Capítulo 2

Relações

2.1 INTRODUÇÃO

O leitor está familiarizado com muitas relações que são usadas em matemática e em ciência da computação, por exemplo, "menor do que", "é paralelo a", "é um subconjunto de", e assim por diante. Em um certo sentido, essas relações levam em consideração a existência ou não de determinadas conexões entre pares de objetos tomados em uma ordem definida. Formalmente, definimos uma relação em termos desses "pares ordenados".

Existem três tipos de relações que desempenham importantes papéis na nossa teoria: (i) relações de equivalência, (ii) relações de ordem e (iii) funções. As relações de equivalência estão fundamentalmente cobertas neste capítulo; as relações de ordem são apresentadas aqui, mas também serão discutidas no Capítulo 14; as funções são cobertas no próximo capítulo.

Como observado acima, as relações serão definidas em termos de pares ordenados (a, b) de elementos, onde a é designado como primeiro elemento e b como segundo elemento. Especificamente,

$$(a, b) = (c, d)$$

se e somente se $a = c$ e $b = d$. Portanto, $(a, b) \neq (b, a)$ a menos que $a = b$. Esse fato contrasta com a teoria de conjuntos estudada no Capítulo 1, em que a ordem dos elementos é irrelevante; por exemplo, $\{3, 5\} = \{5, 3\}$.

Apesar de as matrizes serem estudadas no Capítulo 5 incluímos aqui sua conexão com as relações para tratar do assunto de forma completa. Essas seções, entretanto, podem ser ignoradas em uma primeira leitura por aqueles que não possuem conhecimento prévio da teoria de matrizes.

2.2 PRODUTOS DE CONJUNTOS

Considere dois conjuntos arbitrários A e B. O conjunto de todos os pares ordenados (a, b) onde $a \in A$ e $b \in B$ é chamado de *produto* ou *produto cartesiano* de A e B. Uma designação abreviada desse produto é $A \times B$, que pode ser lida como "A cartesiano B". Por definição,

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Freqüentemente se escreve A^2 em vez de $A \times A$.

Exemplo 2.1 $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, e $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o conjunto dos pares ordenados de números reais. O leitor está familiarizado com a representação geométrica de $\mathbb{R}^2$ por pontos no plano, como na Fig. 2-1. Aqui, cada ponto P representa um par ordenado (a, b) de números reais e vice-versa; a linha vertical contendo P intercepta o eixo x em a, e a linha horizontal contendo P intercepta o eixo y em b. $\mathbb{R}^2$ é freqüentemente chamado de *plano cartesiano*.

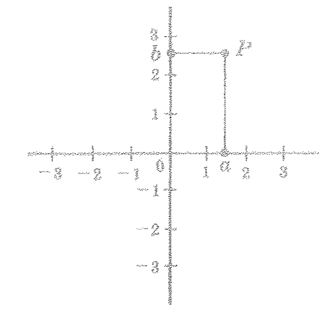


Fig. 2-1

Exemplo 2.2 Sejam $A = \{1,2\}$ e $B = \{a,b,c\}$. Então,

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$$
$$B \times A = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$$

Também $A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

Existem dois fatos dignos de nota no exemplo acima. Primeiramente, $A \times B \neq B \times A$. O produto cartesiano diz respeito a pares ordenados de modo que, naturalmente, a ordem em que os conjuntos são considerados é importante. Em segundo lugar, usando $n(S)$ para o número de elementos em um conjunto S, temos

$$n(A \times B) = 6 = 2 \cdot 3 = n(A) \cdot n(B).$$

Na verdade, $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ para quaisquer conjuntos finitos A e B. O resultado segue da observação de que, para um par ordenado (a,b) em $A \times B$, existem $n(A)$ possibilidades para a e, para cada uma delas, existem $n(B)$ possibilidades para b.

A idéia de produto de conjuntos pode ser estendida para qualquer número finito de conjuntos. Para quaisquer conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, o conjunto de todas as n-tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, é chamado de *produto* dos conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ e é denotado por:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \qquad \text{ou} \qquad \prod_{i=1}^{n} A_i\,.$$

Da mesma maneira que escrevemos A^2 em vez de $A \times A$, escrevemos A^n em vez de $A \times A \times \cdots \times A \times A$, onde existem n fatores, todos iguais a A. Por exemplo, $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ denota o espaço tridimensional usual.

2.3 RELAÇÕES

Começamos com uma definição:

Definição: Sejam A e B conjuntos. Uma *relação binária* ou, simplesmente, *relação* de A para B é um subconjunto de $A \times B$.

Suponha que R é uma relação de A para B. Então R é um conjunto de pares ordenados onde cada primeiro elemento pertence a A e cada segundo elemento pertence a B. Isto é, para cada par $a \in A$ e $b \in B$, exatamente uma das seguintes afirmativas é verdadeira:

(i) $(a,b) \in R$; dizemos que "a é *R-relacionado* a b", escrevendo $a\,R\,b$.

(ii) $(a,b) \notin R$; dizemos que "a não é R-relacionado a b", escrevendo $a \not R b$.

Se R é uma relação de um conjunto A para si mesmo, isto é, se R é um subconjunto de $A^2 = A \times A$, então dizemos que R é uma relação em A.

O *domínio* de uma relação R é o conjunto de todos os primeiro elementos de um par ordenado que pertence a R, e a imagem de R é o conjunto dos segundos elementos.

Embora as relações n-árias, que envolvem n-tuplas, sejam introduzidas na Seção 2.12, o termo "relação" significará relação binária, a menos que haja sentido implícito ou especificação em contrário.

Exemplo 2.3

(a) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, z\}$, e seja $R = \{(1, y), (1, z)\ (3, y)\}$. Então R é uma relação de A para B, uma vez que R é um subconjunto de $A \times B$. Com respeito a esta relação,

$$1Ry, \quad 1Rz, \quad 3Ry, \qquad \text{mas} \qquad 1\not R x, \quad 2\not R x, \quad 2\not R y, \quad 2\not R z, \quad 3\not R x, \quad 3\not R z\,.$$

O domínio de R é $\{1,3\}$ e a imagem é $\{y, z\}$.

(*b*) Sejam $A = \{$ovos, leite, milho$\}$ e $B = \{$vacas, cabras, galinhas$\}$. Podemos definir uma relação R de A para B por $(a,b) \in R$ se a é produzido por b. Em outras palavras,

$$R = \{(\text{ovos, galinhas}), (\text{leite, vacas}), (\text{leite, cabras})\}$$

De acordo com essa relação,

$$\text{ovos } R \text{ galinhas, leite } R \text{ vacas, etc.}$$

(*c*) Suponha que dois países são *adjacentes* se têm alguma parte de suas fronteiras em comum. Então, "ser adjacente a" é uma relação R definida nos países da Terra. Portanto,

$$(\text{Itália, Suíça}) \in R \quad \text{mas} \quad (\text{Canadá, México}) \notin R.$$

(*d*) Inclusão de conjuntos, $\subseteq$, é uma relação em qualquer coleção de conjuntos. Na verdade, dado qualquer par de conjuntos A e B, então ou $A \subseteq B$ ou $A \not\subseteq B$.

(*e*) Uma relação comum no conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros é "m divide n". Uma notação comum para essa relação é escrever $m|n$ quando m divide n. Portanto $6|30$, mas $7\nmid 25$.

(*f*) Considere o conjunto L das retas no plano. Perpendicularidade, escrito $\perp$, é uma relação em L. Isto é, dado qualquer par de retas a e b, ou $a \perp b$ ou a $\not\perp b$. De maneira similar, "ser paralelo a", escrito $\|$, é uma relação em L já que $a \| b$ ou $a \nparallel b$.

(*g*) Seja A um conjunto qualquer. Uma relação importante em A é a relação de *igualdade*.

$$\{(a,a) \colon a \in A\},$$

que é usualmente denotada por "=". Essa relação é também chamada de *identidade* ou *relação diagonal* em A e será também denotada por Δ_A ou Δ.

(*h*) Seja A um conjunto qualquer. Então $A \times A$ e $\varnothing$ são subconjuntos de $A \times A$ e, portanto, são relações em A denominadas, respectivamente, *relação universal* e *relação vazia*.

