Lógica Proposicional

I. Conceito de Proposição

Chama-se ***proposição*** todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento completo.

As proposições transmitem pensamentos, ou seja, *afirmam fatos* ou *exprimem juízos* que formamos a respeito de determinados entes.

A **Lógica Proposicional** adota como regras fundamentais do pensamento os seguintes princípios ou axiomas:

(i) **Princípio do Terceiro Excluído:** Toda proposição ou é **verdadeira** ou é **falsa**, isto é, verifica-se **sempre** um desses casos e nunca um terceiro.

(ii) **Princípio da Não Contradição:** Uma proposição não pode ser **verdadeira** e **falsa** ao mesmo tempo.

- Proposições Simples e Proposições Compostas

As proposições podem ser classificadas em **simples** (ou atômicas) e **compostas** (ou moleculares).

Definição 1 – Chama-se **proposição simples** aquela que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma.

As proposições simples são geralmente indicadas pelas letras latinas minúsculas **p, q, r, s, ... ,** chamadas **letras proposicionais**.

Definição 2 – Chama-se **proposição composta** aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições.

As proposições compostas são geralmente indicadas pelas letras latinas maiúsculas **P, Q, R, S, ... ,** também chamadas **letras proposicionais**.

Quando for necessário destacar que uma proposição composta **P** é formada pela combinação das proposições simples p, q, r, ... , escreve-se: **P(p, q, r, ...)**.

- Valores Lógicos das Proposições

Chama-se **valor lógico** de uma proposição a **verdade (V)** se a proposição é verdadeira e a **falsidade (F)** se a proposição é falsa.

Assim, pode-se interpretar os dois princípios da Lógica Matemática como afirmando que:

"Toda proposição tem um, e um só, dos valores V ou F".

II. Tabela – Verdade de uma Proposição

Uma característica fundamental da Lógica Proposicional é que seu objetivo está em analisar a ***forma*** das proposições e não seu ***conteúdo***, ou seja, iremos estudar aqui a ***estrutura*** de ligações com a qual uma dada proposição composta é construída e verificar todas as combinações de "verdadeiros" e "falsos" possíveis das proposições simples que a formam. Assim sendo, quando lidamos com proposições compostas, seu valor lógico será determinado pela estrutura com a qual a proposição foi construída e pelos valores lógicos de suas proposições simples componentes, com base no seguinte **princípio**:

"O valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente de sua *estrutura* e dos *valores lógicos* das proposições simples componentes, ficando por estes univocamente determinado."

Admitindo-se este princípio, para aplicá-lo na prática para a determinação do valor lógico de uma dada proposição composta, recorre-se a um dispositivo denominado **tabela-verdade**, na qual figuram todos os possíveis valores lógicos da proposição composta correspondente a todas as possíveis atribuições de valores lógicos às proposições simples componentes.

Assim, no caso de uma proposição composta cujas proposições simples componentes são **p** , **q** e **r** , por exemplo, poderemos ter as seguintes atribuições de valores lógicos:

	p
1	V
2	F

	p	*q*
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

	p	*q*	*r*
1	V	V	V
2	V	V	F
3	V	F	V
4	V	F	F
5	F	V	V
6	F	V	F
7	F	F	V
8	F	F	F

Observe que, se considerarmos da última coluna para a primeira, os valores lógicos V e F se alternam de **um em um** para a última proposição, de **dois em dois** para a penúltima proposição, depois de **quatro em quatro**, ou seja, dobrando-se os valores lógicos, formando **arranjos binários com repetição** dos elementos V e F.

Dessa forma, a partir da Análise Combinatória, pode-se chegar à conclusão de que a tabela-verdade de uma proposição composta com **"n" proposições simples** irá conter **2^n linhas.**

III. CONECTIVOS OU OPERADORES LÓGICOS

Chamam-se ***conectivos*** palavras que se usam para formar novas proposições a partir de outras. Conceitualmente, os conectivos realizam **operações lógicas** nas proposições, ou seja, formam uma nova proposição a partir de duas outras proposições iniciais, assim como determina o valor lógico da nova proposição formada.

