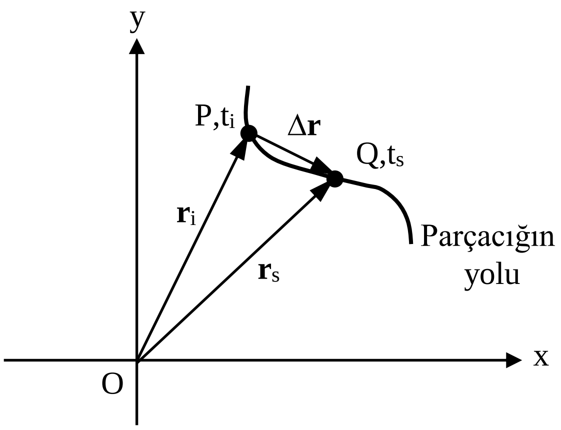
3.BÖLÜM

İKİ BOYUTTA HAREKET

3.1. YERDEĞİŞTİRME, HIZ VE İVME VEKTÖRLERİ



Şekil 3.1. xy düzleminde hareket eden bir parçacığın yeri, parçacığa orijinden çizilen **r** konum vektörü ile belirlenir.

Şekil 3.1'deki gibi, t_i anında, parçacık P noktasında ve belli bir t_s süresi sonunda parçacık Q noktasındadır. Parçacık $\Delta t = t_s - t_i$ zaman aralığında P'den Q'ya hareket ederken, konum vektörü $\mathbf{r}_i$'den $\mathbf{r}_s$'ye değişir. $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}$ olması nedeniyle, parçacığın yerdeğiştirme vektörü

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_s - \mathbf{r}_i \qquad \text{Yerdeğiştirme vektörü} \qquad (3.1)$$

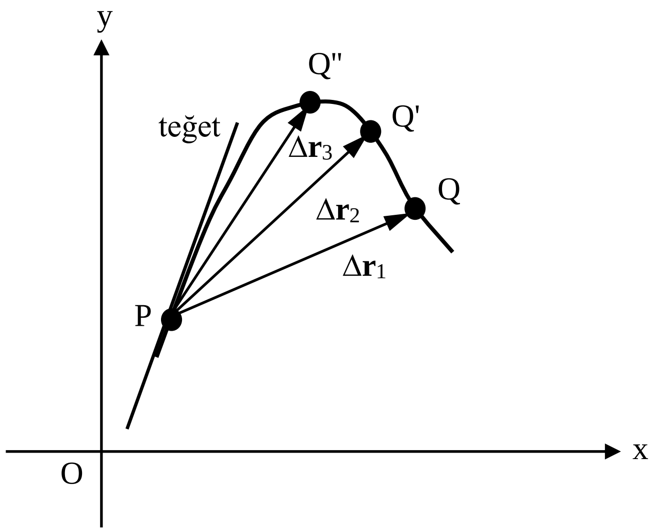
ile verilir.

Δt zaman aralığı boyunca parçacığın ortalama hızı, yerdeğiştirmenin bu zaman aralığına oranı olarak tanımlanır.

$$\bar{\boldsymbol{\upsilon}} \equiv \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \qquad \text{Ortalama hız} \qquad (3.2)$$

Yerdeğiştirme vektör, zamana aralığı da skaler bir nicelik olduğundan, ortalama hızın $\Delta\mathbf{r}$ boyunca yönelen bir vektörel nicelik olduğu sonucuna varırız.

xy düzlemindeki bir parçacığın, Şekil 3.2'deki gibi iki nokta arasındaki hareketinde zaman aralıkları küçüldükçe $\Delta\mathbf{r}_1$, $\Delta\mathbf{r}_2$, $\Delta\mathbf{r}_3$, ... yerdeğiştirmeleri gittikçe küçülür ve yerdeğiştirmenin doğrultusu P noktasında yörüngeye çizilen teğetin doğrultusuna yaklaşır.

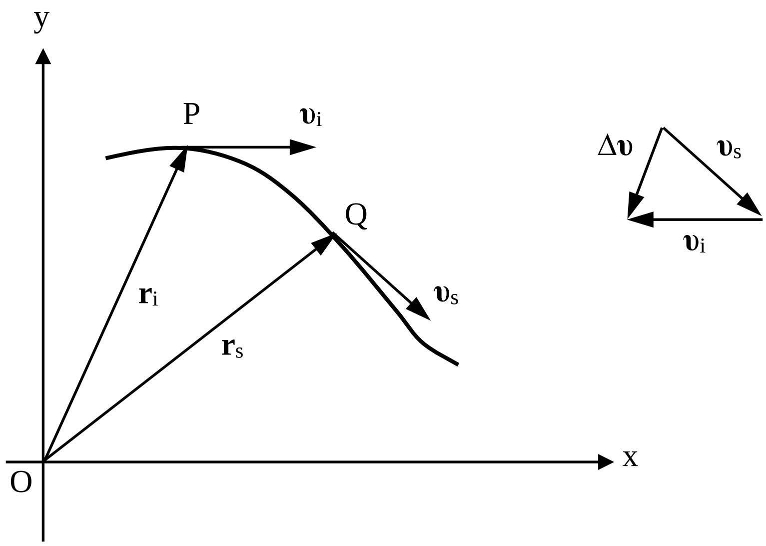


Şekil 3.2. Q noktası P'ye yaklaşırken, $\Delta\mathbf{r}$'nin doğrultusu eğriye P noktasında çizilen teğetin doğrultusuna yaklaşır. Tanıma göre, P'deki ani hız bu teğetin doğrultusundadır.

$\boldsymbol{\upsilon}$ ani hızı, Δt sıfıra yaklaşırken $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ ortalama hızının limiti olarak tanımlanır.

$$\boldsymbol{\upsilon} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad \text{Ani hız} \qquad (3.3)$$

Yani, ani hız, konum vektörünün zamana göre türevine eşittir. Hız vektörünün doğrultusu, parçacığın yörüngesine teğet ve hareket doğrultusunda olan bir doğru boyuncadır. Ani hız vektörünün büyüklüğüne sürat denir.



Şekil 3.3. P'den Q'ya hareket eden bir parçacığın $\bar{\boldsymbol{a}}$ ortalama ivme vektörü $\Delta\boldsymbol{\upsilon}=\boldsymbol{\upsilon}_s-\boldsymbol{\upsilon}_i$ hız değişimi yönündedir.

Parçacık herhangi bir yol boyunca P noktasından O noktasına hareket ederken, ani hız vektörü, t_i zamanındaki $\boldsymbol{\upsilon}_i$'den, t_s zamanındaki $\boldsymbol{\upsilon}_s$'ye değişir (Şekil 3.3).

*Parçacık P'den Q'ya hareket ederken ortalama ivmesi, ani hız vektöründeki değişmenin (Δ**υ**) geçen zamana (Δt) oranı olarak tanımlanır:*

$$\bar{\boldsymbol{a}} \equiv \frac{\boldsymbol{\upsilon}_s - \boldsymbol{\upsilon}_i}{t_s - t_i} = \frac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} \qquad \text{Ortalama ivme} \qquad (3.4)$$

Ortalama ivme, bir Δ**υ** vektörünün bir Δt skalerine oranı olduğundan, ***a***'nın, Δ**υ** ile aynı doğrultuda olan bir vektörel nicelik olduğu sonucuna varırız. Şekil 3.3'te gösterildiği gibi, tanıma göre $\Delta\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_s - \boldsymbol{\upsilon}_i$ olduğundan, Δ**υ**'nin yönü $-\boldsymbol{\upsilon}_i$ vektörünün $\boldsymbol{\upsilon}_s$ vektörüne ilave edilerek bulunur.

a *ani ivmesi, Δt sıfıra yaklaşırken Δ**υ**/Δt oranının limit değeri olarak tanımlanır.*

$$\boldsymbol{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} \qquad (3.5)$$

Başka bir deyişle ani ivme, hız vektörünün zamana göre birinci türevine eşittir.

