Trabajo Práctico NP - Completos

Tema: Problema de la mochila.

Docente: Mg. Pascal Andrés.

Alumno: Escalante Julián Emiliano.

Cátedra: Teoría de la Computabilidad.

Carrera: Licenciatura en Sistemas de Información.

Fecha de entrega: Viernes 16 de Noviembre.

2018

Introducción al problema.

El problema de la mochila (Knapsack Problem o Rucksack Problem, en inglés) resulta un problema simple y fácil de entender: hay una persona que tiene una mochila con una cierta capacidad y se le presenta la siguiente interrogante ¿Qué elementos podrá elegir para depositarlos en ella?

Cada uno de los elementos tiene un peso y aporta un beneficio. El objetivo de la persona es elegir los elementos que le permitan maximizar el beneficio sin excederse de la capacidad permitida.

A la vez es un problema complejo, si por complejidad nos referimos a la computacional. Un problema se cataloga como inherentemente difícil si su solución requiere de una cantidad significativa de recursos computacionales, sin importar el algoritmo utilizado. El problema de la mochila forma parte de una lista histórica de problemas NP − Completos elaborada por Richard Karp en 1972.

En el caso del problema de la mochila, si contáramos con 4 productos, para saber cual es la mejor solución podríamos probar las 2^4 = 16 posibilidades. El 2 se desprende del hecho de que cada decisión es incluir o no al producto y el 4 de la cantidad de productos. 16 posibilidades es un número manejable, sin embargo, si la cantidad de elementos por ejemplo ascendiera a 20, tendríamos que analizar nada más 2^{20} = 1.048.576 posibilidades.

A continuación, en el siguiente trabajo se proporciona una introducción al problema de la mochila.

En la primera parte se analizará a partir de una consigna formal del problema en cuestión y cómo obtener una solución óptima para el problema utilizando la técnica programación lineal. Luego, en la segunda parte, se analizarán alternativas que permiten obtener soluciones aproximadas a través del uso de heurísticas.

Por último, veremos una ilustración de su curva de crecimiento, algunas variaciones del problemas y algunas de las aplicaciones que tiene el modelo.

Consigna formal del problema.

Supóngase que tenemos una mochila con capacidad C (un entero positivo) y n objetos de peso $s_1,...,s_n$, así como "utilidades" $p_1,...,p_n$ (donde $s_1,...,s_n$ y $p_1,...,p_n$ son enteros positivos).

Este problema se podría ver desde dos puntos de vista:

- Desde un **problema de optimización** en el cual se busca hallar la utilidad total más grande de cualquier subconjunto de los objetos que quepa en la mochila, es decir que produzca la utilidad máxima.

- Desde un **problema de decisión** en que dado k, determine si existe un grupo de los objetos que quepa en la mochila y tenga una utilidad total de por lo menos k.

El modelo o problema de la mochila tiene que ver clásicamente con el hecho de determinar los artículos más valiosos que un combatiente podría cargar en una mochila. El problema representa un modelo de asignación de recursos general en el cual se utilizan recursos limitados por varias actividades económicas. El objetivo es maximizar el rendimiento total.

Formulación lineal.

Un punto importante que podemos nombrar es una de las técnicas matemáticas que se puede utilizar para la resolución de este problema llamada **programación lineal**.
Definiendo a:

c: como la capacidad de la mochila.
p_i: como el beneficio unitario obtenido por ingresar el producto i en la mochila.
w_i: como el peso del producto i.
n: como la cantidad de productos.
c, p_i y w_i como valores enteros y positivos.

se puede plantear el modelo como:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq c \qquad \text{(Capacidad)}$$

$$max \rightarrow z = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \qquad \text{(Funcional)}$$

Sin embargo, el problema que tiene esta técnica es que no siempre se puede resolver debido a su complejidad matemática. En esas ocasiones, es necesario recurrir a heurísticos.

Un heurístico es un procedimiento que en la mayoría de las ocasiones nos permite obtener una buena solución pero que no necesariamente es la óptima.

Heurísticos.

- Aproximación a través de coeficiente de rendimiento:

Una solución mecánica pero que puede no ser óptima siempre podría elaborarse ordenando los productos en forma descendente según la proporción y metiendo elementos de esta lista ordenada hasta que no se pueda ingresar el siguiente elemento a la mochila. Desde este punto en adelante, siempre se asumirá que los elementos del conjunto se encuentran ordenados según esta proporción.

$$ri = \frac{Pi}{Wi}$$

Ejemplo 1.
Considerando la siguiente instancia del problema de la mochila con capacidad c = 65.

N	Peso (wi)	Utilidad (pi)	R (Utilidad / Peso)
A	20	100	5
B	20	80	4
C	30	30	1

Aplicando la heurística mencionada, elegiríamos los productos A y B ya que al tratar de ingresar el producto C estaríamos excediendo la capacidad permitida. El resultado obtenido entonces sería.

Z’= 100 + 80 = 180

Es importante notar que los elementos en la tabla están ordenados según la proporción r_i. Si no estuvieran ordenados, el primer paso consistiría en ordenarlos.

El heurístico propuesto en el punto anterior tiende a funcionar adecuadamente en muchos de los casos, existen casos patológicos que pueden tener como consecuencia un rendimiento no deseado.

