미II 16단원 :: 적분과 벡터장

미II를 공부하는 사람.

2021년 6월 8일

요 약

미적분 II 16단원 공부를 위해 만들어 봤습니다. 내용을 봐보고 뭔가 복잡함에 충격!!받아서 이렇게 세세히 구경해(?) 보기로 마음먹었어요. 음 뭐 더 쓸말이 있나? 하여튼 타자 치는데 3시간 걸렸다는 것이 문제. 이럴줄 알았으면 15단원 연습문제나 풀걸...

차 례

제 16 장

적분과 벡터장

16.1 선적분

16.1.1 선적분의 정의

실함수 f가 $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$로 매개화된 곡선 C에서 정의될 때, C에서의 f의 선적분을 다음 같이 정의한다. (극한이 존재할 때)

$$\int_C f(x, y, z)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k$$

16.1.2 선적분의 계산

곡선 C에서 정의된 연속함수 $f(x, y, z)$는 다음과 같이 적분한다.

1. C를 연속함수로 매개화한다.
2. 다음과 같이 적분을 계산한다.

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \le t \le b$$

$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t))\,|\mathbf{v}(t)|\,dt$$

16.2 벡터장과 적분

16.2.1 선적분의 정의

$\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$로 매개화된 매끄러운 곡선 C에서 정외되었고, 각 성분이 연속인 벡터장 F에 대해서 F의 C에서의 선적분을 다음과 같이 정의한다.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

16.2.2 선적분의 계산

F가 t애 대한 함수이고, r이 위와 같이 정의될 때, 선적분을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

16.2.3 유동(flow)

$\mathbf{r}(t)$로 매개화된 매끄러운 곡선 C에서 정외되었고, 연속인 속도장 F에 대해서, $A = \mathbf{r}(a)$에서 $B = \mathbf{r}(b)$까자의 **유동**을 다음과 같이 정의한다.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot T \, \mathrm{d}s.$$

이것을 유동적분이라고 부른다. 만일 $A = B$라면, 이 유동은 **순환**이라고 부른다.

16.2.4 유출(flux)

C가 단순 닫힘 곡선일 때, 이를 정의역으로 갖는 벡터장 $\mathbf{F} = \mathbf{M}(x, y)\mathbf{i} + \mathbf{N}(x, y)\mathbf{j}$을 생각하자. 그리고 $\mathbf{n}$은, C위에서 움직이고, 바깥을 향하는 단위 법선벡터일 때, C를 가로지르는 $\mathbf{F}$의 유출을 다음과 같이 정의한다.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot n \, \mathrm{d}s.$$

16.2.5 유출의 계산

C가, 연속인 함수 $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \le t \le b$로, 반시계방향(counterclockwise)으로 매개회된 곡선이며, 벡터장 $\mathbf{F} = \mathbf{M}(x, y)\mathbf{i} + \mathbf{N}(x, y)\mathbf{j}$이 주어졌을 때, C를 가로지르는 $\mathbf{F}$의 유출은 다음과 같이 계산한다.

$$\oint_C M dy - N dx$$

16.3 경로 독립, 보존장, 퍼텐셜 함수

16.3.1 경로 독립

$\mathbf{F}$는 열린 영역 D에서 정의된 벡터장이라고 하자. 그리고 D 위의 어떤 두 점 A와 B에 대해, 두 점을 잇는 $\mathbf{D}$상의 모든 경로 C에 대해 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$이 일정하다면, $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$는 D에서 **경로 독립**이며, F는 D에서 **보존적 벡터장**이다.

16.3.2 퍼텐셜 함수

벡터장 $\mathbf{F}$가 D에서 정의되었고, $\mathbf{F} = \nabla f$인 스칼라 함수 f가 D에 존재한다면, f를 F의 **퍼텐셜 함수**라고 부른다.

16.3.3 선적분의 기본정리

C를 점 A와 점B를 잇는, $\mathbf{r}(t)$로 매개화된 매끄러운 곡선이라고 하자. C를 포함하는 어떤 영역 D에서 $\mathbf{F} = \nabla f$를 만족하는 미분가능한 함수 f가 존재할 때 다음이 성립한다.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

16.3.4 기울기 벡터장과 보존적 벡터장의 관계

연결된 열린영역 $\mathbf{D}$에서, 각 성분이 연속인 $\mathbf{F}$에 대해, $\mathbf{F}$가 보존적인 것은 다음과 동치이다.

$\mathbf{F} = \nabla f$인, 미분 가능한 f가 존재한다.

16.3.5 닫힌 곡선에서 보존적 벡터장의 성질

연결된 열린영역 D에서 정의된 벡터장 $\mathbf{F}$과 모든 닫힌곡선 C에서, $\mathbf{F}$가 보존적인 것은 다음과 동치이다.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot dr = 0$$

16.3.6 보존장의 성분 판정법

열린 단순연결영역에서 정의되었고, 각 성분의 편도함수가 연속인 $\mathbf{F} = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$에 대해, $\mathbf{F}$가 보존적인 것은 다음과 동치이다.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} \quad \wedge \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

16.3.7 완전미분형식의 정의

$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$이고, M, N, P 가 스칼라장일 때,

$$M dx + N dy + P dz$$

꼴로 쓴 식을 **일차미분형식**이라 부른다. 일차미분형식이 어떤 f의 전미분이 된다면, 이 일차미분형식을 **완전미분형식**(exact diffenential form)이라고 부른다. F가 보존적 벡터장이면, 일차미분형식은 완전미분형식이 된다.

