자기주도학습과제

esctabcapslock

June 2021

요 약

자기주도학습과제입니다! 06.26부터 06.29까지 나흘동안 하루에 두세편씩 작성했습니다. 금방 걸릴 줄 알았는데 생각보다 오려걸렸네요. 근데 이게 자기주도학습과제의 전부가 아니라니...무섭군요. 하여튼 즐겁게 읽어주세요. 장 수는 21장이지만 LaTeX특성상 공백이 많아서 생각보다 분량은 많지 않아요. 수식 포함 15,000자 정도? 아프지 않게 금방 끝날겁니다. 틀린거 있으면 알려주세요.

제 1 장

자기주도적 학습 과제 1 (12.1-4)

1.1 수학에서 '공간(space)'이란 어떤 의미를 갖나요? '공간을 정의한다'라는 것은 무슨 뜻인가요?

공간 특별한 속성과 몇 가지 부가적 구조를 갖는 집합

구조 임의의 집합이 주어졌을 때 여기에 부여한 수학적 성질로 인해 그 집합이 갖추게 되는 형태

1.2 '유클리드 공간'의 정의는 무엇인가요?

영문 위키의 정의

- 유클리드의 평행선의 공리와 피타고라스의 정리가 성립하는 n차원 공간
- 유클리드가 생각했던 거리와 길이와 각도를 좌표계를 도입하여, 임의 차원의 공간으로 확장한 것

국문 위키의 정의

- 유한 차원의, 실수 기반, 내적이 정의된 벡터 공간 $\mathbb{R}^n$ 은 $\mathbb{R}$을 n회 데카르트 곱한 집합이다.
- 그 위에서, 내적은, $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$로 정의

1.3 내적의 '기하적 정의'와 '대수적 정의'를 비교하고 동치임을 증명하시오.

기하학적 방법

- 직관적임
- 엄밀하지 않으며, 같이가 0일 때, 예외가 생겨서 정의가 아름답지 않음.
- N차원 확장이 불편함 (4차원 으악 ㅠㅠ)

대수적 방법

- 엄밀하게 정의할 수 있음
- N차원으로 쉽게 확장할 수 있다.
- 비-작관적

동치 증명 두, 벡터 a, b를 생각하자. $|a|\,|b| = 0$이면, 두 정의 모두 $a \cdot b = 0$ 이 되는 것은 자명하다.
아닌 경우를 생각하자.
제2코사인 정리에 의해서,

$$
\begin{aligned}
|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2 = 2ab\cos\theta \\
\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - b_i)^2 \\
= \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 - \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} 2a_i b_i \\
= \sum_{i=0}^{n-1} 2a_i b_i = a \cdot b = 2\,|a|\,|b|\cos\theta
\end{aligned}
$$

따라서, 두 정의는 동치이다.

1.4 외적의 '기하적 정의'와 '대수적 정의'를 비교하시오.

기하적 방법

- 직관적이다.
- 각도가 주어진 경우 편함
- 각도를 모른다면 삼각함수의 지옥을 맛볼 수 있음.

대수적 방법

- 정의가 간편
- 행렬식과 연관 지을 수 있어 행렬식의 성질을 이용할 수 있음.
- 높은 차원으로 확장하기 쉽다.

동치성 증명 1차워 공간에서는 자명하다 3차원 공간에서의 증명은 다음과 같다. (그 이상은 교과서에다 다루지 않는다.) 두, 벡터 a, b 생각. $|a|\,|b| = 0$ 이면, $a \times b = 0$은 자명하다.
아닌 경우를 생각하자.

$$|a|^2\,|b|^2 - |a \times b|^2 = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - \left(|a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1|\right)^2$$

$$= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + \left(a_1^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_2^2b_1^2\right) -$$

$$\left(a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2\right) + 2\left(a_2b_2a_3b_3 + a_3b_3a_1b_1 + a_1b_1a_3b_3\right)$$

$$= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2\left(a_2b_2a_3b_3 + a_3b_3a_1b_1 + a_1b_1a_3b_3\right)$$

$$= \left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\right)^2 = a \cdot b$$

$$\therefore |a \ \times b|^2 \ = \ |a|^2 \ |b|^2 \ - \ |a \ \cdot b \ |^2 \ = \ |a|^2 \ |b|^2 \ - \ |a|^2 \ |b|^2 \ cos^2 \ \theta$$

$$= \ |a|^2 \ |b|^2 \ sin^2 \ \theta$$

$$\therefore |a \times b\,| = |a||\,b|\,|sin\theta|$$

1.5 이차원 벡터의 외적을 정의할 수 있는가

기하적 관점에서 고찰 외적의 결과는 두 벡터의 수직이여야 함.

그 결과가 같은 평면 위에 있다면, 각도의 덧셈 상에서 모순이 발생함.

따라서 모순임.

제 2 장

자기주도적 학습 과제 2 (12.5-6)

2.1 $\mathbb{R}^3$에서 거리 구하는 공식 만들고 n차원 확장

$P_0 + q_0 t$과 $p_1 + q_1 t$ 생각하자

3차원에서의 거리공식 두 직선이 만드는 평면의 법선벡터를 생각한다. 직선 위 임의의 두 점을 잇는 벡터를, 이 법선벡터에 사영시킨 것이 바로 거리가 될 것이다.

