Actividad 2: Péndulo simple.

Integrantes:	ID:
Juan Esteban Barrientos Sierra	000428876
Daniel Orlando Escorcia Díaz	000427686

Docente:

Raúl Adolfo Valencia Cardona

Sábado, 19 de febrero del 2022

Universidad Pontificia Bolivariana

Métodos numéricos

2022-10

1. Planteamiento del problema

Realizar un código con la solución numérica para la ecuación diferencial de segundo orden que representa el movimiento de un péndulo simple, cuya masa *m* se encuentra sujeta a una varilla rígida de longitud L, teniendo en cuenta dos modelos, uno de ellos con rozamiento y el otro sin rozamiento. Resolver el problema implementando el método de Euler y el método de Runge Kutta de orden 2, 3 y 4.

2. Variables y ecuaciones

$$\ddot{\theta} = \frac{-g}{L} sin(\theta) \qquad \textit{Ec. modelo sin rozamiento}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-g}{L} sin(\theta) - a\dot{\theta} \qquad \textit{Ec. modelo con rozamiento}$$

$$\ddot{\theta} = m\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

θ = Ángulo de abertura

g = Valor de la aceleración de la gravedad

m = Masa del péndulo

L = Longitud de la varilla

a = coeficiente de rozamiento

3. Código python

```python
"""
Juan Esteban Barrientos Sierra (000428876) & Daniel Orlando Escorcia Díaz (000427686)
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sin


from IPython import get_ipython
ipython=get_ipython()
ipython.magic("%clear")

"""
#Funciones
"""

#Función del problema sin rozamiento
def fode (x,y):
    dydx=np.array([y[1],-g/(L*m)*sin(np.radians(y[0]))])

    return dydx

#Función del problema con rozamiento
def foder (x,y):
    dydx=np.array([y[1],(-g/(L*m))*sin(np.radians(y[0]))-a*y[1]])

    return dydx

#Función euler
def meuler(xi,yi,h,f):
    x=xi+h
    y=yi+h*f(xi,yi)

    return(x,y)

#Runge kutta orden 2
def rk2(xi,yi,h,f):
    x=xi+h
    k1=h*f(xi,yi)
    k2=h*f(xi+0.5*h,yi+0.5*k1)
    y=yi+((k1+2*k2)/2)

    return (x,y)

#Runge kutta orden 3
def rk3(xi,yi,h,f):
    x=xi+h
    k1=h*f(xi,yi)
    k2=h*f(xi+0.5*h,yi+0.5*k1)
    k3=h*f(xi+h,yi-k1+2*k2)
    y=yi+(k1+4*k2+k3)/6

    return (x,y)

#Runge Kutta orden 4
def rk4(xi,yi,h,f):
    x=xi+h

    k1=h*f(xi,yi)
    k2=h*f(xi+0.5*h,yi+0.5*k1)
```

```
    k3=h*f(xi+0.5*h,yi+0.5*k2)
    k4=h*f(xi+h,yi+k3)

    y=yi+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6

    return x,y

"""
Main del programa
"""

#Parámetros iniciales

xi=0
xf=10
n=100
g=9.81 #m/s2
L=1
m=0.1 #kg
a=1 #rozamiento

h=(xf-xi)/(n-1)

yi=np.array([90,0.0]) #Condición inicial

#Definiendo vectores

x=np.zeros(n)
ynumrk4=np.zeros(shape=(n,2))#Matriz solución

#Valores iniciales
ynumrk4[0,0]=yi[0]
ynumrk4[0,1]=yi[1]

#rk4
for i in range(1,n):
    x[i],ynumrk4[i,:]=rk4(x[i-1],ynumrk4[i-1,:],h,fode)

#rk3
x2=np.zeros(n)
ynumrk3=np.zeros(shape=(n,2))
ynumrk3[0,0]=yi[0]
ynumrk3[0,1]=yi[1]
for i in range(1,n):
    x2[i],ynumrk3[i,:]=rk3(x[i-1],ynumrk3[i-1,:],h,fode)
#rk2
x3=np.zeros(n)
ynumrk2=np.zeros(shape=(n,2))
ynumrk2[0,0]=yi[0]