São considerados conectivos "usuais" em lógica proposicional as palavras: "**não**", "**e**", "**ou**", "**se ... , então ...**", "**... se e somente se ...**". Estas estruturas são fundamentais, sendo utilizadas em diversas áreas do conhecimento além da Matemática, como a Lógica de Programação, por exemplo. Dessa forma, iremos apresentar abaixo diferentes formas de utilizar os operadores lógicos em diferentes contextos, porém com o mesmo efeito final:

Nome	*Como é lido*	*Símbolo*	*Uso em Prog.*
Negação	***Não*** "p"	**¬p**	NOT , !
Conjunção	"p" **e** "q"	**p ∧ q**	AND , &
Disjunção	"p" ***ou*** "q"	**p ∨ q**	OR
Disjunção Exclusiva	***Ou*** "p", ***ou*** "q"	**p ⊻ q**	XOR
Condicional	***Se*** "p", ***então*** "q"	**p → q**	
Bicondicional	"p" ***se e somente se*** "q"	**p ↔ q**	

A partir dessas informações, detalharemos a seguir as definições, tabelas-verdade e valores lógicos resultantes de cada um dos conectivos apresentados acima.

- Negação (¬)

Chama-se ***negação*** de uma proposição p a proposição representada por "*não p*", cujo valor lógico é a verdade (**V**) quando p é falsa e a falsidade (**F**) quando p é verdadeira.

Simbolicamente, a negação de p indica-se com a notação "**¬ p**", que se lê: "**não p**" ou "**não é verdade que p**".

Assim, **"*não p*" tem o valor lógico oposto daquele de p**, fazendo com que o valor lógico da negação de uma proposição seja assim definido:

p	*¬p*
V	**F**
F	**V**

Exemplo: A partir das proposições **p: Rosas são vermelhas** e **q: Violetas são azuis**, temos as seguintes proposições (que serão usados nos próximos conectivos):

- **¬p:** Rosas ***não*** são vermelhas.
- **¬q:** ***Não é verdade que*** violetas são azuis.

- Conjunção ($\wedge$)

Chama-se ***conjunção*** de duas proposições p e q a proposição representada por "*p e q*", cujo valor lógico é a verdade (**V**) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade (**F**) nos demais casos.

Simbolicamente, a conjunção de duas proposições p e q indica-se com a notação "**p $\wedge$ q**", que se lê: "**p e q**" ou, ocasionalmente, "**p, mas q**".

Assim, **a conjunção é verdadeira somente quando ambas as proposições são verdadeiras**, fazendo com que o valor lógico da conjunção de duas proposições seja assim definido:

p	q	p $\wedge$ q
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Exemplo:

- **p $\wedge$ q** : Rosas são vermelhas ***e*** violetas são azuis.

- Disjunção ($\vee$)

Chama-se ***disjunção*** de duas proposições p e q a proposição representada por "*p ou q*", cujo valor lógico é a verdade (**V**) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e a falsidade (**F**) quando as proposições p e q são ambas falsas.

Simbolicamente, a disjunção de duas proposições p e q indica-se com a notação "**p $\vee$ q**", que se lê: "**p ou q**".

Assim, **a disjunção é falsa somente quando ambas as proposições são falsas**, fazendo com que o valor lógico da disjunção de duas proposições seja assim definido:

p	q	p $\vee$ q
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Exemplo:

- **p $\vee$ q** : Rosas são vermelhas ***ou*** violetas são azuis.

- Disjunção Exclusiva ($\underline{\vee}$)

Chama-se ***disjunção exclusiva*** de duas proposições p e q a proposição representada por "*ou p ou q*", cujo valor lógico é a verdade (**V**) quando p ou q são verdadeiras, mas não ambas simultaneamente e a falsidade (**F**) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Simbolicamente, a disjunção de duas proposições p e q indica-se com a notação "**p $\underline{\vee}$ q**", que se lê: "**ou p ou q**" ou ainda "**p ou q, mas não ambos**".

Assim, **a disjunção exclusiva é falsa quando as proposições são ambas verdadeiras ou ambas falsas**, fazendo com que o valor lógico da disjunção exclusiva de duas proposições seja assim definido:

p	q	p $\underline{\vee}$ q
V	V	**F**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Exemplos:

- **p $\veebar$ q** : ***Ou*** rosas são vermelhas ***ou*** violetas são azuis.

- **p $\veebar$ q** : Rosas são vermelhas ***ou*** violetas são azuis, ***mas não ambas***.

- Condicional (→)

Chama-se **proposição *condicional*** a proposição composta representada por "*se p, então q*", cujo valor lógico é a falsidade (**F**) quando p é verdadeira e q é falsa e a verdade (**V**) nos demais casos.