Relações Inversas

Seja R uma relação qualquer de um conjunto A para um conjunto B. A inversa de R, denotada por R^{-1}, é a relação de B para A que consiste nos pares ordenados que, quando têm sua ordem revertida, pertencem a R; isto é:

$$R^{-1} = \{(b,a) \colon (a,b) \in R\}.$$

Por exemplo, a inversa da relação $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$ de A para B é a seguinte:

$$R^{-1} = \{(y,1), (z,1), (y,3)\}.$$

Claramente, se R é uma relação, então $(R^{-1})^{-1} = R$. Além disso, o domínio e a imagem de R^{-1} são, respectivamente, iguais à imagem e ao domínio de R. Ademais, se R é uma relação em A, então R^{-1} também é uma relação em A.

2.4 REPRESENTAÇÃO PICTÓRICA DE RELAÇÕES

Consideramos primeiramente uma relação S no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais; isto é, S é um subconjunto de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R}^2$ pode ser representado pelo conjunto de pontos no plano, podemos representar S assinalando os pontos no plano que pertencem a S. A representação pictórica de S é geralmente chamada de *gráfico* da relação.

Freqüentemente a relação S consiste em todos os pares ordenados de números reais que satisfazem uma equação dada:

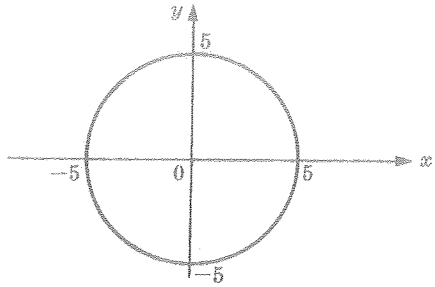
$$E(x,y) = 0.$$

Normalmente identificamos a relação com a equação, isto é, falamos da relação $E(x,y) = 0$.

Exemplo 2.4 Considere a relação S definida pela equação

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Isto é, S consiste em todos os pares ordenados (x, y) que satisfazem a equação dada. O gráfico da equação é um círculo com centro na origem e raio 5. Veja a Figura 2-2.



$x^2 + y^2 = 25$

Fig. 2-2

Representações de Relações em Conjuntos Finitos

Suponha que A e B são conjuntos finitos. Apresentamos a seguir duas maneiras de representar graficamente uma relação R de A para B.

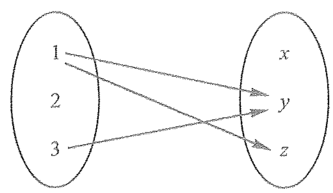
(i) Forme uma matriz retangular, nomeando as linhas pelos elementos de A e as colunas pelos elementos de B. Coloque 1 ou 0 em cada posição da matriz dependendo de $a \in A$ estar ou não relacionado com $b \in B$. Essa matriz é chamada de *matriz da relação*.

(ii) Escreva os elementos de A e os elementos de B em dois discos disjuntos e, então, desenhe uma seta de $a \in A$ para $b \in B$ sempre que a estiver relacionado com b.

A Figura 2-3 representa a primeira relação do Exemplo 2.3 das duas maneiras descritas acima.

	x	y	z
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	0

(i)



(ii)

$R = \{(1, y),\ (1, z),\ (3, y)\}$

Fig. 2-3

Grafos Orientados em Relações de Conjuntos

Existe uma outra maneira de representar graficamente uma relação R quando R é uma relação de um conjunto finito nele mesmo. Primeiramente escrevemos os elementos do conjunto e então desenhamos uma seta de cada elemento x para um elemento y sempre que x estiver relacionado a y. Esse diagrama é denominado *grafo orientado* da relação. A Figura 2-4, por exemplo, mostra o grafo orientado da seguinte relação R no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R = \{(1,2),\ (2,2),\ (2,4),\ (3,2),\ (3,4),\ (4,1),\ (4,3)\}.$$

Observe que existe uma seta partindo de 2 para si mesmo, já que 2 está relacionado a 2 por R.

Esses grafos orientados serão estudados em detalhes, como um tema separado, no Capítulo 8. Eles estão mencionados aqui principalmente para que se dê tratamento completo ao assunto.

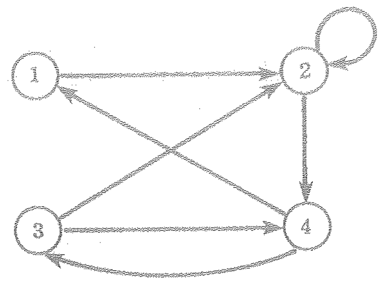


Fig. 2-4

2.5 COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

Sejam A, B e C conjuntos, e seja R uma relação de A para B e seja S uma relação de B para C. Isto é, R é um subconjunto de $A \times B$, e S é um subconjunto de $B \times C$. Então R e S originam uma relação de A para C denotada por $R \circ S$ e definida por:

$$a(R \circ S)c \text{ se para algum } b \in B \text{ temos } aRb \text{ e } bSc.$$

Isto é,

$$R \circ S = \{(a,c)\text{: existe } b \in B \text{ para o qual } (a, b) \in R \text{ e } (b, c) \in S\}.$$

A relação $R \circ S$ é dita a *composição* de R e S; é algumas vezes denotada simplesmente por RS.

Suponha que R é uma relação em um conjunto A, isto é, R é uma relação de A para ele mesmo. Então $R \circ R$, isto é, a composição de R com ela mesma está sempre definida, e $R \circ R$ é às vezes denotada por R^2. Analogamente, $R^3 = R^2 \circ R = R \circ R \circ R$, e assim por diante. Portanto, R^n é definida para todo n positivo.

Aviso: Muitos textos denotam a composição de relações R e S por $S \circ R$. Isso é feito para obter compatibilidade com a notação usual de $g \circ f$ para denotar a composição de f e g onde f e g são funções. Portanto, o leitor pode ter de ajustar sua notação quando usar este texto como complementar de outro. Entretanto, quando uma relação R é composta com ela mesma, o significado de $R \circ R$ não apresenta ambigüidades.

O diagrama de setas da relação nos dá uma interpretação geométrica da composição $R \circ S$ como se vê no exemplo seguinte.

Exemplo 2.5 Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$ e seja

$$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\} \quad \text{e} \quad S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}.$$

Considere o diagrama de setas de R e S como na Figura 2-5. Observe que existe uma seta de 2 para d que é seguida por uma seta de d para z. Podemos considerar essas duas setas como um caminho que conecta o elemento $2 \in A$ ao elemento $z \in C$. Portanto,

$$2(R \circ S)z \qquad \text{já que} \qquad 2Rd \text{ e } dSz$$

De maneira similar, existe um caminho de 3 para x e um caminho de 3 para z. Portanto,

$$3(R \circ S)x \quad \text{e} \quad 3(R \circ S)z,$$

Nenhum outro elemento de A está conectado a um elemento de C. Conseqüentemente,

$$R \circ S = \{(2, z), (3, x), (3, z)\}$$

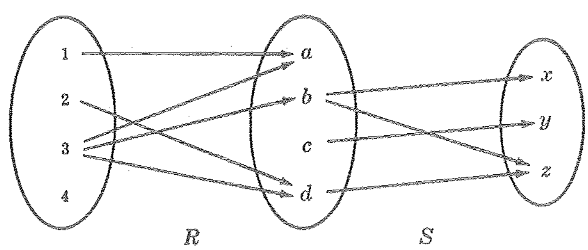


Fig. 2-5

Composição de Relações e Matrizes

Existe uma outra maneira de determinar $R \circ S$. Sejam M_R e M_S, respectivamente, as matrizes da relação R e S. Então,

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{e} \quad M_S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Multiplicando M_R e M_S, obtemos a matriz

$$M = M_R M_S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Os elementos não nulos dessa matriz nos mostram quais elementos estão relacionados por $R \circ S$. Portanto, $M = M_R M_S$ e $M_{R \circ S}$ têm os mesmos elementos não nulos.

Nosso primeiro teorema diz que a composição de relações é associativa.

Teorema 2-1: sejam A, B, C e D conjuntos. Suponha que R é uma relação de A para B, S é uma relação de B para C e T é uma relação de C para D. Então,

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

Provamos esse teorema no Problema 2.11.

2.6 TIPOS DE RELAÇÕES

Considere um dado conjunto A. Esta seção discute tipos de relações importantes que estão definidas em A.

Relações Reflexivas

Uma relação R em um conjunto A é reflexiva se aRa para todo $a \in A$, isto é, se $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$. Portanto, R não é reflexiva se existe um $a \in A$ tal que $(a,a) \notin$ R.

