

Solución numérica de las ecuaciones geodésicas en el espacio-tiempo de Schwarzschild

E. Castro-Ávila

10 de febrero, 2020

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Resumen

*En este artículo se explica brevemente en qué consiste solucionar las ecuaciones de las geodésicas, en particular utilizando la métrica de Schwarzschild, para implementar un programa escrito en **Python**, que obtenga una buena reproducción de la solución imponiendo ciertas condiciones iniciales. Para esto se recurrió al algoritmo de Runge-Kutta de cuarto Orden (RK4) que evoluciona las cuatro ecuaciones acopladas y de segundo orden en función de un parámetro τ , el cual corresponde al tiempo propio. Finalmente se realizaron diferentes pruebas para verificar que el programa obtuviera una solución consistente y se encontró que el cálculo de las geodésicas son correctas, pues se reprodujo fenómenos como el corrimiento del Perihelio y la deflexión de la luz.*

Palabras Clave: Relatividad General numérica, Métrica de Schwarzschild, Runge-Kutta, Símbolos de Christoffel

1. Introducción

De acuerdo a la teoría General de la Relatividad [1], la presencia de cuerpos masivos en el universo provoca una deformación en el espacio-tiempo la cual es responsable de los fenómenos gravitatorios. Discrepa con la teoría clásica Newtoniana, donde los fenómenos gravitatorios son consecuencia de una fuerza atractiva, debida a la presencia de cuerpos masivos. Sin embargo esta teoría carecía de una explicación precisa de muchos fenómenos ocurridos en escalas astronómicas, tales como la deflexión de la luz (aberración cromática), el Redshift gravitacional o el corrimiento del perihelio de Mercurio. La teoría general de la Relatividad logra explicar los fenómenos mencionados utilizando la métrica de Schwarzschild, la cual es solución para las ecuaciones de campo de Einstein, para una masa puntual en presencia de un cuerpo masivo esférico. Para escribir las ecuaciones de campo de Einstein, es necesario calcular el tensor de curvatura de Riemann, el cual es un campo tensorial que depende del tensor métrico. El tensor de curvatura de Riemann es tal que tiene la

siguiente forma

$$R_{\mu\lambda\sigma}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}, \quad (1)$$

donde los objetos $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ son los símbolos de Christoffel, calculados utilizando la métrica $g_{\mu\nu}$ como

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= g^{\alpha\phi}[\mu\nu, \alpha] \\ &= \frac{1}{2}g^{\alpha\phi}(\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (2)$$

donde ∂_{μ} corresponde al operador derivada de un conjunto de coordenadas x_{μ} . En su forma covariante se obtiene

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \quad (3)$$

y en forma contravariante

$$\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}. \quad (4)$$

Estos elementos son los necesarios para resolver las ecuaciones de campo de Einstein, que tienen la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (5)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor momento-energía. Es claro que por las ecuaciones (1) y (2), la ecuación tensorial (5) permite encontrar el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ utilizado para calcular el invariante s , de acuerdo a la ecuación

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad . \quad (6)$$

Definiendo una funcional de la acción S para el campo gravitatorio y haciendo uso de la ecuación 6 se obtiene

$$\begin{aligned} S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{ds}{d\tau} d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} d\tau \quad . \end{aligned} \quad (7)$$

El núcleo (o kernel) de S se toma como una función Lagrangiana, que tiene la forma

$$F(\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu, \tau) = (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} \quad . \quad (8)$$

Donde se establece $\dot{x}^\mu = \partial x^\mu / \partial \tau$. Para utilizar esta función y construir unas ecuaciones de Euler-Lagrange a partir del principio de mínima acción ($\delta S = 0$). Partiendo de estas ecuaciones escritas como

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu} \right) = 0 \quad . \quad (9)$$

Reemplazando de acuerdo a las ecuaciones (6) y (8) se llegan a las conocidas ecuaciones de la geodésica, que tienen la forma

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \quad (10)$$

Y son las ecuaciones que se resolverán numéricamente, ya que con estas es posible observar cómo evolucionaría la trayectoria de alguna masa puntual o fotón en presencia del cuerpo masivo. Pero antes de resolver este sistema de ecuaciones acoplado de segundo orden, es necesario escoger la métrica a utilizar en los símbolos de Christoffel, que son solución de la ecuación de campo de Einstein (5). En este caso se hará uso de la métrica de Schwarzschild, la cual se puede escribir reemplazando y expandiendo la ecuación 6 y utilizando las coordenadas de Schwarzschild $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$, tal que