Simbolicamente, a **condicional de duas proposições** p e q indica-se com a notação "**p → q**", que pode ser lida como: **se "p", então "q".**

Na condicional "p → q", diz-se que p é o **antecedente** e q o **consequente** e o símbolo "→" é chamado **símbolo de implicação**. Vale ressaltar que a condicional "p → q" **não afirma** que o consequente q **se deduz** ou é uma **consequência** do antecedente p, isto é, o que a condicional estabelece é unicamente uma relação entre os valores lógicos do antecedente e do consequente de acordo com a tabela-verdade ao lado:

p	q	p → q
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Exemplo:

- **p → q** : ***Se*** rosas são vermelhas, ***então*** violetas são azuis.

Essa operação lógica é usada com muita frequência nos teoremas matemáticos e a definição de seus valores lógicos não é tão evidente quanto os anteriores, assim sendo, vamos analisar as quatro possibilidades contidas na tabela acima com outro exemplo.

- ***"Se eu ganhar na mega-sena, então ficarei milionário."***

Note que as proposições simples que formam o exemplo acima são **p:** "***vou ganhar na mega-sena***" e **q:** "***ficarei milionário***" e, assim sendo, temos as quatro situações abaixo:

1º) **V → V = V:** supondo que é verdadeiro que eu ganhei na mega-sena, é claro que também é verdadeiro que eu tenha ficado milionário. Logo, **p → q é verdadeira.**

2º) **V → F = F:** a lógica não admite a possibilidade de ser verdadeiro o fato de eu ter ganho na mega-sena e ser falso a possibilidade, pelo menos imediata, de eu ter ficado milionário. Logo, neste caso, **p → q é falsa.**

3º) **F → V = V:** vamos supor aqui que seja falso que eu ganhei na mega-sena, porém verdadeiro que eu tenha ficado milionário. Do ponto de vista lógico, é possível admitir que eu tenha ficado milionário sem ganhar na loteria (trabalhando muito, por exemplo), então temos que considerar que a proposição composta pode, eventualmente, ser verdadeira. Logo, **p → q é verdadeira.**

4º) **F → F = V:** enfim, com esse raciocínio, fica evidente que se é falso que eu ganhei na mega-sena e também falso que eu fiquei milionário, temos a proposição composta absoluta e infelizmente verdadeira . Logo, **p → q é verdadeira.**

- Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Chama-se **proposição *bicondicional*** a proposição composta representada por "*p se e somente se q*", cujo valor lógico é a verdade (**V**) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas e a falsidade (**F**) nos demais casos.

Simbolicamente, a **bicondicional** de duas proposições p e q indica-se com a notação "**p ↔ q**", que também se lê de uma das seguintes maneiras:

(i) "p" ***se e somente se*** "q".
(ii) "p" é condição **necessária** e **suficiente** para "q".
(iii) "q" é condição **necessária** e **suficiente** para "p".

Assim, **uma proposição bicondicional é verdadeira somente quando as proposições possuem valores lógicos iguais**, fazendo com que seu valor lógico seja assim definido:

p	q	p ↔ q
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

Exemplo:

- **p ↔ q** : Rosas são vermelhas ***se e somente se*** violetas são azuis.

Vale ressaltar que uma proposição bicondicional equivale a duas proposições condicionais, ou seja, a proposição "***p se e somente se q***" é equivalente a ambas as proposições "***se p, então q***" e "***se q, então p***" simultaneamente (esta última proposição também chamada de condicional recíproca).

- Quadro-Resumo das Tabelas-Verdade

p	q	¬ p	p ∧ q	p ∨ q	p ⊻ q	p → q	p ↔ q
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

Exemplo: Construa a tabela-verdade da proposição abaixo.

$$[(p \vee \neg q) \wedge q\,] \rightarrow (p \veebar q)$$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

(desenvolver resolução)

EXERCÍCIOS

1. Sejam as proposições **p: Está frio** e **q: Está chovendo**. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições compostas:

(a) $\neg p$
(b) $p \wedge q$
(c) $p \vee q$
(d) $q \leftrightarrow p$
(e) $p \rightarrow \neg q$
(f) $p \underline{\vee} \neg q$
(g) $\neg p \wedge \neg q$
(h) $q \rightarrow \neg p$
(i) $(\neg p \underline{\vee} q) \leftrightarrow q$

2. Sejam as proposições **p: Sueli é rica** e **q: Sueli é feliz**. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições.

(a) Sueli é pobre, mas feliz.
(b) Sueli é rica ou infeliz.
(c) Se Sueli é pobre, então é infeliz.
(d) Sueli é pobre ou rica se e somente se é feliz.