ynumrk2[0,1]=yi[1]
for i in range(1,n):
    x3[i],ynumrk2[i,:]=rk2(x[i-1],ynumrk2[i-1,:],h,fode)

#meuler
x4=np.zeros(n)
yeul=np.zeros(shape=(n,2))
yeul[0,0]=yi[0]
yeul[0,1]=yi[1]
for i in range(1,n):
    x4[i],yeul[i,:]=meuler(x[i-1],yeul[i-1,:],h,fode)
```

```python
############################################################

#Vectores pendulo con rozamiento rk4
#Rk4 con rozamiento
x1=np.zeros(n)
ynumrk4con=np.zeros(shape=(n,2))
ynumrk4con[0,0]=yi[0]
ynumrk4con[0,1]=yi[1]

for i in range(1,n):
    x1[i],ynumrk4con[i,:]=rk4(x[i-1],ynumrk4con[i-1,:],h,foder)

#Rk3
x6=np.zeros(n)
ynumrk6con=np.zeros(shape=(n,2))
ynumrk6con[0,0]=yi[0]
ynumrk6con[0,1]=yi[1]

for i in range(1,n):
    x6[i],ynumrk6con[i,:]=rk3(x[i-1],ynumrk6con[i-1,:],h,foder)

#rk2
x7=np.zeros(n)
ynumrk7con=np.zeros(shape=(n,2))
ynumrk7con[0,0]=yi[0]
ynumrk7con[0,1]=yi[1]

for i in range(1,n):
    x7[i],ynumrk7con[i,:]=rk2(x[i-1],ynumrk7con[i-1,:],h,foder)

#Meuler
x8=np.zeros(n)
ynumrk8con=np.zeros(shape=(n,2))
ynumrk8con[0,0]=yi[0]
ynumrk8con[0,1]=yi[1]

for i in range(1,n):
    x8[i],ynumrk8con[i,:]=meuler(x[i-1],ynumrk8con[i-1,:],h,foder)


"""
Gráficos
"""

plt.figure(1,figsize=(8,14))
plt.grid()


plt.subplot(4,2,1)
plt.plot(x,ynumrk4[:,0])
plt.title("Posición Vs. Tiempo RK4")
plt.grid()


plt.subplot(4,2,2)
plt.plot(x,ynumrk4con[:,0],"g")
plt.title("Posicón Vs. Tiempo RK4 + rozamiento")
plt.grid()


plt.subplot(4,2,3)
```

```
plt.plot(x3,ynumrk3[:,0])
plt.title("Posición Vs. Tiempo RK3")
plt.grid()


plt.subplot(4,2,4)
plt.plot(x6,ynumrk6con[:,0],"g")
plt.title("Posición Vs. Tiempo RK3 + rozamiento")
plt.grid()


plt.subplot(4,2,5)
plt.plot(x3,ynumrk2[:,0])
plt.title("Posición Vs. Tiempo RK2")
plt.grid()


plt.subplot(4,2,6)
plt.plot(x7,ynumrk7con[:,0],"g")
plt.title("Posición Vs. Tiempo RK2 + rozamiento")
plt.grid()


plt.subplot(4,2,7)
plt.plot(x4,yeul[:,0])
plt.title("Posición Vs. Tiempo Euler")
plt.grid()


plt.subplot(4,2,8)
plt.plot(x8,ynumrk8con[:,0],"g")
plt.title("Posición Vs. Tiempo Euler + rozamiento")
plt.grid()

########################################################

plt.figure(2,figsize=(8,14))
plt.grid()


plt.subplot(4,2,1)
plt.plot(x,ynumrk4[:,1])
plt.title("Velocidad Vs. Tiempo RK4")
plt.grid()


plt.subplot(4,2,2)
plt.plot(x,ynumrk4con[:,1],"g")
plt.title("velocidad Vs. Tiempo RK4 + rozamiento")
plt.grid()


plt.subplot(4,2,3)
plt.plot(x3,ynumrk3[:,1])
plt.title("velocidad Vs. Tiempo RK3")
plt.grid()


plt.subplot(4,2,4)
plt.plot(x6,ynumrk6con[:,1],"g")
plt.title("velocidad Vs. Riempo RK3 + rozamiento")
```

```
plt.grid()


plt.subplot(4,2,5)
plt.plot(x3,ynumrk2[:,1])
plt.title("velocidad Vs. Tiempo RK2")
plt.grid()


plt.subplot(4,2,6)
plt.plot(x7,ynumrk7con[:,1],"g")
plt.title("Velocidad Vs. Tiempo RK2 + rozamiento")
plt.grid()


plt.subplot(4,2,7)
plt.plot(x4,yeul[:,1])
plt.title("velocidad Vs. Tiempo Euler")
plt.grid()


plt.subplot(4,2,8)
plt.plot(x8,ynumrk8con[:,1],"g")
plt.title("Velocidad Vs. Tiempo Euler + rozamiento")
plt.grid()
```

