

Adı Soyadı		1(25p)	2(25p)	3(25p)	4(25p)	Toplam
No						

- 1)  $f(x) = e^{-x} - \cos(x)$  fonksiyonunun  $[1, 1.5]$  aralığında bir kökünün olup olmadığını araştırınız. Eğer varsa bu kökü yaklaşık olarak bulmak için aralıklara bölme metoduyla bir iterasyon gerçekleştiriniz. Bunun sonucunda bulduğunuz değeri Newton metodu için başlangıç değeri olarak kullanarak bu metotla da sadece bir iterasyon daha gerçekleştiriniz.

2)

$x$	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	8	0	4

tablosu verilsin. Newton bölünmüş fark formülünü kullanarak  $f(1.8)$  in yaklaşık değerini bulunuz.

- 3) En küçük kareler yöntemini kullanarak aşağıdaki verilere  $y = ax^2 + b$  formunda bir eğri uydurunuz.

$x$	-1	0	1
$y$	-0.9	1	-1.1

- 4) Aşağıdaki lineer olmayan denklem sisteminin  $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (0.95, 2.7)$  civarında bir çözümü olduğu bilinmektedir. Bu çözümü yaklaşık olarak bulmak için Newton metoduyla sadece 1 (bir) iterasyon gerçekleştiriniz. (Analitik olarak çözmeyiniz!)

$$e^x - y = 0$$

$$xy - e^x = 0$$

MAT 239 SAYISAL ANALİZ YÖNTEMLERİ

ARA SINAV

CEVAP ANAHTARI

18.11.2016

①  $f(x) = e^{-x} - \cos x$ ,  $[1, 1.5]$

$f(1) = -0.1724$ ,  $f(1.5) = 0.1524 \Rightarrow f(1) \cdot f(1.5) < 0$  olduğunda verilen aralıkta bir kök vardır.

$x_0 = 1$ ,  $x_1 = 1.5 \Rightarrow x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$

Bunu Newton metodu için başlangıç değeri olarak alalım.

$x_0 = 1.25 \Rightarrow x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$

$f'(x) = -e^{-x} + \sin x \Rightarrow f'(1.25) = 0.6625$   
 $f(1.25) = -0.0288$

$x_1 = 1.25 - \frac{(-0.0288)}{0.6625} = 1.25 + \frac{0.0288}{0.6625}$   
 $= 1.2935$

2

$x$	$f(x)$	$Df_k$	$D^2f_k$	$D^3f_k$
-1	-2	$\frac{8+2}{1} = 10$	$\frac{-8-10}{2} = -9$	$\frac{6+9}{3} = 5$
0	8	$\frac{0-8}{1} = -8$	$\frac{4+8}{2} = 6$	
1	0	$\frac{4-0}{1} = 4$		
2	4			

10 P

$$N(x) = -2 + 10(x+1) - 9(x+1)(x-0) + 5(x+1)(x-0)(x-1)$$

$$N(x) = -2 + 10(x+1) - 9(x+1)x + 5(x+1)x(x-1) \quad \text{SP}$$

$$f(1.8) = -2 + 10(2.8) - 9(2.8)(1.8) + 5(2.8)(1.8)(0.8)$$

$$f(1.8) = \boxed{0.8} \quad \text{10 P}$$

0.8

3

x	-1	0	1
y	-0.9	1	-1.1

$$y = ax^2 + b$$

$$E(a, b) = \sum_{k=0}^2 (ax_k^2 + b - y_k)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^2 2(ax_k^2 + b - y_k)(x_k^2) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^2 2(ax_k^2 + b - y_k)(1) = 0$$

$$\left(\sum_{k=0}^2 x_k^4\right)a + \left(\sum_{k=0}^2 x_k^2\right)b = \sum_{k=0}^2 x_k^2 y_k$$

$$\left(\sum_{k=0}^2 x_k^2\right)a + 3b = \sum_{k=0}^2 y_k$$

$$\sum_{k=0}^2 x_k^4 = (-1)^4 + (0)^4 + (1)^4 = 2$$

$$\sum_{k=0}^2 x_k^2 = (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 = 2$$

$$\sum_{k=0}^2 x_k^2 y_k = (-1)^2 \cdot (-0.9) + (0)^2 \cdot (1) + (1)^2 \cdot (-1.1) = -2$$

$$\sum_{k=0}^2 y_k = -0.9 + 1 - 1.1 = -1$$

$$\left. \begin{aligned} 2a + 2b &= -2 \\ 2a + 3b &= -1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a + b &= -1 \\ 2a + 3b &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} -2a + 2b = +2 \\ + 2a + 3b = -1 \\ \hline b = 1 \\ a = -2 \end{array}$$

$$\boxed{y = -2x^2 + 1}$$



$$\textcircled{4} \quad \begin{aligned} e^x - y &= 0 & x^{(0)} &= 0.95 \\ xy - e^x &= 0 & y^{(0)} &= 2.7 \end{aligned}$$

$$f_1(x, y) = e^x - y, \quad f_2(x, y) = xy - e^x$$

$$\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} - \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{array} \right]_{(x^{(0)}, y^{(0)})}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x^{(0)}, y^{(0)}) \\ f_2(x^{(0)}, y^{(0)}) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{(0.95, 2.7)} = e^{0.95} = 2.5857$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y - e^x \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{(0.95, 2.7)} = 2.7 - e^{0.95} = 0.1143$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = x \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_{(0.95, 2.7)} = 0.95$$

$$f_1(0.95, 2.7) = -0.1143, \quad f_2(0.95, 2.7) = (0.95)(2.7) - e^{0.95} = -0.0207$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.95 \\ 2.7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.5857 & -1 \\ 0.1143 & 0.95 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.1143 \\ -0.0207 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2.5707} \begin{bmatrix} 0.95 & 1 \\ -0.1143 & 2.5857 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.3695 & 0.3889 \\ -0.0446 & 1.0058 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.95 \\ 2.7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3695 & 0.3889 \\ -0.0446 & 1.0058 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1143 \\ -0.0207 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.95 \\ 2.7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.05028 \\ 0.01574 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00028 \\ 2.71574 \end{bmatrix} \end{aligned}$$