3. Determinar o **valor lógico** (V ou F) das seguintes proposições:

(a) $0 > 1 \ \wedge \ \sqrt{3}$ é irracional
(b) $1 \geq 0 \ \wedge \ 5^2 = 25$
(c) $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1} \ \vee$ 21 é um número primo
(d) $5^2 = 10 \ \vee \ \pi$ é racional
(e) $2 \geq 2 \ \underline{\vee} \ \sqrt{25} = 5$
(f) $|-1| = 0 \ \rightarrow \ \pi \geq 2$
(g) $\sqrt{2}.\sqrt{8} = 4 \ \rightarrow \ \sqrt{2} = 0$
(h) $\neg (1 + 1 = 2 \ \leftrightarrow \ 3 + 4 = 5)$

4. Determine a tabela-verdade das proposições abaixo:

(a) $\neg p \wedge q$
(b) $\neg p \vee \neg q$
(c) $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg q$
(d) $(p \leftrightarrow \neg q) \ \underline{\vee} \ \neg p$
(e) $(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow (p \vee q)$
(f) $[\neg (p \underline{\vee} \neg q) \wedge r] \rightarrow (q \vee r)$

IV. Relações Lógicas

Diferentemente das operações lógicas, que criam novas proposições compostas a partir de proposições simples e definem seu valor lógico, as relações lógicas visam estabelecer parâmetros de comparação entre duas proposições e terão por objetivo verificas se tais parâmetros são atendidos ou não. Assim sendo, as relações não irão gerar novas proposições e não serão avaliadas em termos de valores lógicos, mas sim em função de se o parâmetro de comparação que a define é ou não satisfeito.

- Equivalência Lógica

Diz-se que uma proposição $P(p, q, r, ...)$ é **logicamente equivalente**, ou apenas **equivalente**, a uma proposição $Q(p, q, r, ...)$, se as tabelas-verdade destas duas proposições são **idênticas**.

Indica-se que a proposição $P(p, q, r, ...)$ é **equivalente** a proposição $Q(p, q, r, ...)$ com a notação:

$$\mathbf{P(p, q, r, ...) \equiv Q(p, q, r, ...)}$$

Exemplos:

(1) As proposições "$\neg\neg p$" e "p" são **equivalentes** (esta equivalência é chamada de **regra da dupla negação**), assim, simbolicamente, temos $\mathbf{\neg\neg p \equiv p}$, pois:

p	¬ p	¬ ¬ p
V	F	**V**
F	V	**F**

Portanto, uma **dupla negação equivale a uma afirmação.**

(2) A bicondicional "$p \leftrightarrow q$" e a conjunção "$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$" têm tabelas-verdade **idênticas**, ou seja:

$$\mathbf{p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$$

p	q	p ↔ q	p → q	q → p	(p→q) ∧ (q→p)
V	V	V	V	V	V
V	F	**F**	F	V	**F**
F	V	**F**	V	F	**F**
F	F	**V**	V	V	**V**

Portanto, estas duas proposições são **equivalentes**, isto é, há **equivalência lógica** entre as duas proposições.

- Implicação Lógica

Diz-se que uma proposição P(p, q, r, ...) **implica logicamente**, ou apenas **implica**, uma proposição Q(p, q, r, ...), se Q(p, q, r, ...) é verdadeira (V) todas as vezes que P(p, q, r, ...) é verdadeira(V).

Indica-se que a proposição P(p, q, r, ...) **implica** a proposição Q(p, q, r, ...) com a notação:

$$\mathbf{P(p, q, r, ...) \Rightarrow Q(p, q, r, ...)}$$

Exemplos:

(1) A partir das tabelas-verdade das proposições $p \leftrightarrow q$, $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$, iremos verificar as três implicações lógicas abaixo :

- $\mathbf{p \leftrightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q}$ ①
- $\mathbf{p \leftrightarrow q \Rightarrow q \rightarrow p}$ ②
- $\mathbf{p \rightarrow q \Rightarrow q \rightarrow p}$ ③

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
V	V	V ① ②	V ① ③	V ②
V	F	F	F	V
F	V	F	V ③	F ③
F	F	V ① ②	V ① ③	V ②

Notamos que a proposição "$p \leftrightarrow q$" é verdadeira (V) nas linhas 1 e 4 e, nestas linhas, as proposições "$p \rightarrow q$" e "$q \rightarrow p$" também são verdadeiras (V). Logo, verifica-se que ***há implicação lógica*** nos casos ① e ②.

