Brückenkurs – Tag 9 – 2016-10-14

13 Auswahlaxiom, Zornsches Lemma und Ultrafilter

13.1 Auswahlaxiom

Definition Ist M eine Menge nicht-leerer Mengen, so existiert dazu eine Auswahlmenge, das heißt: eine Menge X, so dass $\forall U \in M \exists!\, a \in U.$ mit $a \in X$[1].

Sei Z eine Menge, $\mathscr{X} \subseteq P(Z)$, also ist $\mathscr{X}$ eine Menge von Teilmengen von Z.

Definition Eine **Kette in** $\mathscr{X}$ ist eine Teilmenge $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{X}$ mit $\forall Y_1, Y_2 \in \mathscr{Y} : Y_1 \subseteq Y_2 \wedge Y_2 \subseteq Y_1$

13.2 Zornsches Lemma

Sei $Z, \mathscr{X}$ wie eben. Zusätzlich gelte:

1. Ist $X' \subseteq X \in \mathscr{X}$, so auch $X' \in \mathscr{X}$
2. Ist $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{X}$ eine Kette, so ist $\cup\mathscr{Y} = \cup Y \in \mathscr{X}$.

Dann besitzt $\mathscr{X}$ ein **maximales Element** $X_0 \in \mathscr{X}$ bzgl. „$\subseteq$“, d.h. $\forall X \in \mathscr{X} : X \supseteq X_0 \implies X = X_0$

Beweisidee

- Wegen 2. (Wähle $\mathscr{Y} = \emptyset \subseteq \mathscr{X}$ (Kette)) ist $\emptyset = \cup\emptyset \in \mathscr{X}$.
- Falls $\emptyset$ maximal in $\mathscr{X}$, sind wir fertig.
- Ansonsten gibt es $X_1 \in \mathscr{X}$ mit $X_0 \subsetneqq X_1$.
- Entweder ist X_1 maximal oder wir machen weiter ...
  $X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq X_2 \subsetneqq X_3 \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_\omega$

Breche der Prozess nicht ab (ansonsten wären wir nach $n \in \mathbb{N}_0$ Schritten fertig.)
Wegen 2. ist $X_\omega = \cup_{i=0}^{\infty} X_i \in \mathscr{X}$.
Ist X_ω immer noch nicht maximal, so finden wir $X_\omega \subsetneqq X_{\omega+1} \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_{\omega+n} \subsetneqq \ldots$
Bricht dies immer noch nicht ab, so ist $X_{\omega\cdot 2} = \cup_{n=0}^{\infty} X_{\omega+n}$ der nächste Kandidat.
$X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq X_2 \subsetneqq \ldots X_\omega$
$X_\omega \subsetneqq X_{\omega+1} \subsetneqq X_{\omega+2} \subsetneqq X_{\omega+3} \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_{\omega\cdot 2}$
$X_{\omega\cdot 2} \subsetneqq X_{\omega\cdot 2+1} \subsetneqq X_{\omega\cdot 2+2} \subsetneqq X_{\omega\cdot 2+3} \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_{\omega\cdot 3}$

Korollar Sei $(Z, \leq)$ eine **teilweise geordnete** Menge, das heißt es gilt:

1. $\forall z \in Z : z \leq z$.
2. $\forall x, y \in Z : x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$
3. $\forall x, y, z \in Z : x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$

Besitzt dann jede **Kette** Y in Z (d.h. jede vollständig geordnete Teilmenge von $Y \subseteq Z$) eine **obere Schranke** in Z, das heißt $\exists z \in Z \forall y \in Y : y \leq z$, dann besitzt Z ein maximales Element $z_0 \in Z$, das heißt $\forall z \in Z : z \geq z_0 \implies z = z_0$.

Beweis Sei $\mathscr{X} \subseteq P(Z)$ die Menge der Ketten von $(Z, \leq)$. Dann sind 1. und 2. vom Zornschen Lemma erfüllt. Damit existiert eine maximale Kette $X_0 \in \mathscr{X}$.
Nach Voraussetzung des Korollars besitzt X_0 eine obere Schranke $z_0 \in Z$.

