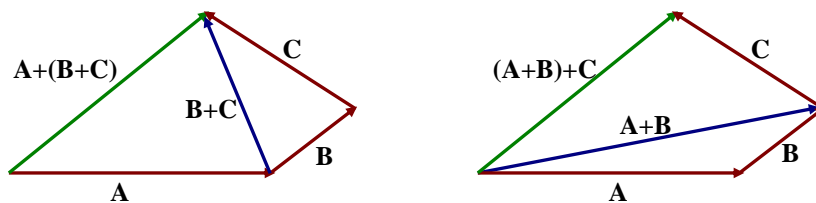
Şekil 1.5. (a) Bileşke **R**, kenarları **A** ve **B** olan bir paralel kenarın köşegenidir. (b) Bu çizim $A+B=B+A$ olduğunu göstermektedir.

İki vektör toplandığında, sonuç toplamın sırasından bağımsızdır ve toplamının değişme özelliği (Şekil 1.5b) olarak bilinir:

$$A + B = B + A \quad \text{Değişme özelliği} \quad (1.3)$$

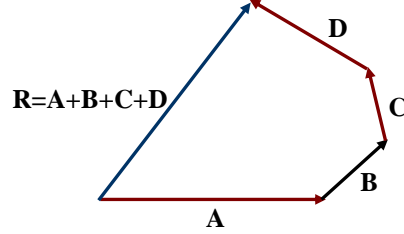
Üç veya daha fazla vektör toplanırsa; sonuç, her bir vektörün birbirleriyle gruplandırılma şeklinden bağımsızdır. Buna toplamının birleşme özelliği denir (Şekil 1.6).

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (1.4)$$



Şekil 1.6. Toplama kurallarını sağlamak için geometrik çizimler.

Geometrik çizimler, üç vektörden daha fazlasını toplamak için de kullanılabilir. Dört vektör için bileşke vektör, $\mathbf{R}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}$ çokgenini tamamlayan vektördür. Başka bir deyişle \mathbf{R} , birinci vektörün başlangıcından son vektörün ucuna çizilen vektördür.



Şekil 1.7. Dört vektörün toplanması için geometrik çizim. Mavi renkli bileşke \mathbf{R} vektörü çokgeni tamamlamaktadır.

1.3.3. Bir Vektörün Negatifi

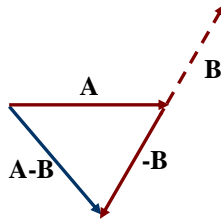
\mathbf{A} vektörünün negatifi, \mathbf{A} vektörüyle toplandığı zaman sonucu sıfır olan vektör olarak tanımlanır. \mathbf{A} ve $-\mathbf{A}$ vektörleri aynı büyüklükte fakat zıt yöndedirler.

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0 \quad (1.5)$$

1.3.4. Vektörlerin Çıkarılması

$\mathbf{A}-\mathbf{B}$ işlemini, \mathbf{A} vektörü ile toplanan $-\mathbf{B}$ vektörü olarak tanımlarız:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (1.6)$$



Şekil 1.8. \mathbf{B} vektörünün, \mathbf{A} vektöründen çıkarılması. $-\mathbf{B}$ vektörü büyüklükçe \mathbf{B} vektörüne eşit ve onunla zıt yönlüdür.

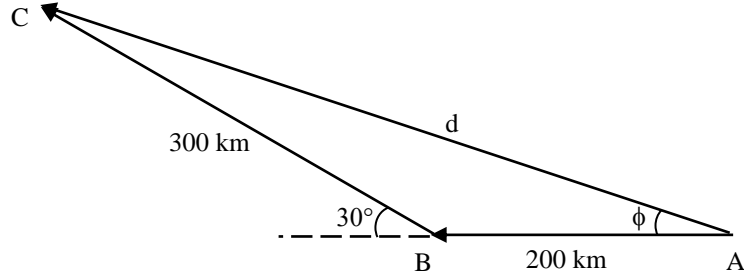
1.3.5. Bir Vektörün Bir Skaler ile Çarpılması

Bir \mathbf{A} vektörü, pozitif bir m skaler niceliğiyle çarpılırsa, $m\mathbf{A}$ çarpımı, \mathbf{A} ile aynı yönde ve $m\mathbf{A}$ büyüklüğünde olan bir vektördür. m negatif ise, $m\mathbf{A}$ vektörü \mathbf{A} ile zıt yönlüdür.