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{Rs}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{Rs}{r}\right)^{-1} dr^2 - \dots \\ &\dots - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Donde $Rs = 2GM/c^2$ es un parámetro esencial en el problema, denominado radio de Schwarzschild. De esta manera, y entendiendo por simetría esférica e

independencia temporal de la métrica que $g_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$, se obtienen las siguientes funciones métricas del espacio-tiempo de Schwarzschild

$$g_{tt} = \left(1 - \frac{Rs}{r}\right)^{-1} \quad , \quad (12)$$

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{Rs}{r}\right) \quad , \quad (13)$$

$$g_{\theta\theta} = r^2 \quad , \quad (14)$$

$$g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta \quad . \quad (15)$$

Con estas funciones se procede a calcular los símbolos de Christoffel vía (2), coeficientes de la cual depende la ecuación (10). De esta forma, los símbolos no nulos de Christoffel son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= \frac{Rs}{2r^3} (r - Rs), \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{-Rs}{2r(r - Rs)}, \\ \Gamma_{tr}^t &= \frac{Rs}{2r(r - Rs)}, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -(r - Rs), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -(r - Rs) \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \end{aligned} \quad (16)$$

de los cuales se deducen las ecuaciones de movimiento de Schwarzschild, planteadas en (10) y escritas como

$$\ddot{t} = - \frac{Rs}{r(r - Rs)} \dot{r} \dot{t} \quad , \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= - \frac{Rs}{2r^3} (r - Rs) \dot{t}^2 + \frac{Rs}{2r(r - Rs)} \dot{r}^2 + \dots \\ &\dots + (r - Rs) \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \quad , \end{aligned} \quad (18)$$

$$\ddot{\theta} = \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - \frac{2\dot{\theta}\dot{r}}{r} \quad , \quad (19)$$

$$\ddot{\phi} = -2\dot{\phi} \left(\dot{r} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \right) \quad , \quad (20)$$

se establecen unas condiciones iniciales específicas de x^μ , \dot{x}^μ y \ddot{x}^μ , para que el programa pueda tener un punto de partida a la hora de calcular la solución. Las simulaciones realizadas en este trabajo se darán en el plano XY , para lo cual se fijará la coordenada $\theta = \pi/2$, asumiendo que en todo el trayecto $\dot{\theta} = 0$. El enfoque del programa a implementar será el de resolver las ecuaciones de las geodésicas (10) usando la métrica de Schwarzschild. Se requiere en primer lugar implementar el método numérico que resolverá las ecuaciones, intentando interpretar los resultados, no sin antes ajustar parámetros importantes en la simulación como el paso finito de tiempo, del cual

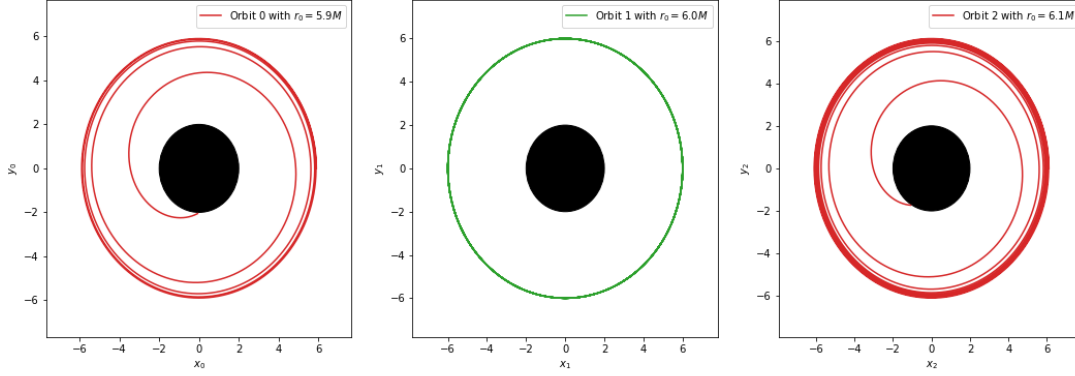


Figura 1: última órbita estable con $L = \sqrt{12}M$. Un radio menor a $6M$ y mayor chocaría con el agujero.