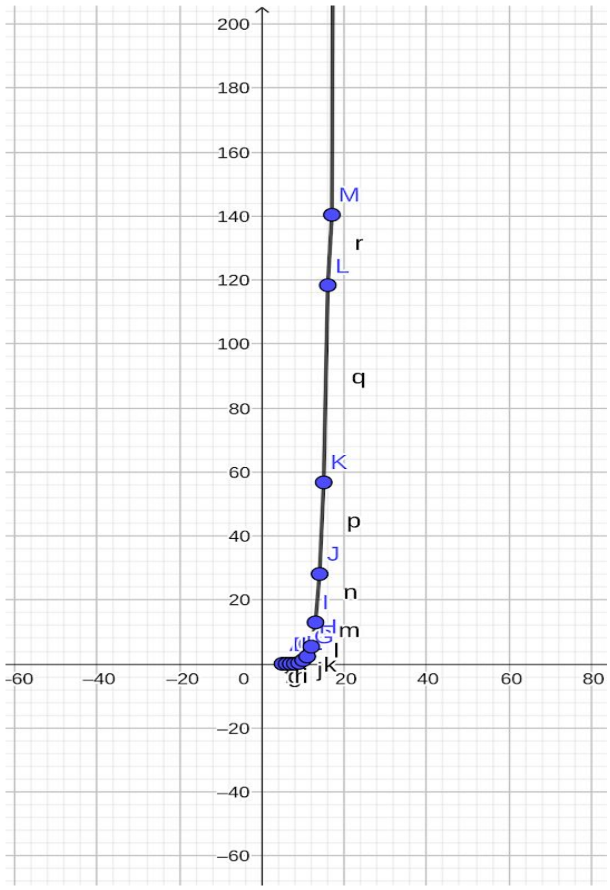
Ejemplo 2.
Considerando la siguiente instancia del problema de la mochila con capacidad c = 100.

N	Peso	Utilidad	R (Utilidad / Peso)
A	1	2	2
B	100	100	1

Se puede observar que la solución óptima estaría dada por la selección del elemento B, en consecuencia z = 100. En cambio, utilizando la heurística mencionada, el valor obtenido es z' = 2.

Curva de crecimiento.

N	Seg
5	0,055
6	0,055
7	0,063
8	0,124
9	0,356
10	1,202
11	2,353
12	5,425
13	13,002
14	28,126
15	56,759
16	118,374
17	140,383
18	505,941
19	12.909,922
20	21.291,125



Variaciones del problema.
Del problema de la mochila típico existen distintas variaciones y a continuación se enseñar a algunas de las mismas.

Acotado: En esta variante, en vez de contar con solamente un elemento de cada tipo, se tiene una cantidad limitada y conocida de cada uno de los elementos (que no necesariamente es la misma).

No acotado: El problema de la mochila no acotado es una instancia particular del problema de la mochila acotado en el cual cada $b_i = \infty$.

Problema del cambio: Hay un caso particular que aparece cuando se exige cumplir exactamente con la restricción de capacidad. En este caso además se plantea que $p_i = 1$ ya que se intenta reconstruir la situación de un cajero que debe maximizar o minimizar la cantidad de monedas que entrega de cambio.

Múltiples mochilas: Otra de las variantes conocidas surge de la generalización del problema estándar, cuando en vez de tener un solo contenedor (mochila), se tienen varios.

Aplicaciones.

El problema tiene diferentes aplicaciones en planificación económica y en problemas de carga o empaque.

Como se ha dicho anteriormente, podríamos describirlo como un problema de toma de decisiones en el cual se hace una inversión, el volumen de una inversión es la cantidad de dinero a demandar, C es el capital total que se puede invertir y la utilidad de una inversión es el rendimiento esperado.
En una versión más compleja del problema, los objetos puede ser tareas o experimentos que diversas organizaciones quieren que se efectúen durante un vuelo espacial. Además de su tamaño, el volumen del equipo necesario, cada tarea podría tener necesidades de energía y necesidades de tiempo de la tripulación. Tanto el espacio como la energía y el tiempo disponibles durante el vuelo son limitados. Cada tarea tiene cierto valor, o utilidad.

Merkle Hellman
Una de las aplicaciones más importantes del problema de la mochila fue en el área de la criptografía. En 1976, Ralph Merkle y Martin Hellman idearon un sistema muy sencillo de implementar cuya fortaleza se basaba en la dificultad de resolver el problema de la mochila.
En particular, aplicaba este problema en la generación de claves de un sistema criptográfico simétrico. El algoritmo se basa en la idea de que dado un número k y conjunto de números C, el costo en términos computacionales de saber cuáles números de C se utilizaron para sumar k es tan alto que la comunicación es segura.
Este sistema criptográfico fue utilizado durante años especialmente debido a su simplicidad. Sin embargo, en 1982 se descubrió un algoritmo que permite romper este sistema criptográfico en tiempo polinomial y en consecuencia, dejó de ser utilizado.

Otras aplicaciones.

Selección de oportunidades de inversión: presupuesto como limitante.
Un estudio interesante se puede encontrar que analiza situaciones en las cuales los elementos que se pueden incluir en la mochila se van recibiendo en forma continua y se debe tomar una decisión de qué elementos elegir sin haber recibido todos.
Desperdiciar la menor cantidad de tela: material como limitante.
Aprovechar al máximo el uso de máquinas: tiempo como limitante.

Bibliografía.

- Hamdy A. Taha.Investigación de operaciones. Novena edición.Pearson Educación, México, 2012.

- Baase, Sara y Gelder Allen Van. Algoritmos computacionales.Introducción al análisis y diseño. Tercera edición. Pearson Educación, México, 2002.

- Tomás Bruno. Problema de la mochila. Modelos y Optimización I. Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires. Versión 1.0 - Octubre 2013.