Actividad 1: Ley de enfriamiento de Newton

Integrantes:	ID:
Juan Esteban Barrientos Sierra	000428876
Daniel Orlando Escorcia Díaz	000427686

Docente:

Raúl Adolfo Valencia Cardona

Jueves, 10 de febrero del 2022

Universidad Pontificia Bolivariana

Métodos numéricos

2022-10

1. Planteamiento del problema

Resolver de forma analítica y numéricamente la ecuación diferencial de primer orden que expresa la ecuación de la ley de enfriamiento de Newton, empleando el método de Euler para tres pasos de tiempo diferentes, además, considere la conductividad térmica (k) para dos tipos de materiales, uno de ellos que sea buen conductor y el otro que sea mal conductor. Adicionalmente, graficar la solución para ambos casos, un material buen conductor y otro material mal conductor, y calcular el error.

2. Variables y ecuaciones

$$\frac{dT}{dt} = k(T - Ta)$$ *Ec. Ley de enfriamiento de Newton*

T: Temperatura objeto (°F)

t: Tiempo (min)

k: Constante proporcionalidad – conductividad térmica del material (J/sm°K)

Ta: Temperatura ambiente (70°F)

3. Solución analítica

Se tiene la siguiente ecuación diferencial de primer orden, misma ecuación que expresa la ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dti} = -k(T - Ta)$$

Se resuelve la ecuación diferencial por el método de separación de variables:

$$\frac{dT}{(T - Ta)} = -k\ dti$$

Se integra en ambos lados de la ecuación y resolviendo la integral se obtiene que:

$$\int \frac{dT}{(T - Ta)} = -k \int dti$$

$$\ln(T - Ta) = -k * ti + C$$

Se elevan ambos lados como exponentes con base Euler, se resuelven operaciones y se obtiene que:

$$e^{\ln(T-Ta)} = e^{-k*ti} * e^{C}$$

$$T - Ta = C * e^{-k*ti}$$

Despejando T se obtiene la siguiente expresión:

$$T = C * e^{-k*ti} + Ta$$

Para determinar C se emplea la condición inicial ti=0, T=300°F, sabiendo que Ta=70°F. Reemplazando los valores y resolviendo operaciones se obtiene que:

$$300 = C * e^{-k(0)} + 70$$

$$300 = C + 70$$

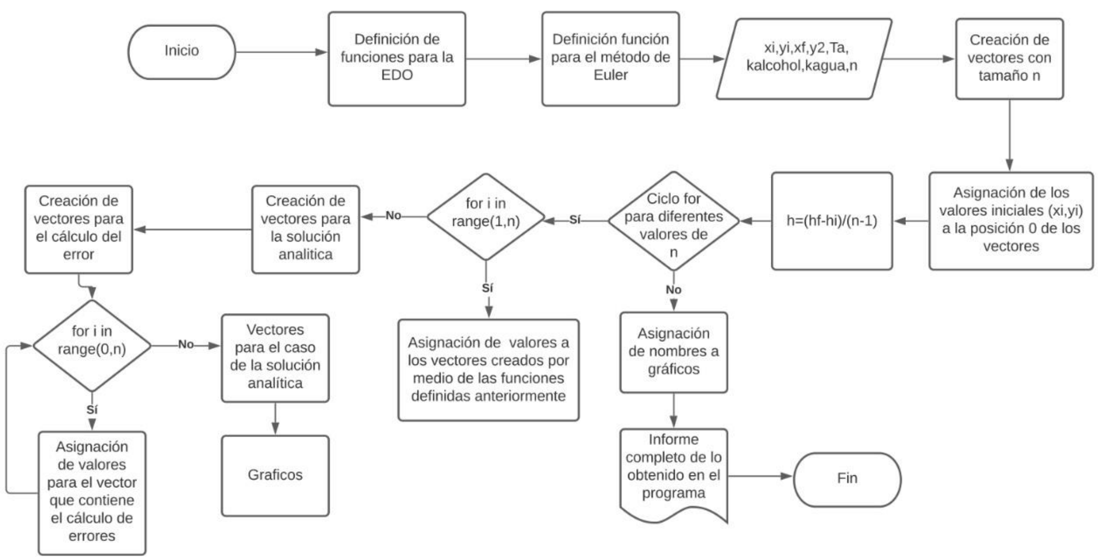
$$300 - 70 = C$$

$$C = 230$$

Finalmente, reemplazando el valor de C en la expresión obtenida previamente, se obtiene la solución analítica general para la ecuación diferencial que modela el enfriamiento de un cuerpo:

$$T = 230 * e^{-k*ti} + Ta$$

4. Solución numérica (código python)



```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""

Ejercicio de la Ley de enfriamiento de newton

Juan Esteban Barrientos Sierra (000428876) & Daniel Orlando Escorcia Díaz (000427686)

"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython import get_ipython
ipython=get_ipython()
ipython.magic("%clear")
#Funciones

def funt (y):
    dTdt=-kalcohol*(y-Ta) #Mejor conductor termico (Numerica) (Acero)


    return dTdt

def funt1 (y1):
    dTdt=-kagua*(y1-Ta) #Peor conductor termico (Numerica 2) (Agua)

    return dTdt


def meuler2 (xi,yi,h,f):
    x=xi+h
    y=yi+h*f(yi)


    return x,y


#Parámetros de entrada

xi=0.0
yi=300.0

y2=200.0
Ta=70.0
xf=120

kalcohol=0.19 #Constante de conductividad termica para el Alcohol #Ejercicio
kagua=0.58 #Constante de conductividad termica para el agua

n=3000



for n in [3000, 6000, 8000]:

    xnumalcohol=np.zeros(n)
    ynumalcohol=np.zeros(n)

    xnumagua=np.zeros(n)
    ynumagua=np.zeros(n)

    xnumagua[0]=xi
    ynumagua[0]=yi
```

```python
    xnumalcohol[0]=xi
    ynumalcohol[0]=yi

    h=(xf-xi)/(n-1)


    for i in range (1,n):
        xnumalcohol[i],ynumalcohol[i]=meuler2(xnumalcohol[i-1],ynumalcohol[i-1],h,funt)
        xnumagua[i],ynumagua[i]=meuler2(xnumagua[i-1],ynumagua[i-1],h,funt1)

    yanalalcohol=(230)*np.exp(-kalcohol*xnumalcohol)+Ta
    yanalagua=230*np.exp(-kagua*xnumagua)+Ta

    #Error
    yerragua=np.zeros(n)
    yerralcohol=np.zeros(n)

    for i in range (0,n):
        yerragua[i]=np.abs((yanalagua[i]-ynumagua[i])/(yanalagua[i]))*100
        yerralcohol[i]=np.abs((yanalalcohol[i]-ynumalcohol[i])/(yanalalcohol[i]))*100


    #Analitica
    vectoranalagua=np.array([xnumagua,yanalagua])
    vectoranalalcohol=np.array([xnumalcohol,yanalalcohol])

    plt.figure(n)

    plt.plot(xnumalcohol,ynumalcohol,label="Solución numérica alcohol")
    plt.plot(xnumagua,ynumagua,label="Solución numérica agua")
    plt.plot(xnumalcohol,yanalalcohol,"g--",label="Solución analitica alcohol")
    plt.plot(xnumagua,yanalagua,"r--",label="Solución analítica agua")
    plt.xlabel("Tiempo (min)")
    plt.ylabel("Temperatura (°F)")
    plt.title("Gráfico de enfriamiento")
    plt.grid()
    plt.legend()

    plt.figure(n+1)

    plt.title("Error vs tiempo")
    plt.plot(xnumalcohol,yerralcohol,label="Error para el alcohol")
    plt.plot(xnumagua,yerragua,label="Error para el agua")
    plt.xlabel("Tiempo (min)")
    plt.ylabel("Error %")
    plt.legend()
    plt.grid()

plt.figure(3000)
plt.title("Grafico enfriamiento n=3000")

plt.figure(3001)
plt.title("Grafico de errores n=3000")

plt.figure(6000)
plt.title("Grafico enfriamiento n=6000")

plt.figure(6001)
plt.title("Grafico de errores n=6000")
```

```
plt.figure(8000)
plt.title("Grafico de enfriamiento n=8000")

plt.figure(8001)
plt.title("Grafico de errores n=8000")

#Numerica
vectoragua=np.array([xnumagua,ynumagua])
vectoralcohol=np.array([xnumalcohol,ynumalcohol])
print("                                INFORME                                    ")
print("\n")
print("Con una n de",n)
print("Para unos valores iniciales de: ")
print("Temperatura ambiente 70°F, conductividad termica del agua 0.58, conductividad termica d
print("\n")
print("Con el método numérico se tiene que:")
print("\n")
print("EL alcohol, llega a una temperatura ambiente en 80.46min")
print("EL agua, llega a una temperatura ambiente en 26.17min")
print("Posiblemente el alcohol fue el material utilizado en la modelación de la EDO")
print("\n")
print("Con el método analítico se tiene que:")
print("\n")
print("El alcohol, llega a una temperatura ambiente en 80.79min")
print("El agua,llega a una temperatura ambiente en 26.49min")
print("\n")
print("Si se toma el modelo analítico como un método exacto se tiene que al comparar el método
print("\n")
print("Finalmente, se observa que el modelo inicial de la EDO se ajusta a una constante k de 0
```

