Brückenkurs – Tag 8 – 2016-10-13

12 Die komplexen Zahlen

$\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Beispiel $X^2 + 10X - 144 = 0$

Lösungsansatz Quadratische Ergänzung
$X^2 + 2 \cdot 5 \cdot X + 5^2 - 5^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow (X+5)^2 = 169 \Leftrightarrow X + 5 = \pm\sqrt{169} = \pm 13 \Leftrightarrow X = -5 \pm 13 = -18, 8$

Allgemein $X^2 + pX + q = 0$

Lösung $\Leftrightarrow X^2 + pX + (\frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q = 0 \Leftrightarrow (X + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q = 0 \Leftrightarrow (X + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow X + \frac{p}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} \Leftrightarrow X = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$

Definition $\Delta := p^2 - 4q$ heißt die **Diskriminante** der Gleichung / des quadratischen Polynoms.
Drei Fälle, jeweils in $\mathbb{R}$:

1. **Fall:** $\Delta > 0$: 2 (verschiedene) Lösungen
2. **Fall:** $\Delta = 0$: 1 Lösungen
3. **Fall:** $\Delta < 0$: Keine Lösungen

[Darstellung: Funktion $X^2 + pX + q$ in Koordinatensystem für $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ und $\Delta > 0$]

Vergleiche $X^2 - 2 = 0$ hat in $\mathbb{Q}$ keine Lösung, da 8 kein Quadrat in $\mathbb{Q}$ ist.
$X^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung, da -4 kein Quadrat in $\mathbb{R}$.

12.1 Die Imaginäre Einheit

Wir suchen einen Körper $\mathbb{C}$, in dem wir $X^2 + 1 = 0$ lösen können. Damit muss ein $i \in \mathbb{C}$ existieren mit $i^2 = -1$, die sogenannte **imaginäre Einheit**.

Angenommen, ein solches $\mathbb{C}$ existiert. Sind dann $a, b \in \mathbb{R}$, so ist $a + b \cdot i \in \mathbb{C}$.

12.2 Rechnen in $\mathbb{C}$

Addition $(a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = (a + c) + (b + d)i$

Multiplikation $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + cbi + bd \cdot i^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ [1]

Die Menge der Ausdrücke der Form $a + bi; a, b \in \mathbb{R}$, wobei $i^2 = -1$ bildet einen kommutativen Ring, der $\mathbb{R}$ umfasst.

Multiplikative Inversen $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$, wobei $a \neq 0 b \neq 0$
Die Rechnung zeigt, dass $(a + bi)^{-1}$ existiert, nämlich $(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$

Satz Die Menge $\mathbb{C} := \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$, wobei $i^2 = -1$, bildet einen Oberkörper von $\mathbb{R}$ den **Körper der komplexen Zahlen**.

Warnung $\mathbb{C}$ ist kein angeordneter Körper[2]: Angenommen, es gibt eine Anordnung, die mit den arithmetischen Operationen verträglich ist.
Fall $i > 0$: $\implies i^2 > 0 \implies -1 > 0 \implies 1 < 0$ **Widerspruch zu „Quadrate sind nicht negativ“**
Fall $i < 0$: $\implies (-i)^2 > 0 \implies$ **Ebenfalls Widerspruch**

[1] $bdi^2 = -bd$, da qua Definition $i^2 = -1$
[2] Das heißt: In $\mathbb{C}$: Wenn $a < b, c < d$ gilt **nicht** $a + c < b + d$

12.3 Komplexe Zahlenebene

[Darstellung: Ebene komplexer Zahlen statt Zahlenstrahl. Betrag der komplexen Zahl ist Abstand vom Ursprung]

Definition Ist $z = a + bi \in \mathbb{C}; a, b \in \mathbb{R}$, so heißt $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ der **Betrag von** z.

Proposition

1. $|z| \geq 0$
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Aufgabe $|z + w| \leq |z| + |w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Proposition $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Beweis $(a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i \implies |(a + bi)(c + di)|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 =$
$= |a + bi|^2 \cdot |c + di|^2 = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)$

12.4 Alternative Darstellung

Eine komplexe Zahl $z = a + bi$ lässt sich auch in der Form $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ schreiben. Hierbei ist $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ der **Betrag** $|z|$ von z und $\varphi \in \mathbb{R}$ heißt das **Argument**.