Annahme z_0 ist nicht maximal, das heißt es existiert $z_1 \in Z$ mit $z_1 \geq z_0, z_1 \neq z_0$. Dann wäre aber $X_0 \cup \{z_1\}$ eine echt größere Kette als X_0. Dies wäre aber ein **Widerspruch** zur Maximalität von X_0.

[1] $\exists!$ bedeutet: „es existiert genau ein Element“

13.3 Ultrafilter

Definition Sei X eine Menge. Ein **Filter** F auf X ist eine Teilmenge $F \subseteq P(X)$ mit

1. $X \in F$
2. $\emptyset \notin F$
3. $\forall A \in F : B \supseteq A \Rightarrow B \in F$
4. $\forall A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$

Beispiel Sei $x_0 \in X$ ein Element einer Menge. Dann ist $F := \{A \subseteq X | x_0 \in A\}$ ein Filter, der von x_0 erzeugte Filter.

Filter, die nicht von einem Element erzeugt werden, heißen **frei**.

Beispiel Sei S eine unendlich große Menge. Dann ist $F := \{A \subseteq X | X \backslash A \text{ endlich}\}$ ein Filter, der sogenannte **Fréchet-Filter** auf X.

Definition Ein **Ultrafilter** auf X ist ein Filter mit 5. $\forall A \subseteq X : A \in F \vee X \setminus A \in F$.

Beispiel Nicht freie Filter[2] sind Ultrafilter.

Frage Gibt es freie Ultrafilter?

Satz Ist F ein Filter auf X, so gibt es einen Ultrafilter $\hat{X}$ auf X mit $F \subseteq \hat{F}$.

Folgerung Auf jeder unendlichen Menge gibt es einen freien Ultrafilter.

Beweis (Folgerung) Wähle einen Ultrafilter, der den Fréchet-Filter umfasst. $\square$

Beweis (Satz) Sei Z die Menge der Filter $\widetilde{F}$ mit $\widetilde{F} \supseteq F$. Es ist Z bezüglich „$\subseteq$" teilweise geordnet. Jede Kette $\mathbb{F}$ in Z, also jede Kette von Filtern besitzt eine obere Schranke in Z, nämlich $\cup_{\widetilde{F} \in F} \widetilde{F}$.

Zu überprüfen, dass dies ein Filter ist, also in Z liegt.

z.B. Filgereigenschaft 4. : $A, B \in \cup_{\widetilde{F} \in \mathbb{F}} \widetilde{F} \overset{?}{\Rightarrow} A \cap B \in \cup_{\tilde{F} \in \mathbb{F}} \mathbb{F}$

$\rightsquigarrow$ Da $\mathbb{F}$ Kette, $\tilde{F}_1 \subseteq \tilde{F}_2$ oder $\tilde{F}_2 \subseteq \tilde{F}_1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $\tilde{F}_1 \subseteq \tilde{F}_2$.

Also $A, B \in \tilde{F}_2 \Rightarrow A \cap B \in \tilde{F}_2 \in \mathbb{F} \Rightarrow A \cap B \in \cup \mathbb{F}$.

Nach Zorn besitzt Z ein maximales Element $\hat{F}$.

Behauptung: $\hat{F}$ ist Ultrafilter.

Begründung Unter der Annahme, dass $\hat{F}$ ein Ultrafilter ist, gibt es ein $A \subseteq X$ mit $A \notin \hat{F}$ und $X \setminus A \notin \hat{F}$.

Definition: $\mathscr{Y} := \{G \subseteq X | \exists F \in \hat{F} : G \supseteq F \cap A\}$

Damit ist $\mathscr{G}$ ein Filter; wegen $A \in \mathscr{G}$, aber $A \notin \hat{F}$ ist $\hat{F} \neq \mathscr{G}$. Aber $\hat{F} \subseteq \mathscr{G}$.

Damit $\hat{F}$ nicht maximal. **Widerspruch!** $\square$

[2] Bspw. Fréchet-Filter