Exemplo 2.6 Considere as seguintes cinco relações em um conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (4,4)\}; \\ R_2 &= \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}; \\ R_3 &= \{(1,3), (2,1)\}; \\ R_4 &= \varnothing, \text{ a relação vazia}; \\ R_5 &= A \times A, \text{ a relação universal}. \end{aligned}$$

Determine quais das relações são reflexivas.

Como A contém os quatro elementos 1, 2, 3 e 4, uma relação R em A é reflexiva se contém os quatro pares (1,1), (2,2), (3,3) e (4,4). Portanto, apenas R_2 e a relação universal $R_5 = A \times A$ são reflexivas. Note que R_1, R_3 e R_4 não são reflexivas uma vez que, por exemplo, (2, 2) não pertence a nenhuma delas.

Exemplo 2.7 Considere as seguintes cinco relações:

(1) Relação $\leq$ (menor ou igual) no conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros.
(2) Inclusão de conjuntos $\subseteq$ numa coleção C de conjuntos.
(3) Relação $\perp$ (perpendicularidade) em um conjunto L de retas no plano.
(4) Relação $\parallel$ (paralelismo) em um conjunto L de retas no plano.
(5) Relação $\mid$ de divisibilidade no conjunto $\mathbb{N}$ de inteiros positivos. (Lembre que $x|y$ se existe um z tal que $xz = y$.)

Determine quais das relações são reflexivas.

A relação (3) não é reflexiva já que nenhuma reta é perpendicular a si mesma. Também (4) não é reflexiva já que nenhuma reta é paralela a si mesma. As outras relações são reflexivas; isto é, $x \le x$ para todo inteiro $x \in \mathbb{Z}$, $A \subseteq A$ para todo $A \in C$ e $n|n$ para todo inteiro positivo $n \in \mathbb{N}$.

Relações Simétricas e Anti-simétricas

Uma relação R em um conjunto A é *simétrica* se aRb implica bRa, isto é, se $(a,b) \in R$ implica $(b,a) \in R$. Logo, R não é simétrica se existe $(a,b) \in R$, mas $(b,a) \notin R$.

Exemplo 2.8

(*a*) Determine quais das relações do Exemplo 2-6 são simétricas.

R_1 não é simétrica já que $(1, 2) \in R_1$ mas $(2, 1) \notin R_1$. R_3 não é simétrica já que $(1,3) \in R_3$ mas $(3,1) \notin R_3$. As outras relações são simétricas.

(*b*) Determine quais das relações no Exemplo 2-7 são simétricas.

A relação R é simétrica, pois, se a reta a é perpendicular à reta b, então b é perpendicular à a. Além disso, a relação $\|$ é simétrica já que, se a reta a é paralela à reta b, então b é paralela à a. As outras relações não são simétricas. Por exemplo, $3 \le 4$, mas $4 \not\le 3$; $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, mas $\{1, 2, 3\} \not\subseteq \{1, 2\}$; e $2|6$, mas $6 \nmid 2$.

Uma relação R em um conjunto A é *anti-simétrica* se aRb e bRa implica $a=b$, isto é, se (a,b) e $(b,a) \in R$, então, $a = b$. Portanto, R não é anti-simétrica se existem $a, b \in A$ tais que (a,b) e $(b,a) \in R$, mas $a \neq b$.

Exemplo 2.9

(*a*) Determine quais das relações do Exemplo 2-6 são anti-simétricas.

R_2 não é anti-simétrica, já que $(1,2)$ e $(2,1)$ pertencem a R_2, mas $1 \neq 2$. Analogamente, a relação universal R_5 não é anti-simétrica. Todas as outras relações são anti-simétricas.

(*b*) Determine quais das relações no Exemplo 2-7 são anti-simétricas.

A relação $\le$ é anti-simétrica pois, sempre que $a \le b$ e $b \le a$, então $a = b$. A inclusão de conjuntos é anti-simétrica já que, sempre que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. Além disso, a divisibilidade em $\mathbb{N}$ é anti-simétrica já que $m|n$ e $n|m$, então $m = n$. (Note que a divisibilidade em $\mathbb{Z}$ não é anti-simétrica uma vez que $3|-3$ e $-3|3$, mas $3 \neq -3$.) A relação $\perp$ não é anti-simétrica já que se pode ter retas distintas a e b tais que $a \perp b$ e $b \perp a$. Similarmente, $\|$ não é anti-simétrica.

Observação: As propriedades de simetria e anti-simetria não são mutuamente excludentes. Por exemplo, a relação $R = \{(1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$ não é nem simétrica nem anti-simétrica. Por outro lado, a relação $R' = \{(1, 1), (2, 2)\}$ é simétrica e anti-simétrica.

Relações Transitivas

Uma relação R em um conjunto A é *transitiva* se aRb e bRc implica aRc, isto é, se (a,b) e $(b,a) \in R$, então $(a,c) \in R$. Logo, R não é transitiva se existem $a, b, c \in$ A tais que (a,b) e $(b,c) \in R$, mas $(a,c) \notin R$.

Exemplo 2.10

(*a*) Determine quais das relações no Exemplo 2.6 são transitivas.

A relação R_3 não é transitiva porque $(2,1)$ e $(1,3) \in R_3$, mas $(2,3) \notin R_3$. Todas as outras relações são transitivas.

(*b*) Determine quais das relações no Exemplo 2.7 são transitivas.

As relações $\le$, $\subseteq$ e $|$ são transitivas. Isto é, (i) $a \le b$ e $b \le c$ então, $a \le c$. (ii) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$. (iii) Se $a|b$ e $b|c$, então $a/ \subseteq c$.

Por outro lado, a relação $\perp$ não é transitiva. Se $a \perp b$ e $b \perp c$, então não é verdade que $a \perp b$. Como nenhuma reta é paralela a si mesma, podemos ter $a\|b$ e $b\|a$, mas $a \nparallel a$. Portanto, $\|$ não é transitiva. (Notamos que a relação "ser paralelo ou igual a" é uma relação transitiva no conjunto L das retas no plano.)

A propriedade de transitividade também pode ser expressa em termos da composição de relações. Para uma relação R em A, definimos

$$R^2 = R \circ R \qquad \text{e, mais geralmente,} \qquad R^n = R^{n-1} \circ R.$$

Então, temos o seguinte resultado.

Teorema 2-2: a relação R é transitiva se e somente se $R^n \subseteq R$ para $n \ge 1$.

2.7 PROPRIEDADES DE FECHO

Considere um conjunto A e a coleção de todas as relações em A. Seja P uma propriedade dessas relações, tal como simetria ou transitividade. Uma relação com a propriedade P será chamada de uma P-relação. O P-fecho de uma relação arbitrária R em A, denotado $P(R)$, é uma P-relação tal que

$$R \subseteq P(R) \subseteq S$$

para toda P-relação S contendo R. Usaremos a notação

$$\text{reflexivo}(R),\ \text{simétrico}(R) \text{ e transitivo}(R)$$

para os fechos reflexivo, simétrico e transitivo de R.

De um modo geral, $P(R)$ não precisa existir. Entretanto, existe uma situação geral em que $P(R)$ sempre existirá. Suponha que P seja uma propriedade tal que existe pelo menos uma P-relação contendo R, e que a interseção de quaisquer P-relações seja também uma P-relação. Então, é possível provar (Problema 2.16) que

$$P(R) = \cap(S\colon S \text{ é uma } P\text{-relação e } R \subseteq S).$$

Logo, pode-se obter $P(R)$ a partir de "restrições"[†], isto é, a partir da interseção de relações. Entretanto, é freqüente que se queira determinar $P(R)$ a partir de "ampliações"[††], isto é, acrescentando elementos a R para obter $P(R)$. Executamos isso abaixo.

Fechos Reflexivos e Simétricos

O próximo teorema nos diz como é fácil obter os fechos reflexivo e simétrico de uma relação.

Teorema 2-3: seja R uma relação em um conjunto A. Então:

(i) $R \cup \Delta_A$ é o fecho reflexivo de R.

(ii) $R \cup R^{-1}$ é o fecho simétrico de R.

Em outras palavras, reflexivo(R) é obtido simplesmente adicionando a R os elementos (a,a) da diagonal que não pertencem originalmente a R, e simétrico(R) é obtido por adicionar a R todos os pares (b,a) tais que (a,b) pertence a R.

