

# 多尺度动理学输运方程基于特征线的渐近保持算法

汇报人：蔡逸 (厦门大学)

合作者：熊涛 (中国科学技术大学)

张国梁 (上海交通大学)

朱洪强 (南京邮电大学)



2024 年 9 月 22 日, 厦门

# 目录

1. 输运模型
2. 基于特征线法的模型近似
3. 半拉格朗日型间断有限元方法
4. 数值算例
5. 总结与展望

# 目录

1. 输运模型
2. 基于特征线法的模型近似
3. 半拉格朗日型间断有限元方法
4. 数值算例
5. 总结与展望

# 输运模型

线性输运方程：

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{L}(f) + \mathcal{N}(f), \quad (1)$$

- ▶ 时刻  $t \in [0, \infty)$ ; 位置  $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$ ; 速度  $v \in \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^d$ ;
- ▶ 分布函数  $f(t, x, v) \in L^1(\mathbb{V})$ ;
- ▶ 线性算子  $\mathcal{L}$ : 散射系数  $\sigma_s(x)$ , 散射核  $k(v', v)$ ,

$$\mathcal{L}(f) = \sigma_s(x) \int_{\mathbb{V}} k(v', v) [f(t, x, v') - f(t, x, v)] \mathrm{d}v', \quad (2)$$

其中,

$$k(v', v) = k(v, v'), \quad \int_{\mathbb{V}} k(v', v) \mathrm{d}v = 1. \quad (3)$$

- ▶ 算子  $\mathcal{N}$ : 吸收系数  $\sigma_a(x)$ , 发射源  $q(x)$ ,

$$\mathcal{N}(f) = -\sigma_a(x)f(t, x, v) + q(x). \quad (4)$$

# 多尺度输运模型

扩散尺度变换:  $t = t'/\varepsilon^2$ ,  $x = x'/\varepsilon$ ,  $\mathcal{N} = \varepsilon^2 \mathcal{N}'$ ,  $\varepsilon > 0$ ,

$$\varepsilon^2 \partial_t f + \varepsilon v \cdot \nabla_x f = \mathcal{L}(f) + \varepsilon^2 \mathcal{N}(f). \quad (5)$$

令  $\langle \zeta \rangle = \int_{\mathbb{V}} \zeta(v) dv / \int_{\mathbb{V}} 1 dv$ , 考虑宏观-微观分解

$$f = \rho + \varepsilon g, \quad \langle g \rangle = 0. \quad (6)$$

将 (6) 代入 (5) 得

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot \langle vg \rangle = -\sigma_a \rho + q, \quad (7a)$$

$$\varepsilon^2 \partial_t g + \varepsilon(I - \langle \cdot \rangle)(v \cdot \nabla_x g) + v \cdot \nabla_x \rho = -\sigma_s g - \varepsilon^2 \sigma_a g. \quad (7b)$$

当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, (7b) 收敛于  $g = -\frac{1}{\sigma_s} v \cdot \nabla_x \rho$ , 进而 (7a) 收敛于

$$\partial_t \rho = \langle v \otimes v \rangle \nabla_x \cdot (\sigma_s^{-1} \nabla_x \rho) - \sigma_a \rho + q. \quad (8)$$

# 数值挑战

## 求解难点.

- ▶ **渐近保持**: 捕捉正确的扩散极限 ( $\varepsilon \rightarrow 0$ );
- ▶ **高维度**:  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $v \in \mathbb{S}^2$ ;
- ▶ **多尺度**: 流动项和散射项具有强刚性;

## 渐近保持格式.

- ▶ 全显格式<sup>1</sup>: 时间步长约束  $\Delta t = O(\varepsilon h)$ ;
- ▶ 全隐格式<sup>2</sup>: 求解大规模线性方程组代价过高;
- ▶ 显隐格式:
  - ▶ 显式扩散项<sup>3</sup>:  $\Delta t = O(\varepsilon h + h^2)$ ;
  - ▶ 隐式扩散项 + 显式对流项<sup>4</sup>:
    - ▶ 扩散区域 ( $\varepsilon \leq \lambda h$ ): 无条件稳定;
    - ▶ 动理学区域 ( $\varepsilon > \lambda h$ ):  $\Delta t = O(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon/h - \lambda})$ .

<sup>1</sup>Jin 1995, JCP; Caflisch, Jin, and Russo 1997, SINUM

<sup>2</sup>Klar 1998, SINUM; Klar and Unterreiter 2002, SINUM

<sup>3</sup>Lemou and Mieussens 2008, SISC; Jang et al. 2015, JCP; Jang et al. 2014, SINUM

<sup>4</sup>Peng, Cheng, et al. 2020, JCP; Peng, Cheng, et al. 2021, SINUM; Peng and Li 2021, SISC

# 研究目标

## 算法目标.

- ▶ 渐近保持；
- ▶ 一致无条件稳定；
- ▶ 只需求解少量小规模线性方程组；
- ▶ 高度可并行.

## 相关工作.

- ▶ 线性输运方程, 有限差分方法 [Zhang, Zhu, and Xiong 2023, SISC];
- ▶ 灰体辐射输运方程, 蒙特卡罗方法 [Shi, Song, and Xiong 2023, JCP];
- ▶ 线性输运方程, 半拉格朗日型间断有限元方法 [Cai et al. 2024, JCP];

# 目录

1. 输运模型
2. 基于特征线法的模型近似
3. 半拉格朗日型间断有限元方法
4. 数值算例
5. 总结与展望

# 线性输运方程

假定  $\sigma$  是常数, 考虑

$$\partial_t f + \tilde{v} \cdot \nabla_x f = \tilde{\sigma}(\rho - f). \quad (9)$$

其中,  $\rho = \langle f \rangle$ ,  $\tilde{v} = v/\varepsilon$ ,  $\tilde{\sigma} = \sigma/\varepsilon^2$ . 在(9)式两端作用  $\langle \cdot \rangle$ , 得

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot \langle \tilde{v} f \rangle = 0. \quad (10)$$

