(1.) $$\dot{\vec{A}} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\dot{x} + \ldots + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vec{v}\varphi}{c}\right)\dot{x} + \ldots + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} =$$

$$= \left(\dot{\vec{v}}\,\frac{\partial t'}{\partial x}\varphi + \vec{v}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\dot{x}}{c} + \ldots + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} =$$

$$= \left(\dot{x}\,\frac{\partial t'}{\partial x} + \ldots\right)\frac{\varphi}{c}\,\dot{\vec{v}} + \left(\dot{x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \ldots\right)\frac{\vec{v}}{c} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} =$$

$$= \frac{e\gamma}{cR}\left(\vec{v}\cdot\nabla t'\right)\dot{\vec{v}} + \left(\vec{v}\cdot\nabla\varphi\right)\frac{\vec{v}}{c} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} =$$

$$= \frac{e\gamma^3}{R^2}\left\{\vec{v}\left[\frac{\vec{R}\cdot\dot{\vec{v}}}{c} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{1}{\gamma}\right] + \frac{\dot{\vec{v}}}{c}\frac{R}{\gamma}\right\} \xrightarrow[v \ll c]{R \to +\infty} \frac{e\dot{\vec{v}}}{cR}$$

Поле точечного источника на больших расстояниях:

$$\vec{E} = \frac{e}{c^2 R}\,\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{v}}) = \frac{1}{c}\,\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{A}}),$$

$$\vec{H} = \vec{n}\times\vec{E} = \frac{1}{c}\,\vec{n}\times\left[\vec{n}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{A}}) - \dot{\vec{A}}\right] = -\frac{1}{c}\,\vec{n}\times\dot{\vec{A}},$$

что требовалось доказать.

(2.) 1)

$$\vec{r} = a\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ \cos 2\omega t\\ 0\end{pmatrix} \qquad \vec{d} = ae\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ \cos 2\omega t\\ 0\end{pmatrix} \qquad \ddot{\vec{d}} = -ae\omega^2\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ 4\cos 2\omega t\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 r}\vec{n}\times(\vec{n}\times\ddot{\vec{d}}) = -\frac{ea\omega^2}{c^2 r}\left[\begin{pmatrix}\cos^2\varphi\sin^2\theta - 1\\ \sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\\ \cos\varphi\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}\sin\omega t + 4\begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\\ \sin^2\varphi\sin^2\theta - 1\\ \sin\varphi\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}\cos 2\omega t\right]$$

$$\vec{H} = \frac{ea\omega^2}{c^2 r}\left[\begin{pmatrix}0\\ \cos\theta\\ -\sin\varphi\sin\theta\end{pmatrix}\sin\omega t + 4\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ 0\\ \cos\varphi\sin\theta\end{pmatrix}\cos 2\omega t\right]$$

2)

$$\begin{cases} H_{\omega\varphi} = \dfrac{ea\omega^2}{c^2 r}\cos\varphi\cos\theta\sin\omega t \\ H_{\omega\theta} = \dfrac{ea\omega^2}{c^2 r}\sin\varphi\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow$$

линейная поляризация

и аналогично для $\vec{H}_{2\omega}$.

3) $$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H} = \frac{e^2}{c^3}a^2\omega^4\Big[(1-\cos^2\varphi\sin^2\theta)\sin^2\omega t -$$

$$- 8\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\sin\omega t\cos 2\omega t + 16(1-\sin^2\varphi\sin^2\theta)\cos^2 2\omega t\Big]\frac{\vec{n}}{4\pi r^2}$$

4) $$\langle\vec{S}\rangle_T = \frac{1}{2}\frac{e^2}{c^3}a^2\omega^4\left[(1-\cos^2\varphi\sin^2\theta) + 16(1-\sin^2\varphi\sin^2\theta)\right]\frac{\vec{n}}{4\pi r^2}$$

5) $$\langle P\rangle_T = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{c^3}a^2\omega^4\left[(1-\cos^2\varphi\sin^2\theta) + 16(1-\sin^2\varphi\sin^2\theta)\right]$$

3. 1)

$$\vec{r} = a \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3T^3} - \frac{2t^5}{5T^5} - \frac{7}{40} \\ \frac{t^4}{T^4} - \frac{t^2}{2T^2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ddot{\vec{r}} = \frac{a}{T^2} \begin{pmatrix} \frac{2t}{T} - \frac{t^3}{T^3} \\ \frac{12t^2}{T^2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \frac{e}{c^2 r} \frac{a}{T^2} \left[\begin{pmatrix} \cos^2\varphi \sin^2\theta - 1 \\ \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\theta \\ \cos\varphi \sin\theta \cos\theta \end{pmatrix} \left(\frac{2t}{T} - \frac{t^3}{T^3} \right) + \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\theta \\ \sin^2\varphi \sin^2\theta - 1 \\ \sin\varphi \sin\theta \cos\theta \end{pmatrix} \left(\frac{12t^2}{T^2} - 1 \right) \right]$$