4. Resultados y análisis

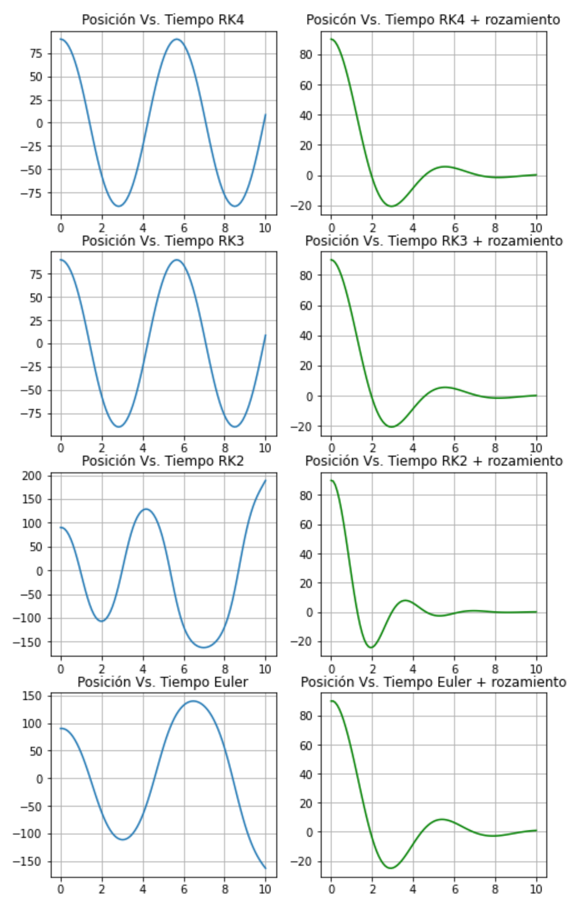

Fig. 1. Gráficas Posición Vs. Tiempo (RK4 – Euler, con y sin rozamiento).