**离散纵标法.** 选取有限个速度点  $\{v_\alpha\}$  和权重  $\{w_\alpha\}$ , 记  $f_\alpha = f(v_\alpha)$ , 有

$$\partial_t f_\alpha + \tilde{v}_\alpha \cdot \nabla_x f_\alpha = \tilde{\sigma}(\rho - f_\alpha), \quad (11a)$$

$$\partial_t \rho + \sum_\alpha w_\alpha \tilde{v}_\alpha \cdot \nabla_x f_\alpha = 0. \quad (11b)$$

**核心思想.** 改写  $F = \langle \tilde{v} f \rangle$  成  $G = G(f_{old}, \nabla_x \rho)$ .

# 特征线法

**特征方程.** 给定  $t > 0, x \in \mathbb{X}, v \in \mathbb{V}$ , 记. 由链式法则得

$$\frac{df_v}{ds}(s) = \tilde{\sigma}(\rho_v(s) - f_v(s)), \quad \frac{d\xi_v}{ds}(s) = \tilde{v}, \quad (12)$$

其中,  $f_v(s) = f(s, \xi_v(s; x, t), v)$ ,  $\rho_v(s) = \rho(s, \xi_v(s; x, t))$ .

**形式解.** 给定  $0 \leq t' < t$ , 由积分因子法得

$$f_v(t) = e^{-\tilde{\sigma}(t-t')} f_v(t') + \int_{t'}^t \tilde{\sigma} e^{-\tilde{\sigma}(t-s)} \rho_v(s) ds, \quad (13a)$$

$$\xi_v(s; x, t) = x - \tilde{v}(t - s). \quad (13b)$$

由分部积分法得

$$f_v(t) = \rho_v(t) + e^{-\tilde{\sigma}(t-t')} (f_v(t') - \rho_v(t')) - \int_{t'}^t e^{-\tilde{\sigma}(t-s)} \frac{d\rho_v}{ds}(s) ds. \quad (14)$$

# 通量近似

近似形式解. 由

$$\int_{t'}^t e^{-\tilde{\sigma}(t-s)} \frac{d\rho_v}{ds}(s) ds \approx \int_{t'}^t e^{-\tilde{\sigma}(t-s)} ds \frac{d\rho_v}{ds}(t) = \tilde{\sigma}^{-1}(1 - e^{-\tilde{\sigma}(t-t')}) \frac{d\rho_v}{ds}(t).$$

可得

$$f_v(t) = \rho_v(t) + e^{-\tilde{\sigma}(t-t')}(f_v(t') - \rho_v(t')) - \tilde{\sigma}^{-1}(1 - e^{-\tilde{\sigma}(t-t')}) \frac{d\rho_v}{ds}(t). \quad (15)$$

近似宏观通量. 将(15)代入  $F = \langle \tilde{v} f \rangle$  中, 得

$$F(t) \approx G(t, t') = \underbrace{e^{-\tilde{\sigma}(t-t')} \langle \tilde{v}(f_v(t') - \rho_v(t')) \rangle}_{\text{对流}} - \underbrace{(1 - e^{-\tilde{\sigma}(t-t')}) \langle v \otimes v \rangle \sigma^{-1} \nabla_x \rho(t)}_{\text{扩散}}. \quad (16)$$

# 近似模型：强形式

假定  $t \in [0, T]$ ,  $t^n = n\Delta t$  ( $0 \leq n \leq N$ ),  $\Delta t = T/N$ , 定义

$$\mathcal{S}_v(t')[g](t, x, v) = g(t', \xi_v(t'; x, t), v), \quad \xi_v(t'; x, t) = x - \tilde{v}(t - t'). \quad (17)$$

记  $\mathcal{S}_v^n = \mathcal{S}_v(t^n)$ , 将 (16) 代入 (10), 得

$$\partial_t \rho + \omega(t) \nabla_x \cdot \langle v \mathcal{S}_v^n[g] \rangle = \langle v \otimes v \rangle \nabla_x \cdot ((1 - \omega(t)) \sigma^{-1} \nabla_x \rho), \quad (18a)$$

$$\partial_t f + \frac{1}{\varepsilon} v \cdot \nabla_x f = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} (\rho - f), \quad (18b)$$

其中,  $\omega(t) = \exp(-\sigma(t - t^n)/\varepsilon^2)$ . 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,  $\omega(t) \rightarrow 0$  且 (18) 收敛于

$$f = \rho, \quad \partial_t \rho = \langle v \otimes v \rangle \nabla_x \cdot (\sigma^{-1} \nabla_x \rho). \quad (19)$$

# 近似模型：弱形式

给定空间单元  $K, K(t)$  为从  $t^{n+1}$  时刻的  $K$  出发沿着  $f$  方程的特征线方向运动至时刻  $t$  的动态单元. 记  $\mathcal{D}_x$  为弱意义下的微分算子.

- ▶ 对于  $\rho$  方程 (18a), 乘测试函数  $\phi(x) \in L^2(\mathbb{X})$  并在单元  $K$  上积分, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K \rho(t, x) \phi(x) dx &= - \int_K \omega(t) \langle v \cdot \mathcal{D}_x \mathcal{S}_v^n[g](t, x, v) \rangle \phi(x) dx \\ &\quad + \langle v \otimes v \rangle \int_K (1 - \omega(t)) \mathcal{D}_x \cdot (\sigma^{-1} \mathcal{D}_x \rho(t, x)) \phi(x) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

- ▶ 对于  $f$  方程 (18b), 定义测试函数  $\Psi(t, x)$  使得

$$\partial_t \Psi(t, x) + \frac{1}{\varepsilon} v \cdot \nabla_x \Psi(t, x) = 0, \quad \Psi(t^{n+1}, x) = \psi(x), \quad \forall \psi(x) \in L^2(\mathbb{X}). \quad (21)$$

由雷诺输运定理和散度定理可知,

$$\frac{d}{dt} \int_{K(t)} f(t, x, v) \Psi(t, x) dx = \int_{K(t)} \frac{\sigma}{\varepsilon^2} (\rho(t, x) - f(t, x, v)) \Psi(t, x) dx. \quad (22)$$

# 模型误差估计

## 定理 (通量近似误差)

假定  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,  $\Delta t = t - t'$ . 若存在常数  $M > 0$  使得对于所有正整数  $k \geq 1$ ,

$$|(\varepsilon \partial_t + v \cdot \nabla_x)^{k+1} \rho(s)| \leq M, \quad \forall s \in [t, t']. \quad (23)$$

则下列误差估计成立:

$$\|F(t) - G(t, t')\|_\infty \leq CW^*(\varepsilon, \Delta t), \quad W^*(\varepsilon, \Delta t) = \begin{cases} \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon^3}, & \text{若 } \Delta t \leq \varepsilon^2; \\ \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, & \text{若 } \Delta t > \varepsilon^2, \end{cases} \quad (24)$$

其中,  $C > 0$  是不依赖于  $\varepsilon$  和  $\Delta t$  的常数.