3.2. İKİ BOYUTTA SABİT İVMELİ HAREKET

Hareket halindeki bir parçacık, **r** konum vektörüyle tanımlanabilir. xy düzleminde hareket eden bir parçacık için konum vektörü

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \tag{3.6}$$

olarak yazılabilir. Burada x, y ve **r**, parçacık hareket ederken zamanla değişirler. Konum vektörü bilinirse, parçacığın hızı

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_x\mathbf{i} + \upsilon_y\mathbf{j} \tag{3.7}$$

olarak bulunur. $\boldsymbol{a}$'nın sabit olması nedeniyle a_x ve a_y bileşenleri de sabittir. Böylece kinematik denklemlerini hız vektörünün hem x hem de y bileşenlerine uygulayabiliriz.

$$\upsilon_x = \upsilon_{x0} + a_x t \qquad \text{ve} \qquad \upsilon_y = \upsilon_{y0} + a_y t$$

bağıntıları 3.7 eşitliğinde yerine konulursa

$$\boldsymbol{\upsilon} = (\upsilon_{x0} + a_x t)\mathbf{i} + (\upsilon_{y0} + a_y t)\mathbf{j}$$

$$= (\upsilon_{x0}\mathbf{i} + \upsilon_{y0}\mathbf{j}) + (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j})t$$

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{a}t \tag{3.8}$$

bulunur.

Aynı şekilde, kinematik denklemlerinden sabit ivmeyle hareket eden bir parçacığın x ve y koordinatlarının

$$x = x_0 + \upsilon_{x0}t + 1/2(a_x t^2) \qquad \text{ve} \qquad y = y_0 + \upsilon_{y0}t + 1/2(a_y t^2)$$

ile verildiğini biliyoruz. Bu ifadeler (3.6) eşitliğinde yerine konulursa

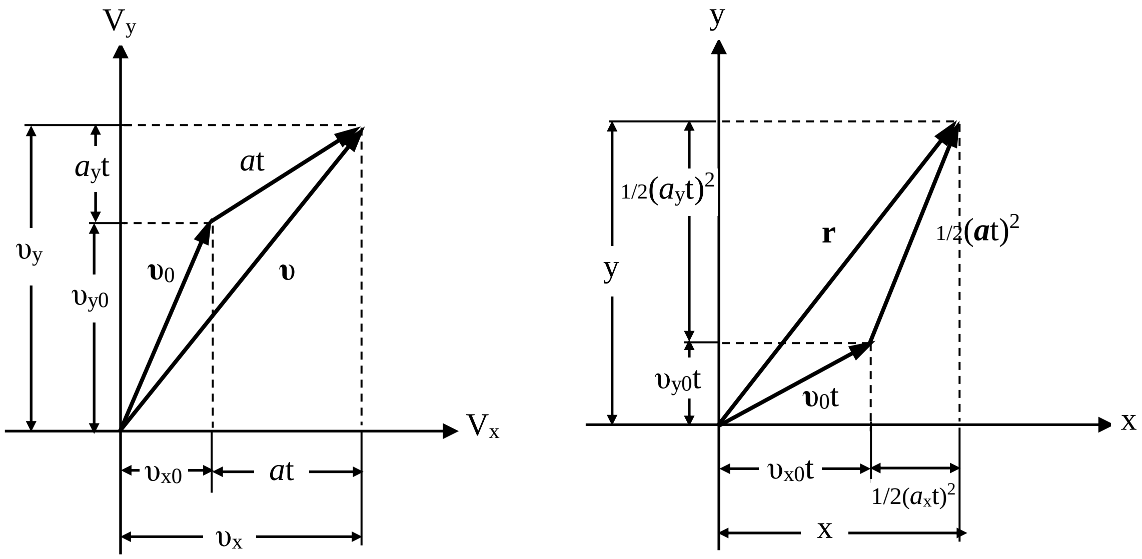
$$\mathbf{r} = [x_0 + \upsilon_{x0}t + 1/2(a_x t^2)]\mathbf{i} + [y_0 + \upsilon_{y0}t + 1/2(a_y t^2)]\mathbf{j}$$

$$= (x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}) + (\upsilon_{x0}\mathbf{i} + \upsilon_{y0}\mathbf{j})t + 1/2[(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j})t^2]$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\upsilon}_0 t + 1/2(\boldsymbol{a}t^2) \qquad (3.9)$$

olur.

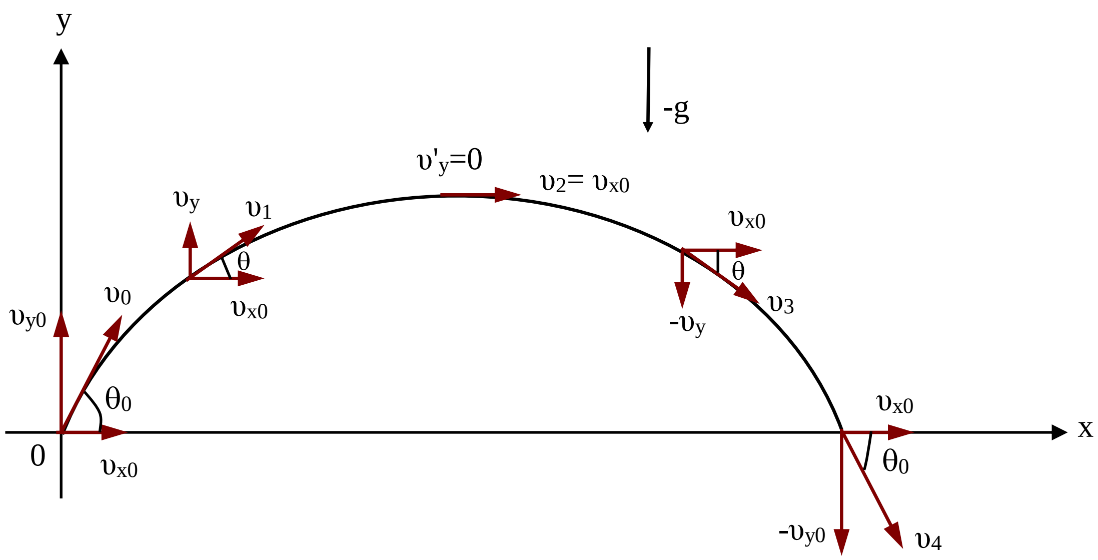
Şekil 3.4’te 3.8 ve 3.9 denklemlerinin grafikle temsili gösterilmektedir. Basitlik için $r_0 = 0$ alınmıştır.



Şekil 3.4. İki boyutta hızın ve konumun zamana göre değişim grafikleri.

3.3. EĞİK ATIŞ HAREKETİ

Rasgele yönlü bir ilk hızla atılan top, bir eğri yol boyunca hareket eder. Bu harekette, g yerçekimi ivmesi hareket süresince sabit ve aşağıya doğru yönelmiştir. Aynı zamanda hava direncinin etkisi de ihmal edilmektedir. Referans sistemimizi y doğrultusu düşey ve yukarı yön pozitif olacak şekilde seçersek a_y = -g ve a_x = 0'dır. Ayrıca, t = 0'da eğik atılan cisim, orijini ($x_0 = y_0 = 0$), Şekil 3.5'teki gibi, bir υ_0 hızı ile terk ettiğini varsayıyoruz.



