Capítulo 1

Teoria dos Conjuntos

1.1 INTRODUÇÃO

O conceito de *conjunto* está presente em toda a matemática. Este capítulo apresenta a notação e a terminologia da teoria dos conjuntos, que é um assunto básico e será usado no decorrer do texto.

Apesar de o estudo de lógica ser formalmente tratado no Capítulo 4, apresentamos aqui a representação de conjuntos por diagramas de Venn e mostramos sua aplicação para argumentos lógicos. A relação entre a teoria dos conjuntos e a lógica será explorada posteriormente na discussão sobre álgebra booleana no Capítulo 15.

Este capítulo se encerra com a definição formal de indução matemática com exemplos.

1.2 CONJUNTOS E ELEMENTOS

Um *conjunto* pode ser considerado como uma coleção de objetos, os *elementos* ou *membros* do conjunto. Normalmente usamos letras maiúsculas, $A, B, X, Y, \ldots$, para denotar conjuntos, e letras minúsculas, $a, b, x, y, \ldots$, para denotar elementos de conjuntos. A afirmação "p é um elemento de A" ou, equivalentemente, "p pertence a A", é escrita

$$p \in A$$

A afirmação de que p não é um elemento de A, isto é, a negação de $p \in A$, é escrita

$$p \notin A$$

O fato de que um conjunto fica completamente determinado quando seus elementos são especificados é formalmente conhecido como princípio da extensão.

Princípio da extensão: Dois conjuntos, A e B, são iguais se e somente se possuem os mesmos elementos.

Como de hábito, escrevemos $A = B$ se os conjuntos A e B são iguais, e escrevemos $A \neq B$ se os conjuntos não são iguais.

Descrição de Conjuntos

Existem essencialmente duas maneiras de especificar um conjunto particular. Uma opção, quando possível, consiste em listar seus elementos. Por exemplo,

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

denota o conjunto A cujos elementos são as letras a, e, i, o, u. Observe que os elementos são separados por vírgulas e se encontram dentro de chaves $\{\ \}$.

A segunda maneira consiste em enunciar as propriedades que caracterizam os elementos do conjunto. Por exemplo:

$$B = \{x: x \text{ é um inteiro par}, x > 0\},$$

que deve ser lido como "B é o conjunto dos x tal que x é um inteiro par e x é maior do que 0", significa que os elementos do conjunto B são os inteiros positivos. Uma letra, usualmente x, é usada para designar um elemento típico do conjunto; dois-pontos é lido como "tal que", e a vírgula como "e".

Exemplo 1.1

(*a*) O conjunto A definido anteriormente também pode ser escrito como:

$$A = \{x: x \text{ é uma letra do alfabeto}, x \text{ é uma vogal}\}$$

Observe que b $\notin A$, e $\in A$ e p $\notin A$.

(*b*) Não seria possível listar todos elementos do conjunto B acima, embora freqüentemente se possa especificar o conjunto escrevendo

$$B = \{2, 4, 6, \ldots\},$$

onde se assume que o significado da especificação pode ser entendido por todos. Observe que $8 \in B$, mas $-7 \notin B$.

(*c*) Seja $E = \{ x : x^2 - 3x + 2 = 0 \}$. Em outras palavras, E é o conjunto das soluções da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$, por vezes denominado o *conjunto solução* da equação. Como as soluções da equação são 1 e 2, poderíamos também escrever $E = \{1, 2\}$.

(*d*) Seja $E = \{ x : x^2 - 3x + 2 = 0 \}$, $F = \{ 2, 1\}$ e $G = \{ 1, 2, 2, 1, 6/3\}$. Então $E = F = G$. Observe que um conjunto não depende da maneira como seus elementos são representados. Um conjunto não se altera se os elementos são repetidos ou reordenados.

Alguns conjuntos vão aparecer com muita freqüência no texto e, por esta razão, usaremos símbolos especiais para representá-los. A menos de especificação em contrário, vamos considerar o seguinte:

$\mathbf{N}$ = o conjunto de inteiros positivos: 1, 2, 3, ...,
$\mathbf{Z}$ = o conjunto dos inteiros: ..., –2, –1, 0, 1, 2 ...,
$\mathbf{Q}$ = o conjunto dos números racionais,
$\mathbf{R}$ = o conjunto dos números reais,
$\mathbf{C}$ = o conjunto dos números complexos.

Mesmo quando for possível listar os elementos de determinado conjunto, pode não ser muito prático fazê-lo. Por exemplo, não listaríamos os elementos do conjunto das pessoas nascidas no mundo durante o ano de 1976 embora, teoricamente, seja possível compilar essa lista. Isto é, descrevemos um conjunto listando seus elementos apenas se o número desses elementos for pequeno; caso contrário, descrevemos o conjunto pela propriedade que caracteriza seus elementos.

O fato de que um conjunto pode ser descrito em função de uma propriedade é formalmente conhecido como *princípio da abstração*.

Princípio da abstração: Dado um conjunto U e uma propriedade P, existe um conjunto A tal que os elementos de A são os elementos de U que possuem a propriedade P.

1.3 CONJUNTO UNIVERSO E CONJUNTO VAZIO

Em qualquer aplicação da teoria dos conjuntos, os elementos de todos conjuntos considerados pertencem a algum conjunto maior, conhecido como *conjunto universo*. Por exemplo, em geometria plana, o conjunto universo compõe-se de todos os pontos do plano e, em estudos de populações humanas, o conjunto universo compõe-se de todas as pessoas do mundo. Vamos usar o símbolo

$$U$$

para denotar o conjunto universo, a menos que se mencione explicitamente, ou esteja implícito no contexto, um significado diferente para o símbolo.

Para um dado conjunto U e uma propriedade P, é possível que não existam elementos em U satisfazendo a propriedade P. Por exemplo, o conjunto

$$S = \{x: x \text{ é um inteiro positivo}, x^2 = 3\}$$

não possui elementos, já que nenhum inteiro positivo tem a propriedade requerida.

O conjunto que não contém elementos é chamado de *conjunto vazio*[†] e é denotado por:

$$\varnothing$$

Existe apenas um conjunto vazio. Isto é: se S e T são vazios, então $S = T$, já que possuem exatamente os mesmos elementos, isto é, nenhum.

1.4 SUBCONJUNTOS

Se todo elemento de um conjunto A é também um elemento de um conjunto B, diz-se que A é um *subconjunto* de B. Também dizemos que A está *contido* em B ou que B *contém* A. Essa relação é escrita como segue:

$$A \subseteq B \text{ ou } B \supseteq A$$

Se A não é um subconjunto de B, isto é, se pelo menos um elemento de A não pertence a B, escrevemos $A \not\subseteq B$ ou $B \not\supseteq A$.

Exemplo 1.2

(*a*) Considere os conjuntos

$$A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\} \qquad B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \qquad C = \{1, 5\}$$

Então, $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$, já que 1 e 5, os elementos de C, são também elementos de A e B. Mas $B \not\subseteq A$, uma vez que seus elementos, por exemplo, 2 e 7, não pertencem a A. Além disso, como os elementos de A, B e C também devem pertencer ao conjunto universo U, concluímos que U deve, pelo menos, conter o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(*b*) Sejam **N**, **Z**, **Q** e **R** definidos como na Seção 1.2. Então:

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$$

(*c*) O conjunto $E = \{2, 4, 6\}$ é um subconjunto do conjunto $F = \{6, 2, 4\}$, já que cada um dos elementos 2, 4 e 6 pertencentes a E também pertencem a F. Na verdade, $E = F$. De maneira análoga, é possível mostrar que todo conjunto é um subconjunto de si mesmo.

As seguintes propriedades de conjuntos devem ser observadas:

(i) Todo conjunto A é um subconjunto do conjunto universo, já que, por definição, todos elementos de A pertencem U. O conjunto vazio, $\varnothing$, também é um subconjunto de A.

(ii) Todo conjunto A é um subconjunto de si mesmo, uma vez que, trivialmente, os elementos de A pertencem a A.

(iii) Se todo elemento de A pertence a um conjunto B, e todo elemento de B pertence a um conjunto C, então claramente todo elemento de A pertence a C. Em outras palavras, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

(iv) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então A e B têm os mesmos elementos, i. e., $A = B$. Por outro lado, se $A = B$, então $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, já que todo ~~elemento~~ CONJUNTO é um subconjunto de si mesmo.

Enunciamos esses resultados formalmente no teorema a seguir.

Teorema 1-1: (i) Para todo conjunto A, temos $\varnothing \subseteq A \subseteq U$.

(ii) Para todo conjunto A, $A \subseteq A$.

(iii) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

(iv) $A = B$ se e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Se $A \subseteq B$, é possível que $A = B$. Quando $A \subseteq B$ mas $A \neq B$, dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B. Escreveremos $A \subset B$ quando A é um subconjunto próprio de B. Por exemplo, suponha

$$A = \{1, 3\} \qquad B = \{1, 2, 3\}, \qquad C = \{1, 3, 2\}.$$

Então, A e B são subconjuntos de C; mas A é um subconjunto próprio de C, enquanto B não é um subconjunto próprio de C, já que $B = C$.

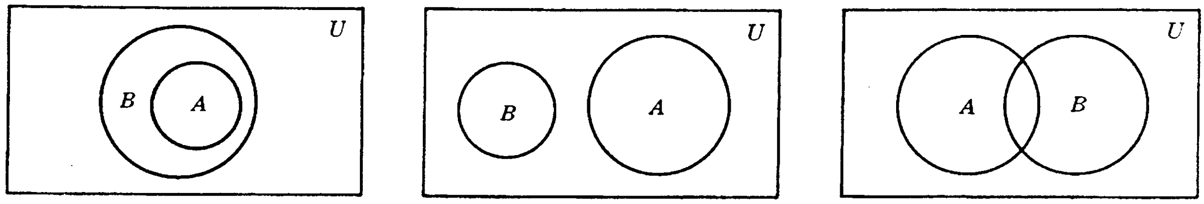
[†] N. de T. No original, *empty set* ou *null set*.

1.5 DIAGRAMAS DE VENN

Um diagrama de Venn é uma representação pictórica na qual os conjuntos são representados por áreas delimitadas por curvas no plano.

O conjunto universo U é representado pelo interior de um retângulo, e os outros conjuntos, por discos contidos dentro desse retângulo. Se $A \subseteq B$, o disco que representa A deve estar inteiramente contido no disco que representa B como na Fig. 1-1(*a*). Se A e B são disjuntos, i. e., se eles não possuem elementos em comum, então o disco representando A estará separado do disco representando B como na Figura 1-1(*b*).