se hablará en la sección 2. Uno de los criterios prueba para el método de integración con la solución analítica, es comprobar la conservación de momento angular total L que garantiza la permanencia de la partícula en un plano, la energía total E y el invariante definido en (6) [4]. El momento angular se relaciona con las coordenadas vía

$$L = \dot{\phi} r^2 \quad , \quad (21)$$

la energía total con

$$E = \frac{\dot{t}}{1 - \frac{R_s}{r}} \quad (22)$$

y el invariante, definido como ϵ y usando (11) con

$$\epsilon = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \dots \quad (23)$$

$$\dots - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad ,$$

que toma los siguientes valores de acuerdo al tipo de geodésica:

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{geodésicas tipo tiempo,} \\ 0 & \text{geodésicas tipo luz,} \\ -1 & \text{geodésicas tipo espacio.} \end{cases} \quad (24)$$

Si el algoritmo evoluciona la ecuación 10 de manera adecuada, luego no deberían haber variaciones mayores en las Ecs. (21), (22) y (23). Claramente no es la única comprobación que se puede realizar. Si reescribimos la Ec. (23) en términos de cantidades conservadas, es posible obtener la energía total como

$$E^2 = \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r, L, \epsilon) \quad , \quad (25)$$

donde se define V_{eff} como el potencial efectivo, de la forma

$$V_{\text{eff}}(r, L, \epsilon) = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right) \quad , \quad (26)$$

el cual será útil para definir las condiciones iniciales. Las simulaciones a realizar en este trabajo corresponden a tres hechos físicos para probar la Relatividad General: El corrimiento al rojo de la luz, la aberración cromática producida por el campo gravitacional de un agujero negro y el corrimiento del perihelio de Mercurio. El primero consiste en observar el decrecimiento en la frecuencia de un fotón que “cae”, sin momento angular, bajo un cuerpo masivo. La deflexión de la luz consiste en el desvío de un fotón debido a la perturbación del espacio-tiempo dada la presencia de un agujero negro. Diferentes observaciones astronómicas encontraron que la órbita de Mercurio no es fija, ésta precesa alrededor de 5600 arco-segundos por cada 100 años, y La teoría General de la Relatividad fue el primer modelo en explicar este fenómeno. Si el método de Runge-Kutta a cuarto orden es capaz de resolver las Ecs. (20).

2. Implementación del código

El programa se escribió en el lenguaje Python haciendo uso de Numpy, una librería básica para todo tipo de cálculos. El propósito de este trabajo es adquirir los conceptos básicos de la teoría explicada en la sección 1 con el fin de comprender el uso de los métodos numéricos convencionales para aplicaciones en astrofísica computacional, mas no pretende operar un “paquete” de cómputo diseñado para este tipo de simulaciones. Además como se ha mencionado anteriormente, el objetivo en este pequeño artículo

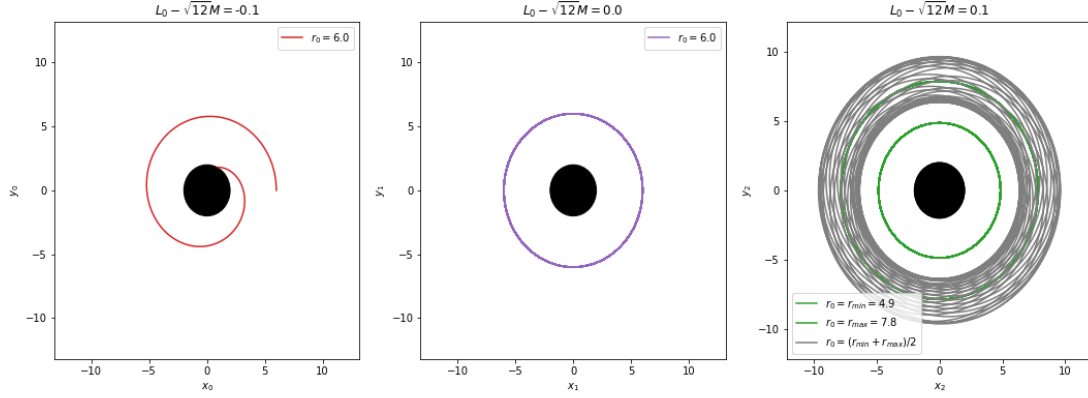


Figura 2: Órbitas con diferentes momentos angulares. Con $L < \sqrt{12}$ la partícula choca con el agujero negro, con $L = \sqrt{12}$ se obtiene la ISCO y con $L > \sqrt{12}$ existen dos órbitas circulares posibles, tal que una partícula entre estas orbita y precesa.