$\left|\text{proj}_{q_1 \times q_2}(p_1 - p_2)\right|$

n차원 확장 방법 1 해가 존재한다면, q_0, q_1은 평행하지 않다. q_0, q_1, $p_0 - p_1$을 세 기저로 하는 공간을 생각할 수 있고, 만일 그렇다면, 나머지 기저들은 거리 공식에 영향을 다 못 줄 것(싹 다 0임). 이 기저들을, 가우스-조르단 방법 하듯이 하듯 잘 손질하면 수직인 세 백터로 만들 수 있을 것이고, 그러면 3차원 백터가 나오니까 위의 공식에 대입한다!

n차원 확장 방법 2 2학년 1학기 일반물리학 실험때 배운 최소제곱법 유도방식을 이용하자.

저 두 직선을 빼면, $a + bs + ct$꼴이며, 거리의 제곱을 구하면, $\sum (a(n) + b(n)s + c(n)t)^2$이며, s와 t에 각각 편미분 해주면, 2원 1차 연립방정식의 꼴이 된다. 따라서, $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \Sigma ab \\ \Sigma ac \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma b^2 & \Sigma bc \\ \Sigma bc & \Sigma c^2 \end{bmatrix}^{-1}$ 로 어떤 값을 구할 수 있으며, 거리는 와 가 무한하면 무한하며, 대충 아래로 볼록한 이차식 형태꼴로 나오는 것으로 예상되며, 저 값이 최소값이라고 추측된다. 따라서, 저 s와 t를 대입한 거리값이 최소값일 가능성이 매우 높다.

2.2 곡선의 정의

위키피디아 정의 연속적인 점들의 집합이다.

구간 I와 위상공간 X가 있을 때, $I \to X$의 연속함수

위상공간 어떤 점의 근처(근방)가 무엇인지에 대한 정보를 담고 있지만, 점 사이의 거리나 넓이·부피 따위의 정보를 포함하지 않는 공간.

근방 어떤 점의 주위를 포함하는 집합. 위상공간 X속 점 $x \in X$의 근방은 x를 원소로 포함하는 열린 부분집합이다.

선생님 PPT 사상 $[a, b] \Rightarrow \mathbb{R}^n$에 대해, t가 $[a, b]$에서 변할 때, 점들의 모임

2.3 페아노 곡선의 정의와 성질

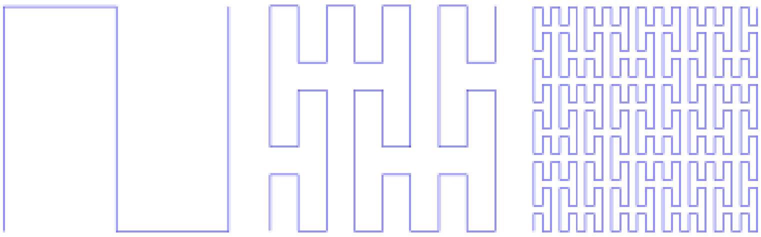

그림 2.1: 페아노 곡선의 모습

자연수를 정의하여 수많은 수학덕을 양성(?)한 것으로 유명한 이탈리아 수학자 주세페 페아노가 1980에 발견한 곡선이다. 단위 길이를 단위 평면에 대응시키는 전사 함수이다. 칸토어가 $\mathrm{Card}(N) = \mathrm{Card}(N^2)$ 증명하는데 영감을 줬다고 한다. 공간충전곡선(空間充塡曲線)의 한 예이며, 교점 없이 평면공간, 더 나아가 임의의 폐집합 내를 체우는 곡선이다.

2.4 타원면과 만나는 평면의 방향과는 상관 없이 교차하는 부분은 타원인가

증명 1. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$과, $a'x + b'y + c'z = d$ 두 선의 교점이라고 생각하자. 평면의 식을 z에 대해 정리한 뒤, 첫 번째 공식에 대입하게 되면, x^2, y^2, x, y등이 담긴 방정식이 나온다. 근데,

1. x^2과 y^2의 부호가 같을 것이 자명하다.
2. 타원의 경우 정의역이 제한되어 있기 때문에, 결과 식도 어느 범위로 재한되어 있으며, 이를 만족하는 이차함수는 타원이 유일하니까

$\rightarrow$결과는 타원이다.

이는 교선을 xy평면에 사영시킨 것인데, 원래 교선도 어떤 평면 위에 있으니까, xy평면에서 거리에 관한 공식들이, 어떤 평면과 xy평면의 이면각 θ에 대해, $\cos(\theta)$에 비례하는 형태를 띄게 된다. 따라서, 두 초점 사이 거리 관계가 xy평면에서 성립하면, 원래 평면에서도 성립하므로, 원래 평면에서 그려진 교선은 타원이다.

2.5 카발리에리의 원리로 타원면으로 둘러싸인 부분의 부피 구하는 공식을 만들기. 그리고 n차원으로 확장하시오.

타원 면적 구하는 공식은 πab이다.