# 目录

1. 输运模型
2. 基于特征线法的模型近似
3. 半拉格朗日型间断有限元方法
4. 数值算例
5. 总结与展望

# 一阶微分系统

定义辅助变量  $q = \langle v \otimes v \rangle \mathcal{D}_x(\sigma^{-1} \rho)$ , 记  $(\xi, \eta)_K = \int_K \xi(x) \eta(x) dx$ , 考虑

$$(\tilde{q}, \varphi)_K = \langle v \otimes v \rangle (\mathcal{D}_x(\sigma^{-1} \tilde{\rho}), \varphi), \quad \forall \varphi \in L^2(\mathbb{X}), \quad (25a)$$

$$\frac{d}{dt} (\tilde{\rho}, \phi)_K = -(\omega \langle v \mathcal{D}_x \mathcal{S}_v^n[g] \rangle, \phi) + ((1 - \omega) \mathcal{D}_x \tilde{q}, \phi), \quad \forall \phi \in L^2(\mathbb{X}), \quad (25b)$$

$$\frac{d}{dt} (f, \Psi)_{K(t)} = \frac{1}{\varepsilon^2} (\sigma(\tilde{\rho} - f), \Psi)_{K(t)}, \quad \forall \Psi(t, x) \text{ 满足 (21)}, \quad (25c)$$

$$(\rho, \gamma)_K = (\langle f \rangle, \gamma)_K, \quad \forall \gamma \in L^2(\mathbb{X}). \quad (25d)$$

当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,  $\rho = \langle f \rangle = \tilde{\rho}$  在弱意义下成立.

# 空间离散

给定拟一致网格  $\mathcal{T}_h$ , 网格尺寸  $h$ ,

$$h \leq c_0 r, \quad h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K, \quad r = \max_{K \in \mathcal{T}_h} r_K, \quad (26a)$$

$$h_K = \text{diam}(K), \quad r_K = \max \{ \text{diam}(S) ; S \text{ is a ball contained in } K \}. \quad (26b)$$

间断有限元空间:

$$U_h^k = \left\{ u \in L^2(\mathbb{X}) ; u|_K \in \mathcal{P}^k(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}; \quad (27)$$

$$V_h^k = \left\{ u(\cdot, v) \in U_h^k ; \int_{\mathbb{V}} \int_{\mathbb{X}} |u(x, v)|^2 dx dv < \infty \right\}. \quad (28)$$

单元交界处的跳跃量和均值:

$$[u](x) = u(x^+) - u(x^-), \quad \{u\}(x) = \frac{1}{2} [u(x^+) + u(x^-)]. \quad (29)$$

# 空间离散

扩散通量:

$$\text{alternating left-right: } \check{\rho}_{e,K}(x) = \rho(x^-), \quad \hat{q}_{e,K}(x) = q(x^+); \quad (30\text{a})$$

$$\text{alternating right-left: } \check{\rho}_{e,K}(x) = \rho(x^+), \quad \hat{q}_{e,K}(x) = q(x^-); \quad (30\text{b})$$

$$\text{central: } \check{\rho}_{e,K}(x) = \frac{1}{2} [\rho(x^-) + \rho(x^+)], \quad \hat{q}_{e,K}(x) = \frac{1}{2} [q(x^-) + q(x^+)]. \quad (30\text{c})$$

迎风通量:

$$(\widetilde{vg})_{e,K}(x) = v \{g\} - \frac{|v|}{2} [g] = \begin{cases} v g(x^+), & v \cdot n_{e,K} > 0; \\ v g(x^-), & v \cdot n_{e,K} < 0; \end{cases} \quad (31)$$

# 时间离散

**一阶 SL-LDG 格式.**  $f$  方程和  $\rho$  方程同时采用 Backward Euler 方法,

$$(\tilde{q}_h^{n+1}, \varphi)_K = \langle v \otimes v \rangle r_K(\tilde{\rho}_h^{n+1}/\sigma, \varphi), \quad (32a)$$

$$\left( \frac{\tilde{\rho}_h^{n+1} - \rho_h^n}{\Delta t}, \phi \right)_K = -b_K(\omega \langle v \mathcal{S}_v^n[g_h] \rangle, \phi) + l_K((1 - \omega)\tilde{q}_h^{n+1}, \phi), \quad (32b)$$

$$(f_h^{n+1}, \psi)_K = \left( \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \sigma \Delta t} f_h^n, \Psi^n \right)_{K^n} + \left( \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon^2 + \sigma \Delta t} \tilde{\rho}_h^{n+1}, \psi \right)_K, \quad (32c)$$

$$(\rho_h^{n+1}, \gamma)_K = (\langle f_h^{n+1} \rangle, \gamma)_K. \quad (32d)$$

其中,  $(f, \Psi^n)_{K^n} = \int_K \mathcal{S}_v^n[f] \psi dx$ .