es lograr una implementación exitosa para resolver la ecuación de las geodésicas, mas no desarrollar el método más eficiente ni explorar el costo computacional de los algoritmos implementados, pues ya existen artículos que explican con mayor detalle esa etapa [5]. Con estas consideraciones, se procede a utilizar el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Una manera de implementarlo es reescribiendo las coordenadas x^μ , \dot{x}_μ y \ddot{x}_μ como x_0^μ , x_1^μ y x_2^μ respectivamente, de manera que las ecuaciones de las geodésicas se podrían escribir como

$$\begin{aligned} x_2^\mu &= -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(g_{\mu\nu}, x_0^\mu)x_1^\alpha x_1^\beta \\ &= f^\mu(x_1^\mu, \tau) \quad . \end{aligned} \quad (27)$$

El método RK4 consiste en evolucionar la derivada en cuatro pasos, donde se hace uso de cuatro vectores k_i^μ con $i \in [1, 2, 3, 4]$, y una diferencia finita h . Esta diferencia finita se obtiene discretizando la variable τ en N segmentos de tamaño h , tal que para una simulación que comienza en τ_0 y termina en τ_f , $h = (\tau_f - \tau_0)/N$ y $\tau \rightarrow \tau_n$ con $n \in 1, 2, \dots, N$. Los coeficientes k_i^μ tienen la forma

$$\begin{aligned} k_1^\mu &= f^\mu(x_1^\mu, \tau)h \quad , \\ k_2^\mu &= f^\mu(x_1^\mu + k_1^\mu/2, \tau + h/2)h \quad , \\ k_3^\mu &= f^\mu(x_1^\mu + k_2^\mu/2, \tau + h/2)h \quad , \\ k_4^\mu &= f^\mu(x_1^\mu + k_3^\mu, \tau + h)h \quad , \end{aligned} \quad (28)$$

y la regla de evolución tendría la forma

$$x_1^\mu(\tau_{n+1}) = x_1^\mu(\tau_n) + \frac{k_1^\mu + 2k_2^\mu + 2k_3^\mu + k_4^\mu}{6} \quad (29)$$

Para este método se escogió una resolución de pasos $N = 10^5$, que es un valor fundamental para comprobar la precisión de la solución numérica además su estabilidad. A continuación se presentarán todas las pruebas numéricas realizadas.

3. Resultados de la simulación

Para realizar una simulación de las órbitas, de la forma más sencilla posible, es posible utilizar un sistema de unidades tal que $c = G = M = 1$. Las distancias serán medidas entonces en radios de Schwarzschild (GM/c^2), y el tiempo en (GM/c^3) . Todas las pruebas utilizan estas unidades y evolucionan en tiempos de acuerdo al resultado deseado. Las simulaciones realizadas involucran órbitas circulares para

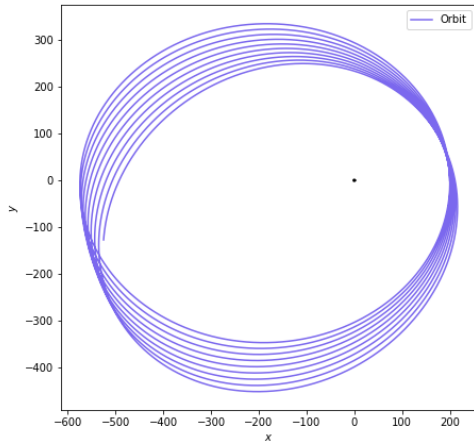


Figura 3: Órbita precesando en cada periodo de tiempo.