Por outro lado, a proposição "$p \rightarrow q$" é verdadeira (V) nas linhas 1, 3 e 4, porém, a proposição "$q \rightarrow p$" é verdadeira (V) nas linhas 1 e 4, **mas falsa (F) na linha 3**. Logo, isto faz com que ***não haja implicação lógica*** no caso ③.

(2) Demonstrar que $(x = y \vee x < 4) \wedge x \not< 4 \Rightarrow x = y$.

$x = y$	$x < 4$	$x=y \vee x < 4$	$\neg(x < 4)$	$(x=y \vee x<4) \wedge x \not< 4$	$x = y$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	**V**	**V**
F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	F

Esta proposição é verdadeira somente na linha 2 e, nesta linha, a proposição "x = y" também é verdadeira. Logo, subsiste a **implicação lógica**.

V. TAUTOLOGIAS, CONTRADIÇÕES E CONTINGÊNCIAS

Chama-se de **Tautologia** uma proposição que é sempre **verdadeira** independentemente dos valores lógicos das proposições que a compõe, ou seja, em uma tautologia, a coluna da tabela-verdade que indica seus valores lógicos possui apenas o valor V em todas as linhas.

Chama-se de **Contradição** uma proposição que é sempre **falsa** independentemente dos valores lógicos das proposições que a compõe, ou seja, em uma contradição, a coluna da tabela-verdade que indica seus valores lógicos possui apenas o valor F em todas as linhas.

O caso mais comum, em que uma proposição tem valores ora verdadeiros, ora falsos, é chamada de **Contingência**.

Exemplo: Sejam as proposições "***p ou não p***", ou seja, $p \vee \neg p$, e da proposição "***p e não p***", ou seja, $p \wedge \neg p$, cujas tabelas-verdade estão abaixo:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Nota-se pelas tabelas-verdade que a proposição "***p ou não p***" é uma **tautologia** enquanto a proposição "***p e não p***" é uma **contradição**.

EXERCÍCIOS

5. Verificar por tabelas-verdade a validade das seguintes **equivalências**:

(a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

(b) $(p \rightarrow q) \rightarrow p \equiv p \vee q$

(c) $(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \wedge q)$

(d) "Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ **e** se $a = 0$, então $a \cdot b = 0$" $\equiv$ "$a \cdot b = 0$ **se e somente se** $a = 0$".

6. Demonstrar que o conectivo "$\underline{\vee}$" (disjunção exclusiva) exprime-se em função dos três conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ do seguinte modo:

$$p \,\underline{\vee}\, q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

7. Verifique se:

(a) $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

(b) $(a + b = b + c \rightarrow a = c) \wedge a \neq c \Rightarrow a + b \neq b + c$

8. Construa a tabela-verdade das proposições abaixo e determine se estas se tratam de tautologias, contradições ou contingências:

(a) $p \vee \neg(p \wedge q)$

(b) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$

VI. ARGUMENTOS LÓGICOS

Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ e Q proposições quaisquer, simples ou compostas. Chama-se **argumento** toda a afirmação de que uma dada sequência finita $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de proposições tem como **consequência** ou **acarreta** uma proposição final Q.

Em um argumento, as proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são chamadas de **premissas** e a proposição final Q é chamada de **conclusão** do argumento.

Indica-se um argumento de premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ e de conclusão Q por:

$$\mathbf{P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q}$$

Que se lê de uma das seguintes maneiras:

(i) "$P_1, P_2, \ldots, P_n$ **conduzem a** Q"
(ii) "Q **decorre** de $P_1, P_2, \ldots, P_n$"
(iii) "Q se **deduz** de $P_1, P_2, \ldots, P_n$"

- Validade de um Argumento

É importante notar que um argumento lógico ***não é*** uma proposição (não possui conectivos), portanto ***não pode*** ser classificado como verdadeiro ou falso. Assim sendo, um argumento é dito ***válido*** ou não-válido e, neste último caso, também chamado de ***falácia***.

Um argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ diz-se ***válido*** se e somente se a conclusão Q é verdadeira sempre que as premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são todas verdadeiras.

Portanto, todo argumento **válido** goza da seguinte propriedade característica:

"A verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão."