# 时间离散

**二阶 SL-LDG 格式.**  $\rho$  方程采用 BDF2 方法,  $f$  方程采用 Crank-Nicolson 方法,

$$(\tilde{q}_h^{n+1}, \varphi)_K = \langle v \otimes v \rangle r_K(\tilde{\rho}_h^{n+1}/\sigma, \varphi), \quad (33a)$$

$$\left( \frac{\tilde{\rho}_h^{n+1} - 4\rho_h^n + 3\rho_h^{n-1}}{3\Delta t}, \phi \right)_K = -b_K(\omega \langle v \mathcal{S}_v^n[g_h] \rangle, \phi) + l_K((1-\omega)\tilde{q}_h^{n+1}, \phi), \quad (33b)$$

$$\begin{aligned} (f_h^{n+1}, \psi)_K &= \left( \frac{2\varepsilon^2}{2\varepsilon^2 + \sigma\Delta t} f_h^n, \Psi^n \right)_{K^n} + \left( \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon^2 + \sigma\Delta t} \tilde{\rho}_h^{n+1}, \psi \right)_K \\ &\quad - \left( \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon^2 + \sigma\Delta t} (f_h^n - \rho_h^n), \psi \right)_{K^n}, \end{aligned} \quad (33c)$$

$$(\rho_h^{n+1}, \gamma)_K = (\langle f_h^{n+1} \rangle, \gamma)_K. \quad (33d)$$

# Oscillation-free 阻尼项

为压制高阶格式的数值振荡, 对  $f$  方程添加阻尼项.

$$\frac{d}{dt} \int_{K(t)} f_h \Psi dx = \int_{K(t)} \frac{\sigma}{\varepsilon^2} (\tilde{\rho}_h - f_h) \Psi dx - \sum_{l=0}^k \frac{\lambda_K^l(t^n)}{h_K} \int_{K(t)} (f_h - \pi_h^{l-1} f_h) \Psi dx, \quad (34)$$

其中,  $\pi_h^{-1} = \pi_h^0$  且  $\pi_h^l$  ( $l \geq 0$ ) 是从  $L^2(\mathbb{X})$  到  $V_h^l$  的正交投影:  $w \in L^2(\mathbb{X})$ ,

$$\int_K (\pi_h^l w - w) v_h dx = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}^l(K); \quad (35)$$

阻尼系数:

$$\lambda_K^l(t) = \frac{2(2l+1)}{2k-1} \frac{h^l}{l!} \sum_{|\alpha|=l} \left( \frac{1}{N_e} [\partial^\alpha f(t)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

# 渐近分析

## 定理 (渐近保持性)

对于线性输运方程(1), 固定时间步长  $\Delta t$  和网格尺寸  $h$ , 令  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $SL-LDG-p-q$  方法 ( $p = 1, 2$ ,  $q \geq 1$ ) 是渐近保持的.

# Fourier 分析

取  $\sigma = 1, \mathbb{V} = \{-1, 1\}$ . 定义

$$\rho_i^n = \hat{\rho}^n \exp(\mathcal{I}\kappa x_i), \quad f_{i,\alpha}^n = \hat{f}_\alpha^n \exp(\mathcal{I}\kappa x_i). \quad (37)$$

其中,  $\mathcal{I}^2 = -1, \alpha \in \{-, +\}$ . 记

$$U_1^n = (\hat{\rho}^n, \hat{f}_-^n, \hat{f}_+^n, \hat{\rho}^n)^T, \quad U_2^n = (\hat{\rho}^n, \hat{f}_-^n, \hat{f}_+^n, \hat{\rho}^n, \hat{\rho}^{n-1})^T, \quad (38)$$

SL-LDG- $p-q$  方法可写作:

$$U_p^{n+1} = A^{p,q}(\varepsilon, h, \Delta t; \omega) U_p^n. \quad (39)$$

**数值稳定性判别准则:** 对于任意给定的  $\varepsilon, h, \Delta t$ , 记矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_i(\omega)$  ( $i = 1, \dots, N$ ), 若对于任意  $\omega \in [0, 2\pi]$ ,

$$\max_{i=1, \dots, N} \{|\lambda_i(\omega)|\} < 1 \quad \text{或} \quad (40a)$$

$$\max_{i=1, \dots, N} \{|\lambda_i(\omega)|\} = 1 \quad \text{且} \quad A \text{ 可对角化.} \quad (40b)$$

则称数值格式(39)是稳定的.

# Fourier 分析

## 定理

给定  $q \geq 1$  和  $p = 1, 2$ , 矩阵  $\mathbf{A}^{p,q}$  仅依赖于  $\frac{\varepsilon}{h}$  和  $\frac{\Delta t}{\varepsilon h}$ , 即,  $\mathbf{A}^{p,q} = \mathbf{A}^{p,q}\left(\frac{\varepsilon}{h}, \frac{\Delta t}{\varepsilon h}; \omega\right)$ .

令  $\sigma = \log_{10}(\varepsilon/h)$  和  $\eta = \log_{10}(\varepsilon^2/\Delta t)$ ,

- ▶ 对于  $\sigma$ , 在  $[-5, 5]$  上选取 1000 个等距点;
- ▶ 对于  $\eta$ , 在  $[-4, 4]$  上选取 800 个等距点;
- ▶ 对于  $\omega$ , 在  $[0, 2\pi]$  上选取 500 个等距点.

基于上述稳定性判别准则, 在线性情形下, SL-LDG- $p$ - $q$  方法 ( $p = 1, 2$ ,  $q = 1, 2$ ) 是一致无条件稳定的.

# 目录

1. 输运模型
2. 基于特征线法的模型近似
3. 半拉格朗日型间断有限元方法
4. 数值算例
5. 总结与展望

# 一维算例: 精度测试

考虑各向同性散射 ( $k(v', v) = \frac{1}{\int_v 1 dv}$ ) 的线性输运方程:

$$\varepsilon^2 \partial_t f + \varepsilon v \cdot \nabla_x f = \sigma_s (\langle f \rangle - f) - \varepsilon^2 \sigma_a f + \varepsilon^2 q. \quad (41)$$

取  $\mathbb{X} = [-\pi, \pi]$ ,  $\mathbb{V} = \{-1, 1\}$ ;  $\sigma_s = 1$ ;  $\sigma_a = q = 0$ ;  $\varepsilon = 0.5, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-6}$ ;

精确解:

$$\begin{aligned} f(t, x, v) &= \frac{1}{4} \left[ -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t} \sin(x) + v \varepsilon e^{-\gamma t} \cos(x) \right] + \frac{1}{2}, \\ \rho(t, x) &= -\frac{1}{4\gamma} e^{-\gamma t} \sin(x) + \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}. \end{aligned} \quad (42)$$

记  $h$  为网格尺寸,  $\Delta t$  为时间步长,

$$E_{N,r}^\rho = \|\rho_h(T, x) - \rho(T, x)\|_{L^r}, \quad O_{N,r}^\rho = \log_2(E_{N,r}^\rho / E_{2N,r}^\rho), \quad (43)$$

# 一维算例：精度测试

表: SL-LDG-1 方法的  $L^1$  和  $L_\infty$  误差精度表. 时刻  $T = 1$ .