Entretanto, se A e B são dois conjuntos arbitrários, é possível que alguns objetos estejam em A mas não em B, alguns estejam em B mas não em A, alguns estejam em ambos e alguns não estejam nem em A nem em B; portanto, em geral representamos A e B como na Figura 1-1 (*c*).



(*a*) $A \subseteq B$ (*b*) A e B são disjuntos (*c*)

Fig. 1-1

Argumentos e Diagramas de Venn

Muitas afirmativas feitas verbalmente são essencialmente afirmativas sobre conjuntos e podem, portanto, ser descritas através de diagramas de Venn.

Logo, os diagramas de Venn podem ser usados para determinar se um argumento é ou não válido. Considere o exemplo seguinte.

Exemplo 1.3 Mostre que o seguinte argumento (adaptado de um livro de lógica de Lewis Carroll, autor de *Alice no País das Maravilhas*) é válido:

S_1: Minhas panelas são os únicos objetos feitos de metal que possuo.
S_2: Eu acho todos os seus presentes muito úteis.
S_3: Nenhuma das minhas panelas é de pouca utilidade.

S: Seus presentes para mim não são feitos de metal.

(As afirmativas S_1, S_2 e S_3 são as hipóteses, e a afirmação S é a conclusão. O argumento é válido se a conclusão S segue logicamente das hipóteses S_1, S_2 e S_3.)

Por S_1 os objetos de metal estão contidos no conjunto de panelas e, por S_3, o conjunto de panelas e o conjunto de objetos úteis são distintos; logo, desenhamos o diagrama de Venn (Figura 1-2).

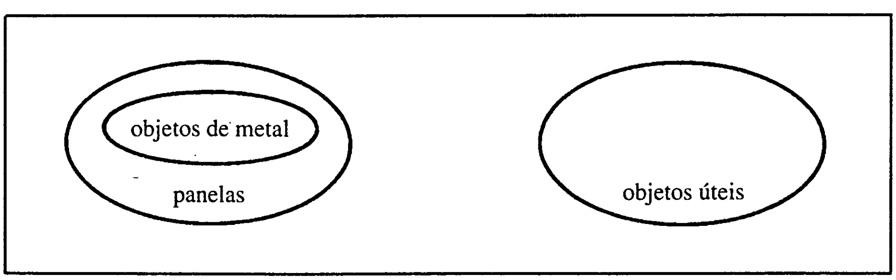


Fig. 1-2

Por S_2, o conjunto "seus presentes" é um subconjunto do conjunto dos objetos úteis e, portanto, desenhamos como está representado na Figura 1-3.

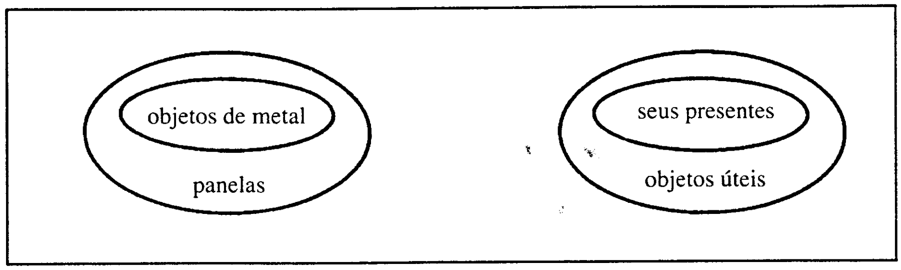


Fig. 1-3

A conclusão é claramente válida de acordo com o diagrama de Venn acima porque o conjunto "seus presentes" é disjunto do conjunto de objetos de metal.

1.6 OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

Esta seção apresenta várias operações importantes entre conjuntos.

União e Interseção

A *união* de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos elementos que pertencem a A ou a B; isto é:

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

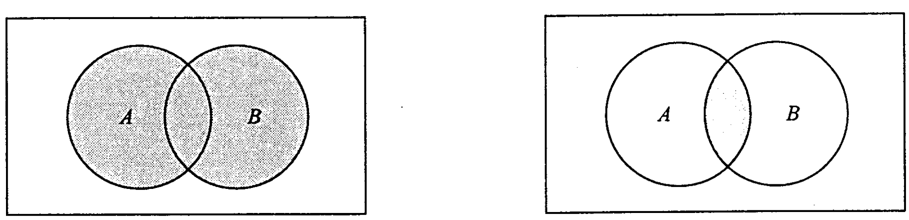
Aqui "ou" é usado no sentido de e/ou. A Figura 1-4(a) é um diagrama de Venn no qual $A \cup B$ está sombreado.

A *interseção* de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e a B; isto é,

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\}$$

A Figura 1-4(b) é um diagrama de Venn no qual $A \cap B$ está sombreado.

Se $A \cap B = \varnothing$, isto é, se A e B não possuem elementos em comum, então A e B são ditos *disjuntos*.



(a) $A \cup B$ está sombreado (b) $A \cap B$ está sombreado

Fig. 1-4

Exemplo 1.4

(a) Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Então,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad A \cap B = \{3, 4\}$$
$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \qquad A \cap C = \{2, 3\}$$

(b) Suponha que M denota o conjunto de estudantes do sexo masculino de uma universidade C, e F denota o conjunto de estudantes do sexo feminino na universidade C. Então,

$$M \cup F = C$$

já que cada estudante de C pertence a apenas um dos conjuntos, M ou F. Por outro lado,

$$M \cap F = \varnothing$$

já que nenhum estudante pertence a ambos os conjuntos M e F.

A operação de inclusão de conjuntos está intimamente relacionada às operações de união e interseção, como demonstra o teorema a seguir.

Teorema 1-2: são equivalentes $A \subseteq B$, $A \cap B = A$ e $A \cup B = B$.

Nota: Esse teorema está demonstrado no Problema 1.27. Outras condições equivalentes a $A \subseteq B$ são apresentadas no Problema 1.37.

Complementares

Lembramos que todos conjuntos considerados em cada situação são subconjuntos de um conjunto universo fixo, U. O *complementar absoluto,* ou simplesmente *complementar de um conjunto* A, denotado por A^C, é o conjunto dos elementos que pertencem a U mas não pertencem a A; isto é,

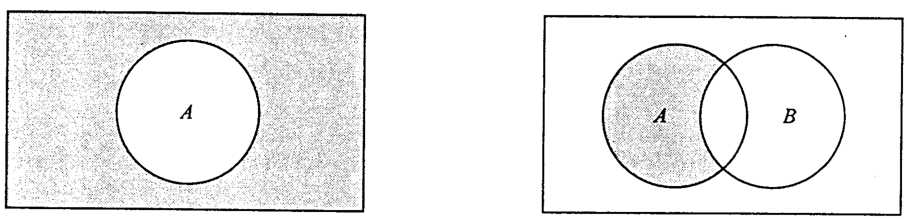
$$A^c = \{x: x \in U, x \notin A\}$$

Alguns textos utilizam a notação A' ou $\overline{A}$ para o complementar de A. A Figura 1-5(a) é um diagrama de Venn em que A^C está sombreado.

O *complementar relativo* de um conjunto B em relação a A, ou simplesmente a diferença entre A e B, denotado por $A\backslash B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B, isto é,

$$A\backslash B = \{x: x \in A, x \notin B\}$$

O conjunto $A\backslash B$ é chamado de "A menos B". Muitos textos denotam $A\backslash B$ por $A - B$ ou por $A \sim B$. A Figura 1-5(b) é um diagrama de Venn onde $A\backslash B$ está sombreado.



(a) A^C está sombreado (b) $A\backslash B$ está sombreado

Fig. 1-5

Exemplo 1.5 Suponha que $U = \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto de inteiros positivos, seja o conjunto universo. Sejam

$$A = \{1, 2, 3, 4, \}, \qquad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}, \qquad C = \{6, 7, 8, 9\},$$

e seja $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, os inteiros pares. Então,

$$A^c = \{5, 6, 7, 8, \ldots\}, \qquad B^c = \{1, 2, 8, 9, 10, \ldots\}, \qquad C^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, \ldots\}$$

e

$$A\backslash B = \{1, 2\}, \qquad B\backslash C = \{3, 4, 5\}, \qquad B\backslash A = \{5, 6, 7\}, \qquad C\backslash E = \{7, 9\}.$$

Além disso, $E^C = \{1, 3, 5, \ldots\}$, o conjunto dos inteiros ímpares.

Produtos Fundamentais

Considere n conjuntos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Um produto fundamental de conjuntos é um conjunto da forma

$$A_1^* \cap A_2^* \cap \cdots \cap A_n^*,$$

onde A_i^* pode representar A_i ou A_i^c. Observamos que (1) existem 2^n produtos fundamentais, (2) quaisquer dois produtos fundamentais são disjuntos, e (3) o conjunto universo U é a união de todos os produtos fundamentais (Problema 1.64). Há uma descrição geométrica desses conjuntos que está ilustrada na próxima página.

Exemplo 1.6 Considere três conjuntos, A, B C. Estão listados a seguir os oito produtos fundamentais dos três conjuntos.

$$P_1 = A \cap B \cap C, \quad P_3 = A \cap B^c \cap C, \quad P_5 = A^c \cap B \cap C, \quad P_7 = A^c \cap B^c \cap C$$
$$P_2 = A \cap B \cap C^c \quad P_4 = A \cap B^c \cap C^c, \quad P_6 = A^c \cap B \cap C^c \quad P_8 = A^c \cap B^c \cap C^c$$

Esses oito produtos correspondem precisamente às oito regiões assinaladas nos diagramas de Venn de A, B, C da Figura 1.6 como indicado nas regiões identificadas.

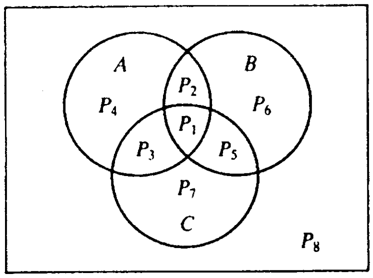
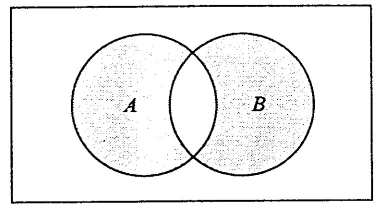


Fig. 1-6



A ⊕ B está sombreado

Fig. 1-7

Diferença Simétrica

A *diferença simétrica* dos conjuntos A e B, denotada por $A \oplus B$, consiste em todos os elementos que pertencem a A ou a B mas não a ambos; isto é,

$$A \oplus B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

É possível mostrar (Problema 1.18) que

$$A \oplus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

Por exemplo, suponha $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Então:

$$A \backslash B = \{1, 2, 3\}, \qquad B \backslash A = \{7, 8, 9\} \qquad \text{e, portanto,} \qquad A \oplus B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$$

A Figura 1-7 é um diagrama de Venn no qual $A \oplus B$ está sombreado.