Örnek : Bir uçak A kentinden B kentine doğru 200 km uçuyor. Sonra B kentinden 30° kuzey-batı yönünde C kentine 300 km uçuyor.

- (a) A kentinden C kentine kuş uçuşu uzaklık ne kadardır?
(b) A kentine göre C kentinin yönü nedir?

Çözüm:



(a) $x = 200 + 300 \cdot \cos 30 = 200 + 259.8 = 459.8 \text{ km}$

$$y = 300 \cdot \sin 30 = 150 \text{ km}$$

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{459.8^2 + 150^2}$$

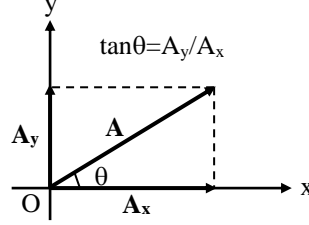
$$d = 483.65 \text{ km}$$

(b) $\tan \phi = y/x = 150 / 459.8 = 0.326$

$$\phi = 18^\circ$$

1.4. BİR VEKTÖRÜN BİLEŞENLERİ VE BİRİM VEKTÖR

Vektörlerin, dik koordinat sisteminin eksenleri üzerindeki izdüşümlerine o vektörün bileşenleri denir. Şekil 1.9'daki gibi, xy düzleminde yer alan ve pozitif x eksenine θ açısı yapan bir \mathbf{A} vektörünü göz önüne alalım.



Şekil 1.9. xy düzleminde yer alan herhangi bir \mathbf{A} vektörü, onun \mathbf{A}_x ve \mathbf{A}_y dik bileşenleriyle temsil edilebilir. Burada $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$ 'dir.

\mathbf{A} vektörü, \mathbf{A} 'nın vektör bileşenleri adı verilen, \mathbf{A}_x ve \mathbf{A}_y vektörlerinin toplamı olarak ifade edilebilir. Yani $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$ 'dir. \mathbf{A}_x bileşeni, \mathbf{A} vektörünün x eksenini boyunca izdüşümünü, \mathbf{A}_y bileşeni de, y eksenini boyunca olan izdüşümünü gösterir. Şekilden de görüldüğü gibi, $\cos\theta = \mathbf{A}_x/\mathbf{A}$ ve $\sin\theta = \mathbf{A}_y/\mathbf{A}$ olur. O halde,

$$\mathbf{A}_x = A \cos\theta \quad \mathbf{A}_y = A \sin\theta \quad (1.7)$$

olur. \mathbf{A} vektörünün büyüklüğü dik bileşenleri cinsinden,

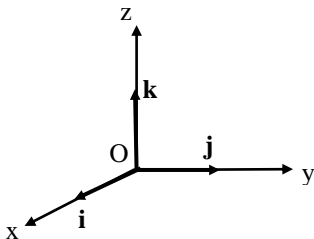
$$A = \sqrt{\mathbf{A}_x^2 + \mathbf{A}_y^2} \quad (1.8)$$

yönü ise

$$\tan\theta = \mathbf{A}_y/\mathbf{A}_x \quad (1.9)$$

bağıntılarıyla verilir.

Vektörel nicelikler, verilen bir yönü belirlemek için kullanılan birim uzunluklu ve boyutsuz olan birim vektörler cinsinden ifade edilirler. x, y, z doğrultularını gösteren birim vektörler, sırasıyla, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} harfleriyle gösterilirler (Şekil 1.10). Birim vektörlerin büyüklüğü bire eşittir; yani $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$ 'dir.

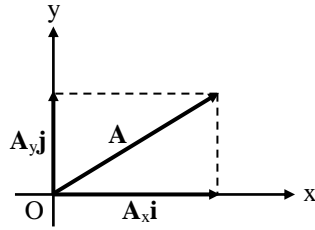


Şekil 1.10. \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} birim vektörleri, sırasıyla, x, y, z eksenleri boyunca yönelirler.

Şekil 1.11’de **A** vektörünü göz önüne alalım. A_x bileşenin ve **i** birim vektörünün çarpımı, x eksenı yönünde, A_x büyüklüğünde $A_x\mathbf{i}$ vektörüdür. Benzer şekilde, $A_y\mathbf{j}$, y eksenine paralel A_y büyüklüğünde bir vektörüdür. O halde **A** vektörü

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} \quad (1.10)$$

olarak yazılır.