Parameters		$\Delta t = 0.5h$				$\Delta t = 5.0h$			
$\varepsilon$	$N$	$E_{N,1}^\rho$	$O_{N,1}^\rho$	$E_{N,\infty}^\rho$	$O_{N,\infty}^\rho$	$E_{N,1}^\rho$	$O_{N,1}^\rho$	$E_{N,\infty}^\rho$	$O_{N,\infty}^\rho$
0.5	80	1.59E-02	-	4.48E-03	-	1.38E-01	-	3.46E-02	-
	160	7.61E-03	1.06	2.18E-03	1.04	8.01E-02	0.79	2.00E-02	0.79
	320	3.73E-03	1.03	1.08E-03	1.02	3.51E-02	1.19	8.80E-03	1.19
	640	1.85E-03	1.01	5.35E-04	1.01	1.42E-02	1.31	3.55E-03	1.31
$10^{-1}$	80	1.43E-02	-	4.68E-03	-	6.05E-02	-	1.54E-02	-
	160	9.11E-03	0.65	2.86E-03	0.71	3.72E-02	0.70	9.43E-03	0.71
	320	4.96E-03	0.88	1.63E-03	0.81	2.10E-02	0.83	5.30E-03	0.83
	640	2.37E-03	1.07	8.59E-04	0.93	1.30E-02	0.69	3.28E-03	0.69
$10^{-2}$	80	1.08E-02	-	4.05E-03	-	5.75E-02	-	1.47E-02	-
	160	5.39E-03	1.00	2.02E-03	1.00	3.32E-02	0.79	8.44E-03	0.80
	320	2.70E-03	1.00	1.01E-03	1.00	1.73E-02	0.94	4.38E-03	0.95
	640	1.36E-03	0.99	5.07E-04	1.00	8.85E-03	0.96	2.24E-03	0.97
$10^{-6}$	80	1.07E-02	-	4.05E-03	-	5.75E-02	-	1.47E-02	-
	160	5.36E-03	1.00	2.02E-03	1.00	3.32E-02	0.79	8.43E-03	0.80
	320	2.68E-03	1.00	1.01E-03	1.00	1.72E-02	0.94	4.37E-03	0.95
	640	1.34E-03	1.00	5.02E-04	1.00	8.81E-03	0.97	2.23E-03	0.97

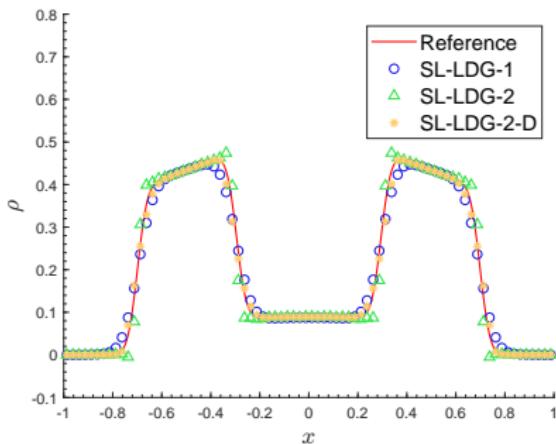
# 一维算例：精度测试

表: SL-LDG-2 方法的  $L^1$  和  $L_\infty$  误差精度表. 时刻  $T = 1$ .

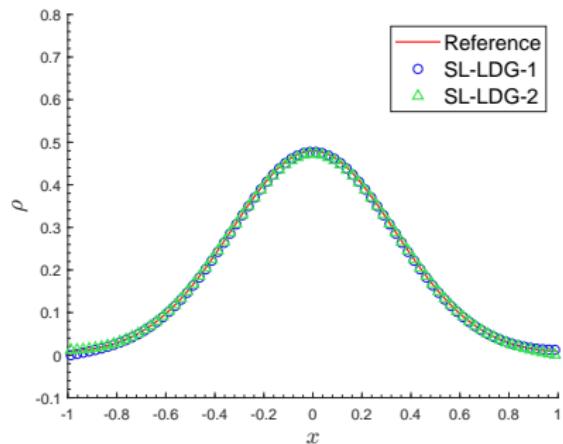
Parameters		$\Delta t = 0.5h$				$\Delta t = 5.0h$			
$\varepsilon$	$N$	$E_{N,1}^\rho$	$O_{N,1}^\rho$	$E_{N,\infty}^\rho$	$O_{N,\infty}^\rho$	$E_{N,1}^\rho$	$O_{N,1}^\rho$	$E_{N,\infty}^\rho$	$O_{N,\infty}^\rho$
0.5	80	2.37E-03	-	6.12E-04	-	1.04E-01	-	2.60E-02	-
	160	6.14E-04	1.95	1.58E-04	1.95	4.36E-02	1.25	1.09E-02	1.25
	320	1.56E-04	1.98	4.00E-05	1.98	1.34E-02	1.70	3.35E-03	1.70
	640	3.92E-05	1.99	1.01E-05	1.99	3.65E-03	1.87	9.13E-04	1.88
$10^{-1}$	80	4.04E-03	-	1.10E-03	-	3.49E-02	-	8.81E-03	-
	160	3.07E-03	0.40	7.91E-04	0.48	1.08E-02	1.68	2.73E-03	1.69
	320	1.53E-03	1.00	3.89E-04	1.02	5.21E-03	1.06	1.31E-03	1.06
	640	5.57E-04	1.46	1.41E-04	1.47	4.17E-03	0.32	1.04E-03	0.33
$10^{-2}$	80	2.81E-04	-	1.64E-04	-	3.15E-02	-	7.98E-03	-
	160	9.67E-05	1.54	4.75E-05	1.78	7.34E-03	2.10	1.86E-03	2.10
	320	5.17E-05	0.90	1.87E-05	1.34	1.66E-03	2.14	4.21E-04	2.14
	640	4.05E-05	0.35	1.16E-05	0.69	4.23E-04	1.97	1.07E-04	1.97
$10^{-6}$	80	2.45E-04	-	1.54E-04	-	3.15E-02	-	7.97E-03	-
	160	5.99E-05	2.03	3.83E-05	2.01	7.30E-03	2.11	1.85E-03	2.11
	320	1.49E-05	2.01	9.55E-06	2.00	1.62E-03	2.17	4.12E-04	2.17
	640	3.71E-06	2.00	2.38E-06	2.00	3.86E-04	2.07	9.79E-05	2.07