타원면을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$로 잡자.

$z = z$인 평면을 기준으로 생각하면, $1 - \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$이니, 면적은 $\pi ab\sqrt{1 - z^2}$이다.

이는 $\pi\sqrt{1 - z^2}$를 ab배 한 것이니, 구하구자 하는 부피는 카빌리에리 원리에 의해 $1 - \frac{z^2}{c^2} = x^2 + y^2$의 부피의 ab배 일 것이다. 이걸 $-c$부터 $+c$까지 적분하면 $\frac{4}{3}\pi c$이며, 따라서 타원면의 면적은 $\frac{4}{3}\pi abc$이다.

제 3 장

자기주도적 학습 과제 3 (13.1, 14.2)

참고. 이 장에서 따른 말이 없으면, V는 n차원 유클리드 공간을 의미하며, D는 V의 부분집합이다. f는 $f : D \to V$인 함수이다. 그리고$p \in D$, $L \in V$라고 하자. 그리고 $\{x_k\}$는 수열이다.

3.1 V의 두 점 p, q 사이의 거리 구하는 공식

$p = \langle p_1, p_2 \cdots p_n \rangle$, $q = \langle q_1, q_2 \cdots p_n \rangle$라 둘 때,

$$\mathrm{d}(p,q) = |p - q| = \sqrt{\left(p_1^2 - q_1^2\right)^2 + \left(p_2^2 - q_2^2\right)^2 + \cdots + \left(p_n^2 - q_n^2\right)^2}$$

으로 구할 수 있다.

3.2 "$x \to p \Rightarrow f(x) \to L$이다"의 엄밀한 정의

ϵ-δ 논법 비슷하게 정의하면 될 것 같다.

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. $|p - x| < \epsilon \Rightarrow |L - f(x)| < \epsilon$

3.3 "f가 p에서 연속이다"의 엄밀한 정의

$x \in D$, $x \to P$이면, $f(x) \to f(P)$일 때 연속이라고 정의하자.

3.4 $x_k \in V$이다. 이때 "$k \to \infty \Rightarrow x_k \to L$이다"의 엄밀한 정의

$\forall \epsilon > 0$, $\exists M > 0$, s.t. $k > M \Rightarrow |f(x_k) - L| < \epsilon$

3.5 $x_k \in D$이다. "$(k \to \infty \Rightarrow x_k \to p) \wedge (x \to p \Rightarrow f(x) \to L) \Rightarrow$ $(k \to \infty \Rightarrow f(x_k) \to L)$"를 증명

$\forall \epsilon > 0$, 자연수 M을 다음과 같은 방식으로 잡자.

그리고, 3.2절에서 보인 바와 같이 $|p - x_k| < \epsilon \Rightarrow |L - f(x_k)|$를 만족하는 양수 δ를 잡을 수 있다. 3.4절에서 보인 바와 같이 $k > M \Rightarrow |f(x_k) - L| < \delta$를 만족하는 양수 M를 잡을 수 있다.

이렇게 M을 잡게 되면, $|p - x_k| < \epsilon \Rightarrow |L - f(x_k)|$가 성립하게 되니, 주어진 명제가 성립힌다.

제 4 장

자기주도적 학습 과제 4 (6.3, 11.2, 13.1-3)

4.1 3차원 공간 안에 놓인 평면 γ 위에 점 C를 중심으로 하고 반지름이 r인 원을 벡터로 나타내시오

법선 벡터를 n이고 했을 때, 이 벡터에 수직이면서, 길이가 r이고 C를 지나면 된다. 그대로 식으로 옮기면 $\{x \mid n \times (c - x) = 0\}$이 될 것이다.

4.2 길이가 양수인 닫힌 구간 I에서 정의된 $f : I \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = f(t)i + g(i)j + h(t)k$가 있다. $L = (L_1, L_2, L_3)$일 때, $\lim_{t\to p} r(t) = L \iff \lim_{t\to p} f(t) = L_1 \wedge \lim_{t\to p} g(t) = L_2 \wedge \lim_{t\to p} h(t) = L_3$임을 보여라

$\Rightarrow$ **증명** 가정에 의해서, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $|t - p| < \delta \Rightarrow |r(t) - L| < \epsilon$이 성립함.

즉,

$$\sqrt{(f(t) - L_1)^2 + (f(t) - L_2)^2 + (f(t) - L_3)^2} < \epsilon$$

이 성립한다는 말이다. 그러므로, 제곱근 안에 각각의 제곱항들은 ϵ^2보다 작을 것이다.

따라서, $|f(t) - L_1| < \epsilon$, $|f(t) - L_2| < \epsilon$, $|f(t) - L_3| < \epsilon$이 성립한다.

$\Leftarrow$ **증명** 가정에 의해서, $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0$, $\exists \delta > 0$, $|f(t) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}$, $|f(t) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}$, $|f(t) - L_3| < \frac{\epsilon}{2}$이 성립함.

즉,

$$|r(t) - L| = \sqrt{(f(t) - L_1)^2 + (f(t) - L_2)^2 + (f(t) - L_3)^2} < \sqrt{3\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2} < \epsilon$$

이 성립한다는 말이다.

