푸리에 해석과 미분방정식

esctabcapslock

2021년 9월 28일

1 서론

1.1 목적과 개요

- 18세기 프링스의 수학자 조제프 푸리에 (Joseph Fourier, 1768 - 1830)가 열 전도 미방을 풀기 위해 만듦
- 어떤 함수가 있으면, 그 함수를 삼각함수의 합으로 표현한다. 기저를 바꾼다.
- 전자, 전기, 통신, 기계, 구조공학, 소리 등 아주 다양한 공학 분야에서 활용 중
- 이를 이용하면 불확정성 원리 증명할 수 있음.
- 이를 응용하면 다음과 같은 이퀄라이저를 만들 수 있다. 다음 주소(링크) 참조: 푸리에.html[1]
- 푸리에 변환 $\cup$ 푸리에 급수 = 푸리에 해석임.

어떤 함수가 있다. 시간에 따라 변하는 함수라고 하자. 이 함수를 요리하고 싶은데, 뭔가 어렵고 막막하다.

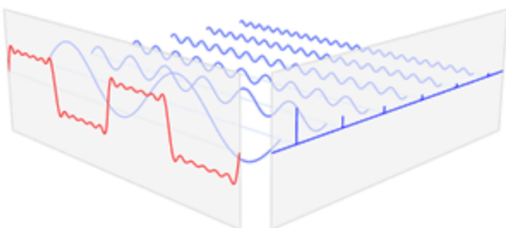

그림 1: 시간에 대한 값들의 모임에서, 주기와 진폭의 모임들로 바꿔서 생각한다. 출처: 위키미디어 공용

1.2 수학적 연관성

우리는, 작년에 적률생성함수에 대해 배웠다. 말 그대로, 특정 확률 분포의 적률을 생성하는 함수이다. 확률변수 X에 대해, 확률밀도함수가 $f(x)$일때, 적률생성함수 $M_X(t)$는 다음과 같았다. 우리는 이를 이용해 $E(X^n)$을 기계적으로 구할 수 있었다.

$$M_X(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \tag{1}$$

[1] https://esctabcapslock.github.io/WebAudioAPI/푸리에.html, 본인 github임

적률생성함수가 같으면, 같은 확률밀도함수다.

사실, 이는 라플라스 변환의 일종이다. 라플라스 변환은 다음과 같이 정의된다. 푸리에 변환과 성질이 아주 비슷하며, 여러 재미있는 수학적 성질들이 있다.

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{2}$$

사실, 이것은 푸리에 변환과 아주 비슷하다. 푸리에 변환은 다음과 같이 정의된다. (정의나, 계수는 책마다 다르다) 익스퍼넨셜 함수 지수 부분을, 복소수를 약간 치환한 형태다.

$$X(s) = \mathcal{F}\left\{x\right\}(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi i s t} x(t)dt \tag{3}$$

2 실수에서 푸리에 급수

구간 $2L$의 주기를 갖고, $\mathbb{R}$로 가며, 부분적으로 연속인 (=적분 가능한) 함수들의 집합 F을 생각하자.

$$B = \left\{1, \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cdots, \right\}$$

는 F의 직교족이다.[2] [3]

그리고, 이 기저 후보들로 사영시킨 것들을 다시 더함으로써 다시 F의 모든 원소를 생성할 수 있다. 따라서, B는 기저다. 다음의 급수를 푸리에 급수라 한다. 적분 가능한 함수라면, 푸리에 급수는 $f(x)$로 수렴한다. $\epsilon - \delta$로 증명 가능하며, 증명은 생략한다.

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} S_N^f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty \left(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n sin\frac{n\pi t}{L}\right) \tag{4}$$

그리고, 각 계수들은 당연하게도 $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(t)dt = \frac{1}{L}\langle f(t) \mid 1\rangle, a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\left\langle f(t) \mid \cos\frac{n\pi t}{L}\right\rangle, b_n = \cdots$ 이렇게 각 기저 성분을 모은 것으로 표현할 수 있다.

