Brückenkurs – Tag 3 – „3. Ausgabe“

1 Die natürlichen Zahlen und das Induktionsprinzip

1.1 Beispiel

Von Tag 2:

Satz

$$\Sigma_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

Folgerung (*Korollar*)

$$\Sigma_{k=1}^{n}(2 \cdot k - 1) = n^2$$

Beweis

$$\Sigma_{k=1}^{n}(2k-1) = \Sigma_{k=1}^{2n} k - \Sigma_{k=1}^{n} 2k$$

Mit Formel aus Satz auf die Formel angewendet:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot n \cdot (2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = 2n^2 + n - n^2 - n = n^2$$

Es wird zuerst die Summe aller Zahlen von 1 bis $2n$ addiert, danach die Summe aller geraden Zahlen abgezogen Hier auch implizite Verwendung der Assoziativität und Kommutivität der Addition.

1.2 Weiteres Beispiel

Satz Sei $x \neq 1$. Dann gilt: $\Sigma_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ („Geometrische Summe“)

Beispiel

$$1 + 2 + 4 + \ldots 2^{63} = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

Beweis 1 Ansatz der vollständigen Induktion:

$n = 0$ $x^0 = 1$; $\frac{1-x^2}{1-x} = 1$ Formel stimmt also für $n = 0$

$n \implies n+1$

$$\Sigma_{k=0}^{n+1} x^k = x^{n+1} + \Sigma_{k=0}^{n} x^k = (I.V) x^{n+1} + \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}(1-x) + 1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

Beweis 2

$$\Sigma_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \Leftrightarrow (1-x)\Sigma_{k=0}^{n} x^k = 1-x^{n+1} = \Sigma_{k=0}^{n} x^k - \Sigma_{k=0}^{n} x^{k+1} = \Sigma_{k=0}^{n} x^k - \Sigma_{k=1}^{n+1} x^k = x^0 - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}$$

Für $x \neq 1$. q.e.d.

1.3 Äquivalenz- und Induktionsprinzip

Satz Jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ besitzt ein kleinstes Element. („ $\mathbb{N}_0$ ist *wohlgeordnet* “)

Beweis Sei $M \subseteq \mathbb{N}_0$ ohne kleinstes Element. Wir wollen zeigen dass: $M = \emptyset$, d.h. $P = \{n \in \mathbb{N}_0 | 0, 1, \ldots, n \notin M\} = \mathbb{N}_0$ Hierbei Anwendung des *Peano-Axioms*:

$0 \in P$ Wäre $0 \notin P$, so wäre $0 \in M$, insbesondere kleinstes Element von M. Dies ist ein Widerspruch, also $0 \in P$.

$n \in P \implies n+1 \in P$ Wäre $n+1 \notin P$. Dann wäre eine der Zahlen $0, \ldots, n+1 \in M$. Da aber nach Voraussetzung $n \in P$, ist $0, \ldots, n \notin M$. Also $n+1 \in M$. Insbesondere ist $n+1$ kleinstes Element. Widerspruch, also ist $n+1 \in P$.

2 Die ganzen und die rationalen Zahlen

2.1 Relation

Eine **Relation** auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$ Wir schreiben $x \sim y :\Leftrightarrow .(x,y) \in R$ für $x, y \in M$.

Beispiel $x \leq y$ auf $\mathbb{N}_0$:

[Skizze: Punkte auf Gitter, $x, y \leq 4 \in \mathbb{N}_0$. Oberhalb und auf der Diagonale blaue Menge.]

	0	1	2	3	y
0	x				
1	x	x	x	x	
2	x		x		
3	x			x	
x					

Definition Eine Relation auf M heißt **Äquivalenzrelation**, falls sie:

1. **reflexiv** ist, d.h. $x \sim x$ für alle $x \in M$.
2. **symmetrisch** ist, d.h. $x \sim y \implies y \sim x$ für alle $x, y \in M$.
3. **transitiv** ist, d.h. $x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$ für alle $x, y, z \in M$.

Beispiel Die Gleichheitsrelation auf einer Menge ist eine Äquivalenzrelation

Beispiel Sei M eine Menge von Menschen. Die Relation „ist verwand mit" (im Sinne von „gehört zur gleichen Familie") ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel Sei M eine Menge von Menschen. Die Relation „hat im gleichen Monat Geburtstag" ist eine Äquivalenzrelation.

Dabei ist $M = M_1 \cup\!\!\!\!\cdot\;\, M_2 \cup\!\!\!\!\cdot\;\, \ldots \cup\!\!\!\!\cdot\;\, M_{12}$. Die M_1 heißen die **Äquivalenzklassen** der Relation und stehen hier für die Monate.

Beispiel Relation $\sim$ auf Z mit $x \sim y :\Leftrightarrow x - y$ gerade. Ist reflexiv und symmetrisch. ist transitiv? $x \sim y, y \sim z \implies x - y$ gerade, $y - z$ gerade. $\implies (x-y)+(y-z) = x - z$ gerade $\implies x \sim z$ Ist also Äquivalenzrelation.