따라서 증명이 끝났다.

4.3 매끄러운 곡선, 조각마다 매끄러운 곡선 뜻

토머스 6.3의 정의 $f(x)$가 주어진 구간에서 연속이고 미분 가능하면 매끄러운 것임.

매끄러운 곡선, 토머스 13.1의 정의 곡선 $r(t)$에 대해, 정의역의 모든 점에서 $r(t)$와 $\frac{dr}{dt}$가 연속이고, $\frac{dr}{dt} > 0$

조각마다 매끄러운 곡선, 토머스 13.1의 정의 매끄러운 곡선을 연결한 것.

4.4 곡선의 길이 정의. 정의역의 길이가 무한대인 열린 구간인 매끄러운 곡선의 길이가 유한일 수 있을까

곡선의 길이, 토마스 매끄러운 곡선 $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(i)k$에서, 곡선의 길이 L은

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

로 정의된다.

그리고, 조각마다 매끄러운 곡선의 경우, 조각들의 길이의 합으로 정의하면 될 것 같다.

길이를 갖는 곡선(rectifiable curve) 해석학적으로는, 길이를 다른 방법으로 정의할 수 있다. 구간 $I = [a, b]$를 분할한 것을 $P = \{a = x_0, x_1 \cdots x_n = b\}$이라고 하자. $r : I \ to\mathbb{R}^n$이 때, $||p|| \to 0$일 때,

$$\sum_{k=0}^{n-1} d(x_k, x_{k+1})$$

의 상한을 길이로 정의할 수 있다.

(삼각부등식에 의해서, 노름이 0에 수렴할 경우, 주어진 식은 커지게 된다.)

정의역이 무한대인 유한직선 만약 무한한 분할을 잡을 수 있다고 한다면, $I = [0, \infty]$이고, $r(t) = \langle \tan^{-1}(x) \rangle$로 잡으면,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{infty} tan^{-1}(\frac{k+1}{n}) - tan^{-1}(\frac{k}{n}) = \lim_{m\to\infty} tan^{-1}(m) - tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

이니까 유한하지 않을까?

$\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}([0,\infty])$가 아닌가.

4.5 13.3 - 13.4 학습지 13번 문제 참조

$1 over n\pi$꼴로 분할을 잡은 뒤, 극대, 극소값들을 잘 연결해서 위로 유계임을 보이면 된다. 수업시간에 했으니 생략.

(참고로 답은 $p > 1$이다.)

제 5 장

자기주도적 학습 과제 5 (13.4-5, 14.1-3)

5.1 곡선의 곡률(curvature)과 비틀림률(torsion)의 정의

곡률 곡선 $r(t)$에 대해, 단위접벡터 T는 $\frac{dr/dt}{|dr/dt|}$로 정의한다. 이는, 곡선에 접하는 원(접촉원)의 반지름의 역수와 같다.

그리고 이 곡선의 곡선길이 매개변수를 s라고 할 때, 곡률 κ는 $|\frac{dT}{ds}|$로 정의한다.

비틀림률 주 단위 접선 벡터를 $N = \frac{1}{\kappa}\frac{dT}{ds}$로 정의하고, 종 법선벡터를 $B = T \times N$로 정의한다. 이때, 비틀림률 τ는 $\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N$로 정의한다. 이는, T와 B가 이루는 평면에서 얼마나 곡선이 벌어지는지를 나타난다. (공간적으로 얼마나 휘어 있는지를 나타낸다.)

5.2 열린 집합, 닫힌 집합, 연결 집합의 정의, 집합의 연산 관련 성질

내부점 (쌤 ppt) $G \subset \mathbb{R}^n$과, $p \in G$에 대해서, $\exists \delta > 0$ s.t. $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-p| < \delta\} \subset G$면, p를 G의 내부점이라 한다.

경계점 (쌤 ppt) $\forall \delta > 0$ s.t. $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-p| < \delta\} \cap G \neq \varnothing$고, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-p| < \delta\} \cap G^c \neq \varnothing$면, p를 G의 경계점이라 한다.

열린집합 (쌤 ppt) 자신의 모든 점들이 내부점인 집합

닫힌집합 (쌤 ppt) 자신의 경계점들을 모두 원소로 갖고 있는 집합

성질 (쌤 ppt) 열린집합, 혹은 닫힌집합끼리는 유한번의 합집합, 교집합 연산에 대해 닫혀있다. 그러나, 열린집합은 무한 합집합만 열린집합이며, 닫힌집합은 무한 교집합만 닫힌집합니다.

연결 공간 (한국어 위키피디아) 공집합이 아닌 두 열린집합으로 쪼갤 수 없는 집합이다.

또, $x, y \in X$인 집합 X내 연속함수 $f : [0,1] \to X$가 존재해 $f(0) = x$, $f(1) = y$를 만족하면 거리연결공간이라고 한다. 유클리드 공간의 경우, 연결 공간과 거리연결공간은 필요충분조건임이 증명되어있다.