Dessa forma, para se verificar a validade de um argumento deve-se primeiro garantir que todas as suas premissas sejam simultaneamente verdadeiras, o que pode ser conseguido com uma conjunção na forma $(\mathbf{P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n})$. Esta condição justifica o teorema a seguir:

Teorema – Um argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ é válido se e somente se a proposição condicional $(\mathbf{P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n}) \rightarrow \mathbf{Q}$ é uma **tautologia**.

Portanto, para se verificar a validade de um argumento na forma $\mathbf{P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q}$ deve-se convertê-lo para sua proposição condicional associada $(\mathbf{P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n}) \rightarrow \mathbf{Q}$ para, em seguida, construir a tabela-verdade dessa proposição.

Finalmente, a validade do argumento se verifica caso essa tabela-verdade resulte em uma tautologia.

Exemplo: Considere os argumentos:

(a) "Está chovendo. **Se** está chovendo, **então** fico triste. ***Logo***, estou triste"

(b) "**Se** está chovendo, **então** fico triste. Estou triste. ***Logo***, está chovendo."

Se chamarmos de **p** a proposição "Está chovendo" e de **q** a proposição "Fico triste", o argumento (a) é traduzido para a linguagem simbólica da lógica como: **p, p → q** $\vdash$ **q**. Para verificarmos sua validade, o convertemos para a proposição **[p ∧ (p → q)] → q** e iremos construir sua tabela-verdade.

Com o mesmo raciocínio, o argumento (b) é traduzido para a linguagem simbólica da lógica como: **p → q, q** $\vdash$ **p**. Assim, o convertemos para a proposição **[(p → q) ∧ q] → p** e construímos sua tabela-verdade abaixo.

(a)

p	***q***	**p → q**	**p∧(p→q)**	**[...] → q**
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

(b)

p	***q***	**p → q**	**(p→q)∧q**	**[...] → p**
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	**V**	**V**	**V**	**F**
F	F	V	F	V

Analisando as tabelas-verdade, nota-se que a proposição associada ao argumento **(a)** é uma tautologia, portanto (a) é **válido**.

Por sua vez, a proposição associada ao argumento **(b)** não é uma tautologia, portanto (b) é uma **falácia**.

VII. QUANTIFICADORES

- Sentenças Abertas

Chama-se **sentença aberta em um conjunto A** ou apenas **sentença aberta em A,** uma expressão p(x) tal que p(a) é falsa (F) ou verdadeira (V) para todo a $\in$ A.

Em outros termos, p(x) é uma **sentença aberta em A** se e somente se p(x) torna-se uma proposição (falsa ou verdadeira) todas as vezes que se substitui a variável x por qualquer elemento **a** do conjunto A. Se a $\in$ A é tal que p(a) é uma proposição **verdadeira**, diz-se que **"a" satisfaz** ou **verifica** p(x).

O conjunto A recebe o nome de **conjunto-universo, domínio** ou apenas **universo** da variável x e qualquer elemento a $\in$ A diz-se um **valor** da variável x.

Chama-se **conjunto-verdade** de uma sentença aberta p(x) em um conjunto A, o conjunto de todos os elementos a $\in$ A tais que p(a) é uma proposição verdadeira (V). Este conjunto é representado por Vp, portanto, simbolicamente temos:

$$Vp = \{x \mid x \in A \ \wedge \ p(x) \text{ é V}\}$$

- Quantificador Universal

Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto não vazio A ($A \neq \emptyset$) e seja Vp seu conjunto verdade:

$$Vp = \{x \mid x \in A \;\wedge\; p(x) \text{ é V}\}$$

Quando Vp = A, isto é, quando **todos** os elementos de A **satisfazem** a sentença aberta p(x), pode-se afirmar que:

(i) “Para todo elemento x de A, p(x) é verdadeira.”
(ii) “Qualquer que seja o elemento x de A, p(x) é verdadeira.”

Ou ainda, mais simplesmente:
(iii) “Para todo x de A, p(x).”
(iv) “Qualquer que seja x de A, p(x).”

Na linguagem simbólica da Lógica indica-se este fato por:
(1) $(\forall\, x \in A)\,(p(x))$ ou, omitindo-se a indicação do domínio A: $(\forall\, x)\,(p(x))$.
(2) $\forall\, x \in A,\; p(x)$ ou, omitindo-se a indicação do domínio A: $\forall\, x,\; p(x)$.

