Brückenkurs – Tag 6 – 2016-10-11

7.4 Beispiele für Ringe

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ (alle nullteilerfrei)

Beispiel Sei M eine Menge. Sei $R := P(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$.
Wir definieren: $A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $A \cdot B = A \cap B$
[Venn-Diagramm aus Menge M mit $A + B$ und $A \cdot B$ markiert]
Sei $0 := \emptyset$, $1 := M$. Dann ist $(R = P(M), 0, 1, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring.
Es gilt dann: $-A = A$, insbesondere $A + A = 2 \cdot A = 0$

Bemerkung Dieser Ring ist für $|M| \geq 2$ nicht **nullteilerfrei**:
Seien $A, B \in R; A \neq \emptyset; B \neq \emptyset; A \cap B = \emptyset$. Dann gilt: $A\dot{B} = 0$, aber $A \neq 0, B \neq 0$.

Anmerkung Im Ring $\mathbb{Z}$ gibt es immer eine eindeutige Primfaktorzerlegung. Für $\mathbb{Q}[X]$ gibt es irreduzible Polynome, die sich nicht als Produkt anderer Polynome schreiben lassen:
$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ ist reduzibel.
$X^2 + 1$ hingegen ist irreduzibel.
$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ wurde in zwei irreduzible Polynome zerlegt.

8 Rechnen mit Restklassen

8.1 Satz („9er Probe“)

$9 \mid \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot 10^j \Leftrightarrow 9 | \sum_{j=0}^{n} a_j$, wobei $a_j \in \mathbb{Z}$.

Beispiel $9|123456789 \Leftrightarrow 9|(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \Leftrightarrow 9|45$

8.2 Definition: Kongruenz

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Sind dann $a, b \in \mathbb{Z}$, so heißen a und b **kongruent modulo m**, falls $m|(a - b)$, d.h. der Rest der Division von a beziehungsweise b durch m ist gleich soweit $m \neq 0$. Wir schreiben dann $a \equiv b(m)$.

Beispiel $5 \equiv 7(2), 8 \equiv 3(5), 9 \equiv -1(10), 4 \equiv 14(1), -3 \equiv -3(0)$

Proposition $\equiv (m)$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis

$$a \equiv a(m); a \equiv b(m) \Rightarrow b \equiv a(m)$$

$$a \equiv b(m), b \equiv c(m) \Rightarrow a \equiv c(m) : m|(a - b), m|(c - b) \Rightarrow \exists\, d, e \in \mathbb{Z} : a - b = dm, c - b = e, \Rightarrow m|(c - a)$$

8.3 Definition: Restklassen

Die Äquivalenzklassen modulo m heißen **Restklassen modulo m**.

Beispiel $m = 3$
$[0]_3 = \{\cdots, -3, 0, 3, 6, \cdots\}$
$[1]_3 = \{\cdots, -2, 1, 4, 7, \cdots\} = [4]_3$

Proposition $a \equiv a'(m), b \equiv b'(m)$. Dann gilt:

1. $a + b \equiv a' + b'(m)$
2. $a \cdot b \equiv a' \cdot b'(m)$

Beweis

- $(a+b)-(a'+b')=(a-a')+(b-b')$ ist durch m teilbar, also 1.
- $a\cdot b-a'\cdot b'=a\cdot b-a'\cdot b+a'\cdot b-a'\cdot b'=(a-a')\cdot b+a'(b-b')$ ist durch m teilbar, also 2.

8.4 Der Körper $\mathbb{F}_3$

Damit können wir definieren: $[a]_m+[b]_m:=[a+b]_m$ und $[a]_m\cdot[b]_m:=[a\cdot b]_m$.
Die Mege der Restklassen modulo m $\mathbb{Z}/_{\equiv_{(m)}}$ bezeichnen wir auch mit $\mathbb{Z}/_{(m)}$
Es ist $\left(\mathbb{Z}/_{(m)},[0]_m,[1]_m,+,\cdot\right)$ ein kommutativer Ring, der **Restklassenring modulo m**.

Beispiel $m=3$

+	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

$\cdot$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

Dieser Körper wird $\mathbb{F}_3$ genannt.

