(1) $E_z^2 - \frac{2E_2}{E_1}\cos\alpha\, E_z E_y + \frac{E_2^2}{E_1^2} E_y^2 = E_2^2 \sin^2\alpha$

$$\frac{E_z^2}{E_2^2 \sin^2\alpha} - 2\,\frac{E_y E_z}{\frac{E_1 E_2 \sin^2\alpha}{\cos\alpha}} + \frac{E_y^2}{E_1^2 \sin^2\alpha} = 1$$

$$(E_y')^2 \left[\frac{\left(\frac{\cos\theta}{E_1}\right)^2 + 2\,\frac{\cos\theta}{E_1}\,\frac{\sin\theta}{E_2}\cos\alpha + \left(\frac{\sin\theta}{E_2}\right)^2}{\sin^2\alpha} \right] + 2E_y' E_z' \left[\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2}\right)\sin 2\theta - \frac{1}{E_1E_2}\cos\alpha\cos 2\theta}{\sin^2\alpha} \right]$$

$$+ (E_z')^2 \left[\frac{\left(\frac{\sin\theta}{E_1}\right)^2 - 2\,\frac{\sin\theta}{E_1}\,\frac{\cos\theta}{E_2}\cos\alpha + \left(\frac{\cos\theta}{E_2}\right)^2}{\sin^2\alpha} \right] = 1$$

1) $$a = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\left(\frac{\cos\theta}{E_1}\right)^2 + 2\,\frac{\cos\theta}{E_1}\,\frac{\sin\theta}{E_2}\cos\alpha + \left(\frac{\sin\theta}{E_2}\right)^2}}$$

$$b = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\left(\frac{\sin\theta}{E_1}\right)^2 - 2\,\frac{\sin\theta}{E_1}\,\frac{\cos\theta}{E_2}\cos\alpha + \left(\frac{\cos\theta}{E_2}\right)^2}}$$

2) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2}\right)\sin 2\theta - \frac{1}{E_1 E_2}\cos\alpha\cos 2\theta = 0 \implies \tan 2\theta = \frac{2E_1E_2}{E_2^2 - E_1^2}\cos\alpha$

3) Круговая поляризация: $E_1 = E_2$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}$

(2) 1) $$\begin{cases} f_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{\pi^2}{3} \\ f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-int}\,dt = \frac{(-1)^n 2}{n^2} \end{cases} \implies t^2 = 2\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-int} + \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-int},\ t \in [-\pi, \pi]$$

2) $t = \pi \implies \pi^2 = \frac{\pi^3}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(3) В неподвижной системе отсчета:

$v_0 = u \qquad v_- = v \qquad v_+ = 0$

В системе отсчета, движущейся с зарядом:

$$v_0' = 0 \qquad v_-' = \frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}} \qquad v_+' = -u$$

В системе отсчета, движущейся с электронами $v_-'' = 0$

$$\Longrightarrow \rho_+' = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\begin{cases} \rho_- = \dfrac{\rho_-''}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \rho_-' = \dfrac{\rho_-''}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}}\right)^2}} \end{cases} \Longrightarrow \rho_-' = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}}\right)^2}}\rho_-$$

$$\rho' = \rho_+' + \rho_-' = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}}\right)^2}}\rho_+ = \frac{uv}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,c^2}\rho_+$$

Для равномерно заряженной бесконечной нити:

$$E' = \frac{2\lambda'}{R} = \frac{2\rho' S}{R} = \frac{2uv\rho_+ S}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,c^2 R} = \frac{1}{c^2}\frac{2uI}{R}\gamma$$

$$\Longrightarrow F' = qE' = \frac{1}{c^2}\frac{2quI}{R}\gamma$$

(4.) 1) $(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{r} = \begin{pmatrix} (a_x \partial_x + a_y \partial_y + a_z \partial_z)\, x \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \vec{a}$

2) $\nabla \times [\vec{a}(\vec{r}) \times \vec{b}] = \nabla \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \nabla \times \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_y b_z - a_z b_y & a_z b_x - a_x b_z & a_x b_y - a_y b_x \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} b_y \partial_y a_x - b_x \partial_y a_y - b_x \partial_z a_z + b_z \partial_z a_x \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} b_x \partial_x a_x + b_y \partial_y a_x + b_z \partial_z a_x \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \partial_x a_x + b_x \partial_y a_y + b_x \partial_z a_z \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} =$

$= (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} - \vec{b}(\nabla\cdot\vec{a})$

(5.) 1) $\nabla \times f(\vec{r})\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f x & f y & f z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y f \cdot z - \partial_z f \cdot y \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \nabla f \times \vec{r}$

2) $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{r}) = -\nabla \times (\vec{r} \times \vec{a}) = -(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{r} + \vec{a}(\nabla\cdot\vec{r}) =$

$= -\vec{a} + 3\vec{a} = 2\vec{a}$

(6.) 1) $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$ (т. к. волна – монохроматическая с частотой ω)

$$\Longrightarrow -\frac{\omega^2}{c^2(x)} f - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \iff \frac{d^2 f}{dx^2} + k^2(x) f = 0$$