Şekil 1.11. xy düzleminde yer alan bir **A** vektörü $A_x\mathbf{i}$ ve $A_y\mathbf{j}$ bileşen vektörlerine sahiptir. A_x ve A_y , **A**’nın dik bileşenleridir.

Şimdi böyle iki vektörü toplamak istediğimizi varsayalım. Bileşke $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ vektörü,

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} \quad (1.11)$$

olarak verilir. Böylece, bileşke vektörün dik bileşenleri

$$R_x = A_x + B_x \quad R_y = A_y + B_y \quad (1.12)$$

olur. **R** vektörün büyüklüğü ve x eksenıyle yaptığı açı

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2} \quad (1.13)$$

ve

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \quad (1.14)$$

bağıntıları kullanarak bulunur.

Bu yöntemin üç boyutlu vektörlere uygulanması da aynı şekildedir. **A** ve **B**’nin her ikisi x, y ve z bileşenlerine sahipse

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k} \quad (1.16)$$

şeklinde ifade edilir. **A** ve **B** vektörlerinin toplamı ise,

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k} \quad (1.17)$$

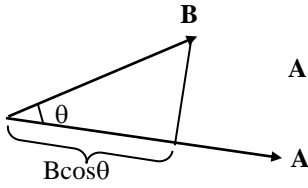
ile verilir.

1.5. İKİ VEKTÖRÜN SKALER ÇARPIMI

A ve **B** gibi iki vektörün skaler çarpımı, skaler bir nicelik olup, bu iki vektörün büyüklükleri ile aralarındaki açının kosinüsünün çarpımına eşittir (Şekil 1.12).

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (1.18)$$

Burada θ , **A** ve **B** arasındaki açı, A ve B sırasıyla **A** ve **B** vektörlerinin büyüklükleridir. $B \cos \theta$, **B**'nin **A** üzerindeki izdüşümüdür. Dolayısıyla $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ tanımını, **A**'nın büyüklüğünün **B**'nin **A** üzerindeki izdüşümü ile çarpımı olarak ifade edebiliriz.



Şekil 1.12. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ skaler çarpımı, **A**'nın büyüklüğü ile, **B**'nin **A** üzerindeki izdüşümünün çarpımına eşittir.

(1.18) ifadesindeki skaler çarpım yerdeğiştirebilir:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.19)$$

Aynı zamanda skaler çarpım çarpmanın dağılma özelliğine de sahiptir:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1.20)$$

i, **j**, **k** birim vektörlerinin skaler çarpımları

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad (1.21)$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (1.21a)$$

olur.

A ve **B** vektörleri bileşenleri cinsinden

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

olarak ifade edilmekte idi, o halde, **A** ile **B**'nin skaler çarpımı

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.22)$$

olur. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ özel durumunda

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2 \quad (1.23)$$

olduğunu görürüz.

1.6. İKİ VEKTÖRÜN VEKTÖREL ÇARPIMI

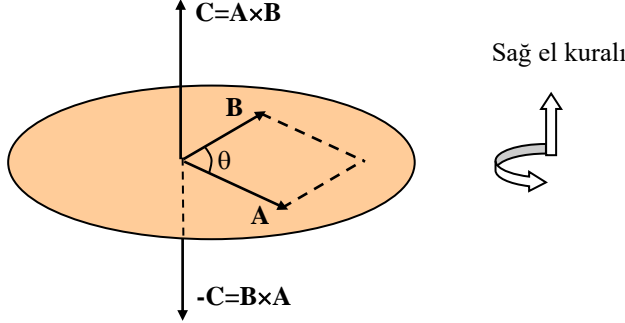
A ve **B** gibi herhangi iki vektörün $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ vektörel çarpımı, üçüncü bir **C** vektörü olarak tanımlanır.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (1.24)$$

Bu **C** vektörünün büyüklüğü $AB \sin \theta$ 'ya eşittir:

$$C \equiv |\mathbf{C}| = |AB \sin \theta| \quad (1.25)$$

θ , **A** ve **B** vektörleri arasındaki açıdır. Şekil 1.13'ten de görüldüğü gibi $AB \sin \theta$ niceliği **A** ve **B** vektörleri tarafından oluşturulan paralel kenarın alanına eşittir. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 'nin doğrultusu, **A** ve **B** vektörleri tarafından oluşturulan düzleme diktir ve yönü **A**'dan **B**'ye doğru θ açısı kadar bir dönme varsa sağ vidanın ilerleme yönüdür. Doğrultuyu tayin etmek için daha uygun bir kural sağ el kuralıdır: Sağ elin dört parmağı **A** vektörünü kavrayıp hafifçe büküldükten sonra **B**'ye doğru θ açısı kadar döndürülürse, yana açılan baş parmak, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 'nin yönünü gösterir.