Şekil 3.5. Orijini υ_0 hızıyla terk eden eğik atılan bir cismin parabolik yörüngesi. Burada hızın x bileşeni υ_x, sabit kalırken y bileşeni υ_y değişir. Tepe noktasında ise υ_y=0 olur.

$\boldsymbol{\upsilon_0}$ vektörü yatayla θ_0 açısı yaparsa, kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının tanımından

$$\cos\theta_0 = \upsilon_{x0} / \upsilon_0 \qquad \text{ve} \qquad \sin\theta_0 = \upsilon_{y0} / \upsilon_0$$

elde ederiz. Burada θ_0 atış açısıdır. Böylece ilk hızın bileşenleri

$$\upsilon_{x0} = \upsilon_0 \cos\theta_0 \qquad \text{ve} \qquad \upsilon_{y0} = \upsilon_0 \sin\theta_0$$

ile verilir. Bu ifadeler, $a_x = 0$ ve $a_y = -g$ ile birlikte (3.8) ve (3.9) eşitliklerinde yerine konursa, herhangi bir t anında aşağıdaki hız bileşenleri ve koordinatlar elde edilir.

$$\upsilon_x = \upsilon_{x0} = \upsilon_0 \cos\theta_0 = \text{sabit} \tag{3.10}$$

$$\upsilon_y = \upsilon_{y0} - gt = \upsilon_0 \sin\theta_0 - gt \tag{3.11}$$

$$x = \upsilon_{x0} t = (\upsilon_0 \cos\theta_0) t \tag{3.12}$$

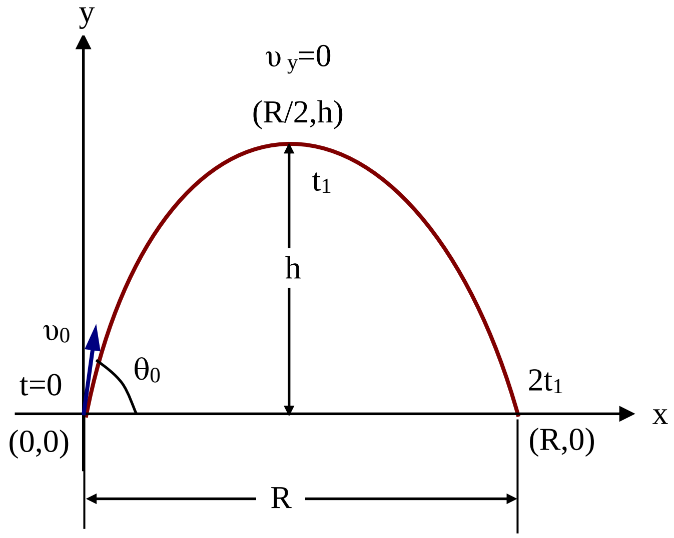
$$y = \upsilon_{y0} t - ½(gt^2) = (\upsilon_0 \sin\theta_0) - ½(gt^2) \tag{3.13}$$

(3.12) eşitliğini t'ye göre çözer ve (3.13) eşitliğinde yerine koyarsak $0<\theta_0<\pi/2$ aralığındaki açılar için geçerli olan

$$y = (\tan\theta_0)x - \left(\frac{g}{2\upsilon_0^2 \cos^2\theta_0}\right)x^2 \tag{3.14}$$

bağıntısını buluruz. Bu, orijinden geçen bir parabol denklemi olan, $y = ax - bx^2$ biçimli bir bağıntıdır. Böylece, eğik olarak atılan bir cismin yörüngesinin bir parabol olduğunu görürüz.

3.3.1. Eğik Atışta Cismin Menzili ve Maksimum Yüksekliği



Şekil 3.6. Bir υ_0 ilk hızıyla t = 0'da orijinden eğik atılan cisim. Cismin maksimum yüksekliği h ve menzili R'dir.

Cismin Şekil 3.5'teki gibi, pozitif υ_y bileşeniyle t = 0'da orijinden atıldığını varsayalım. R uzaklığına eğik atılan cismin menzili, h uzunluğuna da maksimum yüksekliği denir.

Tepe noktasında υ_y = 0'ı kullanarak, cisim tarafından ulaşılan maksimum h yüksekliğini bulabiliriz.

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\theta_0 - gt$$

$$\upsilon_0 \sin\theta_0 = g t_1 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \upsilon_0 \sin\theta_0 / g$$

Bu ifadeyi (3.13) eşitliğinde yerine korsak h'yı bulabiliriz.

$$h = \upsilon_0 \sin\theta_0 (\upsilon_0 \sin\theta_0 / g) - ½[g(\upsilon_0 \sin\theta_0 / g)^2]$$

$$h = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \tag{3.15}$$

R menzili, tepe noktasına ulaşmak için geçen zamanın iki katında ($2t_1$) alınan yatay uzaklıktır. Yani $t = 2t_1$ eşitliğini kullanarak R menzili için (3.12) eşitliğinden

$$R = (\upsilon_0 \cos\theta_0)2t_1 = (\upsilon_0 \cos\theta_0)(2\,\upsilon_0 \sin\theta_0/g)$$

$$R = \frac{2\upsilon_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g}$$

buluruz. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ifadesini kullanarak menzili

$$R = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \tag{3.16}$$

olarak yazabiliriz. Bu eşitlikten, R'nin maksimum değerinin $R_{maks} = \upsilon_0^2/g$ olduğu görülür. Bu sonuç $2\theta_0 = 90°$ olduğunda, $\sin 2\theta_0$'ın maksimum değerinin 1 olması gerçeğinden bulunur. Böylece $\theta_0 = 45°$ olduğu zaman R'nin maksimum olduğunu görürüz.

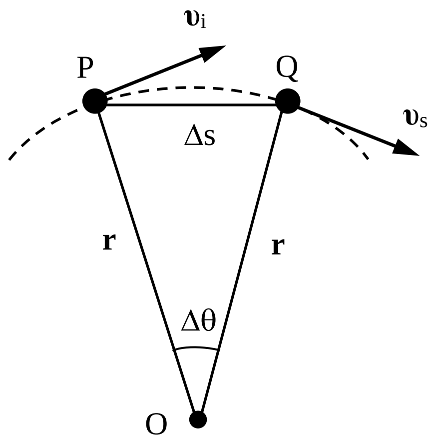
3.4. DÜZGÜN DAİRESEL HAREKET

Hızın bir vektör olması nedeniyle, ivmenin oluştuğu iki yol vardır:

a) hızın büyüklüğündeki değişmeden dolayı,

b) hızın doğrultusundaki değişmeden dolayı.

Sabit süratle dairesel hareket yapan bir cismin, hızının büyüklüğü sabit olduğundan, ivmenin nedeni hızın doğrultusundaki değişmedir. Hız vektörü daima parçacığın yoluna teğettir ve bu harekette **r** yarıçap vektörüne diktir.

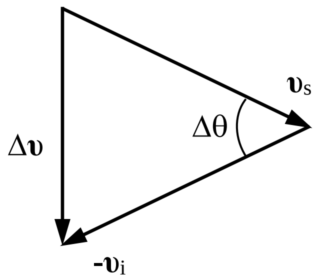


Şekil 3.7. Sabit büyüklükte hızla hareket eden bir parçacık P noktasından Q noktasına hareket ederken hız vektörü $\boldsymbol{\upsilon}_i$'den $\boldsymbol{\upsilon}_s$'ye değişir.