Assim sendo, subsiste a equivalência: $\mathbf{(\forall\, x \in A)\,(p(x)) \;\equiv\; Vp = A}$

É importante ressaltar que p(x) indica apenas uma sentença aberta que, portanto, não tem valor lógico (V ou F); mas quando p(x) possui o símbolo $\forall$ antes dela, ou seja, $(\forall\, x \in A)\,(p(x))$, temos uma **proposição**, cujo valor lógico é a **verdade**, se Vp = A e a **falsidade**, se $Vp \neq A$.

Em outros termos, dada uma sentença aberta p(x) em um conjunto A, o símbolo $\forall$, referido à variável x, representa uma **operação lógica** que **transforma a sentença aberta p(x) numa proposição,** verdadeira ou falsa, conforme p(x) exprime ou não uma **condição universal** no conjunto A.

A esta operação lógica dá-se o nome de **quantificação universal** e ao respectivo símbolo $\forall$ (que é um “A” invertido) o de **quantificador universal.**

Exemplos:

(1) A proposição $\mathbf{(\forall\, n \in IN)\,(n + 5 > 3)}$ é verdadeira, pois, o conjunto-verdade da sentença aberta p(n) : $n + 5 > 3$ é:

$$Vp = \{n \mid n \in IN \;\wedge\; n + 5 > 3\} = \{1, 2, 3, ...\} = IN$$

(2) A proposição $\mathbf{(\forall\, n \in IN)\,(n + 3 > 7)}$ é falsa, pois, o conjunto-verdade da sentença aberta p(n) : $n + 3 > 7$ é:

$$Vp = \{n \mid n \in IN \;\wedge\; n + 3 > 7\} = \{5, 6, 7, ...\} \neq IN$$

- Quantificador Existencial

Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto não vazio A ($A \neq \emptyset$) e seja Vp seu conjunto verdade:

$$Vp = \{x \mid x \in A \ \wedge \ p(x) \text{ é V}\}$$

Quando Vp não é vazio ($Vp \neq \emptyset$), então, **pelo menos um** elemento do conjunto A **satisfaz** a sentença aberta p(x), e pode-se afirmar:

(i) "Existe pelo menos um elemento x de A tal que p(x) é verdadeira."
(ii) "Para algum $x \in A$, p(x) é verdadeira."

Ou ainda, mais simplesmente:
(iii) "Existe $x \in A$ tal que p(x)."
(iv) "Para algum $x \in A$, p(x)."

Na linguagem simbólica da Lógica indica-se este fato por:
(1) $(\exists\, x \in A)\,(p(x))$ ou, omitindo-se a indicação do domínio A: $(\exists\, x)\,(p(x))$.
(2) $\exists\, x \in A,\ p(x)$ ou, omitindo-se a indicação do domínio A: $\exists\, x,\ p(x)$.

Assim sendo, subsiste a equivalência: $\boldsymbol{(\exists\, x \in A)\,(p(x)) \ \equiv \ Vp \neq \emptyset}$

Da mesma forma que no item anterior, cumpre ressaltar que p(x) indica uma sentença aberta que carece de valor lógico (V ou F); mas quando p(x) tem o símbolo $\exists$ antes dela, ou seja, $(\exists\, x \in A)\,(p(x))$, temos uma **proposição**, cujo valor lógico é a **verdade**, se $Vp \neq \emptyset$ e a **falsidade**, se $Vp = \emptyset$.

Deste modo, o símbolo $\exists$, referido à variável x, representa uma **operação lógica** que **transforma a sentença aberta p(x) numa proposição,** verdadeira ou falsa, conforme p(x) exprime ou não uma **condição possível** no conjunto A.

A esta operação lógica dá-se o nome de **quantificação existencial** e ao respectivo símbolo $\exists$ (que é um "E" invertido) o de **quantificador existencial.**

Exemplos:

(1) A proposição $\boldsymbol{(\exists\, x)\,(x > x^2)}$ lê-se "Existe pelo menos um x tal que $x > x^2$" é verdadeira em IR ("Algum número real é maior que seu quadrado"), mas é falsa em IN ("Nenhum número natural é maior que seu quadrado").