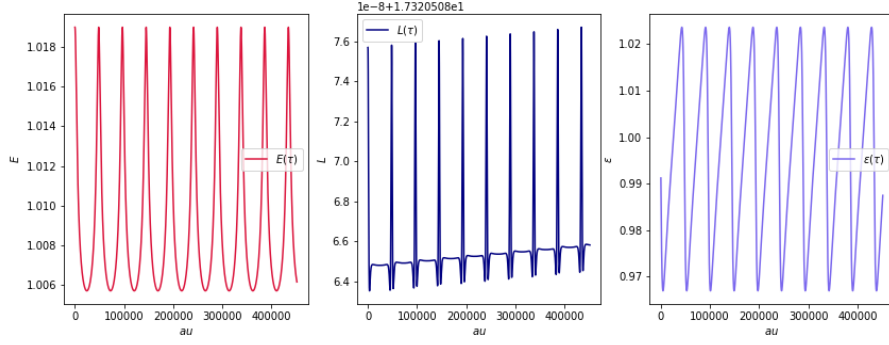


Figura 4: Constantes de movimiento evolucionando durante la simulación durante los primeros 10000 pasos de tiempo.

partículas masivas y fotones, así como órbitas elípticas de partículas masivas donde se espera observar una precesión del Perihelio. Finalmente se mostrará la deflexión de la luz como partículas desviadas por el campo gravitacional del cuerpo masivo, considerando un agujero negro [3].

3.1. Geodésicas tipo tiempo y órbitas cerradas

En primer lugar se requiere obtener una partícula masiva que se estabilice en una órbita cerrada para partículas masivas. En este caso $\epsilon = 1$ de acuerdo con (24), y el potencial efectivo describirá la forma final de la órbita. Si el momento angular por unidad de masa tiene el valor $L^2 = 12M^2$, el potencial efectivo tendrá un único punto de inflexión en $r_c = 6M$, por lo que la órbita será circular pero inestable y se conoce como la última órbita estable (ISCO) [2]. Esto quiere decir que un valor incluso cercano a $6M$ pero con el mismo momento angular colisionará con el agujero negro como se puede visualizar en la figura 1. Cuando $L^2 > 12M$, existen dos radios críticos donde se obtienen una órbita estable e inestable circulares. Si $L^2 < 12M$, no existen órbitas circulares, por lo que la partícula siempre terminará colisionando con el agujero negro. En la figura 2 se pueden visualizar las dos situaciones mencionadas. Los radios críticos donde se producen las órbitas circulares se pueden calcular hallando los puntos críticos del potencial efectivo, es decir, derivando la Ec. (26) e igualando a cero se obtiene

$$r_{\pm} = \frac{L^2}{R_s} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} \right), \quad (30)$$

tal que r_- es el radio mínimo donde la órbita circular es inestable, y en r_+ la órbita es estable. En la figura

2 se observan para el caso $L = \sqrt{12}M + 0,1$ los radios r_- y r_+ donde se produce una órbita circular cerrada. La simulación se ejecutó con un tiempo propio final $\tau_f = 360\pi/\sqrt{12}$, correspondiente a 50 periodos orbitales de la órbita ISCO, y una cantidad $N = 10^5$ pasos de tiempo. Para generar una órbita que precese, basta con utilizar un momento angular $L > \sqrt{12}$ y un radio inicial $r_- < r_0 < r_+$. En la figura 3 se observa cómo la órbita posee una lenta precesión a una distancia inicial de $r_0 = 200R_s$, un momento angular $L = 5\sqrt{12}$, una velocidad radial $\dot{r} = 0$ tal que la energía inicial se obtiene de la Ec. (25). Demás condiciones como \dot{t} y $\dot{\phi}$ se describen en las Ecs. (21) y (22). Las cantidades que deben conservarse, que son la energía total, el momento angular y el invariante ϵ varían de forma muy leve, de acuerdo a la figura 4, pues la mayor variación presentada fue de $1,33^{-2}$, $1,32^{-8}$ y $5,67 \times 10^{-2}$ respectivamente.