5. Resultados y análisis

A partir de unos valores iniciales para la temperatura ambiente (Ta=70°F), la conductividad térmica del agua (k=0.58), la conductividad térmica del alcohol (k=0.19) una temperatura inicial (T=300°F) y una temperatura final que será igual a la temperatura ambiente, empleando el modelo de enfriamiento de Newton, se obtuvieron los siguientes resultados.

Con el método de la solución numérica se obtuvo que el alcohol llega a una temperatura ambiente en un tiempo de 80.46 minutos, mientras que, el agua llega a una temperatura ambiente en un tiempo de 26.17 minutos. Por otra parte, con el método de la solución analítica se obtuvo que el alcohol alcanza una temperatura ambiente en un tiempo de 80.79 minutos, mientras que, el agua alcanza esta mista temperatura en un tiempo de 26.49 minutos.

De acuerdo a lo dicho anteriormente, se puede concluir que mientras mayor sea el valor de la conductividad térmica (k) del material, menos tiempo demorará este material en alcanzar una temperatura ambiente.

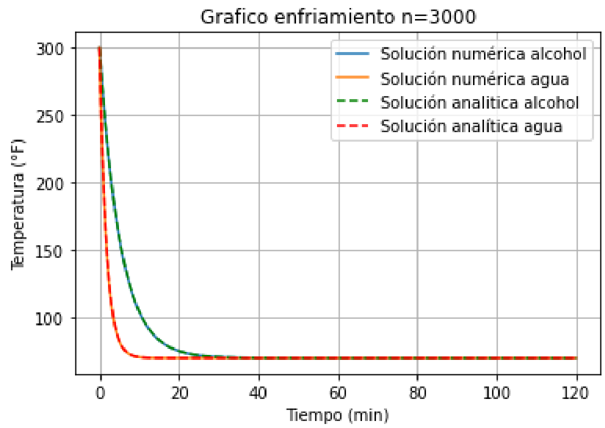


Fig. 1. Gráfico de enfriamiento para n=3000.

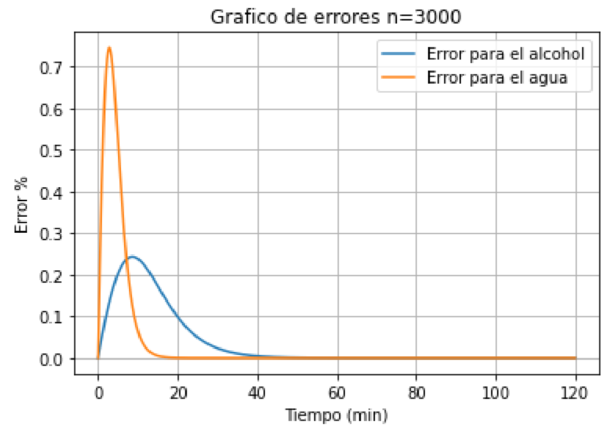


Fig. 2. Gráfico de errores para n=3000.

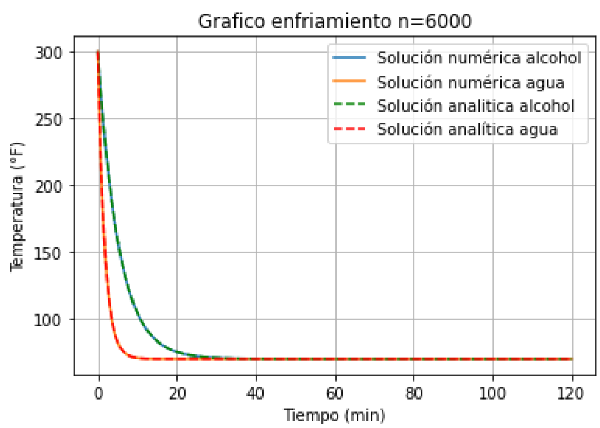


Fig. 3. Gráfico de enfriamiento para n=6000.