연결 공간의 연산 연결공간의 합집합은 연결공간이 되지 않을 수 있다. $\{(x, y)|x^2 + y^2 < 1\}$과 $\{(x, y)|(x-3)^2 + y^2 < 1$
각각은 연결 공간인데, 합집합은 연결 공간이 아니다. (쪼개는 것이 가능하다.)

연결공간의 교집합도 연결공간이 되지 않을 수 있다. 두 집합의 교집합이 서로 떨어져 있을 수 있기 때문이다.

5.3 $U \subset \mathbb{R}^2$은 는 공집합이 아닌 열린 연결 집합이다. $f : U \to \mathbb{R}$일 때, 점 $p \in U$ 에서 f의 편미분의 정의

x에 관한 편미분

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_p = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + hi) - f(p)}{h}$$

로 정의한다. 이는, x축에 평행하게 함수를 잘랐을 대, 이 함수의 기울기라고 할 수 있다. y에 대해서도 대칭적으로 성립한다.

5.4 편미분가능하면 연속인가. 어떤 조건이 더 필요한가

반례 당연히 편미분 가능하면 연속이 아니다. $f(x, y)$를 다음과 같이 정의하면, 원점에서 연속이 아닌 것이 자명하다.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & xy = 0 \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases}$$

로 정의하면 된다.

추가조건 심지어 방향미분계수가 존재해도 연속이 아니다. 음...

5.5 이변수 함수의 미분계수는 몇차원인가

실수라면, 2개의 값으로 표현해야 할 것 같다. 어느 방향으로 기울어졌는지에 관한 정보가 필요하기 때문이다.

제 6 장

자기주도적 학습 과제 6 (14.4-5)

6.1 함수가 가진 변수의 개수에 상관 없이 하나의 식으로 연쇄법칙을 나타낼 수 있을까요

실은 하나의 식이라고 생각한다. 그냥 모든 변수에 대해 미분한 어떤 식이 있을 수 있고,

적당히, 독립인 변수들은 서로의 미분이 0임을 넣어 주면 될 것 같다.

6.2 방향도함수의 정의와 기하학적 의미

점 $p = (x_0, y_0)$에서 u 방향의 방향미분계수는 다음과 같이 정의된다.

$$(D_u f)_p = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + hu) - f(p)}{h}$$

이 값을 갖는 함수를 방향도함수로 정의한다.

이 값은, 어떤 함수를 p와 평행하게 자른 단면에서의 기울기를 나타내는 것이다.

6.3 기울기 연산의 정의와 기하학적 의미

점 $p = (x_0, y_0)$에서 f를 기울기 연산한 것은 다음과 같이 정의한다.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

이는, f가 증가하는 방향을 나타낸다.

6.4 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$이고, 0에서 모든 방향의 방향미분계수 갖으며, 0에서만 불연속 함수찾기

$f(0, 0) = 0$으로 정의하자. 0에서 연속 아니지만 미분방향계수 존재하는 '그' 문제 생각. 그 문제에서 불연속적인 부분을 깎아서 매끄럽게(?) 만들면 되지 않을까 생각.

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{\left|\frac{x - y^2}{y^3}\right|} & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

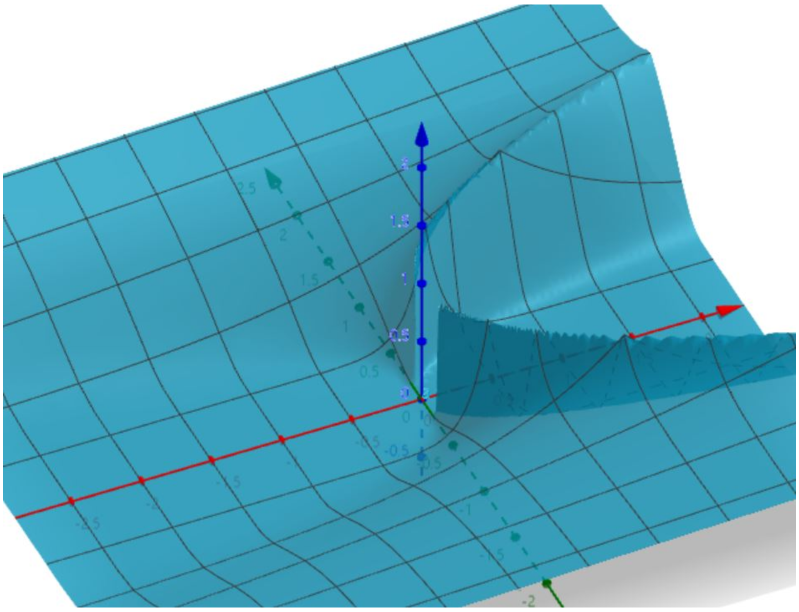

그림 6.1: 대충 이렇게 생김

1-kkh/hh

증명 $u = (0, 1)$에 대하여,

$$lim_{h\to 0}\frac{f(0,0)-f(h,kh)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{e^{-1/|h|}}{h} = 0$$

$u = (1, k)$에 대하여는, '그'문제 증명하듯이 증명하면 됨.
하지만, $x = y^2$라면, $f(x, y) = 1$이므로, 안됨,

6.5 복소함수의 미분과 편미분

미분은 똑같이 정의한다.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

실수축과 허수축에 대해 편미분(?) 할 수 있는 것 같다.