Exemplo 2.11

(*a*) Considere a seguinte relação R no conjunto $A = \{1,2,3,4\}$:

$$R = \{(1,1),\ (1,3),\ (2,4),\ (3,1),\ (3,3),\ (4,3)\}.$$

Então:

$$\text{reflexivo}(R) = R \cup \{(2,2),\ (4,4)\} \quad \text{e simétrico}(R) = R \cup \{(4,2),\ (3,4)\}.$$

(*b*) Considere a relação < (menor do que) no conjunto N dos inteiros positivos. Então,

$$\text{reflexivo}(<) = < \cup \Delta = \leq = \{(a,b)\colon a \leq b\}$$

$$\text{simétrico}(<) = < \cup > = \{(a,b)\colon a \neq b\}$$

Fecho Transitivo

Seja R uma relação em um conjunto A. Lembre que $R^2 = R \circ R$ e $R^n = R^{n-1} \circ R$. Definimos

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i.$$

[†] N. de T. No original, *from the top-down*.

[††] N. de T. No original, *from the bottom-up*.

Vale o teorema a seguir.

Teorema 2-4: R^* é o fecho transitivo da relação R.

Suponha que A é um conjunto finito com n elementos. Então, mostramos no Capítulo 8, sobre grafos orientados, que

$$R^* = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

Obtemos, do teorema acima, o seguinte resultado.

Teorema 2-5: seja R uma relação em um conjunto A com n elementos. Então.

$$\text{transitivo}(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

Achar transitivo(R) pode tomar muito tempo quando A tem um grande número de elementos. Uma maneira eficiente de fazer isso será descrita no Capítulo 8. Apresentamos aqui um exemplo simples em que A tem apenas três elementos.

Exemplo 2.12 Considere a seguinte relação R em $A = \{1, 2, 3\}$:

$$R = \{(1,2), (2,3), (3,3)\}$$

Então,

$$R^2 = R \circ R = \{(1,3), (2,3)(3,3)\} \qquad \text{e} \qquad R^3 = R^2 \circ R = \{(1,3), (2,3), (3,3)\}$$

Coerentemente,

$$\text{transitivo}(R) = R \cup R^2 \cup R^3 = \{(1,2), (2,3), (3,3), (1,3)\}$$

2.8 RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Considere um conjunto não vazio S. Uma relação R em S é uma *relação de equivalência* se R é reflexiva, simétrica e transitiva. Isto é, R é uma relação de equivalência em S se tem as seguintes três propriedades:

(1) Para todo $a \in S$, aRa.

(2) Se aRb, então bRa.

(3) Se aRb e bRc, então aRc.

A idéia geral subjacente à de relação de equivalência é de que ela é uma classificação de objetos que, em algum sentido, são parecidos. Na verdade, a relação "$=$" de igualdade, em qualquer conjunto S, é uma relação de equivalência; isto é:

(1) $a=a$ para todo $a \in S$.

(2) Se $a=b$, então $b=a$.

(3) Se $a=b$ e $b=c$, então $a=c$.

Apresentamos outras relações de equivalência a seguir.

Exemplo 2.13

(*a*) Considere o conjunto L das retas e o conjunto T dos triângulos no espaço euclidiano. A relação "é paralelo a ou é igual a" é uma relação de equivalência em L, e congruência e similaridade são relações de equivalência em T.

(*b*) A classificação de animais em espécies, isto é, a relação "é da mesma espécie que" é uma relação de equivalência no conjunto de animais.

(*c*) A relação $\subseteq$ de inclusão de conjuntos não é uma relação de equivalência. É reflexiva e transitiva, mas não é simétrica, já que $A \subseteq B$ não implica $B \subseteq A$.

(*d*) Seja m um inteiro fixo positivo. Dois inteiros a e b são ditos *congruentes módulo m*, denotado

$$a \equiv b \pmod{m},$$

se m divide $a - b$. Por exemplo, para $m = 4$, temos $11 \equiv 3 \pmod 4$ já que 4 divide $11 - 3$, e $22 \equiv 6 \pmod 4$ já que 4 divide $22 - 6$. A relação de congruência módulo m é uma relação de equivalência.

Relações de Equivalência e Partições

Esta seção explora a ligação entre relações de equivalência e partições em um conjunto não vazio S. Lembre primeiramente que uma partição P de S é uma coleção $\{A_i\}$ de conjuntos não vazios de S com as duas propriedades seguintes:

(1) Cada $a \in S$ pertence a algum A_i.
(2) Se $A_i \neq A_j$, então $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Em outras palavras, uma partição P de S é uma subdivisão de S em conjuntos disjuntos não vazios. (Veja a Seção 1.9-4).

Suponha que R seja uma relação de equivalência em um conjunto S. Para cada $a \in S$, denote por $[a]$ o conjunto de elementos de S aos quais a está relacionado por R; isto é,

$$[a] = \{x\colon (a, x) \in R\}.$$

Chamamos de $[a]$ a classe de equivalência de a em S; qualquer $b \in [a]$ é dito *representante* da classe de equivalência.

A coleção de todas as classe de equivalência de elementos de S por uma relação de equivalência R é denotada por S/R, isto é,

$$S/R = \{[a]\colon a \in S\}$$

é chamado de conjunto *quociente* de S por R. A propriedade fundamental de um conjunto quociente está contida no teorema seguinte.

Teorema 2-6: seja R uma relação de equivalência em um conjunto S. O quociente S/A é uma partição de S. Especificamente:

(i) Para cada $a \in S$, temos $a \in [a]$.
(ii) $[a] = [b]$ se e somente se $(a,b) \in R$.
(iii) Se $[a] \neq [b]$, então $[a]$ e $[b]$ são disjuntos.

Por outro lado, dada uma partição $\{A_i\}$ do conjunto S, existe uma relação de equivalência R em S tal que os conjuntos A_i são as classes de equivalência.

Esse importante teorema será provado no Problema 2.21.

Exemplo 2.14

(*a*) Considere a seguinte relação R em $S=\{1, 2, 3\}$:

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}.$$

É possível mostrar que R é reflexiva, simétrica e transitiva, isto é, R é uma relação de equivalência. Sob a relação R,

$$[1] = \{1,2\}, \qquad [2] = \{1,2\}, \qquad [3] = \{3\}.$$

Observe que $[1] = [2]$ e que $S/R = \{[1],[3]\}$ é uma partição de S. Pode-se escolher $\{1, 3\}$ ou $\{2, 3\}$ como conjunto de representantes das classes de equivalência.

(*b*) Seja R_5 a relação no conjunto $\mathbf{Z}$ de inteiros definida por

$$x \equiv y \pmod 5).$$

que se lê "x é congruente a y módulo 5" e que significa que a diferença $x - y$ é divisível por 5. Então, R_5 é uma relação de equivalência em $\mathbf{Z}$. Existem exatamente cinco classes de equivalência no conjunto quociente $\mathbf{Z}/R_5$ como a seguir:

$$A_0 = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$$
$$A_1 = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$$
$$A_2 = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$$
$$A_3 = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$$
$$A_4 = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$$

Observe que qualquer inteiro x, que pode ser expresso de maneira única como $x = 5q + r$ onde $0 \leq r < 5$, é um elemento da classe de equivalência A_r onde r é o resto. Como esperado, as classes de equivalência são disjuntas e

$$\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 .$$

Usualmente se escolhe $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ou $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ como conjunto de representantes das classes de equivalência.

2.9 RELAÇÕES DE ORDEM PARCIAL

Esta seção define uma outra classe importante de relações. Uma relação R em um conjunto S é dita um *ordenamento parcial* ou *uma ordem parcial* se R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Um conjunto S, juntamente com uma ordem parcial R, é dito *parcialmente ordenado*[†]. Conjuntos parcialmente ordenados serão estudados com mais detalhes no Capítulo 14, de forma que aqui apenas apresentamos alguns exemplos.

Exemplo 2.15

(*a*) A relação $\subseteq$ de inclusão de conjuntos é uma ordem parcial em qualquer coleção de conjuntos, uma vez que inclusão de conjuntos tem as três propriedades desejadas. Isto é,

(1) $A \subseteq A$ para todo conjunto A.
(2) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$
(3) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

(*b*) A relação $\leq$ no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Portanto, $\leq$ é uma relação de ordem parcial.

(*c*) A relação "a divide b" é uma relação de ordem parcial no conjunto $\mathbb{N}$ de inteiros positivos. Entretanto "a divide b" não é uma relação de ordem parcial no conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros, já que $a|b$ e $b|a$ não implica $a=b$. Por exemplo, $3|-3$ e $-3|3$ mas $3 \neq -3$.

