선대 :: 정의 복습

선대를 공부하는 사람.

2021년 6월 16일

요 약

선대 정의 정리하기. 두둥.

1 집합과 함수

1.1 함수

- 단사함수, one-to-one, injective, $f(s) = f(s') \Rightarrow s = s'$
- 전사함수, onto, surjective, $\mathrm{Im}(f) = T$
- 전단사함수, one-to-one correspondence, bijective

1.2 치환

2 군과 체

2.1 군

집합 G와 이항연산 $*$에 대해, 군 $\langle G, * \rangle$은 다음 조건을 만족

1. G는 $*$에 닫혀있음
2. $*$는 $\overset{\text{associative}}{\text{결합법칙}}$만족
3. 항등원 존재
4. 모든 원소에 역원 존재 $(s * t = t * s = e)$

2.2 환

집합 R과 연산 $+$, $\cdot$에 대해서 다음을 만족

1. $\langle R, + \rangle$는 덧셈군(=가환)
2. $\langle R, \cdot \rangle$는 반군 (덧셈, 결합법칙 有)
3. 분배법칙 성립. $a(b + c) = ab + ac$

2.3 체

다음을 만족하는 환 K를 체라고 함.

1. 가환환 (commutative ring), (=교환법칙 성립)
2. ring with unity ($\cdot$의 항등원 존재)

3 벡터공간과 선형변환

3.1 벡터공간

체 K, 덧셈군 V에 대해, $K \times V \to V$인 스칼라 연산이 존재. 그리고 다음을 만족

1. $\langle V, + \rangle$는 가환군

2. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
3. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
4. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
5. $1v = v$

3.2 부분공간

W가 V의 부분공간일 필요충분조건은, W가 스칼라연산과 덧셈연산에 대해 닫혀있다는 것이다.

3.3 선형변환

같은 체 K위에 정의된 두 벡터공간 V, V'에 대해, 함수 $T : V \to V'$이 다음을 만족하면 선형 변환임.

1. $T(v + w) = T(v) + T(w)$
2. $T(\lambda v) = \lambda T(v)$

4 차원

4.1 랭크-널리티 정리

선형 변환 $T : V \to W$에 대하여...

- $\dim(\text{rank}(T)) = \text{rk}(T)$
- $\dim(\text{Ker}(T)) = \text{null}(T)$
- $\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = \dim(V)$

5 행렬

5.1 행렬의 성분의 표현

$$\mathbf{A}_i^j = a_{ij}(\text{옳은 표현인지 모름})$$

$$e_i^T \mathbf{A} = A_i$$

$$\mathbf{A} e_j = A^j$$

5.2 계수행렬과 첨가행렬

$Ax = B$에서,

- A는 $\overset{\text{coefficient matrix}}{\textbf{계수행렬}}$
- $(A|B)$는 $\overset{\text{augmented matrix}}{\textbf{첨가행렬}}$

6 선형변환과 행렬표현

6.1 선형대수학의 기본정리(가제)

실은 둘이 같음. 일단 선형 변환의 공간을 만듦.

Hom(K^n, K^m)에서 논의한다. T에 대해 $M(T)$를 정의하고, 서로 동형이며, 선형변환의 합성은 행렬의 곱임.

Hom(V, V')로 확장함. 좌표사상(coordinate map)을 이용.

6.2 쌍대공간

$rk(T) = rk(T^*)$, $M(T) = M(T^*)^T$, 우역원 존재시 좌역원 존재. 이 둘은 동일!!!

6.3 기저의 변환

7 내적공간

7.1 실내적공간

사상 $V \times V \to \mathbb{R}, (v, w,) \mapsto \langle v|w \rangle$이 정의된 벡터공간 V

1. $\langle v|v \rangle \geq 0$이며, 등호는 $v = 0$때만
2. $\langle v|w \rangle = \langle w|v \rangle$
3. - $\langle u + v|w \rangle = \langle u|w \rangle + \langle v|w \rangle$
   - $\langle av|w \rangle = a \langle v|w \rangle$

7.2 통상내적

$$\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

7.3 복소내적공간

사상 $V \times V \to \mathbb{C}, (v, w,) \mapsto \langle v|w \rangle$이 정의된 벡터공간 V

1. $\langle v|v \rangle \geq 0$이며, 등호는 $v = 0$때만
2. $\langle v|w \rangle = \overline{\langle w|v \rangle}$
3. - $\langle u + v|w \rangle = \langle u|w \rangle + \langle v|w \rangle$
   - $\langle av|w \rangle = a \langle v|w \rangle$

antilinearity

마지막 2개는 **반선형성**이라 함

8 행렬식

다음을 만족하는 사상 $\det : M_n(K) \mapsto K$ 을 행렬식이라 함

1. $A_j = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$, $\det(A) = \lambda_1 \det(A^1 \cdots C_1 \cdot A^n) + \lambda_2 \det(A^1 \cdots C_2 \cdots A^n)$

2. $A = (A^1 A^2 \cdots A^n)$에서, $A^j = A^{j+1}$면, $\det(A) = 0$

3. $\det(I_n) = 1$

Multilinearity Alternation of Sign Normalization
각각 다중선형성, 부호 교대성질, 정규화 성질이라 불림

8.1 행렬식의 표현

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\partial_{ij} A)$$

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \sigma(\pi) a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n}$$

후자를 이용해, $\det(A) = \det(A^T)$임을 보일 수 있다.

8.2 여인자

- $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\partial_{ij} A)$ 인 C를 **여인자**라고 부름. (cofactors)

- C_i^j성분이 C_{ij}인 $n \times n$행렬 C를 **여인자 행렬**이라 부르며,

- 이것의 전치행렬을 **수반행렬**이라 부름. (adjoint matrix)

- 특히, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A)$가 성립함.

9 교윳값, 고유벡터

9.1 정의

$T : V \to T$인 선형사상에 대해 0아닌 $v \in V$에 대해 $T(v) = \lambda v$를 만족시킬 때, λ를 **고윳값** (eigenvalue), 0아닌 벡터 v를 **고유벡터** (eigenvector)라 함.

9.2 특성다항식

$$p(t) = \det(tI_n - A)$$

10 자기준동형사상의 표현

11 부록: $\det(A) \neq 0$과 동치들

$A \in M_n(K)$일때, 다음은 동치임.

1. $\forall y \in K,\ A\mathbf{x} = \mathbf{y}$의 해는 최소 하나 이상

2. A의 행공간은 K^n
3. A의 열공간은 K^n
4. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$은, 자명해 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$만 갖음
5. A의 행들은 일차독립
6. A의 열들은 일차독립
7. $\forall y \in K$, $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$는 무조건 하나의 해 갖음
8. A의 행들은 K^n의 기저
9. A의 열들은 K^n의 기저
10. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$
11. $A^T \in \mathrm{GL}_n(K)$
12. $\det(A) \neq 0$
13. $\det(A^T) \neq 0$