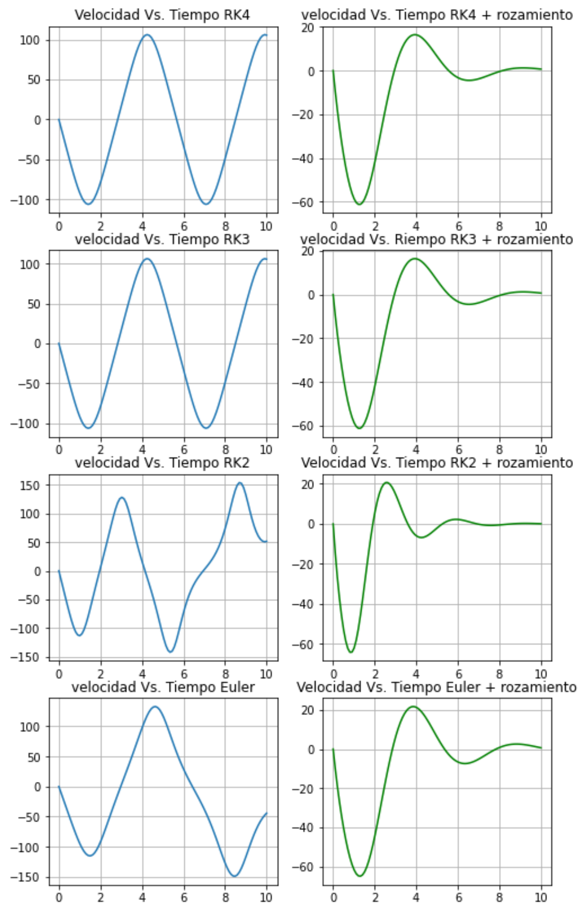

Fig. 2. Gráficas Velocidad Vs. Tiempo (RK4 – Euler, con y sin rozamiento).

Inicialmente, es importante mencionar que con la posición del péndulo, también se ven involucradas otras variables y otros aspectos a tener en cuenta, como la oscilación del péndulo, la amplitud y el valor de θ. Para el caso de la figura 1, que corresponde a las gráficas que representan la posición contra el tiempo empleando los distintos métodos de Euler y de Runge Kutta, hablando sobre aspectos generales, se observa que las gráficas resultantes para el método de Runge Kutta de orden 3 y 4, sin considerar el rozamiento, presentan el mismo comportamiento con una oscilación y demás características de onda idénticas. Por otro lado, también se puede observar que las gráficas resultantes para los métodos de Euler y Runge Kutta de orden 3 y 4, considerando el rozamiento, igualmente presentan un comportamiento idéntico y, por lo tanto, características de onda similares. Ahora bien, entrando más en detalle, al comparar las diferentes gráficas, tanto las que tienen en consideración el factor de rozamiento como las que no, se observa que en las gráficas donde se desprecia este factor de rozamiento el comportamiento oscilatorio de las ondas y su frecuencia, a pesar de ser reducida, permanece más constante con el paso del tiempo, ya que, si se compara con las gráficas de los resultados en los cuales sí se tuvo en consideración el rozamiento, se ve claramente como en estas gráficas que incluyen el rozamiento el nivel de oscilación y frecuencia es mucho menor, caso contrario a lo que sucede en las gráficas en donde no se tuvo en consideración el rozamiento.

En el caso de la figura 2, cuyas gráficas corresponden a la representación de la velocidad contra el tiempo utilizando los métodos de Euler y de Runge Kutta, en cuanto a aspectos generales, se destaca una congruencia y similitud entre las gráficas para los métodos de Runge Kutta de orden 3 y 4, sin tener en cuenta el rozamiento, y entre las gráficas para el método de Euler y Runge Kutta de orden 3 y 4, considerando el rozamiento. En estas últimas gráficas, que consideran el factor de rozamiento para describir el comportamiento del péndulo, se puede notar claramente como este rozamiento afecta de forma directa a la velocidad a medida que aumenta el tiempo, por lo que, el comportamiento del péndulo, respecto a la velocidad, cambia y se hace más irregular con el paso del tiempo, tanto que, el nivel de oscilación de la onda es muy mínimo y en estas mismas gráficas se logra alcanzar a detallar como el péndulo pierde velocidad y se está regresando a su estado inicial de reposo.

En conclusión, el factor de rozamiento influye de forma directa en el comportamiento del péndulo, especialmente en su velocidad, debido a que este rozamiento, también llamado fricción, restringe y limita la forma en como se comporta el péndulo, lo cual se puede ver reflejado en las oscilaciones que realiza el péndulo, ya que, para el caso cuando se desprecia este rozamiento las oscilaciones del péndulo permanecen más contaste a medida que avanza el tiempo, mientras que, para el caso donde se tiene en cuenta el rozamiento, estas oscilaciones disminuyen notablemente con el paso del tiempo, por lo que, es más fácil que el péndulo regrese a su estado de reposo en menos tiempo a causa del rozamiento. Adicionalmente, partiendo de lo visto en las gráficas, los métodos que más similitud tienen, en cuanto a resultados, son el método de Euler y el método de Runge Kutta de rden 3 y 4.