제 7 장

자기주도적 학습 과제 7 (13.3 6)

7.1 단위속력곡선 뜻, 속력이 0이 되지 않는 매끄러운 곡선은 단위속력곡선이 되도록 재매개화 가능 증명

단위속력곡선 $\frac{dr}{ds} = 1$이 되게끔 s로 재매개화 한 곡선이다.

증명 조건에 의해, $\left|\frac{dr}{dt}\right| > 0$이며, 이 값은 연속적이다. 따라서, 적분할 수 있다. $s = \int_0^{t_0} \left|\frac{dr}{dt}\right| dt$로 정의할 수 있다. 이 함수는 증가함수이기 때문에, 당연히 역함수가 존재한다. 따라서 $t = f(s)$라고 둘 수 있다.

따라서, $r(f(s)))$로 곡선을 재매개화 하게 되면, s로 미분했을 때, $\left|\frac{d(r(f(s)))}{ds}\right| = \left|\frac{dr}{dt}\left|\frac{dt}{dr}\right|\right| = 1$이 되게 된다. 증명 끝.

7.2 T, N, B를 4차원 공간에 놓인 곡선으로 확장

이 이하는 , 'Raffles Junior College'의 'Lee Mun Yew '가 작성한 'Curves in Four-Dimensional Space'을 참고한 것임을 밝힌다.

일단, T와 N은 큰 무리 없이 정의할 수 있는 것처럼 보인다. 그런데 이 둘에 수직한 벡터는 어떻게 구할까. 외적을 사용하긴 어렵다. 수직한 공간의 기저가 2개이기 때문이다.

$$B = \frac{dN}{dS} - \left(\frac{dN}{ds} \cdot T\right) T - \left(\frac{dN}{ds} \cdot N\right) N$$

으로 B를 정의한다. 이것은 마치, 선형 대수 시간에 배운 그람-슈미츠 직교화 과정을 보는 것 같은 느낌이다. (두 벡터의 수직인 어떤 벡터를 잡는 그런 느낌이다.)

하지만 4차원은 기저가 4개이므로, 하나를 더 잡을 수 있는데, 그것을 D라고 잡았다.

7.3 τ와 κ를 4차원 공간에 놓인 곡선으로 확장

τ와 κ는 위 정의대로 하면, 3차원의 것을 그대로 정의할 수 있을 것으로 보인다. 그리고, 하나가 더 필요하다. 이 보고서에서는 σ라는 값을 하나 더 도입해서 해결한다.

$$\sigma D = \frac{dB}{ds} - \left(T \cdot \frac{dB}{ds}\right) T - \left(N \cdot \frac{dB}{ds}\right) N - \left(T \cdot \frac{dB}{ds}\right) B$$

7.4 $\tau = 0$이면, 그 곡선은 한 평면 위에 놓여 있음 증명

정의에 의해서, $\frac{dB}{ds} = \tau N = 0$이므로, B는 일정하다! 따라서, T와 N이 이루는 평면은 일정하다. 근데r은 T와 N위에서 움직이므로, (속력이 이 두 벡터에 대해 표현할 수 있기에,,,)결국 한 직선 위에 움직인다.

7.5 3차원 공간에 구면좌표계가 주어졌을 때, 이 공간에 놓인 매끄러운 곡선의 속도와 가속도 구하는 공식

위키피디아에 따르면,

$$\hat{r} = \cos\theta\sin\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\phi\hat{z}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$$

$$\hat{\phi} = \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\cos\phi\hat{y} - \sin\phi\hat{z}$$

에 있을 때,

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\sin\theta\hat{\theta} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2\sin^2\phi\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} - r\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\theta}\sin\phi + 2dotr\dot{\theta}\sin\phi + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\phi\right)\hat{\phi}$$

가 된다. 무섭게 생겼다.

제 8 장

자기주도적 학습 과제 8 (14.5-7)

8.1 국소극값과, 절대극값

극소극값 점 a, b를 중심으로 하는 원 S가 존재해허, $(z, y) \in S$에서, $f(a, b) \leq f(x, y)$를 만족하면, 극솟값, 반대면 극댓값이라고 한다.

절대극값 정의역 D의 모든 점 (x, y)에서, $f(a, b) \leq f(x, y)$를 만족하면, 최솟값, 반대면 최댓값이라고 한다.

8.2 $\varnothing \neq D \subset \mathbb{R}^2$에서, $f : D \to \mathbb{R}$이다. 'f는 D의 모든 점에서 국소극댓값과 국소극솟값을 가진다.' 가능하냐.

$f(x, y) = 0$이이면, 어떤 정의역의 부분집합S와 원소 $(x, y) \in S$에 대해서, $f(a, b) \leq f(x, y)$이지, $f(a, b) \geq f(x, y)$이니, 모든 점에서 극댓값과 극솟값을 갖는다.