8.5 Beweis (9er Probe)

$$9|\sum_{j=0}^{n}a_j\cdot 10^j\Leftrightarrow\sum_{j=0}^{n}a_j\cdot 10^j\equiv 0(9)\Leftrightarrow\sum_{j=0}^{n}a_j\cdot 1^j\equiv 0(9)\Leftrightarrow 9|\sum_{j=0}^{n}a_j$$

9 Konvergente und divergente Folgen

Beispiele für Folgen

- $1,3,5,7,9,11,13,\cdots$
- $1,4,9,16,25,\cdots$
- $1,3,2,4,3,5,4,6,5,7,6,8,\cdots$

Definition Eine **Folge** a (reeller Zahlen) ist eine Abbildung $a:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R},n\mapsto a_n$
Für diese Abbildung schreiben wir auch $(a_n)_n\in\mathbb{N}_0$.

Beispiele

- $a_n=n:(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}=(0,1,2,3,\cdots)$
- $b_n=\frac{1}{n}:(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\cdots)$
- $c_n=\frac{(-1)^n}{n}:(c_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}=(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{2},\cdots)$

Beispiel: Fibonacci-Folge

$$(F_n)_{n\geq 0}\text{ , wobei }F_0=0,F_1=1,F_n+2=F_n+F_{n+1}$$

$$\rightsquigarrow (F_n)_{n\geq 0}=(0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots)$$

$$x^2=2y^2+1:(3,2);(17,12);(99,70),\cdots$$

$$\to\ \text{Folge: }\frac{3}{2},\frac{17}{12},\frac{99}{70},\cdots\rightsquigarrow\sqrt{2}$$

Definition Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt **konvergent mit Grenzwert** a, falls $\forall\varepsilon>0\,\exists\, n_0:\forall n\geq n_0:|a_n-a|<\varepsilon$
Wir schreiben dann: $\lim_{n\to\infty}a_n=a$

Beispiel $(b_n)=(\frac{1}{n})$. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.
Zu untersuchen: $|\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}<\varepsilon$.
Sei $\varepsilon>0$ vorgegeben. Dann wähle $n_0\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. Für $n\geq n_0$ gilt dann: $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\varepsilon$

Definition Eine Folge (a_n), für die kein a mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existiert, heißt **divergent**.

Beispiel $(a_n) = (-1)^n : 1, -1, 1, -1, \cdots$ divergiert.
Annahme: a wäre Grenzwert. Dann gäbe es insbesondere zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein n_0 mit $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ für $n \geq n_0$.
Damit $|a_{n_0} - a| + |a_{n_0+1} - a| < 1$.

9.1 Einschub: Dreiecksungleichung

$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis

$$x \leq |x|, y \leq |y| \Rightarrow x + y \leq |x| + |y|$$
$$-x \leq |x|, -y \leq |y| \Rightarrow -(x + y) \leq |x| + |y|$$
$$\Longrightarrow |x + y| \leq |x| + |y| \quad \square$$

Fortsetzung

Nach Dreiecks-Ungleichung: $|a_{n_0} - a + (a - a_{n_0+1})| < 1$, also $|a_{n_0} - a_{n_0+1}| < 1$
Widerspruch! Die Funktion divergiert also.

9.2

Proposition Sind (a_n) und (b_n) Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ so gilt:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n)$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, falls $b \neq 0$

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3}{n^2 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2 - \frac{3}{n^1})}{\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}(-\frac{3}{n^2})}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{2 + 0}{1 + 0 + 0} = 2$$

Beweis zu 1. Zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n + b_n - a - b| < \varepsilon$
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ existieren n_1, n_2 mit $\forall n \geq n_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\forall n \geq n_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$
Für $n \geq max(n_1, n_2) = n_0 : |a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

9.3 Beispiel: Fibonacci-Folge, die Zweite

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} : \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \cdots \xrightarrow{?} \phi := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

Satz (Bichet) Es gilt: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \overline{\varphi}^n)$, wobei $\overline{\varphi} := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$

Korollar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

Beweis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}}{\varphi^n - \overline{\varphi}^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi}{1} = \varphi$$