2.10 RELAÇÕES *N*-ÁRIAS

Todas as relações discutidas anteriormente eram relações binárias. Uma *relação n-ária* é um conjunto de n-tuplas. Para todo conjunto S, um subconjunto do conjunto produto S^n é dito uma relação n-ária em S. Em particular, um subconjunto de S^3 é dito uma *relação ternária* em S.

Exemplo 2.16

(*a*) Seja L uma reta no plano. A "interposição"[††] é uma relação ternária R nos pontos de L; isto é, $(a, b, c) \in R$ se b estiver entre a e c em L.

(*b*) A equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ determina a relação ternária T no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Isto é, a tripla (x,y,z) pertence a T se (x,y,z) satisfaz a equação, o que significa que (x,y,z) são as coordenadas de um ponto em $\mathbb{R}^3$ na esfera S com raio 1 e centro na origem $O = (0, 0, 0)$.

Problemas Resolvidos

Pares Ordenados e Produtos de Conjuntos

2.1 Dados $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$, ache (*a*) $A \times B$; (*b*) $B \times A$; (*c*) $B \times B$.

(*a*) $A \times B$ consiste em todos os pares ordenados (x, y), onde $x \in A$ e $y \in B$. Assim,

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

(*b*) $B \times A$ consiste em todos os pares ordenados (y, x), onde $y \in B$ e $x \in A$. Logo,

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

[†] N. de T. No original, também abreviado como *poset*, referente a *partially ordered set*.

[††] N. de T. No original, *betweenness*.

(*c*) $B \times B$ consiste em todos os pares ordenados (x, y), onde $x, y \in B$. Portanto,

$$B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}.$$

Como esperado, o número de elementos no conjunto produto é igual ao produto do número de elementos em cada conjunto.

2.2 Dados $A = \{1, 2\}$, $B = \{(x, y, z)\}$ e $C = \{3, 4\}$, ache $A \times B \times C$.

$A \times B \times C$ consiste em todas as triplas ordenadas (a, b, c) onde $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Esses elementos de $A \times B \times C$ podem ser sistematicamente obtidos pelo conhecido diagrama de árvore (Figura 2-6). Os elementos de $A \times B \times C$ são precisamente as 12 triplas ordenadas à direita do diagrama de árvore.

Observe que $n(A)= 2$, $n(B)= 3$, $n(C)= 2$ e, como esperado,

$$n(A \times B \times C) = 12 = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C)$$

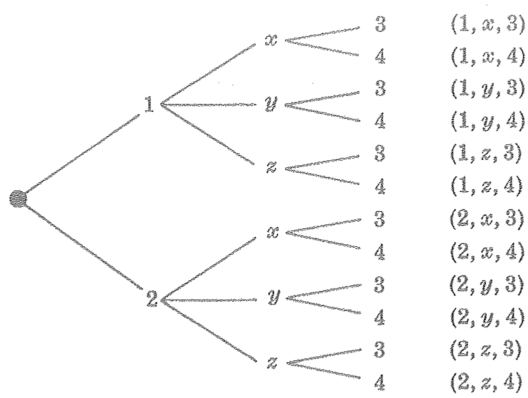


Fig. 2-6

2.3 Sejam $A = \{1, 2\}$, $B= \{a, b, c\}$ e $C= \{c, d\}$. Ache $(A \times B) \cap (A \times C)$ e $(B \cap C)$.

Temos

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$
$$A \times C = \{(1, c), (1, d), (2, c), (2, d)\}$$

Portanto,

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, c), (2, c)\}.$$

Como $B \cap C = \{c\}$,

$$A \times (B \cap C) = \{(1, c), (2, c)\}.$$

Observe que $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$. Esse fato é verdadeiro para quaisquer conjuntos A, B e C (veja o Problema 2.4).

2.4 Mostre que $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$.

$$\begin{aligned}(A \times B) \cap (A \times C) &= \{x, y): (x, y) \in A \times B \text{ e } (x, y) \in A \times C\} \\ &= \{(x, y): x \in A, y \in B \text{ e } x \in A, y \in C\} \\ &= \{(x, y): x \in A, y \in B \cap C\} \quad = \quad A \times (B \cap C)\end{aligned}$$

2.5 Ache x e y, dado $(2x, x + y) = (6, 2)$.

Dois pares ordenados são iguais se e somente se os componentes correspondentes são iguais. Portanto, obtemos as equações

$$2x = 6 \quad \text{e} \quad x + y = 2,$$

para as quais deduzimos as respostas $x = 3$ e $y = -1$.

Relações e seus Grafos

2.6 Ache o número de relações de $A = \{a, b, c\}$ para $B = \{1, 2\}$.

Existem $3(2) = 6$ elementos em $A \times B$ e, portanto, existem $m = 2^6 = 64$ subconjuntos de $A \times B$. Logo existem $m = 64$ relações de A para B.

2.7 São dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Seja R a seguinte relação de A para B:

$$R = \{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}.$$

(*a*) Determine a matriz da relação. (*b*) Desenhe o diagrama de setas de R. (*c*) Ache a relação inversa R^{-1} de R. (*d*) Determine o domínio e a imagem de R.

(*a*) Veja a Figura 2-7(*a*). Observe que as linhas da matriz estão designadas pelos elementos de A, e as colunas pelos elementos de B. Observe também que o elemento na matriz que corresponde a $a \in A$ e $b \in B$ é 1 se a estiver relacionado com b e 0 caso contrário.

(*b*) Veja Figura 2-7(*b*). Observe que existe uma seta de $a \in A$ para $b \in B$ se e somente se a estiver relacionado a b, i.e., se e somente se $(a, b) \in R$.

(*c*) Reverta a ordem dos pares de R para obter R^{-1}:

$$R^{-1} = \{(y, 1), (z, 1), (y, 3), (x, 4), (z, 4)\}.$$

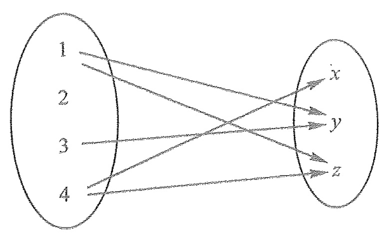
Observe que, revertendo as setas na Figura 2-7(*b*), obtemos o diagrama de setas de R^{-1}.

(*d*) O Domínio de R, Dom(R), dos primeiros elementos dos pares ordenados de R, e a Imagem de R, Ran(R)[†], consiste nos segundos elementos. Logo,

$$\text{Dom}(R) = \{1, 3, 4\} \qquad \text{e} \qquad \text{Ran}(R) = \{x, y, z\}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & x \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(*a*)



(*b*)

Fig. 2-7

2.8 Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ e seja R a relação em A definida por "x divide y", escrita $x|y$. (Note que $x|y$ se e somente se existe algum inteiro z tal que $xz = y$.)
(*a*) Escreva R como um conjunto de pares ordenados. (*b*) Desenhe seu grafo orientado. (*c*) Ache a relação inversa R^{-1} de R. R^{-1} pode ser descrita em palavras?

(*a*) Ache os números em A divisíveis por 1, 2, 3, 4 e, depois, 6. São eles:

$$1|1, \quad 1|2, \quad 1|3, \quad 1|4, \quad 1|6, \quad 2|2, \quad 2|4, \quad 2|6, \quad 3|3, \quad 3|6, \quad 4|4, \quad 6|6$$

Portanto,

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)\}$$

(*b*) Veja a Figura 2-8.

(*c*) Reverta a ordem dos pares ordenados de R para obter R^{-1}:

[†] N. de T. Do inglês, *Range*(R). A abreviatura Ran(R) é bastante usada em textos redigidos em português; alguns autores utilizam Im(R).

$$R^{-1} = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(6,1),(2,2),(4,2),(6,2),(3,3),(6,3),(4,4),(6,6)\}.$$

R^{-1} pode ser descrito pela declaração "x é um múltiplo de y".

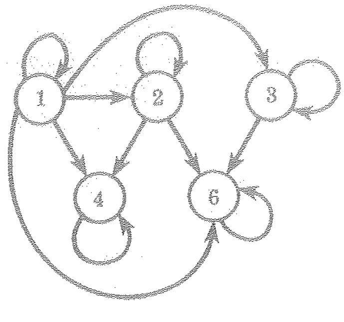


Fig. 2-8

2.9 Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{x, y, z\}$. Considere as seguintes relações R e S de A para B e de B para C, respectivamente:

$$R = \{(1,b),(2,a),(2,c)\} \qquad \text{e} \qquad S = \{(a,y),(b,x),(c,y),(c,z)\}.$$

(a) Ache a relação composta $R \circ S$.