8.3 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto cos(x)$는 어디서 극값을 갖는가

$(0, 1)$에서만 극값을 갖는다. 실수를 정의역으로 갖는 일반적인 코사인함수는 $x = n\pi$꼴에서 극값을 갖는다. 하지만, $n! = 0$인 경우, $n \in \mathbb{Q}$일 때, $n\pi$는 무리수이다. 따라서, 이 수에 가장 가까운 유리 x를 잡는다고 해도, 실수의 완비성에 의해, 이 실수보다 $n\pi$더 가까운 유리수를 잡을 수 있다. 그리고, 이 값은 $f(x)$보다 더 $f(n\pi)$에 가까울 것이다. 따라서, 이 경우에는 극값을 잡을 수 없다.

8.4 이변수 함수의 일차근사함수

$f(a + h, b + k) = f(a, b) + |(hf_x + kf_y)|_{(a,b)}$

8.5 이변수 함수의 이차근사함수

$f(a + h, b + k) = f(a, b) + (hf_x + kf_y)|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 fyy\right)\Big|_{(a,b)}$

제 9 장

자기주도적 학습 과제 9 (2.5, 10.2, 14.1)

D는 $\mathbb{R}^2$의 부분집합을 나타냅니다.

9.1 닫힌집합 D 내부에 수렴하는 수열의 수렴값은 집합 내부에 있다. (힌트: 여집합의 내부점, 모순)

$L \notin D$면 $L \in \mathbb{R}^2 \setminus D$이다. 정의에 의해 L은 $\mathbb{R}^2 \setminus D$의 내부점, 아니면 경계점이 된다. 경계점일 경우, D의 경계점도 되므로 모순이다. 따라서 L은 $\mathbb{R}^2 \setminus D$의 내부점이다. 따라서 적당한 양수 ϵ이 존재해서, $|L - x| < \epsilon$인 점들은 역시 $\mathbb{R}^2 \setminus D$의 내부점이다. 그렇다면 극한의 정의에 의해, $\forall \epsilon > 0$에서, $\exists M > 0$이여서 , $x_k \in D, k > M \Rightarrow |L - f(X_k)| < \epsilon$이다. 근데, 위의 정의에 의해 $x_k \in \mathbb{R}^2 \setminus D$이다. 모순이다. 따라서, $L \in D$이다.

9.2 유계인 집합 D 내부의 모든 수열은, 수렴하는 부분수열을 갖는다. (힌트: Bolzano-Weierstrass 정리)

Bolzano-Weierstrass 정리에 의해 성립한다. D를 포함하는 큰 직사각형을 잡고, 적당히 합동인 직사각형으로 쪼개는 것을 반복하며, 각 직사각형 중에는 무한한 점을 갖은 사각형이 있다.

9.3 유계인 닫힌집합 D에서 정의된 실수값 함수도 유계이다.

$\{x_k\}$가 유계가 아니라고 가정하자. 일관성을 잃지 않고, 그렇다면 한 점 p가 존재해서, $n \to \infty$일 때, $x_n \to p$이고, $f(x_n) \to \infty$이다. 근데, 9.1절에서 이미 $p \in D$이므로, $f(p)$가 존재해야 한다.

f가 연속함수라면, 모순이다.

f가 연속함수가 아니라면, 다른 값을 갖는 것이 가능하다,

9.4 $f(x, y) = \sin x + \cos y$가 $\mathbb{R}^2$에서 균등연속임을 보이시오. (힌트: 균등연속 정의 줌)

균등연속 정의 $f : D \to \mathbb{R}^m$에 대해,

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall s \in D$, $\forall t \in D$:

$(|s - t| < \delta \to |f(s) - f(t)| < \epsilon)$여야 한다.

보조정리 $\forall x, y \in \mathbb{R}$에 대해서, $|x-y| < |\sin(x) - \sin(y)|$, $|s-t| < |\cos(x) - \cos(y)|$이다. 증명: MVT를 이용한다. sin함수와 cos함수를 미분해도 그들이니, 미분한 값의 크기는 1보다 무조건 같거나 작다.

증명 $\epsilon > 0$, $s = (s_1, s_2), t = (t_1, t_2) \in R^2$에 대해, $|s-t| < \frac{\epsilon}{2}$면 $|s_1 - t_1| < \frac{\epsilon}{2}$이고, $|s_2 - t_2| < \frac{\epsilon}{2}$이다. 따라서,

$$|f(s) - f(t)| = \sqrt{(\sin s_1 - \sin t_1)^2 + (\cos s_2 - \cos t_2)} \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} < \epsilon$$

이다. 따라서 균등연속이다.

제 10 장

자기주도적 학습 과제 10

$I = [a, b]$는 길이가 양수인 닫힌구간, f는 I에서 정의된 실수값 함수입니다. 다음의 (간략하게 적혀 있는) 명제를 증명해야 한다.

10.1 I는 닫힌 집합이다

$I = [a, b]$라고 하자.($a < b$) 따라서 모든 $x \in I$는 $a \leq x \leq b$를 만족한다.

$x = a$면 아무리 작은 $b - a > \delta > 0$를 잡아도, $x - \delta \notin I$이고, $x + \delta \in I$이다. 따라서, x는 경계점이다.

$a < x < b$면 $\delta = \min(x - a, b - a)$면, $\{x' \,|\, |x - x'| < \delta\} \in I$므로, x는 내부점이다.