## 一维算例: Square wave 问题

取  $\mathbb{X} = [-1, 1]$ ,  $\mathbb{V} = \{-1, 1\}$ ,  $\sigma_s = 1$ ,  $\sigma_a = q = 0$ ,  $f_0(x, v) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 0.2; \\ 0, & |x| > 0.2. \end{cases}$



(a) 动理学区域:  $\varepsilon = 1.0$ ,  $T = 0.5$



(b) 扩散区域:  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $T = 0.05$

图: 密度  $\rho$  示意图. 网格尺寸  $h = 0.025$ ; 时间步长  $\Delta t = 1.5h$ .

# 一维算例: 各向同性 Dirichlet 边界

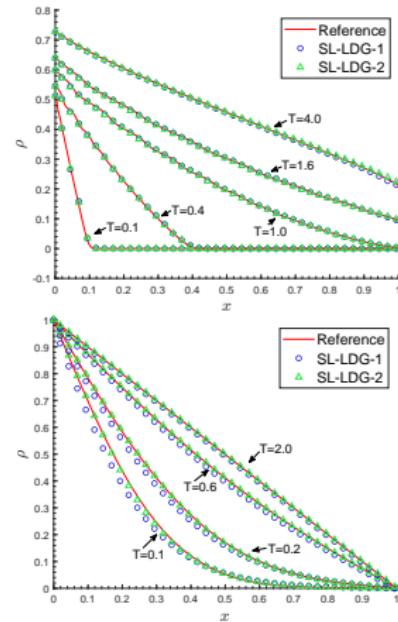
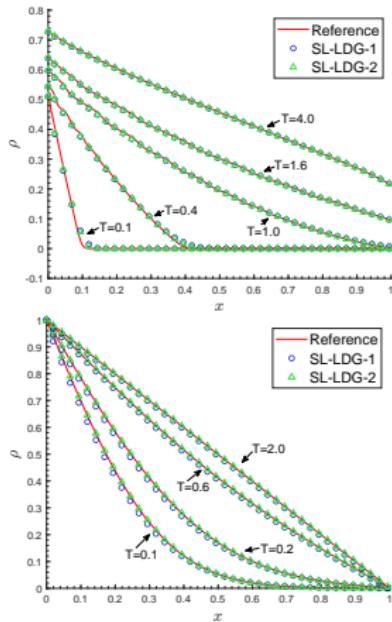
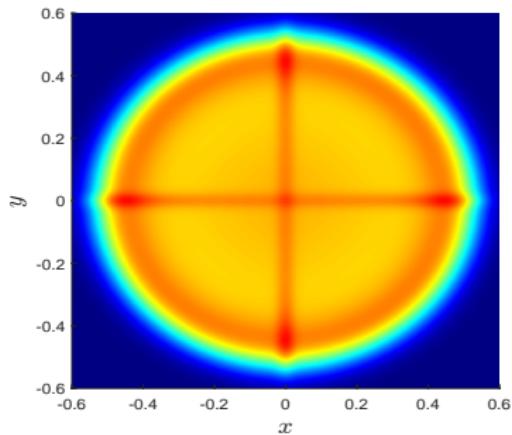


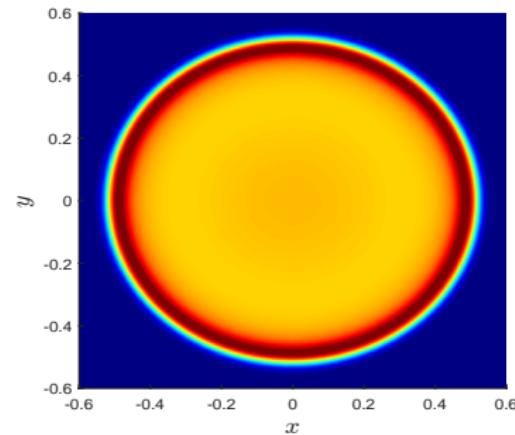
图: 不同时间步长和不同区域的密度  $\rho$  示意图. 取  $\mathbb{X} = [0, 1]$ ,  $\mathbb{V} = [-1, 1]$ ,  $\sigma_s = 1$ ,  $\sigma_a = q = 0$ ,  $h = 0.0125$ ;  $\varepsilon = 1.0$ (上);  $\varepsilon = 10^{-6}$ (下);  $\Delta t = 0.5h$ (左);  $\Delta t = 2.5h$ (右).

# 二维算例：线源问题

取  $\mathbb{X} = [-0.6, 0.6]^2$ ,  $\mathbb{V} = \mathbb{S}^2$ ,  $\sigma_s = 1$ ,  $\sigma_a = q = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\zeta^2 = 3.2 \times 10^{-4}$ .



(a) SL1-LDG1,  $\Delta t = 2.5h$



(b) SL2-LDG2,  $\Delta t = 2.5h$

图: 密度  $\rho$  等高线图. 时刻  $T = 0.5$ ; 网格单元数  $N_x = N_y = 128$ ; 速度点数  $N_v = 5810$ .