Şekil 3.7'de, cisim önce t_i zamanında $\boldsymbol{\upsilon}_i$ hızıyla P noktasında ve t_s zamanında $\boldsymbol{\upsilon}_s$ hızıyla Q noktasındadır. $\boldsymbol{\upsilon}_i$ ve $\boldsymbol{\upsilon}_s$'nin doğrultuları farklı büyüklükleri aynıdır. Ortalama ivme eşitliği $\boldsymbol{\upsilon}_i$'yi $\boldsymbol{\upsilon}_s$'den vektörel olarak çıkarmamızı söyler.

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}_s - \boldsymbol{\upsilon}_i}{t_s - t_i} = \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t}$$

Δt çok küçük olduğu zaman Şekil 3.7'deki Δs ve $\Delta\theta$'da çok küçük olur. Bu durumda, $\boldsymbol{\upsilon}_s$ hemen hemen $\boldsymbol{\upsilon}_i$'ye paralel ve $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ vektörü de dairenin merkezine doğru yönelik ve yaklaşık olarak $\boldsymbol{\upsilon}_s$ ve $\boldsymbol{\upsilon}_i$'ye dik olacaktır.



Şekil 3.8. Dairenin merkezine doğru olan hızdaki $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ değişiminin çizimle gösterilmesi.

Şekil 3.7'de, kenarları Δs ve r olan üçgen, Şekil 3.8'de, kenarları $\Delta\upsilon$ ve υ olan üçgene benzerdir (*İki üçgenin iki kenarı eşit ve bu kenarlar arasındaki açılarda eşitse üçgenler benzerdir*). Bundan dolayı

$$\Delta\upsilon/\upsilon = \Delta s/r \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\upsilon = (\Delta s/r).\upsilon$$

yazılabilir. Bu eşitlik ortalama ivme ifadesinde yerine yazılırsa

$$a = \frac{\upsilon}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

elde edilir.

P ve Q noktalarının birbirine yakın olması durumunda, $\Delta\upsilon$ dairesel yolun merkezine doğru yönelecek ve ivme de, $\Delta\upsilon$ doğrultusunda olduğundan dolayı merkeze doğru olacaktır. Ayrıca, P ve Q noktası birbirine yaklaşırken, Δt sıfıra yaklaşır ve $\Delta s/\Delta t$ oranı da υ hızına yaklaşır. O halde, ivme

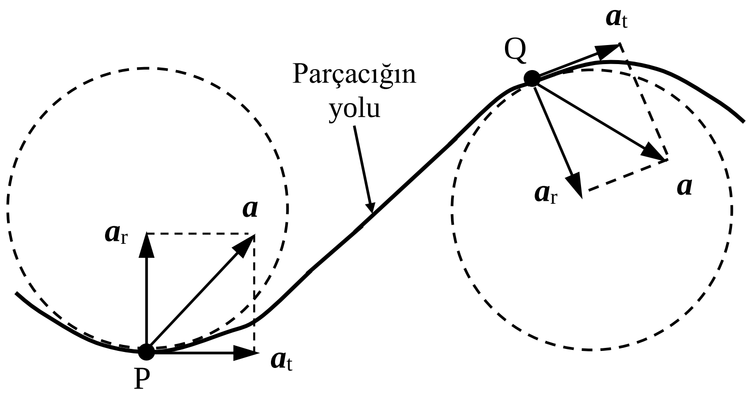
$$a_r = \frac{\upsilon^2}{r} \qquad (3.17)$$

olur. Böylece düzgün dairesel harekette ivme, dairenin merkezine doğru yönelir. Bu tür ivmeye merkezcil ivme denir ve boyutu $[L]/[T^2]$'dir.

Böyle bir harekette T, çevrede tam dolanma süresini göstermek üzere, hızın şiddeti, $2\pi r$ çevresinin T'ye oranına eşit olur:

$$\upsilon = 2\pi r / T$$

3.5. EĞRİSEL YÖRÜNGEDE TEĞETSEL VE RADYAL İVME



Şekil 3.9. xy düzleminde yer alan herhangi bir eğrisel yörüngedeki parçacığın hareketi

Şekil 3.9'daki gibi bir harekette, eğri bir yol boyunca, hem doğrultuca hem de büyüklükçe parçacığın hızı değişir. Parçacığın hızı daima yola teğettir. Ancak $\boldsymbol{a}$, yol ile herhangi bir açı yapar. Bu vektör iki tane bileşene ayrılabilir:

a) radyal bileşen vektörü $\boldsymbol{a}_r$

b) teğet bileşen vektörü $\boldsymbol{a}_t$

Yani $\boldsymbol{a}$ toplam ivme vektörü

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_t$$

olarak yazılabilir.

Teğetsel ivme ($\boldsymbol{a}_t$), parçacığın hızının büyüklüğündeki değişmeden doğar.

a_t'nin büyüklüğü

$$a_t = \frac{d|\boldsymbol{\upsilon}|}{dt} \qquad (3.18)$$

ile verilir. Hızın büyüklüğü sabitse bu bileşen 0 olacaktır. $\boldsymbol{a}_t$'nin yönü ya $\boldsymbol{\upsilon}$ ile aynı ya da $\boldsymbol{\upsilon}$ ile zıt yöndedir.

Radyal ivmenin ($\boldsymbol{a}_r$) nedeni ise hız vektörünün doğrultusunun zamanla değişiminden kaynaklanır.

a_r'nin büyüklüğü ise

$$a_r = \upsilon^2/r \qquad (3.19)$$

ile verilir. a_r'nin yönü daima eğrinin merkezine doğru yöneliktir. Bu yüzden, $\boldsymbol{a}$ toplam ivme vektörünün büyüklüğü

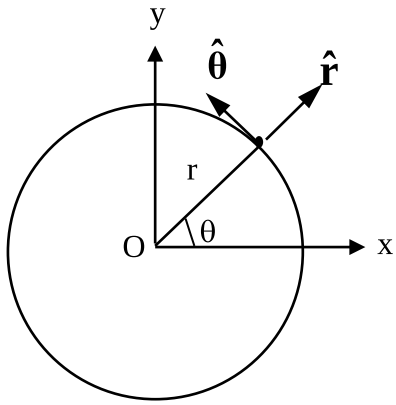
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} \qquad (3.20)$$

olarak verilir. Belli bir hızda, eğrilik yarıçapı r, küçük olduğu zaman a_r büyük; büyük olduğu zaman a_r küçüktür.

Dairesel yörüngede hareket eden parçacığın ivmesini birim vektörler $\hat{\mathbf{r}}$ ve $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ cinsinden yazabiliriz. $\hat{\mathbf{r}}$, eğrilik merkezinden çıkan yarıçap vektörü boyunca dışa doğru yönelen birim vektör ve $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dairesel yola teğet bir birim vektördür. O halde ivmeyi

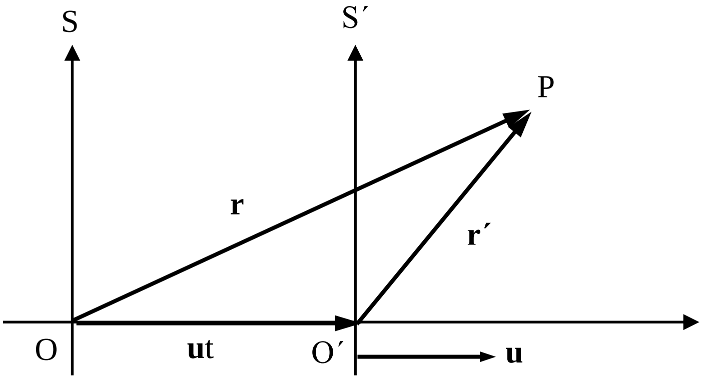
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_r = \frac{d|\boldsymbol{\upsilon}|}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\upsilon^2}{r}\hat{\mathbf{r}} \qquad (3.21)$$

şeklinde yazabiliriz. $\boldsymbol{a}_r$'nin negatif işareti, $\hat{\mathbf{r}}$ birim vektörüne zıt, daima radyal olarak içeriye doğru yönelik olduğunu gösterir.