Şekil 1.13. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ vektörel çarpımı, şekilde görülen paralel kenarın alanına eşit bir $AB \sin \theta$ büyüklüğüne sahip olan üçüncü bir **C** vektörünü verir. **C**'nin doğrultusu **A** ve **B** vektörleri tarafından oluşturulan düzleme diktir ve yönü sağ-el kuralına göre tayin edilir.

Vektör çarpımının bazı özellikleri şunlardır:

1. Skaler çarpımın aksine, iki vektörün vektörel çarpımındaki sıra önemlidir, yani

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (1.26)$$

2. **A** vektörü **B**'ye paralel ise ($\theta=0^\circ$ veya 180°) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}=0$ olur.

3. **A** vektörü **B**'ye dikse $\mathbf{A} \times \mathbf{B}=AB$ olur.

4. Vektörel çarpım, dağılım kuralına uyar:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1.27)$$

5. Vektörel çarpımın t gibi herhangi bir değişkene göre türevi

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (1.28)$$

şeklinde ifade edilir.

6. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ çarpımları bir paralel yüzün V hacmini oluşturur.

Dik koordinat sistemini oluşturan $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ birim vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \quad (1.29a)$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \quad (1.29b)$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i} \quad (1.29c)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \quad (1.29d)$$

olur.

\mathbf{A} ve \mathbf{B} gibi herhangi iki vektörün vektörel çarpımı,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.30)$$

şeklinde determinantla da ifade edilir. Bu determinantın açılımı neticesinde

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k} \quad (1.31)$$

sonucu bulunur.

PROBLEMLER

Problem 1. xy düzlemindeki iki noktanın kartezyen koordinatları (2,-4) ve (-3,3) olarak verilmektedir. Burada birimler m cinsindendir.

- a) Bu noktalar arasındaki uzaklığı bulunuz.
- b) Bu noktaların kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$$a) d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - [-3])^2 + (-4 - 3)^2} = \sqrt{25 + 49} \quad d = 8.6 \text{ m}$$

$$b) \quad r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} \quad r_1 = 4.47 \text{ m}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}y/x = \tan^{-1}(-4/2) = \tan^{-1}-2 \quad \theta_1 = -63,4^\circ = 296,6^\circ$$

$$r_2 = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} \quad r_2 = 4.24 \text{ m}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}(3/-3) = \tan^{-1}-1 \quad \theta_2 = -45^\circ = 135^\circ$$

Problem 2. xy düzleminin içerisindeki bir noktanın kartezyen koordinatları (-3,5) m'dir. Bu noktanın kutupsal koordinatları nedir?

Çözüm:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34} \quad r = 5,83 \text{ m}$$

$$\cos \theta = x/r = -3/5,83 = -0,514 \quad \theta = 120,97^\circ$$

Problem 3. Bir noktanın kutupsal koordinatları $r = 5,5 \text{ m}$ ve $\theta = 240^\circ$ 'dir. Bu noktanın kartezyen koordinatları nedir?

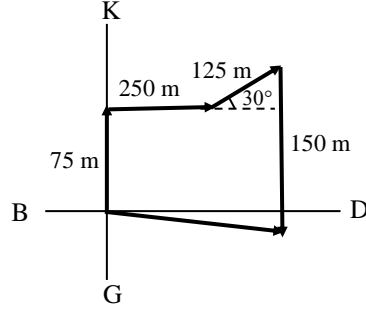
Çözüm:

$$x = r \cos \theta = 5,5 \cos 240 = 5,5 \cdot (-0,5) \quad x = -2,75 \text{ m}$$

$$y = r \sin \theta = 5,5 \sin 240 = 5,5 \cdot (-0,866) \quad y = -4,763 \text{ m}$$

Problem 4. Bir mağarayı incelemek isteyen birisi girişten başlayarak, şu uzaklıklara gitmektedir: 75 m kuzeye, 250 m doğuya, doğu ile 30° 'lik açı yaparak kuzeydoğu yönünde 125 m ve güneye 150 m. Mağara girişinden itibaren bileşke yerdeğiştirmeyi bulunuz.