3.2. Geodésicas tipo luz y deflexión de la luz

Para simular trayectorias de fotones sometidas a un campo gravitacional modelado por la métrica de Schwarzschild, es posible hacerlo utilizando $\epsilon = 0$ y un momento angular y posición radial tal que simule un rayo de luz proveniente del infinito a aproximarse al agujero negro. Sin embargo, analizando el potencial efectivo es posible darse cuenta que existe una órbita circular inestable en $r = 3M$ tal que $L = \sqrt{27}M$. En la figura 5 es posible observar una órbita circular que esta vez se trata de un fotón atrapado. Por otro lado, diferentes fotones con una velocidad dirigida en dirección y pueden desviarse debida al campo gravitacional. Para simular dicho efecto, se define un parámetro de impacto Y_0 tal que la partícula inicie a una distancia horizontal X_0 y

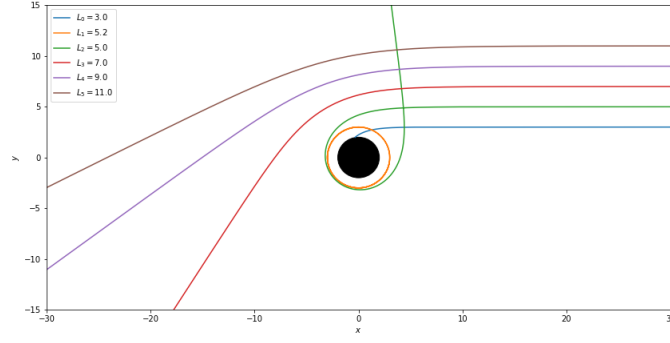


Figura 5: Diferentes fotones desviados por el agujero negro, incluyendo un fotón atrapado en una órbita circular.

con velocidad vertical. Las condiciones iniciales relevantes para lograrlo son:

$$r(0) = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} \quad , \quad (31a)$$

$$\phi(0) = \arccos \frac{X_0}{r(0)} \quad , \quad (31b)$$

$$L = Y_0 \quad (31c)$$

$$E = 1 - \frac{R_s}{r(0)} \quad (31d)$$

$$\dot{t}(0) = 1 \quad (31e)$$

$$\dot{r}(0) = -\frac{x_0}{r(0)} \quad (31f)$$

$$\dot{\phi}(0) = \frac{L}{r^2(0)} \quad (31g)$$

Donde los fotones con parámetros más cercanos podrían colisionar con el agujero. En la figura 5 se pueden observar posibles trayectorias, donde los fotones son desviados o atraídos por el agujero negro. El fotón confinado en la órbita de radio $3M$ se puede reproducir con $L = \sqrt{27}$, $E = \sqrt{V_{\text{eff}}(3M, 0, \sqrt{27})}$ tal que $\dot{r} = 0$. Los resultados muestran un buen acuerdo con los comportamientos esperados.

4. Conclusiones

Desde una mirada superficial el programa implementado es capaz de evolucionar la ecuación de Geodésicas de la forma adecuada. Para realizar dicha prueba es necesario buscar un valor más adecuado para h , y ajustar las condiciones iniciales de acuerdo a las escalas del sistema Sol- Mercurio real. En general fue posible comprender el funcionamiento de la métrica, así como visualizar el espacio-tiempo

de Schwarzschild a través de las Geodésicas, lo cual es fundamental para entender a fondo la Relatividad General. En cuanto a las aplicaciones a nivel computacional, existen librerías que facilitan en gran medida los cálculos, como lo es el proyecto **Einsteinpy** para Python [6]. Sería un buen ejercicio comparar los resultados de este programa junto con alguno de estas librerías, en términos de precisión y de eficiencia.

Referencias

- [1] CARROLL M. S. *Lecture Notes on General Relativity* Institute of theoretical physics, University of California. (1997).
- [2] AMBROSI G. D. Y VAN HOLTEN J.W. *Ballistic orbits in Schwarzschild space-time and gravitational waves from EMR binary mergers* Classical and Quantum Gravity (2014).
- [3] WEINSTEIN G. *GENERAL RELATIVITY: THE GEODESICS OF THE SCHWARZSCHILD METRIC*.
- [4] PE'ER ASAF. *Schwarzschild Solution and Black Holes* Physics Dep., University College Cork. (2014).
- [5] BACCHINI ET. AL *Generalized, energy-conserving numerical simulations of particles in general relativity. I. Time-like and null geodesics* Arxiv Astrophysics. (2018)
- [6] EinsteinPy Project disponible en: <https://einsteinpy.org/> (2020)