$x = b$ 면, $x = a$와 같은 상황이므로 x는 경계점이다.

그 이외의 경우 , $\delta = \min(|x - a|, |b - a|)$면, $\{x' \mid |x - x'| < \delta\} \in I^c$이며, $\forall\delta$에 대해서도, $x \notin I$므로, 이는 I의 경계점도, 내부점도 될 수 없다.

따라서, 모든 경계점이 I에 포함되므로, I는 닫힌집합이다.

10.2 항상 상합보다 하합이 크다. (분할, 상합, 하합의 정의 주어짐)

분할 P가 I의 분할이라고 하자. $P = \{x_0, x_1, \cdots x_n\}$이다. 이렇다면, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$가 성립한다는 말이다.

그리고, $M_i = \sup\{f(c_i) \mid x_{i-1} \leq c_i \leq x_i\}$ $m_i = \inf\{f(c_i) \mid x_{i-1} \leq c_i \leq x_i\}$로 정의하자. 상한과 하한이라는 뜻이다.

상합

$$U(f, p) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

하합

$$L(f, p) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

증명 $m_i < M_i$이다. 따라서, $m_i \Delta x_i < M_i \Delta x_i$이고, $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i < \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$이다.

따라서, $L(f,p) < U(f,p)$이다.

10.3 세련분할은 원래 분할보다 상합은 작아지고 하합은 커진다.

보조정리 $a < b < c$일 때, $\sup([a,b])(b-a) + \sup([b,c])(b-c) \leq \sup([a,c])(c-a)$이다.

정의에 의해서, $\max(\sup([a,b]), \sup([b,c])) = \sup([a,c])$이다. 따라서, $\sup([a,b]) \leq \sup([a,c])$, $\sup([b,c]) \leq \sup([a,c])$이다.

증명 P의 세련분할을 Q라고 하자. 세련분할의 정의에 의해

$$Q = \{x_0 = x_{0,0}, x_{0,1}, \cdots x_{0,a_0}, x_1 = x_{1,0}, x_{1,1}, \cdots x_{1,a_1}, \cdots x_n\}$$

이라고 하자. a_n은 각 항이 자연수인 수열이다.

이때, 보조정리를 귀납적으로 적용하면,

$$\sum_{i=0}^{a_k - 1} \sup([x_{k,i}])(x_{i+1} - x_i) \leq M_k \delta x_k$$

가 성립하게 된다. 따라서 이것을 다 더해주면, $U(f,Q) \leq U(f,P)$가 성립한다.

하합에서도, 마찬가지로 성립한다.

10.4 f는, 분할을 적당히 잡아 상합과 하합을 ϵ보다 작게 만들 수 있다.

$\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{b-a+1}$라 두자. 다음과 같은 알고리즘을 생각한다.

x_k에 대해서, 생각하자.

$x > x_k$중에서, $f(x) \geq f(x_k) + \epsilon_0$ 또는 $f(x) \leq f(x_k) - \epsilon_0$인 점들 중 가장 작은 점을 잡자. 이 값이 b보다 작으면 $x_k + 1$로 정의한다. b아니면 멈춘다.

일단, $x > x_k$임은 자명하다. 그리고, 이 반복문이 무한히 반복한다면, 또 x_k는 증가하므로, b보다 작으므로, 단조수렴 정리에 의해 어떤 값에 수렴할 것이다. 그렇다면, 이 값을 기준으로 엡실론-델타 논법을 적용했을 때, 차이가 ϵ_0가 되게 하는 점을 모든 ϵ에 대해 잡을 수 있고, 따라서 f는 이 점에서 수렴하지 않으므로 연속의 정의에 어긋난다. 따라서 이 반복문은 유한번 시행 후 종료될 것이다. $n-1$회 실행될 것이다.

그리고, $\max(\sup[x_k, x_k + 1] - \max(\inf[x_k, x_k + 1] = \epsilon_0$이 성립할 것이다.

따라서, $P = \{x_0, x_1 \cdots x_n\}$로 잡으면, $U(f,P) - L(f,P) \leq \epsilon_0(b-a) < \epsilon$이 성립한다.

10.5 f는, 상적분값과 하적분값이 일지한다. (상적분, 하적분 정의 주어짐.)

상적분, 하적분 상적분은 $U(f,P)$들의 하한이다. 하적분은 반대로 정의된다.

상적분값보다 하적분값이 크다면 , 각각의 적분값을 만드는 분할들이 있을 것이다. 그 분할의 합집합을 구하면, 공통 세련분할을 구할 수 있고 이를 P라고 하면, 10.3절과 모순이다. 따라서 이는 거짓이다.

상적분값보다 하적분값이 작다면 둘은 ϵ_1만큼 차이가 날 것이다. 그렇다면, 10.4절에서 보인 것과 같이, 이들보다 더 적은 차이가 나게 하는 분할 P가 존재할 것이다. 그렇다면, 상적분값과 하적분값 중 한 값이 수정되어야 할 것이다. 따라서 모순이다.

따라서, 상적분값과 하적분값이 같다.