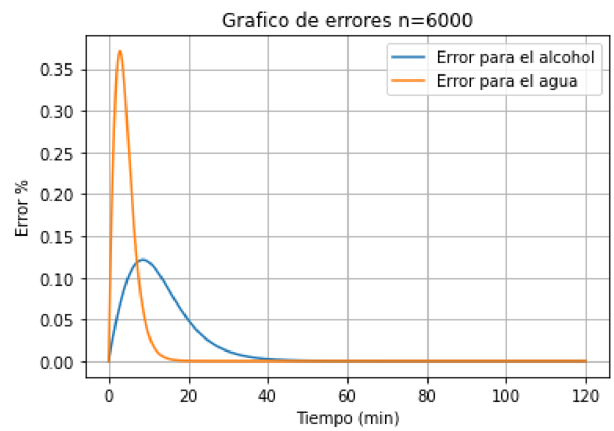


Fig. 4. Gráfico de errores para n=6000.

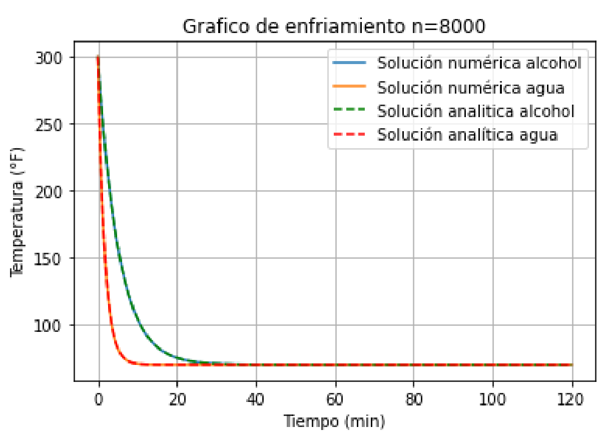


Fig. 5. Gráfico de enfriamiento para n=8000.

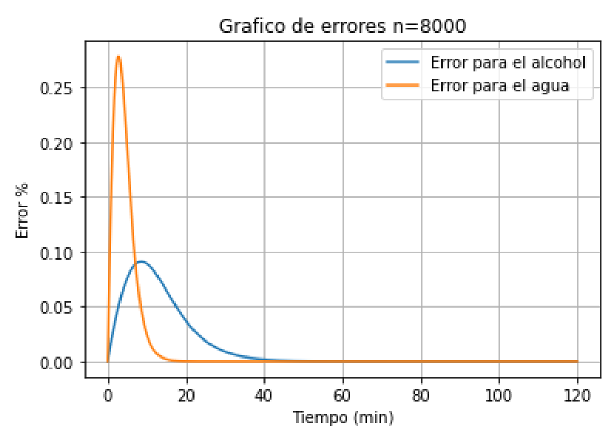


Fig. 6. Gráfico de errores para n=8000.

Considerando las figuras 1, 3 y 5, que corresponden al gráfico de enfriamiento (Temperatura vs. Tiempo) para cada valor de n, se puede dar a entender que mientras mayor sea el tiempo, menor será la temperatura del material, al igual que también será menor el porcentaje de error, como se puede detallar en las figuras 2, 4 y 6, que corresponden al gráfico de los errores (Porcentaje de error vs. Tiempo) para cada valor de n. Dicho de otro modo, mientras más sea el tiempo transcurrido, más rápido se enfriará el material.

Asimismo, se puede observar que, tanto en las figuras que corresponden al gráfico de enfriamiento para cada valor de n, como aquellas que corresponden al gráfico de los errores para cada valor de n, en cierta parte del trayecto de la gráfica ambas líneas se superponen, es decir, se evidencia que existe una congruencia y similitud entre la solución por el método analítico y la solución por el método numérico para cada valor diferente de n. Sin embargo, tomando en cuenta cada uno de los gráficos de errores para cada valor de n (fig. 2, 4 y 6), también se puede observar como el porcentaje de error en cada una de las figuras difiere en comparación a los demás valores, por lo que, es coherente decir y afirmar que, para un mayor valor de n, menor será el porcentaje de error.

6. Referencias

Construmática. (2010, 17 mayo). *Coeficiente de Conductividad Térmica - Construmática*.

Recuperado de

https://www.construmatica.com/construpedia/Coeficiente_de_Conductividad_T%C3%A9rmica.