(b) Ache as matrizes M_R, M_S e $M_{R \circ S}$ das respectivas relações R, S e $R \circ S$ e compare $M_{R \circ S}$ ao produto $M_R M_S$.

(a) Desenhe o diagrama de setas das relações R e S como na Figura 2-9. Observe que A está "conectado" a x em C pelo caminho $1 \to b \to x$; portando $(1,x)$ pertence a $R \circ S$. De maneira similar, $(2, y)$ e $(2, z)$ pertencem a $R \circ S$. Temos

$$R \circ S = \{(1,x),(2,y),(2,z)\}.$$

(Veja o Exemplo 2.5.)

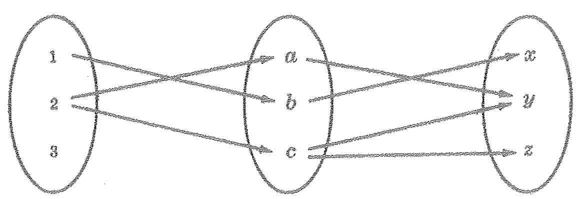


Fig. 2-9

(b) As matrizes M_R, M_S e $M_{R \circ S}$ são:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_{R \circ S} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Multiplicando M_R e M_S, obtemos

$$M_R M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que $M_{R \circ S}$ e $M_R M_S$ têm os mesmos elementos nulos.

2.10 Sejam R e S as seguintes relações em $A = \{1, 2, 3\}$:

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,1),(3,3)\}, \qquad S = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,3)\}.$$

Ache (*a*) $R \cap S, R \cup S, R^c$; (*b*) $R \circ S$; (*c*) $S^2 = S \circ S$.

(*a*) Trate R e S simplesmente como conjuntos e faça a interseção e a união usuais. Para R^c, use o fato de que $A \times A$ é a relação universal em A.

$$R \cap S = \{(1,2),(3,3)\}$$
$$R \cup S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\}$$
$$R^c = \{(1,3),(2,1),(2,2),(3,2)\}$$

(*b*) Para cada par $(a,b) \in R$, ache os pares $(b,c) \in S$. Então $(a,c) \in R \circ S$. Por exemplo, $(1, 1) \in R$ e $(1, 2), (1, 3) \in S$; portanto, $(1, 2)$ e $(1, 3)$ pertencem a $R \circ S$. Logo,

$$R \circ S = \{(1,2),(1,3),(1,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

(*c*) Seguindo o algoritmo em (*b*), obtemos:

$$S^2 = S \circ S = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$$

2.11 Prove o Teorema 2.1: sejam A, B, C e D conjuntos. Suponha que R seja uma relação de A para B, S seja uma relação de B para C e T seja uma relação de C para D. Então, $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

Precisamos mostrar que cada par ordenado em $(R \circ S) \circ T$ pertence a $R \circ (S \circ T)$ e vice-versa.

Suponha (a,d) pertence a $(R \circ S) \circ T$. Então, existe um c em C tal que $(a, c) \in R \circ S$ e $(c, d) \in T$. Como $(a, c) \in R \circ S$, existe b em B tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$. Como $(b, c) \in S$ e $(c, d) \in T$, temos $(b, d) \in S \circ T$; como $(a, b) \in R$ e (b, d) e $S \circ T$, temos $(a, d) \in R \circ (S \circ T)$. Portanto, $(R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T)$. De modo similar, $R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T$. Ambas as inclusões provam que $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

Tipos de Relações e Propriedades de Fecho

2.12 Considere as seguintes cinco relações em um conjunto $A = \{1, 2, 3\}$:

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,3)\} \qquad \varnothing = \text{relação vazia}$$
$$S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\} \qquad A \times A = \text{relação universal}$$
$$T = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3)\}$$

Determine se as relações acima em A são (*a*) reflexivas, (*b*) simétricas, (*c*) transitivas, (*d*) anti-simétricas.

(*a*) R não é reflexiva já que $2 \in A$, mas $(2, 2) \notin R$. T não é reflexiva já que $(3, 3) \notin T$ e, de modo similar, $\varnothing$ não é reflexiva. S e $A \times A$ são reflexivas.

(*b*) R não é simétrica já que $(1, 2) \in R$, mas $(2, 1) \notin R$ e, de modo similar, T não é simétrica. S, $\varnothing$ e $A \times A$ são simétricas.

(*c*) T não é transitiva já que $(1, 2)$ e $(2, 3)$ pertencem a T, mas $(1, 3) \notin T$. As outras quatro relações são transitivas.

(*d*) S não é anti-simétrica já que $1 \neq 2$ e ambos $(1, 2)$ e $(2, 1)$ pertencem a S. De forma similar, $A \times A$ não é anti-simétrica. As outras três relações são anti-simétricas.

2.13 Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Considere a seguinte relação em A.

$$R = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(4,2),(4,4)\}.$$

(*a*) Desenhe seu grafo orientado. (*b*) R é (i) reflexiva, (ii) simétrica, (iii) transitiva ou (iv) anti-simétrica? (*c*) Ache $R^2 = R \circ R$.

(*a*) Veja a Figura 2-10.

(*b*) (i) R não é reflexiva porque $3 \in A$, mas $3 \not R 3$, i. e., $(3,3) \notin R$.

(ii) R não é simétrica porque $4R2$, mas $2\not R 4$, i. e.,$(4,2) \in R$, mas $(2,4) \notin R$.

(iii) R não é transitiva porque $4R2$ e $2R3$ mas $4\not R 3$, i.e.,$(4,2) \in R$ e $(2,3) \in R$, mas $(4,3) \notin R$.

(iv) R não é anti-simétrica porque $2R3$ e $3R2$, mas $2 \neq 3$.

(c) Para cada par $(a,b) \in R$, ache todos $(b, c) \in R$. Como $(a, c) \in R^2$,

$$R^2 = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}.$$

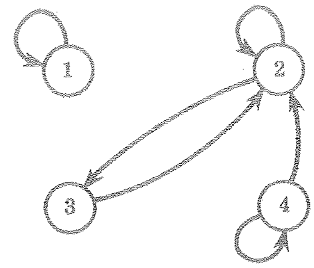


Fig. 2-10

2.14 Dê exemplos de relações R em $A = \{1, 2, 3\}$ que têm a propriedade requerida.

(a) R é simétrica e anti-simétrica.

(b) R não é nem simétrica nem anti-simétrica.

(c) R é transitiva, mas $R \cup R^{-1}$ não é transitiva.

Existem diversos exemplos possíveis para cada resposta. Segue um conjunto possível de exemplos:

(a) $R = \{(1, 1), (2, 2)\}$.

(b) $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$.

(c) $R = \{(1, 2)\}$.

2.15 Suponha que C é uma coleção de relações S em um conjunto A, e seja T a interseção das relações S, isto é, $T = \cap(S\colon S \in C)$. Prove:

(a) Se toda S é simétrica, então T é simétrica.

(b) Se toda S é transitiva, então T é transitiva.

(a) Suponha $(a, b) \in T$. Então $(a, b) \in S$ para todo S. Como S é simétrica, $(b, a) \in S$ para todo S. Portanto, $(b, a) \in T$, e T é simétrica.

(b) Suponha que (a, b) e (b, c) pertencem a T. Então, (a, b) e (b, c) pertencem a S para todo S. Como cada S é transitiva, (a, c) pertence a S para todo S. Portanto, $(a, c) \in T$ e T é transitiva.

2.16 Seja R uma relação em um conjunto A, e seja P uma propriedade de relações, tal como simetria e transitividade. Então, P é chamada de R-fechável† se P satisfaz as duas condições seguintes:

(1) Existe uma P-relação S contendo R.

(2) A interseção de P-relações é uma P-relação.

(a) Mostre que simetria e transitividade são R-fecháveis para qualquer relação R.

(b) Suponha que P seja R-fechável. Então $P(R)$, o P-fecho de R, é a interseção de todas as P-relações S contendo R, isto é,

$$P(R) = \cap(S\colon S \text{ é uma } P\text{-relação e } R \subseteq S).$$

(a) A relação universal $A \times A$ é simétrica e transitiva, e $A \times A$ contém qualquer relação R em A. Portanto, (1) é satisfeito. Pelo Problema 2-15, simetria e transitividade satisfazem (2). Portanto, simetria e transitividade são R-fecháveis para qualquer relação R.