1.7 ÁLGEBRA DE CONJUNTOS E DUALIDADE

Conjuntos munidos das operações de união, interseção e determinação de complementar† satisfazem a várias leis ou identidades que estão listadas na Tabela 1-1. Na verdade, afirmamos formalmente o seguinte:

Teorema 1-3: os conjuntos satisfazem as leis na Tabela 1-1.

Existem dois métodos de demonstrar equações que envolvem operações entre conjuntos. Uma maneira é usar as propriedades requeridas para que um elemento x satisfaça cada lado da igualdade, e a outra é usar diagramas de Venn. Por exemplo, considere a primeira lei de DeMorgan,

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

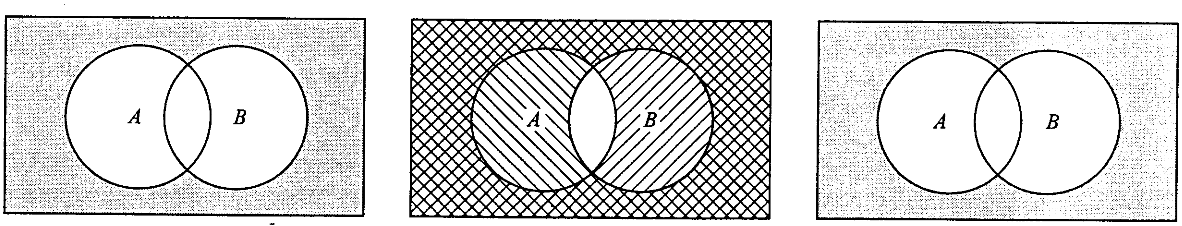
† N. de T. *Complements, em inglês.*

Tabela 1-1 Leis da álgebra de conjuntos

	Leis de idempotência
(1a) $A \cup A = A$	*(1b)* $A \cap A = A$
	Leis de associatividade
(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	*(2b)* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
	Leis de comutatividade
(3a) $A \cup B = B \cup A$	*(3b)* $A \cap B = B \cap A$
	Leis de distributividade
(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	*(4b)* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	Leis de identidade
(5a) $A \cup \varnothing = A$	*(5b)* $A \cap U = A$
(6a) $A \cup U = U$	*(6b)* $A \cap \varnothing = \varnothing$
	Leis de involução
	(7) $(A^c)^c = A$
	Leis dos complementares†
(8a) $A \cup A^c = U$	*(8b)* $A \cap A^c = \varnothing$
(9a) $U^c = \varnothing$	*(9b)* $\varnothing^c = U$
	Leis de DeMorgan
(10a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	*(10b)* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Método 1: Mostramos primeiramente que $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. Se $x \in (A \cup B)^c$, então $x \notin A \cup B$. Logo, $x \notin A$ e $x \notin B$, portanto $x \in A^c$ e $x \in B^c$.
Assim, $x \in A^c \cap B^c$. A seguir, mostramos que $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$. Seja $x \in A^c \cap B^c$. Então, $x \in A^c$ e $x \in B^c$; logo, $x \notin A$ e $x \notin B$. Portanto, $x \notin A \cup B$, e logo $x \in (A \cup B)^c$.
Mostramos que todo elemento de $(A \cup B)^c$ pertence a $A^c \cap B^c$ e que todo elemento de $A^c \cap B^c$ pertence a $(A \cup B)^c$. Essas duas inclusões, consideradas conjuntamente, mostram que os conjuntos têm os mesmos elementos, i. e., que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Método 2: Pelo diagrama de Venn para $A \cup B$ na Fig. 1-4, vemos que $(A \cup B)^c$ é representado pela área sombreada na Fig.1-8(*a*). Para achar $A^c \cap B^c$, isto é, a área em A^c e B^c, tracejamos A^c em uma direção e A^B em outra como na Fig. 1-8(*b*). Então, $A^c \cap B^c$ é representado pela área com tracejado nos dois sentidos, sombreada na Fig. 1-8(*c*). Como $(A \cup B)^c$ e $A^c \cap B^c$ são representados pela mesma área, eles são iguais.



(*a*) $(A \cup B)^c$ está sombreado

(*b*) A^c está sombreado com ////
B^c está sombreado com \\\\

(*c*) $A^c \cap B^c$ está sombreado

Fig. 1-8

Dualidade

Observe que as identidades na Tabela 1-1 estão organizadas em pares, como, por exemplo, (2*a*) e (2*b*). Trataremos agora do princípio envolvido nessa organização. Suponha que E seja uma equação da álgebra de conjuntos. A equação dual de E, E^*, é a equação obtida pela substituição de cada ocorrência de $\cup$, $\cap$, U e $\varnothing$ em E por, respectivamente, $\cap$, $\cup$, $\varnothing$ e U. Por exemplo, o dual de

† N. de T. No original, *complement Laws*.

$$(U \cap A) \cup (B \cap A) = A \qquad \text{é} \qquad (\varnothing \cup A) \cap (B \cup A) = A$$

Observe que cada par de leis na Tabela 1-1 é composto de equações duais uma da outra. É um fato na álgebra de conjuntos que, se uma equação E for uma identidade, sua dual, E^*, também é uma identidade.

1.8 CONJUNTOS FINITOS, PRINCÍPIO DA ENUMERAÇÃO

Um conjunto é dito finito se contém exatamente m elementos distintos, onde m denota algum inteiro não negativo. Caso contrário, o conjunto é dito infinito. Por exemplo, o conjunto vazio, $\varnothing$, e o conjunto de letras do alfabeto são conjuntos finitos, enquanto o conjunto de inteiros positivos pares, $\{2, 4, 6, \dots\}$, é infinito.

A notação $n(A)$ será usada para denotar o número de elementos de um conjunto finito A[†]. Alguns textos usam $\#(A)$, $|A|$ ou card(A) em vez de $n(A)$.

Lema 1-4: se A e B são conjuntos finitos disjuntos, então $A \cup B$ é finito e

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Ao contar os elementos de $A \cup B$, primeiramente conte os que estão em A. Existem $n(A)$ elementos em A. Os únicos outros elementos de $A \cup B$ são aqueles que estão em B, mas não em A. Mas como A e B são disjuntos, nenhum elemento de B está em A e, portanto, existem $n(B)$ elementos que estão em B mas não estão em A. Logo, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Há também uma fórmula para $n(A \cup B)$ mesmo quando os conjuntos não são disjuntos. Esse fato é demonstrado no Problema 1.28.

Teorema 1-5: se A e B são conjuntos finitos, então $A \cup B$ e $A \cap B$ são finitos e

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Podemos aplicar esse resultado para obter uma fórmula similar para três conjuntos:

Corolário 1-6: se A, B e C são conjuntos finitos, então $A \cup B \cup C$ também é, e

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Pode-se usar indução matemática (Seção 1.10) para generalizar esse resultado para qualquer número finito de conjuntos.

Exemplo 1.7 Considere os seguintes dados sobre 120 estudantes de matemática no que diz respeito aos idiomas francês, alemão e russo.

65 estudam francês,
45 estudam alemão,
42 estudam russo,
20 estudam francês e alemão,
25 estudam francês e russo,
15 estudam alemão e russo,
8 estudam os três idiomas.

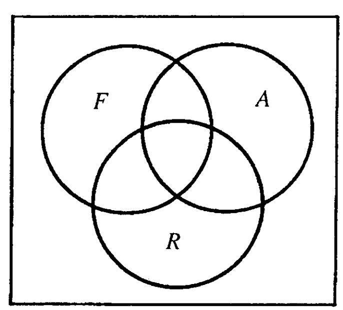


Fig. 1-9

Sejam F, A e R os conjuntos de alunos que estudam francês, alemão e russo, respectivamente. Queremos determinar o número de alunos que estudam pelo menos um dos três idiomas e preencher o diagrama de Venn da Figura 1-9 com o número correto de estudantes em cada região.

Pelo Corolário 1-6,

$$\begin{aligned}(F \cup A \cup R) &= n(F) + n(A) + n(R) - n(F \cap A) - n(F \cap R) - n(A \cap R) + n(F \cap A \cap R) \\ &= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 = 100\end{aligned}$$

[†] N. de T. O termo mais usado em português para número de elementos de um conjunto A é cardinalidade de A.

Isto é, $n(F \cup A \cup R) = 100$ alunos estudam pelo menos um dos três idiomas.

Usamos então esse resultado para preencher o diagrama de Venn. Temos:

8	estudam os três idiomas;
$20 - 8 = 12$	estudam francês e alemão, mas não russo;
$25 - 8 = 17$	estudam francês e russo, mas não alemão;
$15 - 8 = 7$	estudam alemão e russo, mas não francês;
$65 - 12 - 8 - 17 = 28$	estudam apenas francês;
$45 - 12 - 8 - 7 = 18$	estudam apenas alemão;
$42 - 17 - 8 - 7 = 10$	estudam apenas francês;
$120 - 100 = 20$	não estudam idioma algum.

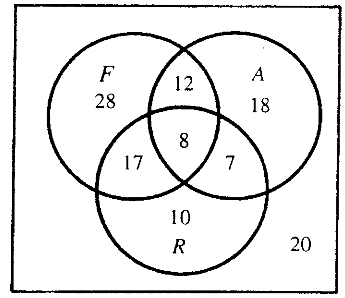


Fig. 1-10

O diagrama completo aparece na Figura 1-10. Observe que $28 + 18 + 10 = 56$ alunos estudam apenas um idioma.

1.9 CLASSES DE CONJUNTOS, PARTES DE UM CONJUNTO, PARTIÇÕES

Dado um conjunto S, podemos querer tratar de alguns dos seus subconjuntos. Neste caso, estaríamos considerando um conjunto de subconjuntos. Sempre que uma situação dessas ocorrer, a fim de evitar mal-entendidos, vamos nos referir a uma *classe* de conjuntos ou *coleção* de conjuntos no lugar de um conjunto de conjuntos. Se desejarmos considerar alguns dos conjuntos de uma determinada classe, falaremos de uma *subclasse* ou uma *subcoleção*.

