Brückenkurs – Tag 7 – 2016-10-12

9.3 Fortsetzung Fibonacci-Folge

Satz Die Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert für $|x| < 1$ gegen 0.

Beweis Zu betrachten: Abstand x^k zu 0 für große $k \to |x^k|$ Wir müssen $|x^k - 0| = |x|^k$ abschätzen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \leq x < 1$.
Da $x < 1$, ist $\frac{1}{x} = 1 + y$ für $y > 0$. Damit ist $\frac{1}{x^n} = (1+y)^n = 1 + 1 + \binom{n}{2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n \geq 1 + n \cdot y$
Also $x^n \leq \frac{1}{1+n\cdot y} < \frac{1}{n\cdot y}$ Ist also $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wähle $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon y}$.
Für alle $n \geq n_0$ ist dann $|x^n| < \varepsilon_0$

Fibonacci-Satz $\varphi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \overline{\varphi} := \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Dann gilt: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \overline{\varphi}^n)$

Beweis Es gilt: $\varphi^2 = \varphi + 1$ und $\overline{\varphi}^2 = \overline{\varphi} + 1$, also $X^2 - X - 1 = (X - \varphi)(X - \overline{\varphi})$
Dann Induktion über n:
$\mathbf{n = 0}$: $F_0 = 0 \overset{\checkmark}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^0 - \overline{\varphi}^0)$
$\mathbf{n = 1}$: $F_1 = 1 \overset{\checkmark}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - \overline{\varphi}^1)$
n, n+1 → n + 2:

$$F_n + F_{n+1} \overset{IV}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \overline{\varphi}^n) + (\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n(1+\varphi) - \overline{\varphi}^n(1+\overline{\varphi})\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n\varphi^2 - \overline{\varphi}^n\overline{\varphi}^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \overline{\varphi}^{n+2}) \quad \square$$

9.4 Heron-Verfahren

Sei $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$
$a_0 = 1; a_1 = \frac{3}{2}; a_2 = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}; a_3 = \frac{577}{408} = 1{,}414215\ldots$

Vermutung Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gegen $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$

Beweisskizze Wir zeigen unter der Annahme, dass die Folge konvergiert, dass
$a := \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$: $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) = \frac{1}{2}((\lim_{n\to\infty} a_n) + \frac{2}{\lim_{n\to\infty} a_n}) = \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$
$\implies 2a^2 = a^+2 \implies a^2 = 2 \overset{a>0}{\implies} a = \sqrt{2}$

Aufgabe Finde ein Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{13}$.

9.5 Unendliche Reihen und Dezimalbrüche

Sei (a_k) eine Folge. Dann heißt $s_n := \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ die n-te Partielsumme zur Folge (a_k).
Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n a_k =: \sum_{k=0}^\infty a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ heißt die **Reihe** zur Folge (a_k).
Im Falle, dass der Grenzwert gar nicht existiert, sagen wir, die Reihe **divergiere**.

Satz Für $|x| < 1$ gilt: $\sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$ („Geometrische Reihe“)

Beispiel $x = {}^1/_2$
$\sum_{n=0}^\infty (\frac{1}{2})^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \overset{\text{Satz}}{=} \frac{1}{1-{}^1/_2} = 2$

Beweis Schon bekannt: $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
Damit ist $\sum_{k=0}^\infty x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-\lim_{n\to\infty} x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x} \quad \square$

Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ („*harmonische Reihe*“) konvergiert nicht (in $\mathbb{R}$):

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} \geq \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Wir sehen: Die Folge der Partialsummen ist unbeschränkt.

Warnung $\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \overset{\text{i. allg.}}{\nRightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Satz $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert in $\mathbb{R} \implies \lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Beweis Sei $a := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein n_0, so dass $|\sum_{k=0}^{n-1} a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$.

Damit gilt:
$|a_n| = |\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k| = |(\sum_{k=0}^{n} a_k - a) - (\sum_{k=0}^{n-1} a_k - a)| \leq |\sum_{k=0}^{n} a_k - a| + |\sum_{k=0}^{n-1} a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für $n \geq n_0$.

10 Zahlen als konvergente Reihen

Jede reelle Zahl α ist konvergente Reihe: $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$, wobei $a_0 \in \mathbb{Z}; a_k = \{0, \ldots, 9\}$ für $k > 0$.

Beispiel $\pi = 3 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + \ldots = 3,141\ldots$

Warnung $1,00000\ldots = 0,99999\ldots$ Die Dezimaldarstellung ist im Zweifelsfall nicht eindeutig.

Satz Die Reihe α beschreibt genau dann eine rationale Zahl, wenn die Folge der a_k (also die Dezimalbruchdarstellung) periodisch ist.