† N. de T. No original, *R-closable*.

(b) Seja $T = \cap(S: S$ é uma P-relação e $R \subseteq S)$. Como P é R-fechável, T é não vazia por (1) e T é uma P-relação por (2). Como cada relação S contém R, a interseção T contém R. Portanto T é uma P-relação contendo R. Por definição, $P(R)$ é a menor P-relação contendo R; portanto, $P(R) \subseteq T$. Por outro lado, $P(R)$ é um dos conjuntos S definindo T, isto é, $P(R)$ é uma P-relação e $R \subseteq P(R)$. Por isso, $T \subseteq P(R)$. Coerentemente, $P(R) = T$.

2.17 Considere o conjunto $A = \{a, b, c\}$ e a relação R em A definida por

$$R = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,c)\}$$

Ache (a) reflexivo(R); (b) simétrico(R); e (c) transitivo(R).

(a) O fecho reflexivo em R é obtido pela adição de todos os pares diagonais $A \times A$ a R que ainda não estão em R. Portanto,

$$\text{reflexivo}(R) = R \cup \{(b,b)\} = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,c), (c,c)\}$$

(b) O fecho simétrico de R é obtido pela adição a R de todos os pares em R^{-1} que ainda não estão em R. Portanto,

$$\text{simétrico}(R) = R \cup \{(b,a), (c,b)\} = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,c)\}$$

(c) O fecho transitivo em R, como tem três elementos, é obtido pela união de R com $R^2 = R \circ R$ e $R^3 = R \circ R \circ R$. Note que

$$R^2 = R \circ R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)\}$$
$$R^3 = R \circ R \circ R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)\}$$

Portanto,

$$\text{transitivo}(R) = R \cup R^2 \cup R^3 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)\}$$

Relações de Equivalência e Partições

2.18 Considere o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros e um inteiro $m > 1$. Dizemos que x é congruente a y módulo m, escrevendo

$$x \equiv y \pmod{m}$$

se $x - y$ é divisível por m. Mostre que isto define uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

Precisamos mostrar que a relação é reflexiva, simétrica e transitiva.

(i) Para cada x em $\mathbb{Z}$, temos $x \equiv x \pmod{m}$ porque $x - x = 0$ é divisível por m. Portanto, a relação é reflexiva.

(ii) Suponha $x \equiv y \pmod{m}$; logo, $x - y$ é divisível por m. Então $-(x - y) = y - x$ também é divisível por m; logo, $y \equiv x \pmod{m}$. Portanto, a relação é simétrica.

(iii) Agora suponha $x \equiv y \pmod{m}$ e $y \equiv z \pmod{m}$; logo, $x - y$ e $y - z$ são, cada um deles, divisíveis por m. Então a soma

$$(x - y) + (y - z) = x - z$$

também é divisível por m; portanto, $x \equiv z \pmod{m}$. Então, a relação é transitiva. Conseqüentemente, a relação de congruência módulo m é uma relação de equivalência.

2.19 Seja A um conjunto de inteiros não nulos e seja $\approx$ a relação em $A \times A$ definida por

$$(a,b) \approx (c,d) \quad \text{sempre que} \quad ad = bc$$

Mostre que $\approx$ é uma relação de equivalência.

Precisamos mostrar que $\approx$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

(i) *Reflexividade*: temos $(a,b) \approx (a,b)$ já que $ab = ba$. Portanto, $\approx$ é reflexiva.

(ii) *Simetria:* suponha $(a,b) \approx (c,d)$. Então $ad = bc$. Por conseguinte, $cb = da$ e, portanto, $(a,b) \approx (c,d)$. Assim, $\approx$ é simétrica.

(iii) *Transitividade*: suponha $(a,b) \approx (c,d)$ e $(c,d) \approx (e,f)$. Então, $ab = bc$ e $cf = de$. A multiplicação dos termos correspondentes da equação leva a $(ad)(cf) = (bc)(de)$. Cancelando $c \neq 0$ e $d \neq 0$ dos dois lados da equação, obtém-se $af = be$, e portanto $(a,b) \approx (e,f)$. Logo, $\approx$ é transitiva. Conseqüentemente, $\approx$ é uma relação de equivalência.

2.20 Seja R a seguinte relação de equivalência no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$R = \{(1,1), (1,5), (2,2), (2,3), (2,6), (3,2), (3,3), (3,6), (4,4), (5,1), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)\}.$$

Ache a partição de A *induzida por R*, i.e., ache as classes de equivalência de R.

Os elementos relacionados a 1 são 1 e 5; portanto,

$$[1] = \{1, 5\}.$$

Selecionamos um elemento que não pertence a [1], por exemplo, 2. Os elementos relacionados a 2 são 2, 3 e 6; portanto,

$$[2] = \{2, 3, 6\}.$$

O único elemento que não pertence a [1] ou [2] é 4. O único elemento relacionado a 4 é 4. Logo,

$$[4] = \{4\}.$$

Conseqüentemente,

$$[\{1, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{4\}]$$

é a partição de A induzida por R.

2.21 Prove o Teorema 2.6: seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. O quociente A/R é uma partição de A.

(i) $a \in [a]$, para todo $a \in A$.

(ii) $[a] = [b]$ se e somente se $(a, b) \in R$.

(iii) Se $[a] \neq [b]$, então $[a]$ e $[b]$ são disjuntos.

Demonstração de (i): como R é reflexiva, $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$ e, portanto, $a \in [a]$.

Demonstração de (ii): suponha $(a,b) \in R$. Queremos mostrar que $[a] = [b]$. Seja $x \in [b]$; então, $(b, x) \in R$. Mas, por hipótese, $(a, b) \in R$ e, portanto, por transitividade, $(a, x) \in R$. Conseqüentemente, $x \in A$. Portanto, $[b] \subseteq [a]$. Para mostrar $[a] \subseteq [b]$, observamos que $(a, b) \in R$, implica, por simetria, que $(b, a) \in R$. Então, por um argumento similar que obtemos $[a] \subseteq [b]$. Conseqüentemente $[a] = [b]$.

Por outro lado, se $[a]=[b]$, então, por (i), $b \in [b] = [a]$; portanto, $(a, b) \in R$.

Demonstração de (iii): provamos, equivalentemente, a contrapositiva da afirmação:

$$\text{Se } [a] \cap [b] \neq \varnothing, \text{então} \quad [a] = [b].$$

Se $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, então existe um elemento $x \in A$ com $x \in [a] \cap [b]$. Portanto, $(a, x) \in R$ e $(b, x) \in R$. Por simetria, $(x, b) \in R$ e, por transitividade, $(a, b) \in R$. Conseqüentemente por (ii), $[a] = [b]$.

2.22 Considere o conjunto de palavras $W =$ {saúde, luva, sal, pato, peso, som}. Ache W/R onde R é a relação de equivalência em W definida por (a) "tem o mesmo número de letras que" ou (b) "começa com a mesma letra que".

(a) As palavras com o mesmo número de letras pertencem à mesma célula; logo,

$$W/R = [\{\text{saúde}\}, \{\text{luva, pato, peso}\}, \{\text{sal, som}\}].$$

(b) As palavras que começam com a mesma letra pertencem à mesma célula; logo,

$$W/R = [\{\text{saúde, sal, som}\}, \{\text{luva}\}, \{\text{pato, peso}\}].$$

Ordenação Parcial

2.23 Seja ℓ uma coleção qualquer de conjuntos. A relação $\subseteq$ de inclusão de conjuntos define uma ordem parcial em ℓ?

Sim, já que a inclusão de conjuntos é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Isto é, para quaisquer conjuntos, A, B, C em ℓ, temos: (i) $A \subseteq A$; (ii) se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$; (iii) se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

2.24 Considere o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Defina aRb se $b = a^r$ para algum inteiro positivo r. Mostre que R é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{Z}$, isto é, mostre que R é (a) reflexiva; (b) anti-simétrica e (c) transitiva.

(a) R é reflexiva já que $a = a^1$.