Şekil 3.10. $\hat{\mathbf{r}}$ ve $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ birim vektörlerinin tanımı.

3.6. BAĞIL HIZ VE BAĞIL İVME



Şekil 3.11. P noktasında yerleşmiş bir parçacık, biri sabit S referans sisteminde, diğeri sağa doğru **u** hızıyla hareket eden S´ sisteminde olmak üzere iki gözlemci tarafından tanımlanmaktadır. **r** vektörü parçacığın S'ye göre konum vektörü ve **r**′, S´'ye göre konum vektörüdür.

Şekilde P noktasına yerleşmiş bir parçacığı göz önüne alalım. Bu parçacığın hareketi, biri yere göre sabit S referans sisteminde ve diğeri sabit bir **u** hızıyla S'ye göre sağa doğru hareket eden S´ referans sisteminde bulunan iki gözlemci tarafından tanımlanmaktadır.

Parçacığın, S sistemine göre konumunu **r** konum vektörüyle ve belli bir t zamanında, S′ sistemine göre konumunu **r**′ vektörüyle belirleyelim. İki referans sisteminin orijini t = 0'da çakışıksa, o zaman **r** ve **r**′ vektörleri birbirine

$$\mathbf{r}' + \mathbf{u}t = \mathbf{r} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t \qquad (3.22)$$

eşitliğiyle bağlıdır. Yani, bir t zamanında S′ sistemi sağa doğru **u**t miktarı kadar yer değiştirir.

Bu eşitliğin zamana göre türevini alır ve **u**'nun da sabit olduğuna dikkat edersek

$$d\mathbf{r}'/dt = d\mathbf{r}/dt - \mathbf{u} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\upsilon}' = \boldsymbol{\upsilon} - \mathbf{u} \qquad (323)$$

bulunur. Burada **υ**′, S′ sisteminde gözlenen hızdır. Bu denklemler Galile dönüşüm denklemleri olarak bilinir. Her ne kadar farklı iki referans sistemindeki gözlemciler parçacıklar için farklı hızlar ölçerlerse de, **u** sabit olduğundan aynı ivmeyi ölçeceklerdir.

$$d\boldsymbol{\upsilon}'/dt = d\boldsymbol{\upsilon}/dt - d\mathbf{u}/dt$$

d**u**/dt = 0 olduğundan dolayı $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$ olur.

3.7. PROBLEMLER

Problem 1: Yerdeğiştirme, Hız ve İvme Vektörleri

Bir golf topuna, bir çukurun kenarındaki kum tepeciğinden vurulmaktadır. Zamana göre x ve y koordinatları aşağıdaki ifadelerle verilmektedir:

$x = (18\ \text{m/s})t$ ve $y = (4\ \text{m/s})t – (4{,}9\text{m/s}^2)t^2$

i ve **j** birim vektörlerini kullanarak,

a) **r** konum vektörü için

b) **υ** hız vektörü için

c) ***a*** ivme vektörü için t zamanına göre vektörel bir ifade yazınız.

d) t = 3 s'de golf topunun **r** konumunu, **υ** hızını ve ***a*** ivmesini bulunuz.

Çözüm:

a) $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$\mathbf{r} = (18t)\mathbf{i} + (4t-4{,}9t^2)\mathbf{j}$

b) $\boldsymbol{\upsilon} = d\mathbf{r}/dt = 18\mathbf{i} + (4-9{,}8t)\mathbf{j}$

c) $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{\upsilon}/dt = -9{,}8\mathbf{j}$

d) t = 3s'de $\mathbf{r} = 54\mathbf{i} - 32{,}1\mathbf{j}$

$\boldsymbol{\upsilon} = 18\mathbf{i} - 25{,}4\mathbf{j}$

$\boldsymbol{a} = -9{,}8\mathbf{j}$

Problem 2: Sabit İvmeli İki Boyutlu Hareket

Yatay düzlemde yüzen bir balık, belli bir kayadan yerdeğiştirmesi $\mathbf{r}_0 = (10\mathbf{i}-4\mathbf{j})$ m olan noktada $\boldsymbol{\upsilon}_0 = (4\mathbf{i}+\mathbf{j})$ m/s hızına sahiptir. 20 s sabit ivmeyle yüzdükten sonra hızı $\boldsymbol{\upsilon} = (20\mathbf{i}-5\mathbf{j})$ m/s'dir.

a) İvmenin bileşenleri nedir?

b) **i** birim vektörüne göre ivmenin yönü nedir?

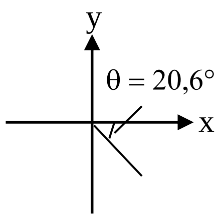
c) t=5 s'de balık neredir ve hangi yöne hareket etmektedir?

Çözüm:

a) $a_x = \Delta\upsilon_x/\Delta t = (20-4)/20 = 0{,}8 \text{ m/s}^2$

$a_y = \Delta\upsilon_y/\Delta t = (-5-1)/20 = -0{,}3 \text{ m/s}^2$

b) $\tan\theta = a_y/a_x = -\,0{,}3/0{,}8 = -\,0{,}375 \qquad \theta = -\,20{,}6°$



x ekseniyle $\theta = 339{,}4°$ açı yapar.

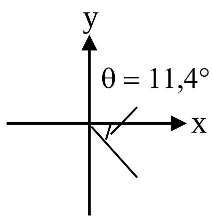
c) t = 25 s

$x = x_0 + \upsilon_{x0}t + 1/2(a_x t^2) = 10 + 4.25 + 1/2(0{,}8.25^2) = 10 + 100 + 250 = 360 \text{ m}$

$y = y_0 + \upsilon_{y0}t + 1/2(a_y t^2) = -4 + 1.25 + 1/2(-0{,}3.25^2) = -4 + 25 + 93{,}75 = -72{,}75\text{m}$

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$\mathbf{r} = 360\mathbf{i} - 72{,}75\mathbf{j}$



$\tan\theta = y/x = -72{,}75/360 = 0{,}202 \qquad \theta = -11{,}4°$

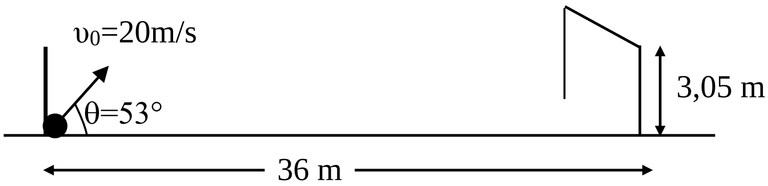
Problem 3: Eğik atış Hareketi

Bir futbolcu, toptan 36 m uzaktaki bir kaleye şut çekmekte ve top 3,05 m yükseklikte olan kale üst direğini sıyırarak gitmektedir. Şut çekildiği zaman, top, zemini yatayla 53°'lik bir açı altında 20 m/s'lik hızla terk etmektedir.

a) Top, kale üst direğinin ne kadar yakınından geçerek düşer?

b) Top üst direğe yükselirken mi, yoksa düşerken mi yaklaşır?