(2) A proposição $\boldsymbol{(\exists\, n \in IN)\,(n + 5 < 3)}$ é falsa, pois, o conjunto-verdade da sentença aberta p(n) : $n + 5 < 3$ é:

$$Vp = \{n \mid n \in IN \ \wedge \ n + 5 < 3\} = \emptyset$$

- Negação de Proposições com Quantificador

É claro que um quantificador universal ou existencial pode ser precedido do símbolo de negação "¬". Porém, a negação colocada no início de uma sentença com quantificador torna, na prática, sua interpretação mais complicada e pode induzir ao erro. Assim, para simplificar a leitura de negações de proposições dotadas de quantificadores, são enunciadas as seguintes equivalências lógicas.

$$\neg\,[(\forall\, x \in A)\,(p(x))] \equiv (\exists\, x \in A)\,(\neg p(x))$$

e

$$\neg\,[(\exists\, x \in A)\,(p(x))] \equiv (\forall\, x \in A)\,(\neg p(x))$$

Ou seja, a **negação** da proposição $(\forall\, x \in A)\,(p(x))$ é equivalente a **afirmação** de que, **para ao menos um** $x \in A$, $p(x)$ é falsa, ou seja, sua negação $\neg p(x)$ é verdadeira.

Analogamente, a **negação** da proposição $(\exists\, x \in A)\,(p(x))$ é equivalente a **afirmação** de que, **para todo** $x \in A$, $p(x)$ é falsa ou $\neg p(x)$ é verdadeira.

Estas equivalências tornam-se evidentes, por exemplo, nas afirmações:

(a) ¬ (∀ x) (x fala francês) ≡ (∃ x) (¬x fala francês)

"***Não é verdade que*** todos falam francês." ≡ "Existe alguém que ***não*** fala francês."

(b) ¬ (∃ x) (x foi a Lua) ≡ (∀ x) (¬x foi a Lua)

"***Não é verdade que*** alguém foi a Lua." ≡ "Todas as pessoas ***não*** foram a Lua."

Exemplo: A **negação** da proposição: "Para todo o número natural n, tem-se $n + 2 > 8$" é a proposição: "Existe pelo menos um número natural n tal que $n + 2 \not> 8$", ou simbolicamente:

$$\neg\,(\forall\, x \in IN)\,(n + 2 > 8) \equiv (\exists\, x \in IN)\,(n + 2 \leq 8)$$

- Contra-Exemplos

Para mostrar que uma proposição da forma $(\forall\, x \in A)\,(p(x))$ é **FALSA** basta mostrar que sua **negação** $(\exists\, x \in A)\,(\neg p(x))$ é **verdadeira**, ou seja, que existe pelo menos um elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é uma proposição falsa. Quando isto ocorre, o elemento x_0 diz-se um **contra-exemplo** para a proposição $(\forall\, x \in A)\,(p(x))$, o que a **invalida**.

Assim, temos um método de demonstração frequentemente utilizado na Matemática que, entretanto, se presta exclusivamente para provar a **falsidade** de um dado argumento. O uso de **contra-exemplos** é o único método que admite o uso de "**casos particulares**" em sua validação (justamente pelo fato de somente usado para se provar a **falsidade** de uma dada proposição).

Exemplo: A proposição $(\forall\, x \in IR)\,(x \leq x^2)$ é **falsa** sendo, por exemplo, $\frac{1}{3}$ um **contra-exemplo**, pois: $\frac{1}{3} \not\leq (\frac{1}{3})^2$, ou seja, $\frac{1}{3} > \frac{1}{9}$.

EXERCÍCIOS

9. Verificar a validade dos argumentos abaixo:

(a) $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$

(b) $p \rightarrow q, \neg p \vdash \neg q$

(c) Se 7 é menor que 4, então 7 não é um número primo.
   7 não é menor que 4.
   Logo, 7 é um número primo. (conclusão)

(d) Se um homem é solteiro, então é infeliz.
   Se um homem é infeliz, então morre jovem.
   Logo, Solteiros morrem jovens. (conclusão)

10. Sendo IR o conjunto dos números reais, determinar o **valor lógico** (V ou F) das proposições abaixo. Justifique a resposta:

(a) $(\forall x \in IR)\ (\ |x| = x\ )$

(b) $(\exists x \in IR)\ (x^2 = x)$

(c) $(\exists x \in IR)\ (\ |x| = 0)$

(d) $(\exists x \in IR)\ (x + 2 = x)$

(e) $(\forall x \in IR)\ (x + 1 > x)$

(f) $(\forall x \in IR)\ (2x + 3x = 5x)$

11. Dar a **negação** das proposições do exercício 10.

12. Sendo A = {2, 3, ... , 8, 9} , dar um **contra-exemplo** para cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall x \in A)\ (x + 5 < 12)$

(b) $(\forall x \in A)\ (x^2 > 1)$

(c) $(\forall x \in A)$ (x é primo)

(d) $(\forall x \in A)$ (x é par)

13. Dar a **negação** das proposições do exercício 12.