Çözüm:



$$\Sigma x = 250 + 125 \cdot \cos 30^\circ = 358,25 \text{ m}$$

$$\Sigma y = 75 + 125 \cdot \sin 30^\circ - 150 = -12,5 \text{ m}$$

$$R = (x^2 + y^2)^{1/2} = [(358,25)^2 + (-12,5)^2]^{1/2}$$

$$R = 358,46 \text{ m}$$

Problem 5. Üç vektör $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ ile verilmektedir.

- Üç vektörün toplamını,
- bileşke vektörün büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.

Çözüm:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) + (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$$

$$\mathbf{R} = 6\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$$

$$b) \quad R = (R_x^2 + R_y^2)^{1/2} = (6^2 + 7^2)$$

$$R = 9,22$$

$$\tan \theta = R_y / R_x = 7/6 = 1,17$$

$$\theta = 49,4^\circ$$

Problem 6. Bir **A** vektörünün negatif x bileşeni 3 birim uzunluğunda ve pozitif y bileşeni 2 birim uzunluğundadır.

- Birim vektör gösteriminde **A** için bir ifade belirleyiniz.
- A**'nın büyüklüğünü ve yönünü tayin ediniz.
- A**'ya hangi **B** vektörü ilave edildiği zaman hiç x bileşeni olmayan ve negatif y bileşeni 4 birim uzunluğunda olan bileşke vektör elde edilir?

Çözüm:

a) $A_x = -3$ $A_y = 2$

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$$

$$\mathbf{A} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

b) $A = (A_x^2 + A_y^2)^{1/2}$

$$A = (-3^2 + 2^2)^{1/2}$$

$$A = 3,61$$

$$\tan \theta = A_y / A_x$$

$$\tan \theta = 2 / -3$$

$$\theta = \tan^{-1}(-0,667)$$

$$\theta = -33,7^\circ$$

$$180 - 33,7 = 146,3^\circ$$

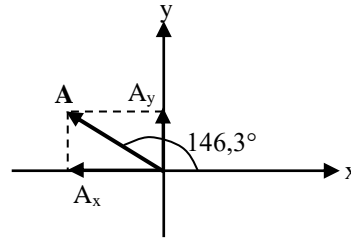
c) $\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$

$$\mathbf{R} = 0\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$0\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$$



Problem 7. $\mathbf{A}=6\mathbf{i}-8\mathbf{j}$, $\mathbf{B}=-8\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\mathbf{C}=26\mathbf{i}+19\mathbf{j}$ ise $a\mathbf{A}+b\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{0}$ olacak şekilde a ve b 'yi tayin edin.

Çözüm:

$$a\mathbf{A}+b\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{0}$$

$$a(6\mathbf{i}-8\mathbf{j})+b(-8\mathbf{i}+3\mathbf{j})+(26\mathbf{i}+19\mathbf{j})=\mathbf{0}$$

$$(6a-8b+26)\mathbf{i}+(-8a+3b+19)\mathbf{j}=\mathbf{0}$$

$$(4/3) * 6a-8b+26=0 \quad 8a-10,67b+34,69=0 \quad (1)$$

$$-8a+3b+19=0 \quad -8a+3b+19=0 \quad (2)$$

(1) ve (2)'yi taraf tarafa toplarsak

$$-7,67b+53,69=0 \quad b=7$$

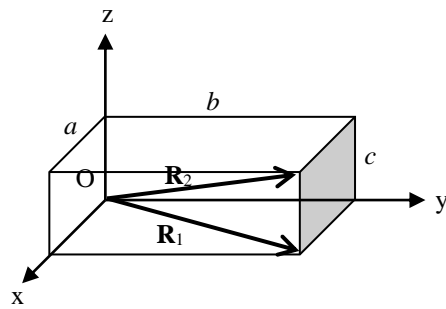
Bunu (2)'de yerine yazarsak

$$-8a+3 \cdot 7+19=0 \quad -8a+40=0 \quad a=5$$

Problem 8. Bir dikdörtgenler prizmasının boyutları şekildeki gibi a , b ve c 'dir.

(a) Yüzey köşegen vektörü \mathbf{R}_1 için bir ifade elde ediniz. Bu vektörün büyüklüğü nedir?

(b) Cisim köşegen vektörü \mathbf{R}_2 için bir ifade elde ediniz. Bu vektörün büyüklüğü nedir?