Multiplikation

$$r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \cdot r'(\cos\varphi' + \sin\varphi') = r \cdot r'((\cos\varphi \cdot \cos\varphi' - \sin\varphi \sin\varphi') + i(\cos\varphi \sin\varphi' + \sin\varphi \cos fgft\varphi')) =$$

$$= rr'(\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi'))$$

Erfolg In $\mathbb{C}$ hat jede quadratische Gleichung $X^2 + pX + q = 0$ (mindestens) eine Lösung, nämlich $X = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta},\ \Delta = p^2 - 4q$.
$\sqrt{-5} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} = \pm i\sqrt{5}$
$\sqrt{r(\cos\varphi + i \sin\varphi)} = \pm\sqrt{r} \cdot (\cos {}^{\varphi}/_{2} + i \sin {}^{\varphi}/_{2})$

12.5 Kubische Gleichungen

$X^3 + aX^2 + bX + c = 0$

Ansatz $X^3 + aX^2 \frac{1}{3}a^2 X + \frac{1}{27}a^3 + (b - \frac{1}{3}a^2)X + (c - \frac{1}{27}a^3) = (X + \frac{a}{3})^3 + (b - \frac{1}{3}a^2)X + (c - \frac{1}{27}a^3)$ Setze $Y := X + \frac{a}{3}$

$Y^3 + (b - \frac{1}{3}a^2)(Y - \frac{a}{3}) + (c - \frac{1}{27}a^3)$
$= Y^3 + (b - \frac{1}{3}a^2)Y + (c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27})$ Setze $p := b - \frac{1}{3}a^2, q := c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$
$= Y^3 + pY + q$ (*Kubik in reduzierter Form*)
Es reicht damit, Gleichungen der Form $Y^3 + pY + q = 0$ zu lösen.

Ansatz $Y = U + V$. Dann $(U + V)^3 + p(U + V) + q = U^3 + 3U^2V + 3UV^2 + V^3 + pU + pV + q$

Ansatz $U^3 + V^3 = -q$. Dann $3U^2V + 3UV^2 + pU + pV = 0 = (3 \cdot UV + p) \cdot U + (3 \cdot UV + p) \cdot V$.

Ansatz $U \cdot V = -\frac{p}{3}$, daraus $U^3 \cdot V^3 = -\frac{p}{27}$

Lösung $V^3 = -q - U^3$. Also: $U^3(-q - U^3) = -\frac{p^3}{27} \Leftrightarrow (U^3)^2 + qU^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \Leftrightarrow U^3 = -\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow U = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}, \quad V = -\frac{p}{3U}, \quad Y = U + V, X = Y - \frac{a}{3}$

12.6 Gaussscher Fundamentalsatz der Algebra

$\mathbb{C}$ ist **algebraisch abgeschlossen**, das heißt: Jedes nicht konstante Polynom hat in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.

$P(X) \in \mathbb{C}[X]$, deg. $P(X) = n > 0$. Nach dem FdA[3] existiert $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_1) = 0$.

Polynomdivision: $P(X) = (X - z_1) \cdot Q(X) + R$, deg. $Q(X) = n - 1, \quad \mathbb{R} \in \mathbb{C}$. Wegen $P(z_1) = 0$ sogar $R = 0$.

Dann machen wir mit $Q(X)$ anstelle $P(X)$ weiter, usw.

$\rightsquigarrow P(X) = (X - z_1) \cdot Q(X) = (X - z_1)(X - z_2) \cdot \overline{Q}(X) = \ldots = c \cdot (X - z_1)/cdot(X - z_2) \cdots (X - Z_n)$.

Insbesondere lässt sich jedes Polynom über $\mathbb{C}$ als Produkt linearer Polynome schreiben.

Beweis $P(Z) = Z^d + a_1 Z^{d-1} + \ldots + a_{d-1} Z + a_d; \quad a_i \in \mathbb{C}$

$$\lim_{|Z| \to \infty} |P(X)| = \lim_{|Z| \to \infty} |Z^d(1 + a_1 Z^{-1} + \ldots + a_d Z^{-d})| \leq \lim_{|z| \to \infty} |z|^d (1 + |a_1| \cdot |z|^{-1} + \ldots + |a_d| \cdot |z^{-d}|) = \infty$$

Damit nimmt $|P(Z)|$ an einer Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ ihr Minimum an. Das heißt: $\forall a \in \mathbb{C} : |P(a)| \geq |P(z_0)|$

Annahme $|P(z_0)| > 0$ (sonst $|P(z_0)| = 0$, also $P(z_0) = 0$, also hätten wir Nullstellen)

$W = Z - z_0 \Leftrightarrow Z = W + z_0; \quad P(Z) = a + bW^n + W^{n+1} \cdot Q(W)$, $a, b \in \mathbb{C}$, $Q(W) \in \mathbb{C}[W]$

Bei $W = 0$ nimmt $P(Z)$ betraglich sein Minimum an.

Wähle $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega^n = -\frac{a}{b}$. Dann ist $\delta|\omega^{n+1} \cdot Q(\delta \cdot \omega)| < |a|$ für geeignetes $\delta > 0$.

$P(\delta \cdot \omega) = a + b \cdot \delta^n \cdot \omega^n + \delta^{n+1} \cdot \omega^{n+1} \cdot Q(\delta \cdot \omega) = a(1 - \delta^n) + \delta^{n+1} \cdot \omega^{n+1} \cdot Q(\delta \cdot \omega)$

$\Longrightarrow |P(\delta\omega)| \leq |a| \cdot |1 - \delta^n| + \delta^{n+1} |\omega^{n+1} Q(\delta\omega)| < |a| \cdot |1 - \delta^n| + |a| \cdot \delta^n \leq |a| = |P(z_0)|$

[3] Fundamentalsatz der Algebra