Exemplo 1.8 Suponha que $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Seja A a classe de subconjuntos de S que contêm exatamente três elementos de S. Então,

$$A = [\{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,4\}]$$

Os elementos de A são os conjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1,3, 4\}$ e $\{2, 3, 4\}$.
Seja B a classe dos subconjuntos de S que contêm o número 2 e outros dois elementos de S. Então,

$$B = [\{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{2,3,4\}].$$

Os elementos de B são os conjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ e $\{2, 3, 4\}$. Portanto, B é uma subclasse de A, já que todo elemento de B é também um elemento de A. (Para evitar confusões, vamos por vezes usar colchetes em vez de parênteses para indicar conjuntos de uma mesma classe.)

Partes de um Conjunto†

Para um dado conjunto S, podemos falar do conjunto de todos os subconjuntos de S. Essa classe é chamada de conjunto das *partes* de S e será denotada por Partes(S). Se S é finito, então Partes(S) também é. Na verdade, o número de elementos de Partes(S) é 2 elevado à cardinalidade de S; isto é,

$$n(\text{Partes}(S)) = 2^{n(S)}$$

(Por esta razão, o conjunto das partes de S é geralmente denotado por 2^S.)

Exemplo 1-9 Suponha que $S = \{1, 2, 3\}$. Então,

$$\text{Partes}(S) = [\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ S].$$

Observe que o conjunto $\varnothing$ pertence a Partes(S), pois $\varnothing$ é um subconjunto de S. De maneira similar, S pertence a Partes(S). Como era de se esperar da observação acima, Partes(S) tem $2^3 = 8$ elementos.

Partições

Seja S um conjunto não vazio. Uma partição de S é uma subdivisão de S em conjuntos não vazios disjuntos. Mais precisamente, uma *partição* de S é uma coleção $\{A_i\}$ de subconjuntos não vazios de S tais que:

(i) Cada a em S pertence a algum dos A_i.
(ii) Os conjunto em $\{A_i\}$ são disjuntos dois a dois; isto é, se

† N. de T. Em inglês, *power sets*, usualmente traduzido como o conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto, ou o conjunto das partes de um conjunto.

$$A_i \neq A_j, \quad \text{então} \quad A_i \cap A_j = \varnothing$$

Os subconjuntos de uma partição são chamados de *células*. A Figura 1-11 apresenta um diagrama de Venn de uma partição de um conjunto de pontos retangular S em cinco células A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5.

Exemplo 1.10 Considere a seguinte coleção de subconjuntos de $S = \{1, 2, ..., 8, 9\}$:

(i) $[\{1,3,5\}, \{2,6\}, \{4,8,9\}]$
(ii) $[\{1,3,5\}, \{2,4,6,8\}, \{5,7,9\}]$
(iii) $[\{1,3,5\}, \{2,4,6,8\}, \{7,9\}]$

Então (i) não é uma partição de S, pois 7 pertence a S e não está em nenhum dos subconjuntos. Além do mais, (ii) não é uma partição de S, já que $\{1, 3, 5\}$ e $\{5, 7, 9\}$ não são disjuntos. Por outro lado, (iii) é uma partição de S.

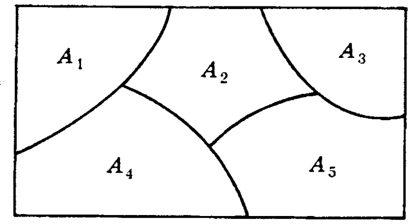


Fig. 1-11

Generalização de Operações entre Conjuntos

As operações de união e interseção entre dois conjuntos foram definidas acima. Tais operações podem ser estendidas para um número finito ou infinito de conjuntos como segue.

Considere primeiramente um número finito de conjuntos, $A_1, A_2, \ldots, A_m$. A união e a interseção desses conjuntos é, repectivamente, denotada e definida por:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = \cup_{i=1}^{m} A_i = \{x\text{: } x \in A_i \text{ para algum } A_i\} \text{ e}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m = \cap_{i=1}^{m} A_i = \{x\text{: } x \in A_i \text{ para todo } A_i\}$$

Isto é, a união consiste nos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos, e a interseção consiste nos elementos que pertencem a todos os conjuntos.

Seja $\mathcal{A}$ uma coleção qualquer de conjuntos. A união e a interseção de conjuntos na coleção $\mathcal{A}$ são denotadas e definidas, respectivamente, por

$$\cup(A\text{: } A \in \mathcal{A}) = \{x\text{: } x \in A \text{ para algum } A \in \mathcal{A}\} \text{ e}$$
$$\cap(A\text{: } A \in \mathcal{A}) = \{x\text{: } x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{A}\}.$$

Isto é, a união consiste nos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos da coleção $\mathcal{A}$, e a interseção consiste nos elementos que pertencem a todos os conjuntos da coleção $\mathcal{A}$.

Exemplo 1.11 Considere os conjuntos

$$A_1 = \{1,2,3,\ldots\} = \mathbf{N}, \quad A_2 = \{2,3,4,\ldots\}, \quad A_3 = \{3,4,5,\ldots\}, \quad A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}.$$

A união e a interseção dos conjuntos são:

$$\cup(A_n\text{: } n \in \mathbf{N}) = \mathbf{N} \quad \text{e} \quad \cap(A_n\text{: } n \in \mathbf{N}) = \varnothing.$$

As Leis de DeMorgan também são válidas para as operações generalizadas definidas acima. Isto é:

Teorema 1-7: seja $\mathcal{A}$ uma coleção de conjuntos. Então:

(i) $(\cup(A\text{: } A \in \mathcal{A}))^c = \cap(A^c\text{: } A \in \mathcal{A})$,
(ii) $(\cap(A\text{: } A \in \mathcal{A}))^c = \cup(A^c\text{: } A \in \mathcal{A})$.

1.10 INDUÇÃO MATEMÁTICA

Uma propriedade essencial do conjunto

$$\mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$$

que é usada em muitas demonstrações é a seguinte:

Princípio de indução matemática I: Seja P uma proposição definida nos inteiros positivos $\mathbf{N}$, i.e., $P(n)$ é verdadeiro ou falso para cada n em $\mathbf{N}$. Suponha que P tem as seguintes propriedades:

(i) $P(1)$ é verdade.
(ii) $P(n + 1)$ é verdade sempre que $P(n)$ é verdade.

Então, P é verdade para todo inteiro positivo.

Vamos demonstrar esse princípio. Na verdade, quando **N** é descrito axiomaticamente, esse princípio é usualmente um dos axiomas.

Exemplo 1.12 Seja P a proposição de que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2; isto é,

$$P(n)\colon\ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

(O n-ésimo número é $2n - 1$, e o número ímpar seguinte é $2n + 1$). Observe que $P(n)$ é verdade para $n = 1$, isto é,

$$P(1)\colon\ 1 = 1^2$$

Supondo que $P(n)$ é verdade, adicionamos $2n + 1$ a ambos os lados de $P(n)$ para obter

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

que é $P(n + 1)$. Isto é, $P(n + 1)$ é verdade se $P(n)$ é verdade. Pelo princípio da indução matemática, P é verdade para todo n.

Existe uma forma do princípio de indução matemática que por vezes é mais conveniente de ser usada. Embora pareça diferente, na verdade, é equivalente ao princípio de indução.

Princípio de indução matemática II: Seja P uma proposição definida nos inteiros positivos **N** tal que:

(i) $P(1)$ é verdade.

(ii) $P(n)$ é verdade se $P(k)$ é verdade para todo $1 \le k < n$.

Então, P é verdade para todo inteiro positivo.

Observação: Algumas vezes, se quer provar que a proposição P é verdade para o conjunto de inteiros

$$\{a,\ a + 1,\ a + 2, \ldots\},$$

onde a é algum inteiro, possivelmente zero. Isso pode ser feito substituindo 1 por a em qualquer um dos princípios de indução matemática acima.

Problemas Resolvidos

Conjuntos e subconjuntos

1.1 Quais dentre estes conjuntos são iguais: $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, r\}$, $\{s, r, s, t\}$?

Todos são iguais. Reordenação e repetição não alteram o conjunto.

1.2 Liste os elementos dos seguintes conjuntos; aqui, $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(*a*) $A = \{x\colon x \in \mathbf{N},\ 3 < x < 12\}$

(*b*) $B = \{x\colon x \in \mathbf{N},\ x \text{ é par},\ x < 15\}$

(*c*) $C = \{x\colon x \in \mathbf{N},\ 4 + x = 3\}$

(*a*) A é composto dos inteiros positivos entre 3 e 12; portanto,

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

(*b*) B é composto dos inteiros pares menores do que 15; portanto,

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}.$$

(*c*) Não existem inteiros positivos satisfazendo a condição $4 + x = 3$; portanto, C não contém nenhum elemento. Em outras palavras, $C = \varnothing$, o conjunto vazio.

1.3 Considere os seguintes conjuntos:

$$\varnothing,\quad A = \{1\},\quad B = \{1, 3\},\quad C = \{1, 5, 9\},\quad D = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$
$$E = \{1, 3, 5, 7, 9\},\quad U = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}.$$

Insira o símbolo correto, $\subseteq$ ou $\not\subseteq$, em cada par de conjuntos:

(*a*) $\varnothing, A$	(*c*) B, C	(*e*) C, D	(*g*) D, E
(*b*) A, B	(*d*) B, E	(*f*) C, E	(*h*) D, U

(*a*) $\varnothing \subseteq A$ porque $\varnothing$ é um subconjunto de todo conjunto.

(*b*) $A \subseteq B$ porque 1 é o único elemento de A e pertence a B.

(*c*) $B \not\subseteq C$ porque $3 \in B$ mas $3 \notin C$.

(*d*) $B \subseteq E$ porque os elementos de B também pertencem a E.

(*e*) $C \not\subseteq D$ porque $9 \in C$ mas $9 \notin D$.

(*f*) $C \subseteq E$ porque os elementos de C também pertencem a E.

(*g*) $D \not\subseteq E$ porque $2 \in D$, mas $2 \notin E$.

(*h*) $D \subseteq U$ porque os elementos de D também pertencem a U.