2)

$$\vec{E} = \frac{e}{c^2 r} \frac{a\omega^2}{4\pi^2} \left\{ \left[- \begin{pmatrix} \cos^2\varphi \sin^2\theta - 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \frac{6+7\pi^2}{4\pi^3} \sin\omega t - \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\theta \\ \vdots \end{pmatrix} \frac{12}{\pi^2} \cos\omega t \right] + \right.$$

$$\left. + \left[- \begin{pmatrix} \cos^2\varphi \sin^2\theta - 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \frac{3+14\pi^2}{16\pi^3} \sin 2\omega t + \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\theta \\ \vdots \end{pmatrix} \frac{3}{\pi^2} \cos 2\omega t \right] \right\}$$

$$\begin{cases} E_{\omega\varphi} = \frac{e}{c^2 r} \frac{a\omega^2}{4\pi^2} \left(\frac{6+7\pi^2}{4\pi^3} \sin\varphi \sin\omega t + \frac{12}{\pi^2} \cos\varphi \cos\omega t \right) \\ E_{\omega\theta} = \frac{e}{c^2 r} \frac{a\omega^2}{4\pi^2} \cos\theta \left(- \frac{6+7\pi^2}{4\pi^3} \cos\varphi \sin\omega t + \frac{12}{\pi^2} \sin\varphi \cos\omega t \right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{\omega\varphi} = \frac{e}{c^2 r} \frac{a\omega^2}{4\pi^2} \operatorname{sgn}\cos\varphi \cdot \sqrt{\left(\frac{6+7\pi^2}{4\pi^3} \right)^2 \sin^2\varphi + \ldots} \, \cos\left[\omega t - \operatorname{atan}\left(\frac{6+7\pi^2}{48\pi} \tan\varphi \right) \right] \\ E_{\omega\theta} = \frac{e}{c^2 r} \frac{a\omega^2}{4\pi^2} \operatorname{sgn}\sin\varphi \cdot \sqrt{\left(\frac{6+7\pi^2}{4\pi^3} \right)^2 \cos^2\varphi + \ldots} \, \cos\left[\omega t + \operatorname{atan}\left(\frac{6+7\pi^2}{48\pi} \cot\varphi \right) \right] \\ \varphi \notin \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\} \end{cases}$$

$\Rightarrow$
- линейная поляризация при $\theta = \frac{\pi}{2}$
- круговая поляризация при $\theta = \operatorname{acos} \sqrt{\dfrac{\left(\frac{6+7\pi^2}{4\pi^3} \right)^2 \sin^2\varphi + \ldots}{\left(\frac{6+7\pi^2}{4\pi^3} \right)^2 \cos^2\varphi + \ldots}}$
  и $\theta = \pi - \operatorname{acos} \sqrt{\ldots}$, $\quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right]$
- эллиптическая поляризация в остальных случаях

и аналогично для $\vec{E}_{2\omega}$.

3) $\langle \vec{S} \rangle_T = \frac{e^2}{c^3} \frac{a^2}{T^4} \left[\left(1 - \cos^2\varphi \sin^2\theta\right) \frac{1919}{6720} + \left(1 - \sin^2\varphi \sin^2\theta\right) \frac{4}{5} \right] \frac{\vec{n}}{4\pi r^2} \simeq$

$\simeq \frac{e^2}{c^3} \frac{a^2}{T^4} \left[\left(1 - \cos^2\varphi \sin^2\theta\right) \cdot 0{,}2856 + \left(1 - \sin^2\varphi \sin^2\theta\right) \cdot 0{,}8 \right] \frac{\vec{n}}{4\pi r^2}$

4) $\langle \vec{S}_\omega \rangle_T = \frac{e^2}{c^3} \frac{a^2}{T^4} \left[\left(1 - \cos^2\varphi \sin^2\theta\right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{6 + 7\pi^2}{4\pi^3} \right)^2 + \dots \right] \frac{\vec{n}}{4\pi r^2}$

$\langle \vec{S}_{2\omega} \rangle_T = \frac{e^2}{c^3} \frac{a^2}{T^4} \left[\left(1 - \cos^2\varphi \sin^2\theta\right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3 + 14\pi^2}{16\pi^3} \right)^2 + \dots \right] \frac{\vec{n}}{4\pi r^2}$

$\langle \vec{S}_\omega \rangle_T + \langle \vec{S}_{2\omega} \rangle_T \simeq \frac{e^2}{c^3} \frac{a^2}{T^4} \left[(\cdots) \cdot 0{,}2238 + (\cdots) \cdot 0{,}7853 \right] \frac{\vec{n}}{4\pi r^2} \simeq \langle \vec{S} \rangle_T$