(*b*) Suponha que $a\,R\,b$ e $b\,R\,a$, vale dizer $b=a^r$ e $a=b^s$. Então $a=(a^r)^s$. Existem três possibilidades: (i) $rs = 1$, (ii) $a = 1$ e (iii) $a = -1$. Se $rs = 1$, então $r = 1$ e $s = 1$ e, portanto, $a = b$. Se $a = 1$, então $b=1^r=1=a$ e, de modo similar, se $b = 1$, então $a = 1$. Finalmente, se $a = -1$, então $b = -1$ (já que $b \neq 1$) e $a = b$. Nos três casos, $a = b$. Portanto R é anti-simétrica.

(*c*) Suponha que $a\,R\,b$ e $b\,R\,c$ ocorrem, vale dizer, $b=a^r$ e $c=b^s$. Então, $c=(a^r)^s=a^{rs}$ e, por isso, $a\,R\,c$. Portanto, R é transitiva.

Concluímos que R é uma ordem parcial em $\mathbb{Z}$.

Problemas Complementares

Relações

2.25 Seja $W = \{\text{Marco, Érico, Paulo}\}$ e seja $V = \{\text{Érico, Davi}\}$. Ache (*a*) $W \times V$; (*b*) $V \times W$; (*c*) $V \times V$.

2.26 Sejam $S = \{a, b, c\}$, $T = \{b, c, d\}$ e $W = \{a, d\}$. Construa os três diagramas de $S \times T \times W$ e então ache $S \times T \times W$.

2.27 Ache x e y se (*a*) $(x + 2, 4) = (5, 2x + y)$; (*b*) $(y - 2, 2x + 1) = (x - 1, y + 2)$.

2.28 Prove que (*a*) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; (*b*) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times B)$.

2.29 Seja R a seguinte relação em $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R = \{(1,3), (1,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$$

(*a*) Ache a matriz M_R de R.
(*b*) Ache o domínio e a imagem de R.
(*c*) Ache R^{-1}.
(*d*) Desenhe o grafo orientado de R.
(*e*) Ache a relação composta $R \circ R$.

2.30 Sejam R e S as seguintes relações em $B = \{a, b, c, d\}$:

$$R = \{(a,a), (a,c), (c,b), (c,d), (d,b)\} \quad \text{e} \quad S = \{(b,a), (c,c), (c,d), (d,a)\}$$

Ache as seguintes relações compostas: (*a*) $R \circ S$; (*b*) $S \circ R$; (*c*) $R \circ R$; (*d*) $S \circ S$.

2.31 Seja R a relação nos inteiros positivos $\mathbb{N}$ definida pela equação $x + 3y = 12$; isto é,

$$R = \{(x, y) \colon x + 3y = 12\}$$

(*a*) Escreva R como um conjunto de pares ordenados.
(*b*) Ache (i) o domínio de R, (ii) a imagem de R e (iii) R^{-1}.
(*c*) Ache a relação composta $R \circ R$.

Propriedades de Relações

2.32 Cada uma das frases seguintes define uma relação nos inteiros positivos $\mathbb{N}$:

(1) "x é maior do que y".
(2) "xy é o quadrado de um inteiro".
(3) $x + y = 10$
(4) $x + 4y = 10$

Determine quais relações são (*a*) reflexiva; (*b*) simétrica, (*c*) anti-simétrica, (*d*) transitiva.

2.33 Sejam R e S relações em um conjunto A. Assumindo que A tem pelo menos três elementos, verifique se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa. Se falsa, dê um contra-exemplo no conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

(*a*) Se R e S são simétricas, então $R \cap S$ é simétrica.

(*b*) Se R e S são simétricas, então $R \cup S$ é simétrica.

(*c*) Se R e S são reflexivas, então $R \cap S$ é reflexiva

(*d*) Se R e S são reflexivas, então $R \cup S$ é reflexiva.

(*e*) Se R e S são transitivas, então $R \cup S$ é transitiva.

(*f*) Se R e S são anti-simétricas, então $R \cup S$ é anti-simétrica.

(*g*) Se R é anti-simétrica, então R^{-1} é anti-simétrica.

(*h*) Se R é reflexiva, então $R \cap R^{-1}$ é não vazia.

(*i*) Se R é simétrica, então $R \cap R^{-1}$ é não vazia.

2.34 Suponha que R e S sejam relações em um conjunto A, e R seja anti-simétrica. Prove que $R \cap S$ é anti-simétrica.

Relações de Equivalência

2.35 Prove que, se R é uma relação de equivalência em um conjunto A, então R^{-1} também é uma relação de equivalência em A.

2.36 Seja $S = \{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$. Seja R a relação de equivalência em S definida por $x \equiv y(\text{mod } 5)$, isto é, $x - y$ é divisível por 5. Ache a partição de S induzida por R, i.e., o conjunto quociente S/R.

2.37 Seja $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ e seja $\sim$ uma relação em $A \times A$ definida por

$$(a,b) \sim (c,d) \qquad \text{se} \qquad a+d=b+c.$$

(*a*) Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência. (*b*) Ache $[(2, 5)]$, i.e., a classe de equivalência de $(2, 5)$.

Respostas dos Problemas Complementares

2.25 (*a*) $W \times V$ = {(Marco, Érico), (Marco, Davi), (Érico, Érico), (Érico, Davi), (Paulo, Érico), (Paulo, Davi)}.
(*b*) $V \times W$ = {(Érico, Marco), (Davi, Marco), (Érico, Érico), (Davi, Érico), (Érico, Paulo), (Davi, Paulo)}.
(*c*) $V \times V$ = {(Érico, Érico), (Érico, Davi), (Davi, Érico), (Davi, Davi)}.

2.26 Os três diagramas de $S \times T \times W$ são exibidos na Figura 2-11. O conjunto $S \times T \times W$ é igual a

$$\{(a,b,a),(a,b,d),(a,c,a),(a,c,d),(a,d,a),(a,d,d),$$
$$(b,b,a),(b,b,d),(b,c,a),(b,c,d),(b,d,a),(b,d,d),$$
$$(c,b,a),(c,b,d),(c,c,a),(c,c,d),(c,d,a),(c,d,d)\}$$

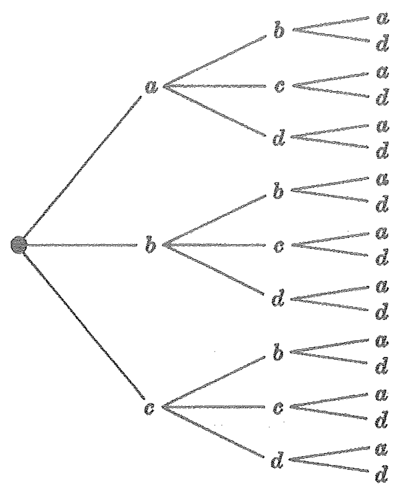


Fig. 2-11

2.27 (*a*) $x = 3$; $y = -2$; (*b*) $x = 2$, $y = 3$.

2.29 (*a*) $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(*b*) Domínio $= \{1, 3\}$, imagem $= \{2, 3, 4\}$.
(*c*) $R^{-1} = \{(3, 1), (4, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$.
(*d*) Veja a Fig. 2-12.
(*e*) $R \circ R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$.

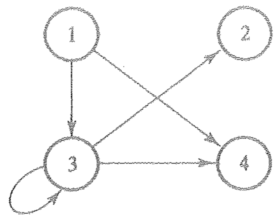


Fig. 2-12

2.30 (*a*) $R \circ S = \{(a, c), (a, d), (c, a), (d, a)\}$.
(*b*) $S \circ R = \{(b, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a), (d, c)\}$.
(*c*) $R \circ R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (c, b)\}$.
(*d*) $S \circ S = \{(c, c), (c, a), (c, d)\}$.

2.31 (*a*) $\{(9, 1), (6, 2), (3, 3)\}$
(*b*) (i) $\{9, 6, 3\}$, (ii) $\{1, 2, 3\}$, (iii) $\{(1, 9), (2, 6), (3, 3)\}$
(*c*) $\{(3, 3)\}$

2.32 (*a*) Nenhuma; (*b*) (2) e (3); (*c*) (1) e (4); (*d*) todas, exceto (3).

2.33 Todas são verdadeiras exceto (*e*) $R = \{(1, 2)\}$, $S = \{(2, 3)\}$ e (*f*) $R = \{(1, 2)\}$, $S = \{(2, 1)\}$.

2.36 $[\{1, 6, 11, 16\}, \{2, 7, 12, 17\}, \{3, 8, 13, 18\}, \{4, 9, 14, 19\}, \{5, 10, 15, 20\}]$

2.37 (*b*) $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9)\}$