Çözüm:



a) $$y = x \tan\theta_0 - \frac{g}{2\upsilon_0^2 \cos^2\theta_0} x^2$$

$$y = 36.\tan 53 - \frac{9{,}8}{2.20^2.(\cos 53)^2}(36)^2 = 36.1{,}32 - 9{,}8.1296 / 2.400.0{,}36$$

$$= 47{,}77 - 43{,}83 = 3{,}94 \text{ m}$$

O halde $3{,}94 - 3{,}05 = 0{,}89$ m yakınından geçer.

b) Maksimum yüksekliğe ulaşması için geçen zaman

$t_1 = \upsilon_0 \sin\theta_0 / g = 20\sin 53/9{,}8$ $\quad t_1 = 1{,}63$ s

36 m mesafeye ulaşması için geçen zaman ise

$x = \upsilon_{x0} t_2$ $\quad t_2 = x / \upsilon_{x0} = 36/20.\cos 53 = 36/20.0{,}6$ $\quad t_2 = 2{,}99$ s

$t_2 > t_1$ olduğu için top aşağı düşerken üst direğe yaklaşır.

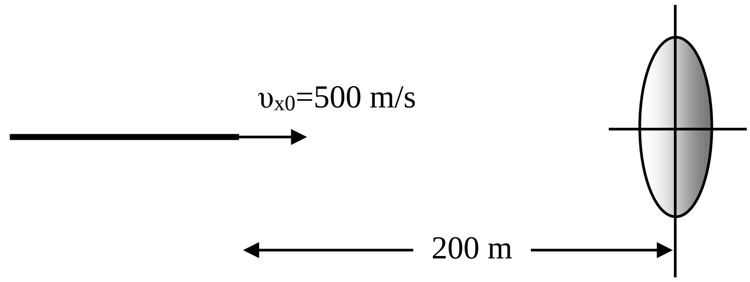
Problem 4: Eğik Atış Hareketi

200 m uzakta bulunan büyük bir hedefin ortasına bir tüfekle namlusundan yatay olarak nişan alınmaktadır. Merminin ilk hızı 500 m/s'dir.

a) Mermi hedefe nerede çarpar?

b) Hedefin merkezine isabet kaydetmek için, namlu bakış çizgisinin yukarısında hangi açıda bulunmalıdır?

Çözüm:



a) $x = 200$ m'deki y'yi bulalım.

$x = \upsilon_{x0}t = 500t \qquad t = 200/500 \quad t = 0{,}4$ s

$y = \upsilon_{y0}t - 1/2(gt^2) \quad y = -4{,}9t^2 \qquad y = -\,0{,}784$ m

Merkezin 0,784 m altında hedefe çarpar.

b) $R = \upsilon_0^2 \sin^2\theta_0 / g$

$200 = (500)^2 \sin 2\theta_0 \,/\, 9{,}8$

$\sin 2\theta_0 = 0{,}00784$

$2\theta_0 = 0{,}449 \qquad \theta_0 = 0{,}225°$ yukarı doğru

Problem 5: Düzgün Dairesel Hareket

0,5 m yarıçapında bir tekerlek dakikada 200 devirlik sabit bir hızda dönmektedir. Tekerleğin en dik kenarındaki tırnağın içerisine gömülü küçük bir taş parçasının hızını ve ivmesini bulunuz.

Çözüm:

$\upsilon = 2\pi r/T \qquad T = 1/f$

$\upsilon = 2\pi rf = 2.3{,}14.0{,}5.(200/60) \qquad \upsilon = 10{,}47$ m/s

$a = \upsilon^2/r = (10{,}47)^2/0{,}5 \qquad a = 219$ m/s^2

Problem 6: Eğrisel Yörüngede teğetsel ve Radyal İvme

Hızı 0,6 m/s^2'lik bir değerle artan otomobil, r = 20 m yarıçaplı dairesel bir yol boyunca gitmektedir. Otomobilin ani hızı 4 m/s olduğu zaman

a) teğetsel ivme bileşenini
b) merkezcil ivme bileşenini
c) Toplam ivmenin büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.

Çözüm:

a) $a_t = 0{,}6$ m/s^2

b) $a_r = \upsilon^2/r = 4^2/20 = 0{,}8$ m/s^2

c) $a = (a_t^2 + a_r^2)^{1/2} = (0{,}6^2 + 0{,}8^2)^{1/2} \qquad a = 1$ m/s^2

$\tan\theta = a_r/a_t = 0{,}8/0{,}6 = 1{,}33 \qquad \theta = 53{,}1°$

Problem 7: Bağıl Hız ve Bağıl İvme

Bir çocuk, 2,5 km/saat hızla düzgün akan nehirde akıntıyla sürüklenmektedir. Çocuk kıyıdan 0,6 km uzaktadır. Bir kurtarma botunun bulunduğu yer ise akıntıya karşı 0,8 km uzaklıktadır.

a) Bot suya göre 20 km/saat'lik maksimum hızıyla ilerlerse, kaptanın botu, kıyıya göre hangi yönde ilerletmesi gerekir?

b) Botun υ hızı kıyı ile hangi açı yapar?

c) Botun çocuğa ulaşması ne kadar zaman alır?

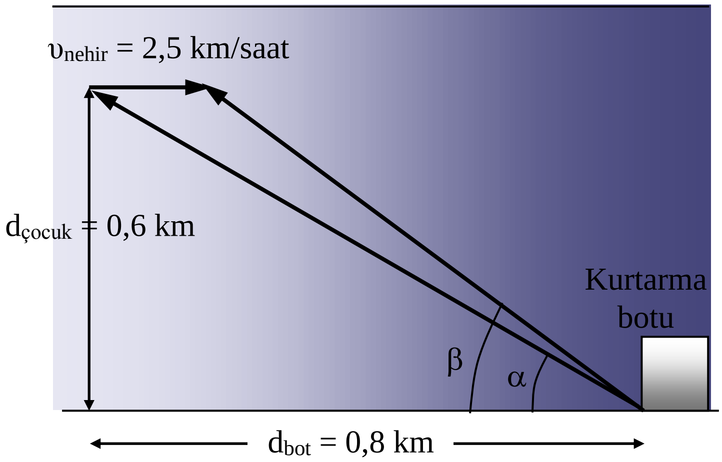
Çözüm:

υ_{nehir} = 2,5 km/saat

$d_{çocuk}$ = 0,6 km

d_{bot} = 0,8 km

υ_{bot} = 20 km/saat



a) $\tan\alpha = 0{,}6/0{,}8 = 0{,}75$ $\qquad \alpha = 36{,}9°$

b) $\upsilon_x = 20.\cos\alpha - 2{,}5 = 13{,}5$ km/saat

$\upsilon_y = 20.\sin\alpha = 12$ km/saat

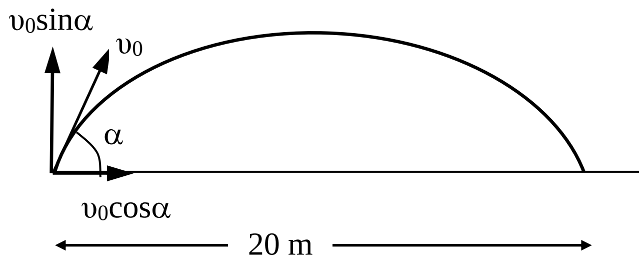
$\tan\beta = \upsilon_x/\upsilon_y = 12/13{,}5$ $\qquad \beta = 41{,}6°$

c) $t = x/\upsilon = 0{,}6/12 = 0{,}05$ saat $\qquad t = 3$ dak.

Problem 8: Eğik Atış Hareketi

Bir çocuk havaya mümkün olduğu kadar hızla bir top fırlatır ve sonra onu yakalamak için topun arkasından olabildiğince hızla koşar. Topu fırlatırken maksimum hızı 20 m/s ve 20 m'lik bir koşma için geçen zaman 3 s ise top ne kadar yükselir?

Çözüm:



Topu yakalamak için çocuğun hızı $\upsilon = \upsilon_0 \cos\alpha$ olmalıdır.