1.4 Mostre que $A = \{2, 3, 4, 5\}$ não é um subconjunto de $B = \{x : x \in \mathbf{N}, x \text{ é par}\}$.

É necessário mostrar que pelo menos um elemento em A não pertence a B. Assim, $3 \in A$ e, como B consiste nos inteiros pares, $3 \notin B$; logo, A não é um subconjunto de B.

1.5 Mostre que A $= \{2, 3, 4, 5\}$ é um subconjunto próprio de C $= \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$.

Todo elemento de A pertence a C e, portanto, $A \subseteq C$. Por outro lado, $1 \in C$ mas $1 \notin A$, logo $A \neq C$. Portanto, A é um subconjunto próprio de C.

Operações entre Conjuntos

Os Problemas 1.6 e 1.8 se referem ao conjunto universo $U = \{1, 2, \dots, 9\}$ e aos conjuntos

$$A = \{1,2,3,4,5\}, \quad C = \{5,6,7,8,9\}, \quad E = \{2,4,6,8\}$$
$$B = \{4,5,6,7\}, \quad D = \{1,3,5,7,9\}, \quad F = \{1,5,9\}$$

1.6 Determine:

(*a*) $A \cup B$ e $A \cap B$	(*c*) $A \cup C$ e $A \cap C$	(*e*) $E \cup E$ e $E \cap E$
(*b*) $B \cup D$ e $B \cap D$	(*d*) $D \cup E$ e $D \cap E$	(*f*) $D \cup F$ e $D \cap F$

Lembre que a união $X \cup Y$ consiste nos elementos em X ou Y (ou ambos), e que a interseção $X \cap Y$ consiste nos elementos em ambos, X e Y.

(*a*) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$	$A \cap B = \{4,5\}$
(*b*) $B \cup D = \{1,3,4,5,6,7,9\}$	$B \cap D = \{5,7\}$
(*c*) $A \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = U$	$A \cap C = \{5\}$
(*d*) $D \cap E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = U$	$D \cap E = \varnothing$
(*e*) $E \cup E = \{2,4,6,8\} = E$	$E \cap E = \{2,4,6,8\} = E$
(*f*) $D \cup F = \{1,3,5,7,9\} = D$	$D \cap F = \{1,5,9\} = F$

Observe que $F \subseteq D$; portanto, pelo Teorema 1.2, devemos ter $D \cup F = D$ e $D \cap F = F$.

1.7 Determine (*a*) A^c, B^c, D^c, E^c; (*b*) $A \backslash B$, $B \backslash A$, $D \backslash E$, $F \backslash D$; (*c*) $A \oplus B$, $C \oplus D$, $E \oplus F$.

Lembre que:

(1) O complementar X^C consiste nos elementos no conjunto universo U que não pertencem a X.

(2) A diferença $X \backslash Y$ consiste dos elementos de X que não estão em Y.

(3) A diferença simétrica $X \oplus Y$ consiste nos elementos de X ou Y mas não de ambos X e Y.

Portanto:

(*a*) $A^c = \{6,7,8,9\}$; $B^c = \{1,2,3,8,9\}$; $D^c = \{2,4,6,8\} = E$; $E^c = \{1,3,5,7,9\} = D$.
(*b*) $A \backslash B = \{1,2,3\}$; $B \backslash A = \{6,7\}$; $D \backslash E = \{1,3,5,7,9\} = D$; $F \backslash D = \varnothing$.
(*c*) $A \oplus B = \{1,2,3,6,7\}$; $C \oplus D = \{1,3,8,9\}$; $E \oplus F = \{2,4,6,8,1,5,9\} = E \cup F$.

1.8 Determine (*a*) $A \cap (B \cup E)$; (*b*) $(A \backslash E)^c$; (*c*) $(A \cap D) \backslash B$; (*d*) $(B \cap F) \cup (C \cap E)$.

(*a*) Primeiramente compute $B \cup E = \{2,4,5,6,7,8\}$. Então, $A \cap (B \cup E) = \{2,4,5\}$.
(*b*) $A \backslash E = \{1,3,5\}$. Então, $(A \backslash E)^c = \{2,4,6,7,8,9\}$.
(*c*) $A \cap D = \{1,3,5\}$. Conclua $(A \cap D) \backslash B = \{1,3\}$.
(*d*) $B \cap F = \{5\}$ e $C \cap E = \{6,8\}$. Portanto, $(B \cap F) \cup (C \cap E) = \{5,6,8\}$.

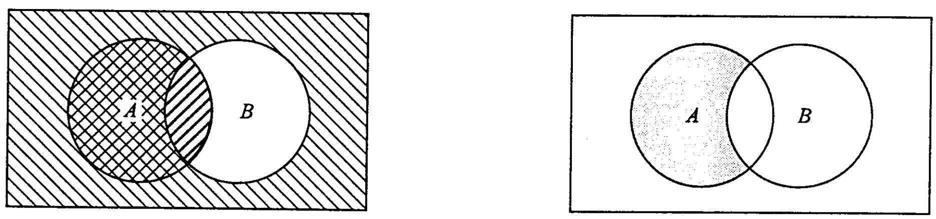
1.9 Mostre que é possível que $A \cap B = A \cap C$ sem que $B = C$.

Sejam $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ e $C = \{2,4\}$. Então $A \cap B = \{2\}$ e $A \cap C = \{2\}$. Logo, $A \cap B = A \cap C$.

Diagramas de Venn

1.10 Considere o diagrama de Venn de dois conjuntos arbitrários A e B na Figura 1-1(*c*). Assinale os conjuntos: (*a*) $A \cap B^c$; (*b*) $(B \backslash A)^c$.

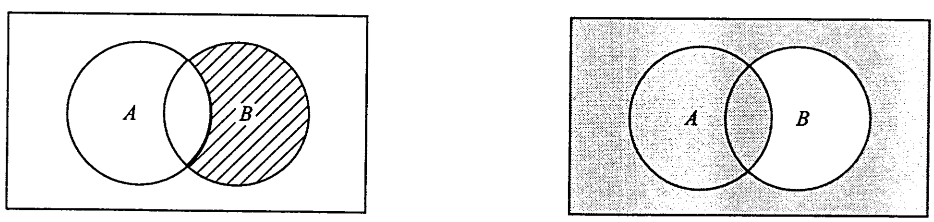
(*a*) Primeiramente marque a área que representa A tracejando em uma direção (///) e depois marque a área que representa B^C (a área fora de B) tracejando em outra direção (\\\\\\), como mostra a Figura1-12(*a*). A área com tracejado nas duas direções é a interseção desses dois conjuntos e representa $A \cap B^c$. De fato, $A \backslash B$ é às vezes definido como $A \cap B^c$.



(*a*) A e B^c estão tracejados (*b*) $A \cap B^c$ está sombreado

Fig. 1-12

(*b*) Primeiramente marque a área que representa $B \backslash A$ (a área de B que não está em A) como na Figura 1-13(*a*). A área fora da região marcada, mostrada na Figura 1-13(*b*), representa $(B \backslash A)^C$.



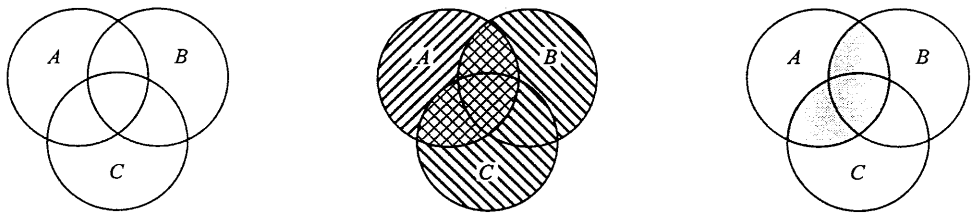
(*a*) $B \backslash A$ está assinalada (*b*) $(B \backslash A)^C$ está assinalada

Fig. 1-13

1.11 Ilustre a lei de distributividade $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ com diagramas de Venn.

Desenhe três círculos se intersecionando assinalados com A, B e C, como na Figura 1-14(*a*). Agora, como na Figura 1-14(*b*), preencha A com traços em uma direção e $B \cup C$ com traços em outra direção; a área tracejada nas duas direções é $A \cap (B \cap C)$ como na Figura 1-14(*c*). Preencha então $A \cap B$ e $(A \cap C)$ como na Figura 1-14(*d*); a área total marcada é $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, como na Figura 1-14(*e*).

Como esperado pela lei de distributividade, $A \cap (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ são representados pelos mesmos pontos.



(*a*) (*b*) A e $B \cup C$ estão assinalados (*c*) $A \cap (B \cup C)$ estão assinalados

(*a*) $A \cap B$ e $A \cap C$ estão assinalados (*b*) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ estão assinalados

Fig. 1-14

1.12 Determine a validade do seguinte argumento:

S_1 : Todos meus amigos são músicos.
S_2 : João é meu amigo.
S_3 : Nenhum dos meus vizinhos é músico.

S : João não é meu vizinho.

As premissas S_1 e S_3 permitem construir o diagrama de Venn como na Figura 1-15. Por S_2, João pertence ao conjunto de amigos que é disjunto do conjunto de vizinhos. Logo, S é uma conclusão válida e, portanto, o argumento é válido.

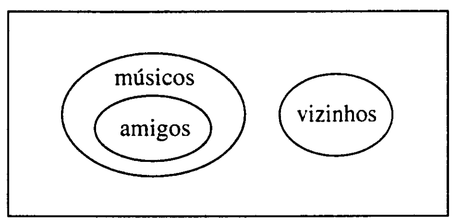


Fig. 1-15

Conjuntos Finitos e Princípio da Enumeração

1.13 Determine quais dos seguintes conjuntos são finitos:

(*a*) A = {estações do ano}
(*b*) B = {estados nos Estados Unidos}
(*c*) C = {inteiros positivos menores do que 1}
(*d*) D = {inteiros ímpares}
(*e*) E = {divisores inteiros positivos de 12}
(*f*) F = {gatos que vivem nos Estados Unidos}

(*a*) A é finito pois existem quatro estações no ano, i.e., $n(A) = 4$.

(*b*) B é finito porque existem 50 estados nos Estados Unidos, i.e., $n(B) = 50$.

(*c*) Não existem inteiros positivos menores do que 1; logo, C é vazio. Portanto, C é finito e $n(C) = 0$.

(*d*) D é infinito.

(*e*) Os divisores inteiros positivos de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12. Portanto, E é finito e $n(E) = 6$.