# 二维算例: 线源问题

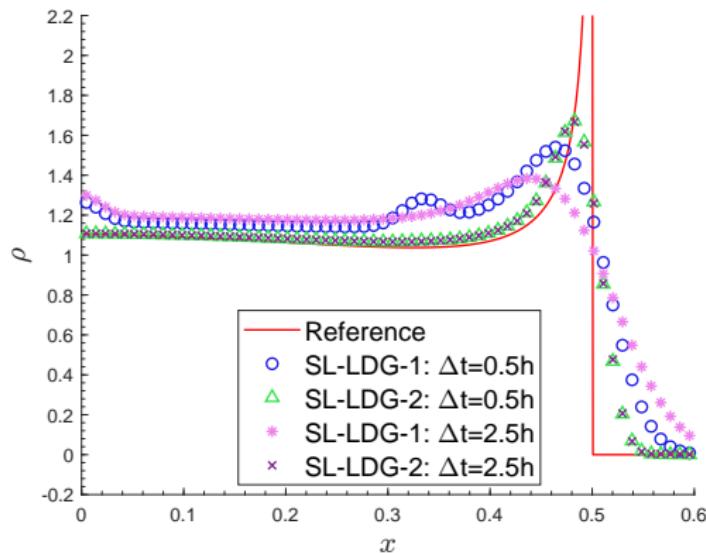
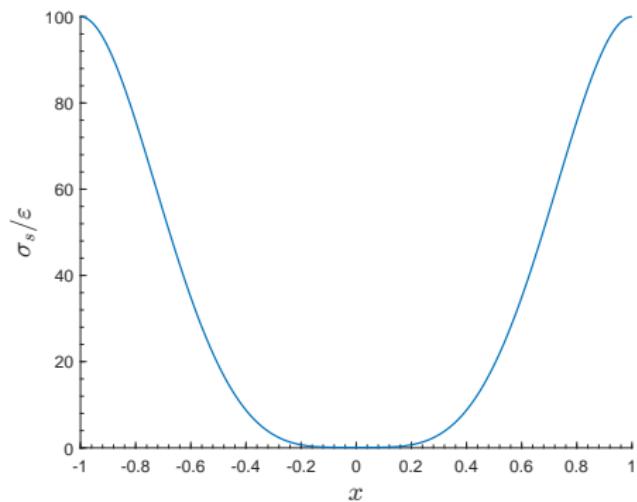
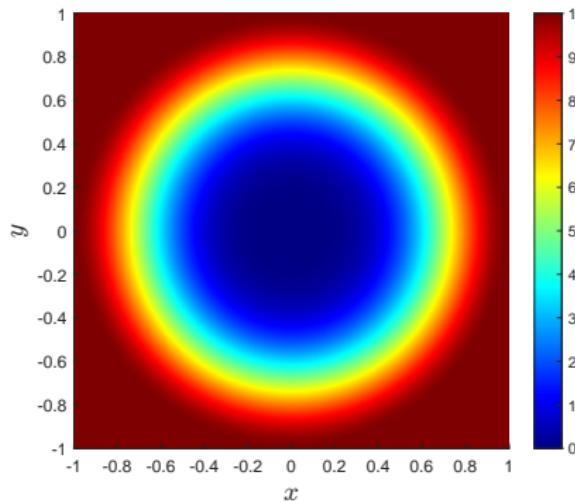


图: 密度  $\rho$  在  $y = 0$  处的截面图. 时刻  $T = 0.5$ ; 网格单元数  $N_x = N_y = 128$ ; 速度点数  $N_v = 5810$ . 参考解见 [Bennett and McClarren 2022].

# 二维算例：变散射问题

取  $\mathbb{X} = [-1, 1]^2$ ,  $\mathbb{V} \in \mathbb{S}^2$ ,  $\sigma_a = q = 0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\zeta = 10^{-2}$ ,

$$\sigma_s(x, y) = \begin{cases} 0.999c^4(c + \sqrt{2})^2(c - \sqrt{2})^2 + 0.001, & c = \sqrt{x^2 + y^2} < 1; \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (44)$$



图：散射系数  $\sigma_s/\varepsilon$  分布. 等高线图 (左);  $y = 0$  处的截面图 (右).

# 二维算例：变散射问题

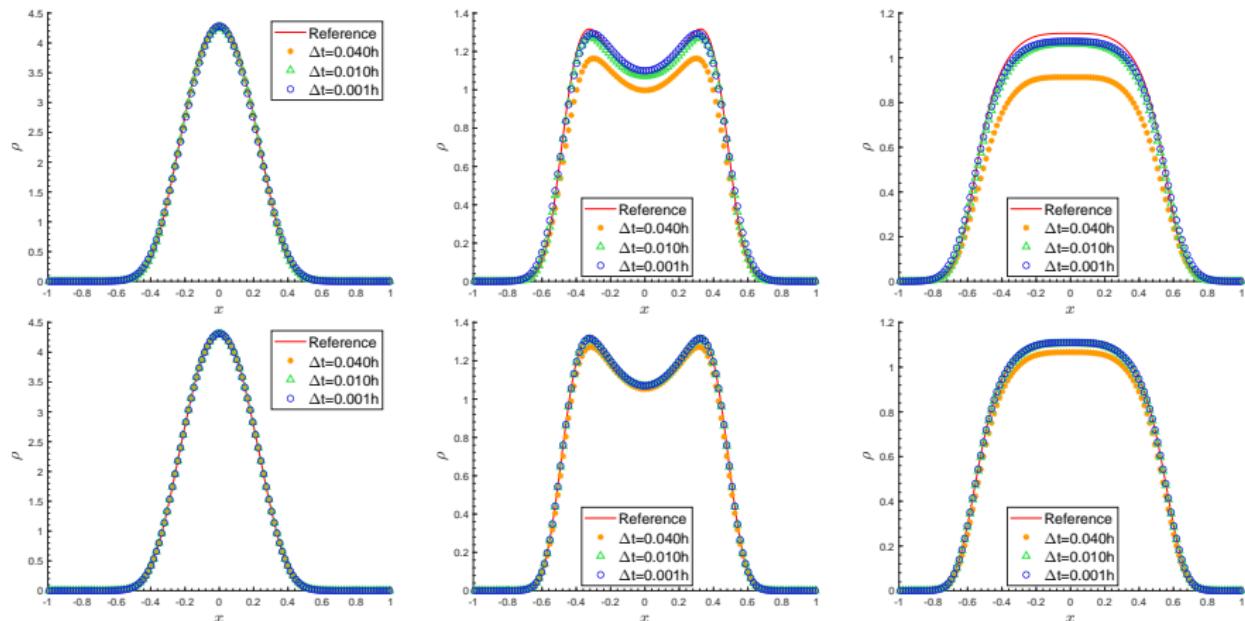


图: 密度  $\rho$  在  $y = 0$  处的截面图. 网格单元数  $N_x = N_y = 128$ , 速度点数  $N_v = 590$ .  
SL-LDG-1(上); SL-LDG-2(下); 时刻  $T = 0.002, 0.006, 0.010$ (左  $\rightarrow$  右).