16.4 평면에서의 그린정리

16.4.1 순환밀도, 회전

벡터장 $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$의 점$(x,y)$에서 **순환밀도**, 또는 **회전(curl)의 k성분**는 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

이는 $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$로 구해진다.

16.4.2 유출밀도, 발산

벡터장 $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$의 점$(x,y)$에서 **유출밀도**, 또는 **발산**(divergence)은 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

16.4.3 그린정리 (순환-회전공식, 접선공식)

C는 조각마다 매끄럽고, 영역 R에서의 단순닫힌곡선이다. $F = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$는 R에서 M과 N의 편도함수가 연속인 벡터장이다. 이때, 다음이 성립한다.

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T} = \oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R (\mathrm{curl}\, F)\cdot k dA$$

16.4.4 그린정리 (유출량-발산공식, 법선공식)

C는 조각마다 매끄럽고, 영역 R에서의 단순닫힌곡선이다. $F = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$는 R에서 M과 N의 편도함수가 연속인 벡터장이다. 이때, 다음이 성립한다.

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot n = \oint_C Mdy - Ndx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R (\mathrm{div}\, F)\, dA$$

16.5 곡면과 면적

16.5.1 곡면의 매끄러움

매개변수화된 곡면 $\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k}$에 대해, $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$가 연속이고, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$이면, 이 곡면을 **매끄럽다**고 한다.

16.5.2 면적

$\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k}$이고, $a \le u \le b$, $c \le v \le d$인 매끄러운 곡면의 면적은 다음과 같다.

$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA = \int_c^d \int_a^b |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dudv$$

16.5.3 면적의 미분소

$$d\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dudv \qquad \iint_S d\sigma$$

16.5.4 음함수로 표현된 곡면의 넓이

닫혀있고 유계인 영역 R에서 정의된 $\mathbf{F}(x,y,z) = c$에 대해 곡면의 넓이는 다음과 같다.

$$\iint_R \frac{|\nabla \mathbf{F}|}{|\nabla \mathbf{F}\cdot \mathbf{p}|} dA$$

단, $\mathbf{p}$는 R에 수직이고 $\nabla \mathbf{F}\cdot \mathbf{p} \neq 0$

16.5.5 $z = f(x, y)$꼴의 곡면의 넓이

xy-평면 위의 영역 R에서 정의된 그래프 $z = f(x, y)$의 곡면의 넓이는 다음과 같다.

$$\iint_R \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\ dxdy$$

16.6 면적분

16.6.1 면적분의 정의

표면 S에서 정의된 실수값 함수 G의 **면적분**은 다음과 같이 정의한다.

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k$$

16.6.2 면적분의 계산

1. 매끄러운 곡면 S가 $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$, $(u, v) \in R$로 매개화될때, R에서의 이중적분으로 계산할 수 있다.

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma = \iint_R G(f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \left| \nabla \mathbf{F} \cdot \mathbf{p} \right| dudv$$

2. S가 $F(x, y, z) = c$형태의 음함수 꼴로 표현될 때, (단, F는 연속적으로 미분가능) R에서의 이중적분으로 계산할 수 있다.

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma = \iint_R G(x, y, z) \frac{|\nabla \mathbf{F}|}{|\nabla \mathbf{F} \cdot \mathbf{p}|} dA$$

3. S가 $z = f(x, y)$꼴로 주어졌을 때, (단, f는 xy-평면에서 연속적으로 미분가능) R에서의 이중적분으로 계산할 수 있다.

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma = \iint_R G(x, y, z) \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\ dxdy$$

16.6.3 면적분의 정의(벡터장)

F는 3차원공간에서 정의된 벡터장이다. 매끄러운 곡면 S에 대해 S에서 F의 **면적분**은 다음과 같다. ($\mathbf{n}$은 S의 단위접선벡터). 이는 S를 가로지르는 F의 발산이다.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

16.7 스토크스 정리

16.7.1 스토크스 정리

조각마다 매끄러운 표면 S와, 그것의 경계 C를 생각하자. $\mathbf{n}$은 S에 수직한 단위법선벡터이다. S에서 연속인 편도함수를 갖는 벡터장 $\mathbf{F}$에 대해 다음이 성립한다.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

16.7.2 회전과 보존장

영역 D의 모든 점에서 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$이면, $\mathbf{F}$는 보존적이다.

16.8 발산정리

16.8.1 발산정리

조각마다 매끄러운 닫힌곡면 S를 생각하자. $\mathbf{n}$은 S에 수직한 단위법선벡터이다. 연속인 편도함수를 갖는 벡터장 $\mathbf{F}$에 대해 다음이 성립한다.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

16.8.2 발산과 회전

F는 이계 편미분함수가 연속인 벡터장이다. 그렇다면 다음을 만족한다.

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{F}) = 0$$