(*f*) Embora possa ser difícil determinar o número de gatos que vivem nos Estados Unidos, existe um número finito deles em qualquer tempo. Portanto, F é finito.

1.14 Em uma pesquisa com 60 pessoas, verificou-se que:

25 lêem a *Newsweek*,
26 lêem *Time*,
26 lêem *Fortune*,
9 lêem *Newsweek* e *Fortune*,
11 lêem *Newsweek* e *Time*,

8 lêem *Time* e *Fortune*,
3 lêem as três revistas.

(*a*) Ache o número de pessoas que lêem pelo menos uma das três revistas.

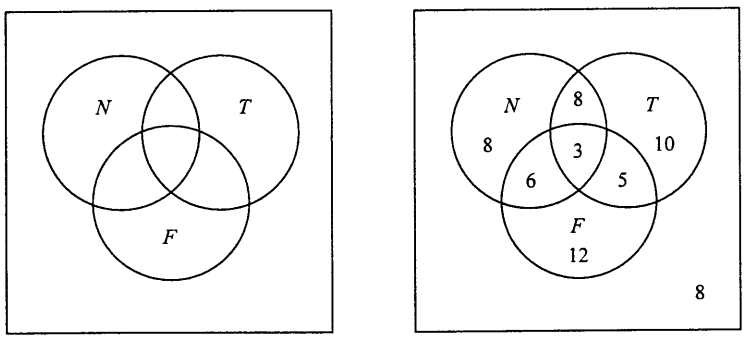
(*b*) Preencha, com o número correto de pessoas, cada uma das oito regiões no diagrama de Venn na Figura 1-16(*a*), onde N, T e F denotam, respectivamente, o conjunto de pessoas que lêem *Newsweek*, *Time* e *Fortune*.

(*c*) Ache o número de pessoas que lêem exatamente uma revista.

(*a*) Queremos $n(N \cup T \cup F)$. Pelo Corolário 1.6,

$$n(N \cup T \cup F) = n(N) + n(T) + n(F) - n(N \cap T) - n(N \cap F) - n(T \cap F) + n(N \cap T \cap F)$$

$$= 25 + 26 + 26 - 11 - 9 - 8 + 3 = 52.$$



(*a*) (*b*)

Fig. 1-16

(*b*) O diagrama de Venn, obtido na Figura 1-16(*b*), mostra o seguinte:

3	lêem as três revistas;
$11 - 3 = 8$	lêem *Newsweek* e *Time*, mas não as três revistas;
$9 - 3 = 6$	lêem *Newsweek* e *Fortune*, mas não as três revistas;
$8 - 3 = 5$	lêem *Time* e *Fortune*, mas não as três revistas;
$25 - 8 - 6 - 3 = 8$	lêem apenas a *Newsweek*;
$26 - 8 - 5 - 3 = 10$	lêem apenas *Time*;
$26 - 6 - 5 - 3 = 12$	lêem apenas *Fortune*;
$60 - 52 = 8$	não lêem revista alguma.

(*c*) $8 + 10 + 12 = 30$ lêem apenas uma revista.

Álgebra de Conjuntos e Dualidade

1.15 Escreva a equação dual de cada uma das equações a seguir.

(*a*) $(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$ (*c*) $(A \cap U) \cap (\varnothing \cup A^c) = \varnothing$

(*b*) $(A \cup B \cup C)^c = (A \cup C)^c \cap (A \cup B)^c$ (*d*) $(A \cap U)^c \cap A = \varnothing$

Trocando $\cup$ por $\cap$ e também U por $\varnothing$ em cada equação:

(*a*) $(\varnothing \cup A) \cap (B \cup A) = A$. (*c*) $(A \cup \varnothing) \cup (U \cap A^c) = U$

(*b*) $(A \cap B \cap C)^c = (A \cap C)^c \cup (A \cap B)^c$ (*d*) $(A \cup \varnothing)^c \cup A = U$

1.16 Prove as leis de comutatividade: (*a*) $A \cup B = B \cup A$ e (*b*) $A \cap B = B \cap A$.

(*a*) $A \cup B = \{x: x \in A \text{ ou } x \in B\} = \{x: x \in B \text{ ou } x \in A\} = B \cup A$.

(*b*) $A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\} = \{x: x \in B \text{ e } x \in A\} = B \cap A$.

1.17 Prove a seguinte identidade: $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$.

	Afirmativa	Justificativa
1.	$(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup (B \cap B^c)$	Lei de Distributividade
2.	$B \cap B^c = \varnothing$	Lei dos complementares
3.	$(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup \varnothing$	Substituição
4.	$A \cup \varnothing = A$	Lei da Identidade
5.	$(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$	Substituição

1.18 Prove: $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. (Logo, qualquer uma das sentenças pode ser usada para definir $A \oplus B$.)

Usando $X \backslash Y = X \cap Y^c$ e as leis da Tabela 1-1, incluindo as leis de DeMorgan, obtemos:

$$\begin{aligned}(A \cup B)\backslash(A \cap B) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) && \text{De Morgan}\\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (B \cap B^c) && \text{Distribut.}\\ &= \varnothing \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup \varnothing && \text{Complement.}\\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A). && \text{Identidade}\end{aligned}$$

Classes de Conjuntos

1.19 Ache os elementos do conjunto $A = [\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7, 8\}]$.

A é uma classe de conjuntos; seus elementos são os conjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5\}$ e $\{6, 7, 8\}$.

1.20 Considere a classe A de conjuntos do Problema 1.19. Determine se cada uma das afirmativas seguintes é verdadeira ou falsa:

(*a*) $1 \in A$ (*c*) $\{6,7,8\} \in A$ (*e*) $\varnothing \in A$
(*b*) $\{1,2,3\} \subseteq A$ (*d*) $\{\{4,5\}\} \subseteq A$ (*f*) $\varnothing \subseteq A$

(*a*) Falso. 1 não é um elemento de A.
(*b*) Falso. $\{1,2,3\}$ não é um subconjunto de A; é um elemento de A.
(*c*) Verdadeiro. $\{6,7,8\}$ é um elemento de A.
(*d*) Verdadeiro. $\{\{4,5\}\}$, o conjunto composto do elemento $\{4,5\}$, é um elemento de A.
(*e*) Falso. O conjunto vazio não é um elemento de A, i. e., não é um dos três elementos listados como elementos de A.
(*f*) Verdadeiro. O conjunto vazio é um subconjunto de todo conjunto, inclusive de uma classe de conjuntos.

1.21 Determine o conjunto das partes de A Partes(A) de $A = \{a,b,c,d\}$.

Os elementos de Partes(A) são os subconjuntos de A. Portanto,

$$\text{Partes}(A) = [A, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \varnothing]$$

Como se poderia esperar, Partes(A) possui $2^4 = 16$ elementos.

1.22 Seja $S = 5\{$*vermelho, azul, verde, amarelo*$\}$. Determine quais das seguintes classes são partições de S:

(*a*) $P_1 = [\{vermelho\}, \{azul, verde\}]$. (*c*)$P_3 = [\varnothing, \{vermelho, azul\}, \{verde, amarelo\}]$.
(*b*) $P_2 = [\{vermelho, azul, verde, amarelo\}]$. (*d*)$P_4 = [\{azul\}, \{vermelho, amarelo, verde\}]$.

(*a*) Não, pois *amarelo* não pertence a nenhuma célula.
(*b*) Sim, pois P_2 é uma partição de S, cujo único elemento é o próprio S.
(*c*) Não, pois o conjunto vazio $\varnothing$ não pode pertencer a nenhuma partição.
(*d*) Sim, pois cada elemento de S aparece exatamente em uma célula.

1.23 Ache todas as partições de $S = \{1, 2, 3\}$.

Observe que cada partição de S contém 1, 2 ou 3 células. As partições que contêm cada uma destas quantidades de células são:

(1) : $[S]$

(2) : $[\{1\}, \{2, 3\}]$, $[\{2\}, \{1, 3\}]$, $[\{3\}, \{1, 2\}]$

(3) : $[\{1\}, \{2\}, \{3\}]$

Portanto, vemos que existem cinco partições diferentes de S.

Problemas Diversos

1.24 Prove a proposição P de que a soma dos primeiros n inteiros positivos é igual a $\frac{1}{2}n(n + 1)$; isto é,

$$P(n): \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

A proposição vale para $n = 1$, pois

$$P(1) : 1 = \tfrac{1}{2}(1)(1 + 1).$$

Supondo que $P(n)$ é verdade, somamos $n+1$ a ambos os lados de $P(n)$, obtendo:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) &= \tfrac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1) \\ &= \tfrac{1}{2}[n(n + 1) + 2(n + 1)] \\ &= \tfrac{1}{2}[(n + 1)(n + 2)], \end{aligned}$$

que é $P(n + 1)$. Isto é, $P(n + 1)$ é verdade se $P(n)$ é verdade. Pelo princípio de indução, P é verdade para todo n.

1.25 Prove a seguinte proposição para $(n \geq 0)$:

$$P(n): \quad 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$P(0)$ é verdade, pois $1 = 2^1 - 1$. Supondo que $P(n)$ é verdade, somamos 2^{n+1} a ambos os lados de $P(n)$, obtendo

$$\begin{aligned} 1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\ &= 2(2^{n+1}) - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1, \end{aligned}$$

que é $P(n+1)$. Portanto, $P(n + 1)$ é verdade se $P(n)$ é verdade. Pelo princípio de indução, P é verdade para todo $n \geq 0$.

1.26 Prove: $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$ e $(A \cap B) \subseteq B \subseteq (A \cup B)$.

Já que todo elemento de $A \cap B$ está em ambos A e B, é certamente verdade que, se $x \in (A \cap B)$, então $x \in A$. Portanto, $(A \cap B) \subseteq A$. Além disso, se $x \in A$, então $x \in (A \cap B)$ (pela definição de $A \cup B$), logo $A \subseteq (A \cup B)$. Juntando-se tudo, obtêm-se, $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$. De maneira similar, $(A \cap B) \subseteq B \subseteq (A \cup B)$.

1.27 Prove o Teorema 1.2: são equivalentes $A \subseteq B$, $A \cap B = A$ e $A \cup B = B$.

Suponha que $A \subseteq B$ e seja $x \in A$. Então $x \in B$, já que $x \in A \cap B$ e $A \subseteq A \cap B$. Pelo Problema 1.26, $(A \cap B) \subseteq A$. Portanto, $A \cap B = A$. Por outro lado, suponha que $A \cap B = A$, e seja $x \in A$. Então $x \in (A \cap B)$, pois $x \in A$ e $x \in B$. Portanto, $A \subseteq B$. Ambos os resultados mostram que $A \subseteq B$ é equivalente a $A \cap B = A$.