$\cos\alpha = \upsilon / \upsilon_0$ $\quad$ $x = \upsilon t$

$\cos\alpha = (20/3) / 20 = 1/3$ $\quad$ $\upsilon = x / t = 20 / 3$

$\alpha = 70{,}53°$

$y_{max} = \upsilon_{0y}^2 / 2g$

$y_{max} = (\upsilon_0 \sin\alpha)^2 / 2g$

$y_{max} = (20.0{,}943)^2 / 2.9{,}8$

$y_{max} = 18{,}15$ m

Problem 9: Eğik Atış Hareketi

Bir otomobil 37° eğimli okyanusa bakan dik bir yamaca park edilir. Sürücü otomobilin vitesini boşta bırakır, yani freni etkisizdir. Otomobil durduğu yerden 4 m/s^2'lik sabit bir ivmeyle yamaçtan aşağıya gitmeye başlar ve uçurumun kenarına kadar 50 m yol alır. Uçurumun okyanustan olan yüksekliği 30 m'dir.

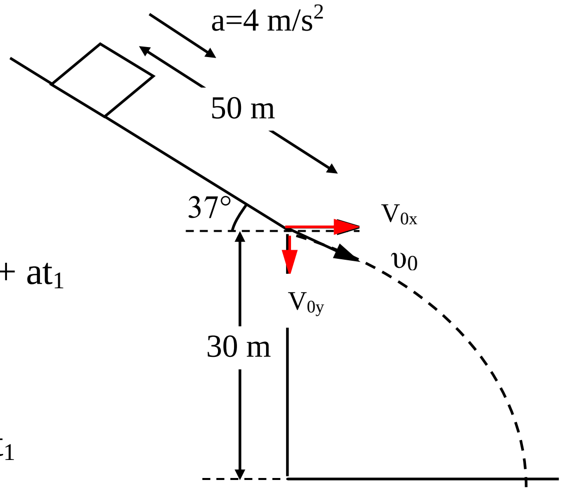
a) Uçuruma ulaştığında hızının büyüklüğünü ve oraya varması için geçen zamanı,

b) Okyanusa düştüğü zaman otomobilin hızını,

c) Otomobilin hareket halindeki toplam zamanını,

d) Otomobilin okyanusa düştüğü zaman uçurumun dibine göre konumunu bulunuz.

Çözüm:



a) $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax$ $\qquad$ $\upsilon = \upsilon_0 + at_1$

$\upsilon^2 = 2ax$ $\qquad$ $\upsilon = at_1$

$\upsilon = (2.4.50)^{1/2}$ $\qquad$ $20 = 4t_1$

$\upsilon = 20$ m/s $\qquad$ $t_1 = 5$ s

b) $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos 37$ $\qquad$ $\upsilon_{0y} = -\upsilon_0 \sin 37$

$\upsilon_{0x} = 20.0{,}8$ $\qquad$ $\upsilon_{0y} = -20.0{,}6$

$\upsilon_{0x} = 16$ m/s (sabit) $\qquad$ $\upsilon_{0y} = -12$ m/s

$\upsilon_y^2 = \upsilon_{0y}^2 - 2g(\Delta y)$

$\upsilon_y^2 = (12)^2 – 2.9,8.(-30)$

$\upsilon_y^2 = 144 + 588$

$\upsilon_y = 27$ m/s yönden dolayı $\upsilon_y = -27$ m/s

$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2$

$\upsilon^2 = 16^2 + (-27)^2$

$\upsilon = 31,38$ m/s

c) $\upsilon_y = \upsilon_{oy} - gt_2$

$-27 = -12 - 9,8t_2$

$t_2 = 1,53$ s

$t = t_1 + t_2 = 5 + 1,53 = 6,53$ s

d) $x = \upsilon_{ox}t$

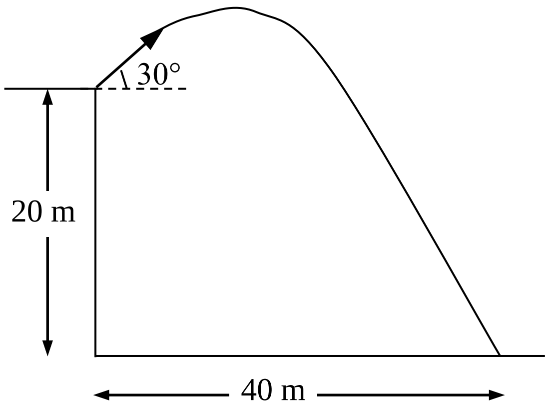
$x = 16.1,53$

$x = 24,48$ m

Problem 10: Eğik Atış Hareketi

Bir top, düz bir nehir yatağından yukarıya doğru yüksekliği 20 m olan bir uçurumdan, yatayla yukarı doğru 30°'lik açıda ateşlenmektedir. Merminin uçurumun dibinden 40 m açığa düştüğü bulunursa ilk hızı nedir?

Çözüm:



$x = \upsilon_0 \cos\theta_0 t$

$y = \upsilon_0 \sin\theta_0 t – ½(gt^2)$

$40 = \upsilon_0 \cos30t$

$t = 40/\upsilon_0 \cos30$

$y = \upsilon_0 \sin\theta_0 t – ½(gt^2)$

$-20 = \upsilon_0 \sin30.(40/\upsilon_0 \cos30) - ½[9,8(40/\upsilon_0 \cos30)^2]$

$-20 = 40\tan30 – 4,9(40/\upsilon_0 \cos30)^2$

$-20 = 40.0,58 – 7840/ \upsilon_0^2.0,75$

$\upsilon_0 = 15,6$ m/s

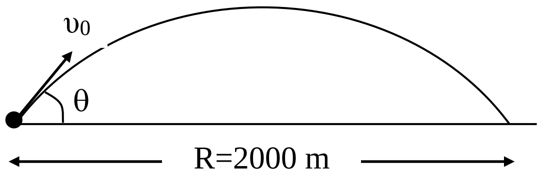
Problem 11: Eğik Atış Hareketi

Bir top güllesinin ilk hızı 200 m/s'dir. Gülle kendisinden 2 km yatay uzaklıkta bulunan bir hedefe ateşlenirse;

a) hedefi vurmakla sonuçlanacak olan iki eğik atış açısını,

b) a)'da bulunan iki yörüngenin her biri için toplam uçuş süresini bulunuz.

Çözüm:



a) $R = \upsilon_0^2 \sin 2\theta_0 / g$

$\sin 2\theta_0 = Rg / \upsilon_0^2$

$\sin 2\theta_0 = 2000.9{,}8 / 200^2$

$\sin 2\theta_0 = 0{,}49$ $\qquad$ $2\theta_0 = 29{,}3°$ veya $150{,}7°$

$\theta_0 = 14{,}65°$ veya $75{,}35°$

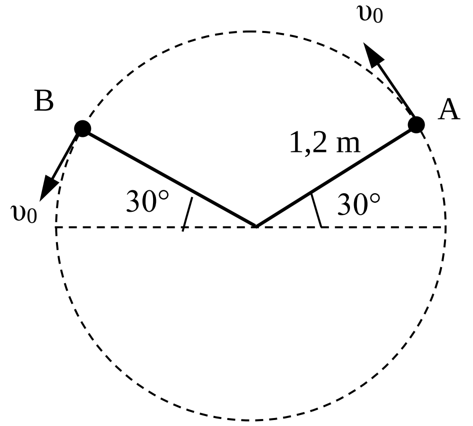
b) $R = \upsilon_{x0} t = \upsilon_0 \cos\theta_0 t$

$t = R / \upsilon_0 \cos\theta_0$

$\theta_0 = 14{,}65°$ $\qquad$ $t = 2000 / 200\cos 14{,}65$ $\qquad$ $t = 10{,}34$ s

$\theta_0 = 75{,}35°$ $\qquad$ $t = 2000 / 200\cos 75{,}35$ $\qquad$ $t = 39{,}54$ s

Problem 12: Sabit İvmeli İki Boyutta Hareket



Bir sapanın ucundaki bir taş, şekildeki gibi υ_0 = 1,5 m/s olan sabit bir hızla 1,2 m yarıçaplı düşey bir daire çevresinde döndürülmektedir. Sicimin merkezi yerden 1,5 m yüksekliktedir. Sapan yatayla

a) A noktasında

b) B noktasında 30° açı yaptığı zaman taş serbest bırakılırsa menzili nedir?

c) A noktasında tam salınmadan önce

d) A noktasında tam salındıktan sonra taşın ivmesi nedir?