# 三维算例: 变散射问题

取  $\mathbb{X} = [-1, 1]^3$ ,  $\mathbb{V} = \mathbb{S}^2$ ,  $\sigma_a = q = 0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\zeta = 10^{-2}$ ,

$$\sigma_s(x, y, z) = \begin{cases} 0.999c^4(c + \sqrt{2})^2(c - \sqrt{2})^2 + 0.001, & c = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 1; \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (45)$$

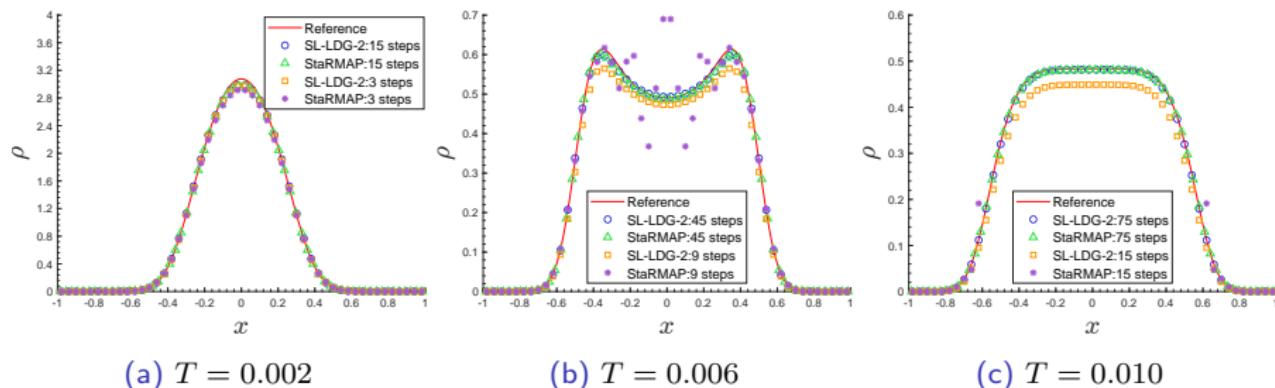


图: 不同时间步长下, StaRMAP- $P_{13}$  方法与 SL-LDG-2- $S_{194}$  方法的对比. 密度  $\rho$  在  $y = z = 0$  处的截面图. 网格单元数  $N_x = N_y = N_z = 50$ .

# 三维算例：点源问题

取  $\mathbb{X} = [-0.6, 0.6]^3$ ,  $\mathbb{V} = \mathbb{S}^2$ ,  $\sigma_s = 1$ ,  $\sigma_a = q = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\zeta^2 = 3.2 \times 10^{-4}$ .

图: StaRMAP<sup>5</sup>方法和 SL-LDG-2 方法的对比. 密度  $\rho$  示意图. 时刻  $T = 0.5$ ; 网格单元数  $N_x = N_y = N_z = 50$ ; 时间步长  $\Delta t = T/64$ .

<sup>5</sup>Seibold and Frank 2014.

# 三维算例：点源问题

**表：**SL-LDG-2 方法的并行效率表. 时刻  $T = 0.5$ ; 网格单元数  $N_x = N_y = N_z = 50$ ; 速度点数  $N_v = 1202$ ; 时间步长  $\Delta t = 0.025$ .  $P$  为线程数;  $RT$  为运行时间 (单位: 秒);  $S$  为加速比;  $E$  为并行效率.

$P$	$RT_{total}$	$S_{total}$	$E_{total}$	$RT_\rho$	$S_\rho$	$E_\rho$	$RT_f$	$S_f$	$E_f$
1	13552.66	-	-	8364.99	-	-	4163.34	-	-
2	6835.17	1.98	99.14%	3947.65	2.12	105.95%	2297.08	1.81	90.62%
4	3512.93	3.86	96.45%	1931.29	4.33	108.28%	1247.16	3.34	83.46%
8	1641.28	8.26	103.22%	764.02	10.95	136.86%	647.89	6.43	80.32%
16	1047.95	12.93	80.83%	466.11	17.95	112.17%	355.25	11.72	73.25%

# 目录

1. 输运模型
2. 基于特征线法的模型近似
3. 半拉格朗日型间断有限元方法
4. 数值算例
5. 总结与展望

# 总结与展望

对于线性输运方程，设计了高度可并行的半拉格朗日型间断有限元方法。该方法是渐近保持且一致无条件稳定的，适合跨尺度的高维输运问题。

参考文献：

- ▶ Zhang, Guoliang, Hongqiang Zhu, and Tao Xiong. "Asymptotic preserving and uniformly unconditionally stable finite difference schemes for kinetic transport equations." *SIAM Journal on Scientific Computing* 45.5 (2023): B697-B730.
- ▶ Shi, Yi, Peng Song, and Tao Xiong. "An efficient asymptotic preserving Monte Carlo method for radiative transfer equations." *Journal of Computational Physics* 493 (2023): 112483.
- ▶ Cai, Yi, et al. "Asymptotic Preserving Semi-Lagrangian Discontinuous Galerkin Methods for Multiscale Kinetic Transport Equations." *Journal of Computational Physics* (2024): 113190.

未来工作：

- ▶ 频率依赖的辐射输运方程；
- ▶ 能量稳定性分析。

# 谢谢！