Çözüm:

$$\mathbf{R}_1=a\mathbf{i}+b\mathbf{j} \quad R_1=(a^2+b^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{R}_2=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k} \quad R_2=(a^2+b^2+c^2)^{1/2}$$

Problem 9. **A** ve **B** vektörleri $\mathbf{A}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, $\mathbf{B}=-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ olarak veriliyor.

- a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ skaler çarpımını hesaplayınız.
b) **A** ile **B** arasındaki θ açısını bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (3\mathbf{i}+4\mathbf{j}) \cdot (-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}) \\ &= 3\mathbf{i} \cdot (-2\mathbf{i}) + 4\mathbf{j} \cdot 3\mathbf{j} \\ &= -6 + 12 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 6$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= AB \cos \theta & \cos \theta &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / AB \\ A &= (A_x^2 + A_y^2)^{1/2} & A &= (3^2 + 4^2) & A &= 5 \\ B &= (B_x^2 + B_y^2)^{1/2} & B &= (-2^2 + 3^2) & B &= 3,6 \\ \cos \theta &= 6/5 \cdot 3,6 = 0,3328 & \theta &= 70,56^\circ \end{aligned}$$

Problem 10. xy düzleminde bulunan iki vektör $\mathbf{A}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\mathbf{B}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ eşitlikleriyle verilmektedir.

- a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 'yi bulunuz.
b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (3\mathbf{i}+3\mathbf{j}) \times (-\mathbf{i}+3\mathbf{j}) & \mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{k} \\ &= 9\mathbf{k} + 3\mathbf{k} \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= 12\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \mathbf{B} \times \mathbf{A} &= (-\mathbf{i}+3\mathbf{j}) \times (3\mathbf{i}+3\mathbf{j}) \\ &= -3\mathbf{k} - 9\mathbf{k} \\ \mathbf{B} \times \mathbf{A} &= -12\mathbf{k} \end{aligned}$$

O halde $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ olduğu görülür.

Problem 11. $\mathbf{F} = (6\mathbf{i}-2\mathbf{j})$ N kuvveti bir parçacık üzerine etki etmekte ve ona $\mathbf{s} = (3\mathbf{i}+\mathbf{j})$ m yerdeğiştirmesini yaptırmaktadır.

- a) $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ bağıntısını kullanarak kuvvetin parçacık üzerinde yaptığı işi bulunuz.
- b) \mathbf{F} ile \mathbf{s} arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm:

- a) $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$
 $W = (6\mathbf{i}-2\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i}+\mathbf{j})$
 $W = 18 - 2 = 16$ joule
- b) $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos\theta$
 $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} / F s)$
 $\theta = \cos^{-1}[16 / (40)^{1/2}(10)^{1/2}]$
 $\theta = \cos^{-1}0,8$
 $\theta = 36,9^\circ$

Problem 12. Skaler çarpımın tanımını kullanarak, aşağıdaki vektör çiftleri arasındaki açıları bulunuz.

- a) $\mathbf{A}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ ve $\mathbf{B}=4\mathbf{i}-4\mathbf{j}$
- b) $\mathbf{A}=-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ ve $\mathbf{B}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$
- c) $\mathbf{A}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ ve $\mathbf{B}=3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

Çözüm:

- $\cos\theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / AB$ $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / AB)$
- a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 12 + 8 = 20$ $A = (9 + 4)^{1/2} = (13)^{1/2} = 3,61$ $B = (16 + 16)^{1/2} = (32)^{1/2} = 5,66$
 $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / AB) = \cos^{-1}[20 / 3,6 \cdot 5,66]$ $\theta = 11,8^\circ$
- b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -6 - 16 = -22$ $A = (4 + 16)^{1/2} = (20)^{1/2} = 4,47$ $B = (9 + 16 + 4)^{1/2} = (29)^{1/2} = 5,39$
 $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / AB) = \cos^{-1}[-22 / 4,47 \cdot 5,39]$ $\theta = 155,9^\circ$
- c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -6 + 8 = 2$ $A = (1 + 4 + 4)^{1/2} = (9)^{1/2} = 3$ $B = (9 + 16)^{1/2} = (25)^{1/2} = 5$
 $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / AB) = \cos^{-1}[2 / 3 \cdot 5]$ $\theta = 82,3^\circ$