Suponha novamente que $A \subseteq B$. Seja $x \in (A \cap B)$. Então, $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$, então $x \in B$ porque $A \subseteq B$. Em qualquer caso, $x \in B$. Portanto, $A \cup B \subseteq B$. Pelo Problema 1.26, $B \subseteq A \cup B$. Portanto, $A \cup B = B$. Agora suponha que $A \cup B = B$, e seja $x \in A$. Então $x \in A \cup B$ pela definição de união de conjuntos. Logo, $x \in B = A \cup B$. Portanto, $A \subseteq B$. Ambos os resultados mostram que $A \subseteq B$ é equivalente a $A \cup B = B$.

Logo, $A \subseteq B$, $A \cap B = A$ e $A \cup B = B$ são equivalentes.

1.28 Prove o Teorema 1.5: se A e B são conjuntos finitos, então $A \cup B$ e $A \cap B$ são finitos e

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Se A e B são finitos, então é claro que, $A \cap B$ e $A \cup B$ são finitos.

Suponha que contemos os elementos de A e depois contemos os elementos de B. Então, todo elemento em $A \cap B$ seria contado duas vezes: uma vez em A e outra em B. Portanto,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Uma alternativa de prova é considerar o Problema 1.36 e escrever: A é a união disjunta de $A \backslash B$ e $A \cap B$; B é a união disjunta de $B \backslash A$ e $A \cap B$; e $A \cup B$ é a união disjunta de $A \backslash B$, $A \cap B$ e $B \backslash A$. Portanto, pelo Lema 1.4,

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A \backslash B) + n(A \cap B) + n(B \backslash A) \\ &= n(A \backslash B) + n(A \cap B) + n(B \backslash A) + n(A \cap B) - n(A \cap B) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B). \end{aligned}$$

Problemas Complementares

Conjuntos e Subconjuntos

1.29 Quais dos seguintes conjuntos são iguais?

$A = \{x\colon x^2 - 4x + 3 = 0\}$, $C = \{x\colon x \in \mathbf{N}, x < 3\}$, $E = \{1, 2\}$, $G = \{3, 1\}$,

$B = \{x\colon x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $D = \{x\colon x \in \mathbf{N},\ x \text{ é ímpar},\ x < 5\}$ $F = \{1, 2, 1\}$, $H = \{1, 1, 3\}$.

1.30 Liste os elementos dos conjuntos seguintes considerando o conjunto universo $U = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$. Identifique também os conjuntos iguais, se existirem.

$A = \{x : x \text{ é vogal}\}$ $C = \{x : x \text{ precede “f” no alfabeto}\}$

$B = \{x : x \text{ é uma letra na palavra “}\textit{little}\text{”}\}$ $D = \{x : x \text{ é uma letra na palavra “}\textit{title}\text{”}\}$

1.31 Seja $A = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$, $E = \{3, 5\}$. Determine X tal que

(a) X e B são disjuntos. (c) $X \subseteq A$ mas $X \not\subseteq C$.

(b) $X \subseteq D$ mas $X \not\subseteq B$. (d) $X \subseteq C$ mas $X \not\subseteq A$.

Operações entre Conjuntos

Os Problemas 1.32 a 1.34 se referem aos conjuntos $U = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$ e $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $B = \{2, 5, 7\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

1.32 Encontre: (a) $A \cap B$ e $A \cap C$; (b) $A \cup B$ e $B \cup C$; (c) A^c e C^c.

1.33 Encontre: (a) $A \backslash B$ e $A \backslash C$; (b) $A \oplus B$ e $A \oplus C$.

1.34 Encontre: (a) $(A \cup C) \backslash B$; (b) $(A \cup B)^c$; (c) $(B \oplus C) \backslash A$.

1.35 Sejam: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, d, f, g\}$, $C = \{b, c, e, g, h\}$, $D = \{d, e, f, g, h\}$.
Ache:

(a) $A \cup B$ (d) $A \cap (B \cup D)$ (g) $(A \cup D) \backslash C$ (j) $A \oplus B$

(b) $B \cap C$ (e) $B \backslash (C \cup D)$ (h) $B \cap C \cap D$ (k) $A \oplus C$

(c) $C \backslash D$ (f) $(A \cap D) \cup B$ (i) $(C \backslash A) \backslash D$ (l) $(A \oplus D) \backslash B$

1.36 Sejam A e B conjuntos quaisquer. Mostre:

(a) A é a união disjunta de $A \backslash B$ e $A \cap B$.

(b) $A \cup B$ é a união disjunta de $A \backslash B$, $A \cap B$ e $B \backslash A$.

1.37 Prove:

(a) $A \subseteq B$ se e somente se $A \cap B^c = \varnothing$.

(b) $A \subseteq B$ se e somente se $A^c \cup B = U$.

(c) $A \subseteq B$ se e somente se $B^c \subseteq A^c$.

(d) $A \subseteq B$ se e somente se $A \backslash B = \varnothing$.

(Compare os resultados com o Teorema 1.2.)

1.38 Prove as leis de absorção: (*a*) $A \cup (A \cap B) = A$; (*b*) $A \cap (A \cup B) = A$.

1.39 A fórmula $A \backslash B = A \cap B^c$ define a operação de diferença em termos da operação de interseção e de complementar. Ache uma fórmula que defina a união $A \cup B$ em termos da operação de interseção e de complementar.

Diagramas de Venn

1.40 O diagrama de Venn na Figura 1-17 apresenta os conjuntos A, B e C. Assinale os seguintes conjuntos: (*a*) $A \backslash (B \cup C)$; (*b*) $A^c \cap (B \cup C)$; (*c*) $A^c \cap (C \backslash B)$.

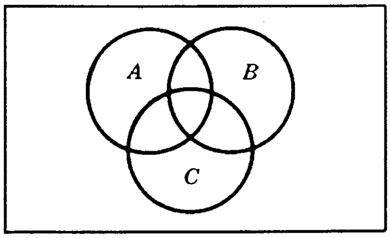


Fig. 1-17

1.41 Use o diagrama Venn da Fig. 1-6 e o Exemplo 1.6 para escrever cada um dos conjuntos como a união disjunta dos produtos fundamentais:

(*a*) $A \cap (B \cup C)$, (*b*) $A^c \cap (B \cup C)$, (*c*) $A \cup (B \backslash C)$.

1.42 Esboce um diagrama de Venn para os conjuntos A, B e C, onde $A \subseteq B$, os conjuntos B e C são disjuntos, mas A e C têm elementos em comum.

Álgebra de Conjuntos e Dualidade

1.43 Escreva a equação dual de cada uma das equações:

(*a*) $A \cup B = (B^c \cap A^c)^c$ (*b*) $A = (B^c \cap A) \cup (A \cap B)$

(*c*) $A \cup (A \cap B) = A$ (*d*) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) = U$

1.44 Use as leis da Tabela 1-1 para provar cada uma das identidades:

(*a*) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$, (*b*) $A \cup (A \cap B) = A$,

(*c*) $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$.

Conjuntos Finitos e o Princípio de Enumeração

1.45 Determine quais dos seguintes conjuntos são finitos.

(*a*) O conjunto das retas paralelas ao eixo x.
(*b*) O conjunto das letras do alfabeto.
(*c*) O conjunto dos números múltiplos de 5.
(*d*) O conjunto de animais que vivem na Terra.
(*e*) O conjunto de números que são soluções da equação $x^{27} + 26x^{18} - 17x^{11} + 7x^3 - 10 = 0$.
(*f*) O conjunto dos círculos contendo a origem (0, 0).

1.46 Use o Teorema 1.5 para provar o Corolário 1.6: se A, B e C são conjuntos finitos, então $A \cup B \cup C$ também é finito e

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

1.47 Foi realizada uma pesquisa com uma amostragem de 25 carros novos à venda em uma revendedora local para verificar quais dos três opcionais populares, ar-condicionado (A), rádio (R) e vidros elétricos (V), já estavam instalados. A pesquisa concluiu:

15 tinham ar-condicionado,
12 tinham rádio,

11 tinham vidros elétricos,
5 tinham ar-condicionado e vidros elétricos,
9 tinham ar-condicionado e rádio,
4 tinham rádio e vidros elétricos,
3 tinham as três opções.

Ache o número de carros que têm: (*a*) apenas vidros elétricos; (*b*) apenas ar-condicionado;(*c*) apenas rádio; (*d*) rádio e vidros elétricos, mas não ar-condicionado; (*e*) ar-condicionado e rádio, mas não vidros elétricos; (*f*) apenas uma das opções; (*h*) nenhuma das opções.

Classes de Conjuntos

1.48 Ache o conjunto das partes de A, Partes(A) $= \{1,2,3,4,5\}$.

1.49 Dado $A = [\{a,b\}, \{c\}, \{d,e,f\}]$.

(*a*) Determine se cada uma das afirmativas seguintes é verdadeira ou falsa:

$$(i)\ a \in A, \quad \text{(ii)}\ \{c\} \subseteq A, \quad \text{(iii)}\ \{d,e,f\} \in A, \quad \text{(iv)}\ \{\{a,b\}\} \subseteq A, \quad \text{(v)}\ \varnothing \subseteq A.$$

(*b*) Ache o conjunto das partes de A.

1.50 Suponha que A seja um conjunto finito e $n(A) = m$. Mostre que Partes(A) tem 2^m elementos.

Partições

1.51 Seja $X = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$. Determine se cada uma das seguintes classes é ou não uma partição de X.

(*a*) $[\{1,3,6\}, \{2,8\}, \{5,7,9\}]$
(*b*) $[\{1,5,7\}, \{2,4,8,9\}, \{3,5,6\}]$
(*c*) $[\{2,4,5,8\}, \{1,9\}, \{3,6,7\}]$
(*d*) $[\{1,2,7\}, \{3,5\}, \{4,6,8,9\}, \{3,5\}]$

1.52 Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determine se cada uma das seguintes classes é ou não uma partição de S.