3 복소수에서의 푸리에 급수

$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$으로 정의한다면, $c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^L f(t)e^{i\frac{n\pi t}{L}}$이 나온다. 간단하게 정리하면[4], 본 급수는 더 깔끔하게, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^\infty c_n e^{i\frac{n\pi t}{L}} \tag{5}$$

4 푸리에 변환과 역변환

주가함수가 아니라, 일반적 함수에 대해 적용시키면 푸리에 변환이다. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$이고 적분 가능한 일반적인 f에서, 유도해 보자. $\Delta\xi = \frac{\pi}{L}$, $F(n) = \int_{-L}^L f(t)e^{i\frac{n\pi t}{L}}$으로 두면 다음이 성립한다.

$$f(t) = \frac{L}{\pi}\sum_{n=-\infty}^\infty c_n e^{i\Delta\xi n t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^\infty F(n)e^{i\Delta\xi n t}\Delta\xi$$

그리고 $L \to \infty$로 두면, $\Delta\xi \to 0$이다. 위 식은 리만합으로써 적분꼴로 쓸 수 있다.

[2] 2021 1학기 선형대수 참조

[3] 내적의 정의 $\langle f \mid g\rangle = \int f(x)g(g)dx$ 에 의해 서로 다른 내적하면 0이며, 같은 것끼리 내적하면 L임

[4] $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ 등 오일러 공식 활용

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(n)e^{i\xi t}d\xi \quad F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t}dt \tag{6}$$

F는 f의 푸리에 변환이며, 반대 과정을 푸리에 역변환이라고 한다. $F(\xi)$는 $\mathcal{F}\{f\}(\xi)$로 쓴다.[5] 변환 후, 역변환하면 자기 자신이므로, $\mathcal{F}\{f\} = \mathcal{F}\{g\}$면 $f = g$가 성립한다. 또한, 선형성도 갖고 있어, 임의의 상수 a, b에 대해 $\mathcal{F}[af(x) + bg(x)] = a\mathcal{F}[f(x)] + b\mathcal{F}[g(x)]$도 만족한다.

5 응용: 1차원 열전도 미분방정식의 풀이

푸리에 급수를 이용해서도 미방을 풀 수 있으나, 생략하겠다.

푸리에 변환의 정의에서, 부분적분을 하면 다음을 보일 수 있다.

$$\mathcal{F}\{f'\}(\xi) = i\xi\mathcal{F}\{f\}(\xi), \quad \mathcal{F}\{f^n\}(\xi) = (i\xi)^n\mathcal{F}\{f\}(\xi), \tag{7}$$

여기서, 변환표를 이용하면 선형 미방의 해를 쉽게 답을 구할 수 있다. [6] 일차원 열 미분방정식을 풀어보자. $\mathcal{F}\{u\}(\xi, t) = U(\xi, t)$, $\mathcal{F}\{f\}(x) = F(\xi)$로 정의한다.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (-\infty < x < \infty), \quad f(x) = u(x,0)$$

양변에 푸리에 변환을 취하고, 7번 식을 적용하자.

$$\mathcal{F}\{u_t\}(\xi, t) = k\mathcal{F}\{u_{xx}\}(\xi, t) = -k\xi^2\mathcal{F}\{u\}(\xi, t)$$

또한, 함수의 성질이 좋아서 적분과 미분을 바꿀 수 있다 하자. 그렇다면 $\mathcal{F}\{u_t\} = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\{u\}$이 성립한다. 그러면 주어진 식은 간단한 선형 상미분 방정식이 된다.

$$\frac{\partial U(\xi,t)}{\partial t} = -k\xi^2 U(\xi, t)$$

풀면, $U(\xi, t) = F(\xi)e^{-k\xi^2 t}$이다. 여기에서 양변을 각각 푸리에 역변환해 주면, $u(x, t)$에 대한 식이 나오므로, 우리가 원하는 해답이 된다.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}dy$$

6 참고문헌

- 블로그: 생새우초밥집 푸리에 해석 카테고리 [7]
- 도서: (핵심) Fourier 해석과 복소해석 Fourier analysis & complex analysis, 전병재 지음, 텍스트북스

[5]정의는 책마다 조금씩 다르다.
[6]라플라스 변환도 이런 식이 존재한다. 다만 약간 복잡하다. 이건 실수에서만 생각하기 때문!
[7]https://freshrimpsushi.github.io