Problem 13. İki vektör $\mathbf{A} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ve $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ olarak verilmektedir.

a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ vektörel çarpımını bulunuz.

b) \mathbf{A} ve \mathbf{B} vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm:

$$a) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(-9-8)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -17\mathbf{k}$$

$$b) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = A B \sin\theta$$

$$\theta = \sin^{-1}(\mathbf{A} \times \mathbf{B} / A B)$$

$$\theta = \sin^{-1}[17 / 5 (13)^{1/2}]$$

$$\theta = \sin^{-1}0,943$$

$$\theta = 70,5^\circ$$

Problem 14. \mathbf{A} ve \mathbf{B} gibi herhangi iki vektörün vektörel çarpımını bulunuz ve vektörel çarpımın aşağıda gösterildiği gibi determinant şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Çözüm:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \quad \mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x B_x)(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + (A_x B_y)(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + (A_x B_z)(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + (A_y B_x)(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + (A_y B_y)(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \\ &\quad + (A_y B_z)(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + (A_z B_x)(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + (A_z B_y)(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + (A_z B_z)(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\ &= 0 + (A_x B_y)\mathbf{k} + (A_x B_z)(-\mathbf{j}) + (A_y B_x)(-\mathbf{k}) + 0 + (A_y B_z)\mathbf{i} + (A_z B_x)\mathbf{j} + (A_z B_y)(-\mathbf{i}) + 0 \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Bu sonuç determinantan elde edilen ile aynıdır.

Problem 15. a) Keyfi **A** ve **B** vektörleri için $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A})$ ifadesinin daima sıfır olduğunu gösteriniz.

b) **A** ve **B** vektörleri arasındaki açı ϕ olduğunda $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A})$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

Çözüm:

a) **A** ve **B** vektörleri $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ vektörüne dik olduğundan

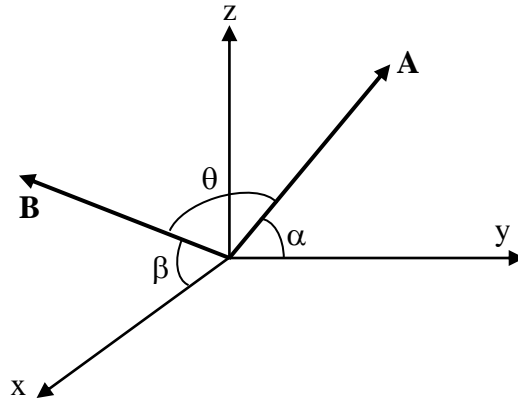
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = 0$$

b) **A** vektörü ile $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ vektörü arasındaki açı 90° 'dir.

$$|\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A})| = A |\mathbf{B} \times \mathbf{A}| \sin 90 = A |\mathbf{B} \times \mathbf{A}| = AB A \sin \phi = A^2 B \sin \phi$$

Problem 16. Boyu 3,2 birim olan bir **A** vektörü y-z düzleminde ve +y ekseniiyle 63° 'lik açı yapar şekilde bulunuyor. Boyu 1,4 birim olan **B** vektörü ise z-x düzleminde ve +x eksenii ile 48° 'lik açı yapar şekilde bulunuyor. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ifadelerini ve **A** ile **B** arasındaki açıyı hesaplayınız.

Çözüm:



$$|\mathbf{A}| = 3,2 \text{ birim}$$

$$|\mathbf{B}| = 1,4 \text{ birim}$$

$$\alpha = 63^\circ$$

$$\beta = 48^\circ$$

$$\mathbf{A} = 3,2 (\cos \alpha \mathbf{j} + \sin \alpha \mathbf{k})$$

$$\mathbf{B} = 1,4 (\cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{k})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3,2 \cdot 1,4 (\sin \alpha \sin \beta) = 4,48 \cdot 0,891 \cdot 0,743 = 2,966$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 3,2 \cdot 1,4 (-\cos \alpha \cos \beta \mathbf{k} + \cos \alpha \sin \beta \mathbf{i} + \sin \alpha \cos \beta \mathbf{j})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 4,48 (-0,304 \mathbf{k} + 0,337 \mathbf{i} + 0,596 \mathbf{j}) = 1,51 \mathbf{i} + 2,67 \mathbf{j} - 1,36 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad \theta = \cos^{-1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / AB$$

$$\theta = \cos^{-1} 2,966 / 4,48 = 48,5^\circ$$