Beispiel $0,142857142857\ldots = 0,\overline{142857}$ ist rational $(= \frac{1}{7})$
$0,5 = 0,5\overline{0}$ ist rational $(= \frac{1}{2})$
$0,123456789101112131415\ldots$ ist irrational (da nicht periodisch)

Beweis $\implies$: Sei $\alpha = \frac{u}{v}$ eine rationale Zahl: $u \in \mathbb{Z}; v \in \mathbb{N}_{>0}$
Bsp: $\frac{3}{7} = 0,\overline{428571}$ (Beispiel mit schriftlicher Division an der Tafel)
Bei der schriftlichen Division tauchen höchstens v viele Reste auf, das heißt die Dezimalbruchdarstellung von α hat ist periodisch mit der Periodelänge höchstens v.
$\impliedby$: Sei α periodisch, etwa $\alpha = a_0,\ a_1\, a_2\, \overline{a_3\, a_4\, a_5}$
Dann ist $\alpha = a + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + (100a_3 + 10a_4 + a_5) \cdot (10^{-5} + 10^{-8} + 10^{-11} + \ldots)$ [1]

Beispiel $0,121212\ldots = \frac{12}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

10.0.1 Die Eulersche Zahl

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann sei $exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$

Bemerkungen

- In der Analysis wird die Konvergenz für alle x gezeigt.
- Ebenfalls wird dort $exp(x) = e^x$)

Die Zahl $e := exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots = 2,7182818284\ldots$ heißt **eulersche Zahl**.

Satz e ist irrational.

[1] $(10^{-5} + 10^{-8} + 10^{-11} + \ldots) = 10^{-5}(1 + 10^{-3} + 10^{-6} + \ldots)$

Beweis **Annahme**: $e = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}; b > 0$. Sei $m \geq b$ eine ganze Zahl. Dann $b | m!$.
Also $\alpha := m!(e - \sum_{n_0}^{m} \frac{1}{n!}) = a\frac{m!}{b} - \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!} \in \mathbb{Z}$.
Aber:

$$\alpha = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{m!}{n!} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{m!}{m! \cdot (m+1)^{n-m}} = \frac{1}{m+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{1}{m}$$

Widerspruch! $\overset{0 \leq \alpha \leq 1}{\Longrightarrow}$ α kann nicht als ganze Zahl geschrieben werden.

11 Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung[2].

Definition f heißt

1. **injektiv**, falls $\forall x, y \in M : (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$
2. **surjektiv**, falls $\forall z \in N \; \exists \; x \in M : f(x) = z$
3. **bijektiv**, falls f *injektiv* und *surjektiv* ist.

Definition Zwei Mengen M und N heißen **gleichmächtig**, falls eine Bijektion $f : M \Rightarrow N$ existiert.
Eine Menge M heißt **abzählbar**, wenn sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}_0$ ist.
Eine unendliche, nicht abzählbare Menge heißt **überabzählbar**.

Beispiel $\mathbb{N}_0$ ist abzählbar. $(0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, \ldots)$

Beispiel $\mathbb{Z}$ ist abzählbar. $(0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, -2 \mapsto 4, \ldots)$

Exkurs: Gedankenexperiment – Hilberts Hotel Hotel mit unendlich vielen Zimmern, alle Zimmer sind belegt. Ein Gast kommt hinzu. Kann dieser ein Zimmer bekommen? Ja: Der Portier fordert alle Gäste auf, in das nächste Zimmer zu ziehen.

Beispiel $\mathbb{Q}$ ist abzählbar: $0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

Satz (Cantor) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Dann gibt es eine Liste aller reeller Zahlen.

$\alpha^{(0)} = a_0^{(0)} \, , \, a_1^{(0)} \, a_2^{(0)} \, a_3^{(0)} \, a_4^{(0)} \ldots$

$\alpha^{(1)} = a_0^{(1)} \, , \, a_1^{(1)} \, a_2^{(1)} \, a_3^{(1)} \, a_4^{(1)} \ldots$

$\alpha^{(2)} = a_0^{(2)} \, , \, a_1^{(2)} \, a_2^{(2)} \, a_3^{(2)} \, a_4^{(2)} \ldots$

$\vdots$

In Dezimaldarstellung ohne Neunerperiode.
Dann betrachte die reelle Zahl $\beta = b_0 \, , \, b_1 b_2 b_3 \ldots$, wobei wir die b_is so wählen, dass $b_i \neq a_i^{(i)}$
Dann taucht β in der Liste gar nicht auf.
Somit **Widerspruch!**: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.
Dieses Vorgehen heißt Cantorsches Diagonalargument.

[2]Widerspricht nicht, dass ein Element aus N nicht oder mehrfach zugeordnet wird