Äquivalenzklassen In diesem Beispiel: $Z = \{GeradeZahlen\} \cup\!\!\!\!\cdot\;\, \{UngeradeZahlen\}$

Definition Sei $\sim$ eine Relation auf einer Menge M. Für $x \in M$ heißt dann $[x]_{(\sim)} := \{y \in M | x \sim y\}$ die **Äquivalenzklasse** zu x.

Beispiel $[Peter]_{verwandt} = PetersFamilie$

Satz Es gilt für alle Äquivalenzrelationen auf eine Menge M mit $x, y \in M$:

1. $x \in [x]$
2. $x \sim y \implies [x] = [y]$
3. $[x] \neq [y] \implies [x] \cap [y] = \emptyset$

Beweis

1. $x \in [x] \Leftrightarrow x \sim x$ ok
2. Sei $x \sim y$ Zu **zeigen**: $[x] = [y]$.
   $z \in [x] \Leftrightarrow x \sim z \implies {}^{x\sim y}_{y\sim x} y \sim z \Leftrightarrow z \in [y]$
3. Wir zeigen: $[x] \cap [y] \neq \emptyset \implies [x] = [y]$
   Es existiert also $z \in [x] \cap [y]$, d.h. $z \in [x]$ und $z \in [y]$, d.h. $x \sim z,\ y \sim z \implies x \sim y \implies x] = [y]$.

q.e.d.

Definition x heißt **Repräsentant** seiner Äquivalenzklasse $[x]$:
$M = \uplus [x]$. $\{x$ Repräsentantensystem$\}$

Definition Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Dann heißt ${}^{M}/_{R} := \{[x]_R | x \in R\}$ der **Quotioent von M nach R**.

2.2 Konstruktion der ganzen Zahlen

Erklärung ganzer Zahlen als Paar zweier natürlicher Zahlen. Dabei Subtraktion der Zahlen. Beispiel: Kontostand zusammengesetzt aus Einzahlungen und Abhebungen.

$(Einzahlungen, Abhebungen) \sim (Einzahlungen', Abhebungen') \Leftrightarrow E + A' = E' + A$ Auf der Menge der Paare (n, m) natürlicher Zahlen definieren wir die Relation $(n, m) \sim (a, b) :\Leftrightarrow n + b = m + a$
Es ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation: Ist reflexiv und symmetrisch. Transitivität:

$$(n, m) \sim (a, b) \wedge (a, b) \sim (u, v) \implies n+b = m+a \wedge a+v = b+u \implies u+b+a+v = m+a+b+u \implies n+v = m+u \implies (n, m) \sim$$

Die Äquivalenzklasse zum Paar (n, m) heißt $[n, m]$

Beispiel $[3, 2] \sim [5, 4]$

Definition

$$Z = {}^{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0}/_{\sim} = \{[n, m] \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$$

Jeder natürlichen Zahl n entspricht eine ganze Zahl $[n, 0]$. $\to \mathbb{N}_0 \subseteq Z$
$n \mapsto [n, 0]$.

Negative Zahlen $-[n, m] = [m, n]$

Beispiel $n \in \mathbb{N}_0$; $-n = -[n, 0] = [0, n]$ Ist diese Relation wohldefiniert? $-[7, 2] = [2, 7]$

Zu zeigen $[n, m] \sim [a, b] \implies [m, n] \sim [b, a]$
Begründung: Wenn $[n, m] \sim [a, b] \Leftrightarrow n + b = m + a \Leftrightarrow m + a = n + b \Leftrightarrow [m, n] \sim [b, a]$

Addition $[n, m] + [a, b] := [n + a, m + b]$

Multiplikation $[m, n] \cdot [a, b] := [ma + nb,\ na + mb]$

2.3 Rationale Zahlen

Auf der Menge $Z \times N_{>0}$ betrachten wir die Relation $(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow a \cdot t = b \cdot s$

Rechnung $\sim$ ist Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse zu (a, s) bezeichnen wir mit $\frac{a}{s}$.
$\mathbb{Q} := {}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0}/_{N}$

Addition

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st}$$

$$\frac{b'}{t'} = \frac{b}{t} \Leftrightarrow tb' = t'b \implies \frac{at + bs}{st} = \frac{at' + b's}{st'} \Leftrightarrow t'b = tb'$$

2.4 Binomialkoeffizienten

Sei x eine (reelle) Zahl, $k \geq 0$ natürliche Zahl. Dann heißt $\begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix} := \frac{x \cdot (x-1) \cdot \cdots \cdot (x-k+1)}{k!}$ der **Binomialkoeffizient** „x über k".

Spezialfall Sei $0 \leq k \leq n$ eine natürliiche Zahl. Dann ist $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$