Çözüm:

a) A noktasından serbest kalmadan önce taşın yerden yüksekliği

$y_0 = 1,5 + 1,2 \sin 30 = 2,1$ m

$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin 60 - gt = 1,5 \sin 60 - 9,8t$ $\qquad$ $\upsilon_y = 1,3 - 9,8t$

$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos 60 = 1,5 . \cos 60$ $\qquad$ $\upsilon_x = 0,75$

$y = y_0 + \upsilon_y t + ½(gt^2) = 2,1 + (1,3 - 9,8t)t + 4,9t^2$

$y = 2,1 + 1,3t - 4,9t^2$

$x_A = \upsilon_x t$ $\qquad$ $x = 0,75t$

$y = 0 \qquad 4,9t^2 - 1,3t - 2,1 = 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 42,85 \qquad \Delta^{1/2} = 6,546$

$t_{1,2} = (1,3 \pm 6,546)/9,8$

$t = 0,8$ s

$x_A = 0,75 . 0,8 = 0,6$ m

b) $\upsilon_y = -\upsilon_0 \sin 60 - gt = 1{,}5 \sin 60 - 9{,}8t$ $\upsilon_y = -1{,}3 - 9{,}8t$

$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos 60 = 1{,}5.\cos 60$ $\upsilon_x = 0{,}75$

$y = y_0 + \upsilon_y t + ½(gt^2) = 2{,}1 + (1{,}3 - 9{,}8t)t + 4{,}9t^2$

$y = 2{,}1 - 1{,}3t - 4{,}9t^2$

$x_B = \upsilon_x t$ $x_B = 0{,}75t$

$y = 0$ $4{,}9t^2 + 1{,}3t - 2{,}1 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 42{,}85$ $\Delta^{1/2} = 6{,}546$

$t_{1,2} = (-1{,}3 \pm 6{,}546)/9{,}8$

$t = 0{,}535$ s

$x_A = 0{,}75.0{,}535 = 0{,}4$ m

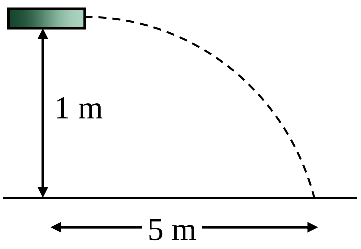
c) $a_r = \upsilon^2 / r = 1{,}5^2 / 1{,}2$ $a_r = 1{,}875$ m/s^2

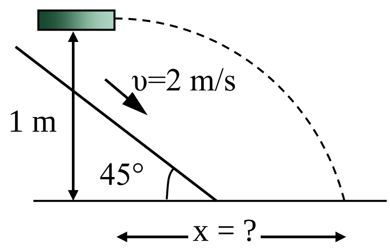
d) $a = g$ $a = 9{,}8$ m/s^2

Problem 13: Eğik Atış Hareketi

Ok fırlatan bir tüfek yerden 1 m yükseklikte yatay olarak tutulurken ateşlenmektedir. Silahlı yere göre durgunken, silahtan çıkan ok yatay olarak 5 m yol alır. Bir çocuk aynı silahı, 45° eğimli düzlemde 2 m/s'lik sabit hızla kayarken yatay olarak tutmaktadır. Tüfek yerden 1 m yukarıda olduğu zaman ateşlenirse ok ne kadar uzağa gider?

Çözüm:





$y = \upsilon_{y0}t + ½(gt^2)$ $\quad t = (2y/g)^{1/2}$

$t = [2.1/9,8]$ $\quad t = 0,45$ s

$x = \upsilon_{x0}t$ $\quad \upsilon_{x0} = x / t$

$\upsilon_{x0} = 5 / 0,45$ $\quad \upsilon_{x0} = 11,1$ m/s

$\upsilon_{y0} = \upsilon_0 \sin 45$

$\upsilon_{y0} = 2.0,707$ $\quad \upsilon_{y0} = 1,414$ m/s

$y = \upsilon_{y0}t + ½(gt^2)$

$1 = 1,4144 + 4,9t^2$

$4,9t^2 + 1,414t – 1 = 0$ $\quad \Delta = b^2 – 4ac = 21,6$ $\quad \Delta^{1/2} = 4,648$

$t_{1,2} = -1,414 \pm 4,648 / 9,8$

$t = 0,33$ s

$\upsilon_{x0} = \upsilon_0 \cos 45$

$\upsilon_{x0} = 2.0,707$ $\upsilon_{x0} = 1,414$ m/s

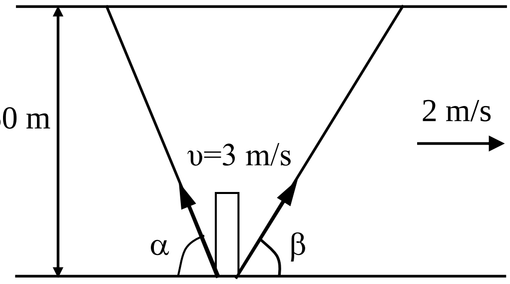
$x = \upsilon_x t$

$x = (11,1 + 1,414).0,33$

$x = 4,13$ m

Problem 14: Eğik Atış Hareketi

Bir tekne genişliği 150 m olan bir nehri karşıdan karşıya 2 dk'da geçmektedir. Teknenin suya göre hızı 3 m/s olup nehir 2 m/s'lik hızla akmaktadır. Tekne akıntıya karşı veya akıntıyla aynı yönde giderse karşı kıyıda hangi noktalara ulaşır.



Çözüm:

α açısında

$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha$ $\qquad$ $\upsilon_y = 3\sin\alpha$

$\upsilon_x = -3\cos\alpha + 2$ $\qquad$ $\upsilon_x = -\upsilon_0\cos\alpha + 2$

$y = (\upsilon_0 \sin\alpha)t$ $\qquad$ $150 = (3\sin\alpha).120$ $\qquad$ $\sin\alpha = 15 / 36$

$\alpha = 24{,}62$

$x = (-\upsilon_0\cos\alpha + 2)t$ $\qquad$ $x = (-3\cos 24{,}62 + 2).120$

$x = (-3{,}091 + 2).120$

$x = -87{,}6$ m akıntıya karşı

β açısında

$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\beta$ $\qquad$ $\upsilon_y = 3\sin\beta$

$\upsilon_x = \upsilon_0\cos\beta + 2$ $\qquad$ $\upsilon_x = 3\cos\beta + 2$

$y = (\upsilon_0 \sin\beta)t$ $\qquad$ $150 = (3\sin\beta).120$ $\qquad$ $\sin\beta = 15 / 36$

$\beta = 24{,}62$

$x = (\upsilon_0\cos\beta + 2)t$ $\qquad$ $x = (3\cos 24{,}62 + 2).120$

$x = (3{,}091 + 2).120$

$x = 567{,}3$ m $\qquad$ akıntıya doğru