2) $c(x+\lambda) = c(x) + \frac{dc(x)}{dx}\lambda + o(\lambda),\ \lambda \to 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow c(x+\lambda) - c(x) \approx \frac{dc(x)}{dx} \frac{2\pi c(x)}{\omega} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{c(x+\lambda) - c(x)}{c(x)} = \frac{2\pi}{\omega}\frac{dc(x)}{dx} \ll 1 \text{ (согл-но усл-ию)}$$

$$\frac{2\pi}{\omega}\frac{dc(x)}{dx} = \frac{2\pi}{\omega}\frac{d}{dx}\left[\frac{\omega}{k(x)}\right] = -2\pi \frac{dk(x)}{dx}\frac{1}{k^2} \Longrightarrow \frac{dk(x)}{dx}\frac{1}{k^2} \ll 1$$

3) $f = e^{S(x)} \Longrightarrow \frac{d^2 f}{dx^2} + k^2(x) f = \frac{d^2 S}{dx^2} + \left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + k^2(x) = 0$

4) Пусть $\frac{d^2 S}{dx^2} \ll k^2(x)$. Тогда:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + k^2(x) = 0 \iff \frac{dS}{dx} = \pm i k(x) \Longrightarrow S = \pm i \int k(x)\, dx$$

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = \pm i \frac{dk(x)}{dx} \ll k^2(x)$$

(в силу полученного ранее усл-ия)

(7.) $\bar\nabla \cdot (\bar\nabla \times \vec H) = \frac{4\pi}{c}\bar\nabla \cdot \vec j + \frac{1}{c}\partial_t(\bar\nabla \cdot \vec E) = \frac{4\pi}{c}\bar\nabla\cdot\vec j + \frac{4\pi}{c}\partial_t \rho = 0$

$$\Longrightarrow \partial_t \rho + \bar\nabla \cdot \vec j = 0$$

(8) $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t \varphi = 0$

Пусть $\vec{A} = \vec{A}' + \nabla\psi$ и $\varphi = \varphi' - \frac{1}{c}\partial_t\psi$. Тогда:

$\nabla\cdot(\vec{A}' + \nabla\psi) + \frac{1}{c}\partial_t(\varphi' - \frac{1}{c}\partial_t\psi) =$

$= (\nabla\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c}\partial_t\varphi') + (\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}^2\psi) = 0$

$\Longrightarrow \Delta\psi - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}^2\psi = -(\nabla\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c}\partial_t\varphi')$

След-но, при достаточно гладких $\vec{A}'$ и φ' сущ-ет функция ψ, с помощью которой можно совершить калибровочное преобразование, приводящее к калибровке Лоренца.

(9) 1) $\nabla\cdot\vec{B} = \partial_x B_x + 0 - \alpha = 0 \Longrightarrow B_x = \alpha x + C$

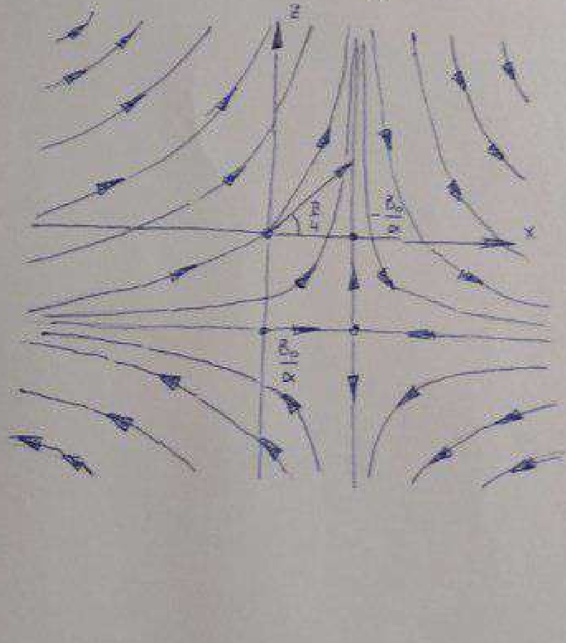
(иначе — задача недоопределена)

$\left.\frac{B_x}{B_z}\right|_{\vec{r}=\vec{0}} = \frac{C}{B_0} = 1$ (согл-но усл-ию) $\Longrightarrow C = B_0$ и $B_x = \alpha x + B_0$

2) $\frac{dx}{B_x} = \frac{dz}{B_z} \Longrightarrow \frac{dx}{\alpha x + B_0} = \frac{dz}{B_0 - \alpha z} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \ln(\alpha x + B_0) = \ln(B_0 - \alpha z) + C \Longrightarrow \alpha B_0 x - \alpha^2 xz - \alpha B_0 z = C$

$\Longrightarrow$ семейство силовых линий — гипербол с центром $(x,z) = (-\frac{B_0}{\alpha}, \frac{B_0}{\alpha})$ и прямые $x = -\frac{B_0}{\alpha}$ и $z = \frac{B_0}{\alpha}$.



(10) 1) Согл-но теореме о циркуляции магнитного поля:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{D} \Longrightarrow \oint\limits_{\partial\Sigma} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \int\limits_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

(т.к. контур, вдоль которого производится интегрирование, можно выбрать достаточно „тонким")

$$\Longrightarrow H \cdot 2\ell = \frac{4\pi}{c} \cdot i_0 \sin\omega t \cdot \ell \Longrightarrow H = \frac{2\pi}{c} \cdot i_0 \sin\omega t$$