(*a*) $P_1 = [\{1,2,3\}, \{1,4,5,6\}]$
(*b*) $P_2 = [\{1,2\}, \{3,5,6\}]$
(*c*) $P_3 = [\{1,3,5\}, \{2,4\}, \{6\}]$
(*d*) $P_4 = [\{1,3,5\}, \{2,4,6,7\}]$

1.53 Determine se cada uma das seguintes classes é ou não uma partição do conjunto de inteiros positivos N.

(*a*) $[\{n: n > 5\}, \{n: n < 5\}]$ (*b*) $[\{n: n > 5\}, \{0\}, \{1,2,3,4,5\}]$, (*c*) $[\{n: n^2 > 11\}, \{n: n^2 < 11\}]$

1.54 Sejam $\{A_1, A, \ldots, A_m\}$ e $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ partições de um conjunto X. Mostre que a coleção de conjuntos:

$$P = [A_i \cap B_j : i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n] \backslash \varnothing$$

também é uma partição (chamada de *cross partition*†) de X (observe que o conjunto vazio, $\varnothing$, foi retirado).

1.55 Seja $X = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$. Ache a *cross partition* P das seguintes partições de X:

$$P_1 = [\{1,3,5,7,9\}, \{2,4,6,8\}] \quad \text{e} \quad P_2 = [\{1,2,3,4\}, \{5,7\}, \{6,8,9\}.$$

Argumentos e Diagramas de Venn

1.56 Use um diagrama de Venn para mostrar que o seguinte argumento é válido:

S_1: Bebês são ilógicos.
S_2: Ninguém que possa lidar com crocodilos é desprezado.
S_3: Pessoas ilógicas são desprezadas.

S: Bebês não podem lidar com crocodilos.

(Esse argumento foi retirado do livro *Symbolic logic*, de Lewis Carroll, o mesmo autor de *Alice no País das Maravilhas*.)

† N. de T. Optamos por deixar a expressão em inglês por não haver tradução consagrada.

1.57 Considere as seguintes hipóteses:

S_1 : Todos os dicionários são úteis.
S_2 : Maria possui apenas romances.
S_3 : Nenhum romance é útil.

Determine a validade de cada uma das conclusões seguintes: (*a*) romances não são dicionários; (*b*) Maria não tem um dicionário; (*c*) todos livros úteis são dicionários.

Indução

1.58 Prove: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$.

1.59 Prove: $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = 2n(3n-1)$. $\frac{n(3n-1)}{2}$

1.60 Prove: $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$. $n/2n+1$

1.61 Prove: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Problemas Variados

1.62 Suponha que $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ seja o conjunto universo e $A = \{x\colon x \le 6\}$, $B = \{x\colon 4 \le x \le 9\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{2, 3, 5, 7, 8\}$. Determine: (*a*) $A \oplus B$; (*b*) $B \oplus C$; (*c*) $A \cap (B \oplus D)$; (*d*) $(A \cap B) \oplus (A \cap D)$.

1.63 Prove as seguintes propriedades da diferença simétrica:

(i) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ (lei da associatividade).
(ii) $A \oplus B = B \oplus A$ (lei de comutatividade).
(iii) Se $A \oplus B = A \oplus C$, então $B = C$ (lei do cancelamento).
(iv) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ (lei de distributividade).

1.64 Considere n conjuntos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ em um conjunto universo U. Mostre:

(*a*) Existem 2^n produtos fundamentais dos n conjuntos.
(*b*) Quaisquer dois produtos fundamentais são disjuntos.
(*c*) U é a união de todos os produtos fundamentais.

Respostas dos Problemas Complementares

1.29 $B = C = E = F$; $A = D = G = H$.

1.30 $A = \{a, e, i, o, u\}$; $B = D = \{1, i, t, e\}$; $C = \{a, b, c, d, e\}$.

1.31 (*a*) C e E; (*b*) D e E; (*c*) A, B, D; (*d*) Nenhum.

1.32 (*a*) $A \cap B = \{2, 5\}$; $A \cap C = \{1, 5\}$. (*b*) $A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 7\}$; $B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$. (*c*) $A^c = \{3, 4, 7, 8, 9\}$; $C^c = \{2, 4, 6, 8\}$.

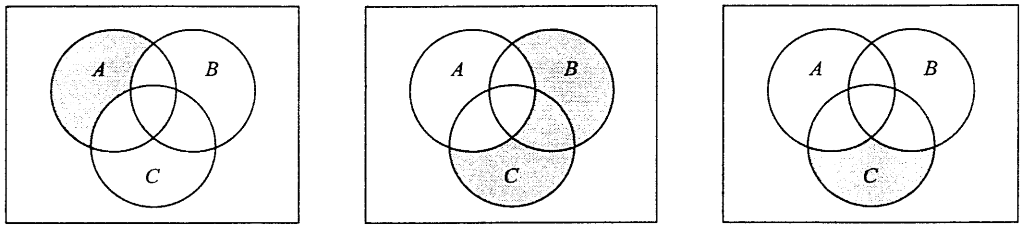
1.33 (*a*) $A \backslash B = \{1, 6\}$; $A \backslash C = \{2, 6\}$. (*b*) $A \oplus B = \{1, 6, 7\}$; $A \oplus C = \{2, 3, 6, 7, 9\}$.

1.34 (*a*) $(A \cup C) \backslash B = \{1, 3, 6, 9\}$. (*b*) $(A \cup B)^c = \{3, 4, 8, 9\}$. (*c*) $(B \oplus C) \backslash A = \{3, 9\}$.

1.35 (*a*) {a, b, c, d, e, f, g}; (*b*) {b, g}; (*c*) {b, c}; (*d*) {a, b, d, e}; (*e*) {a}; (*f*) {a, b, d, e, f, g}; (*g*) {a, d, f}; (*h*) {g}; (*i*) $\varnothing$; (*j*) {c, e, f, g}; (*k*) {a, d, y, h}; (*l*) {c, h}.

1.39 $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$

1.40 Veja Fig. 1-18.



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 1-18

1.41 (*a*) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C)$
(*b*) $(A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
(*c*) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c)$

1.42 Não existe um tal diagrama de Venn. Se A e C têm um elemento em comum x, e $A \subseteq B$, então x deve também pertencer a B. Logo, B e C também devem ter um elemento em comum.

1.43 (*a*) $A \cap B = (B^c \cup A^c)^c$; (*b*) $A = (B^c \cup A) \cap (A \cup B)$; (*c*) $A \cap (A \cup B) = A$;
(*d*) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c) = \varnothing$.

1.45 (*a*) Infinito; (*b*) finito; (*c*) infinito; (*d*) finito; (*e*) finito; (*f*) infinito.

1.47 Use os dados preenchendo primeiramente o diagrama de Venn de A (ar-condicionado), R (rádio) e V (vidros elétricos) da Figura 1-19. Então: (*a*) 5; (*b*) 4; (*c*) 2; (*d*) 4; (*e*) 6; (*f*) 11; (*g*) 23; (*h*) 2.

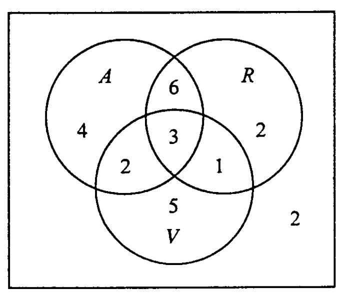


Fig. 1-19

1.48 Partes(A) tem $2^5 = 32$ elementos como descrito a seguir:

$[\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\},$
$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{3,4,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2,4,5\}, \{1,2,3,4\},$
$\{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, A]$.

1.49 (*a*) (i) Falsa; (ii) Falsa; (iii) Verdadeira; (iv) Verdadeira; (v) Falsa.
(*b*) Note que $n(A) = 3$; logo, Partes(A) tem $2^3 = 8$ elementos.

$$\text{Partes}(A) = \{A, [\{a,b\}, \{c\}], [\{a,b\}, \{d,e,f\}], [\{c\}, \{d,e,f\}], [\{a,b\}], [\{c\}], [\{d,e,f\}], \varnothing\}$$

1.50 Seja X um elemento arbitrário de Partes(A). Para cada $a \in A$, existem duas possibilidades: ou $a \in A$ ou $a \notin A$. Mas existem m elementos em A; portanto, existem $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^m$ diferentes conjuntos X. Isto é, Partes(A) tem 2^m elementos.

1.51 (*a*) Não, (*b*) não, (*c*) sim, (*d*) sim.

1.52 (*a*) Não, (*b*) não, (*c*) sim, (*d*) não.

1.53 (*a*) Não, (*b*) não, (*c*) sim.

1.55 $P = [\{1, 3\}, \{5, 7\}, \{9\}, \{2, 4\}, \{8\}]$.

1.56 As três premissas conduzem ao diagrama de Venn da Figura 1-20. O conjunto de bebês e o conjunto de pessoas que podem lidar com crocodilos são disjuntos. Em outras palavras, a conclusão S é válida.

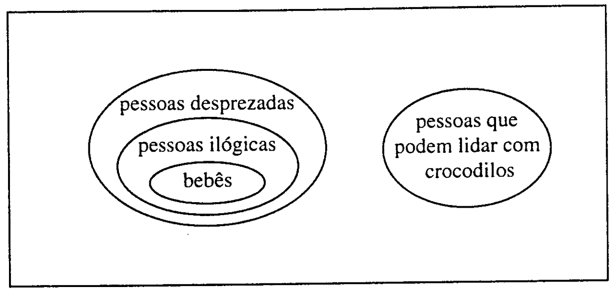


Fig. 1-20

1.57 As três premissas conduzem ao diagrama de Venn da Figura 1-21. Deste diagrama, segue que (*a*) e (*b*) são conclusões válidas. Entretanto, (*c*) não é uma conclusão válida, pois podem existir livros úteis que não sejam dicionários.

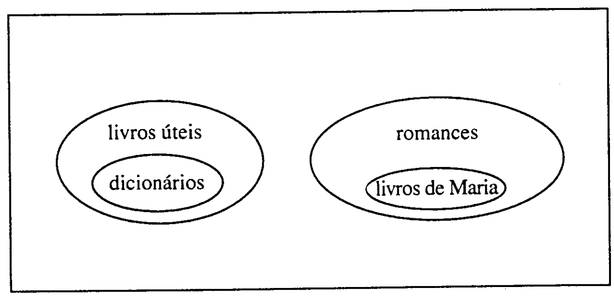


Fig. 1-21

1.62 (*a*) $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$; (*b*) $\{1, 3, 4, 6, 8\}$; (*c*) $\{2, 3, 4, 6\}$; (*d*) $\{2, 3, 4, 6\}$. [Note (*c*) = (*d*).]