Arquitetura e organização de computadores

Aula 3 – Bases numéricas

Fatec São Caetano do Sul

Prof.: Ismael Moura Parede

SISTEMA DE NUMERAÇÃO – INTRODUÇÃ0

- Necessidade da utilização de sistemas numéricos
- Destaques
  - Sistema decimal
  - Binário
  - Octal
  - Hexadecimal
- Os mais importantes para nós
  - Decimal; binário hexadecimal.

Sistema binário de numeração

- Existem apenas 2 algarismos
  - O algarismo **0** (zero)
  - O algarismo **1** (um).
- Tabela 1: sequência de numeração binário de 0 a 9

DECIMAL	BINÁRIO
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001

Cada digito binário → bit (binary digit).
Conjunto de 4 bits → nibble
Conjunto de 8 bits → byte

Conversão do sistema binário para o decimal

- Para explicar a conversão utilizaremos um número decimal qualquer por exemplo o 594

$$5 \times 100 + 9 \times 10 + 4 \times 1 = 594$$

centena dezena unidade

$$5 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0 = 594$$

Conversão do sistema binário para o decimal

Vamos utilizar como exemplo um número binário o número 101_2. Pela tabela vemos que equivale ao número 5_{10}.

2^2	2^1	2^0
1	0	1
1×2^2 +	0×2^1 +	1×2^0
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
1×4 +	0×2 +	$1 \times 1 = 5$

Exercícios – Binário para Decimal

1.1.1. Converta o número 01110_2 em decimal.

1.1.2. Converta o número 1010_2 em decimal.

1.1.3. Idem para os número 1100110001_2.

1.1.4. 11000000_2.

1.1.5. 11111110_2.

Resolução

1.1.1. Converta o número 01110_2 em decimal.

Lembrando que 0 (ZERO) à esquerda de um número é um algarismo não significativo, portanto $01110_2 = 1110_2$.

2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	1	0

$$1X2^3 \quad + \quad 1X2^2 \quad + \quad 1X2^1 \quad + \quad 0X2^0$$

$$8 \quad + \quad 4 \quad + \quad 2 \quad + \quad 0 \quad = \quad 14_{10}$$

Resolução

1.1.2. Converta o número 1010_2 em decimal.

Lembrando que 0 (ZERO) à esquerda de um número é um algarismo não significativo, portanto $01110_2 = 1110_2$.

2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	0

$1X2^3 + 0X2^2 + 1X2^1 + 0X2^0$

$8 + 0 + 2 + 0 = 10_{10}$

Resolução

1.1.3. Idem para os números 1100110001_2.

2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	0	0	1	1	0	0	0	1

$$1X2^9 + 1X2^8 + 0X2^7 + 0X2^6 + 1X2^5 + 1X2^4 + 0X2^3 + 0X2^2 + 0X2^1 + 1X2^0$$

$$512 + 256 + 0 + 0 + 32 + 16 + 0 + 0 \quad 0 + 1 \qquad 817_{10}$$

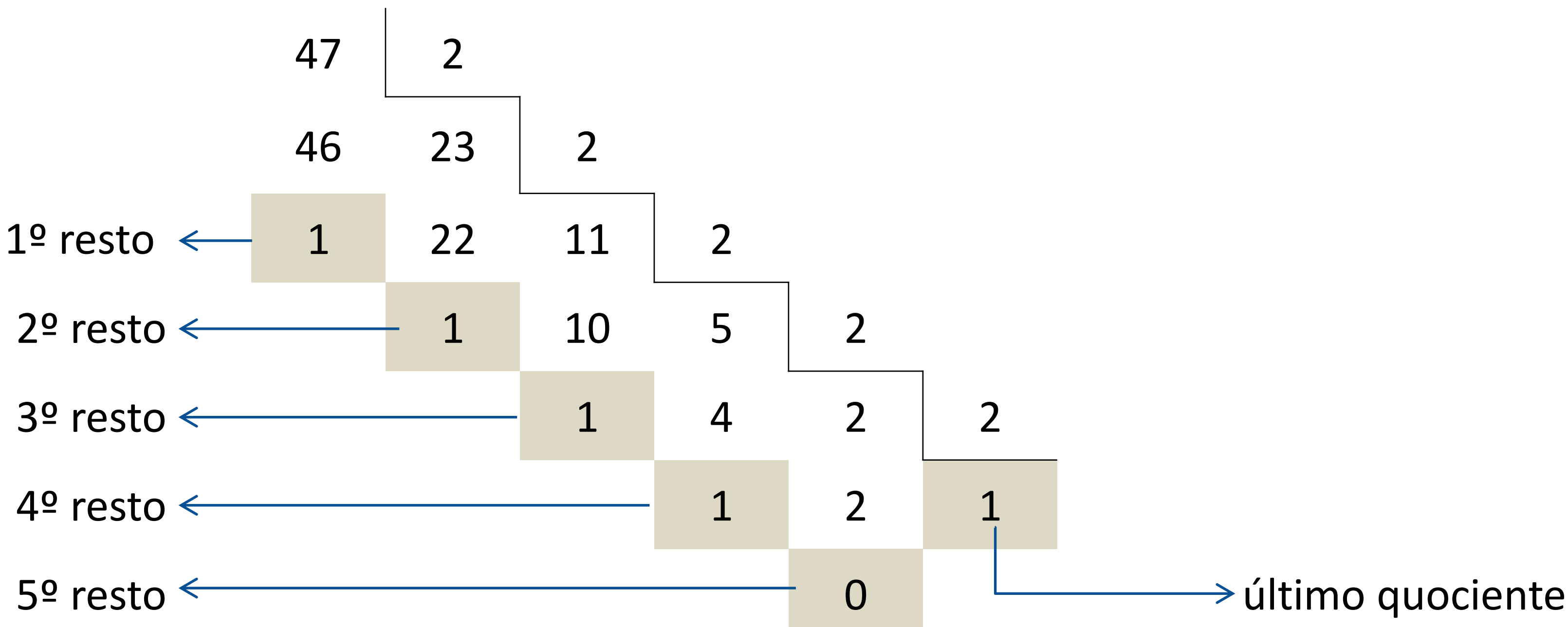
Conversão do Sistema Decimal para o sistema Binário

- Utilizamos a conversão de binário para decimal pela dificuldade do ser humano em quantificar um número grande binário. Faremos agora a transformação inversa de um número decimal para binário.

- Essa transformação e feita através de divisões sucessivas pela base na qual iremos converter o número decimal.

Conversão do Sistema Decimal para o sistema Binário

- Utilizaremos o número 47_{10} para demostrar o processo de conversão.
- Dividindo o número 47_{10} por 2_{10} temos



Conversão do Sistema Decimal para o sistema Binário

1	0	1	1	1	1
↑	↑	↑	↑	↑	↑
Último quociente	5º resto	4º resto	3º resto	2º resto	1º resto

- O último quociente será o algarismo mais significativo portanto ficará a esquerda. Os outros algarismos seguem em ordem decrescente.
- O número binário menos significativo recebe a notação de **LSB** (em inglês: **Least Significant Bit**) e o bit mais significativo recebe a notação de **MSB** (**Most Significant Bit**).

Exercícios – Decimal para Binário

1.2.1. Transformar o número 400_{10} em binário.

1.2.2. Converta o número 21_{10} em binário

1.2.3. Converta o número 552_{10} em binário

1.2.4. Converta o número 715_{10} em binário

1.2.5. Converta o número 128_{10} em binário

Resolução

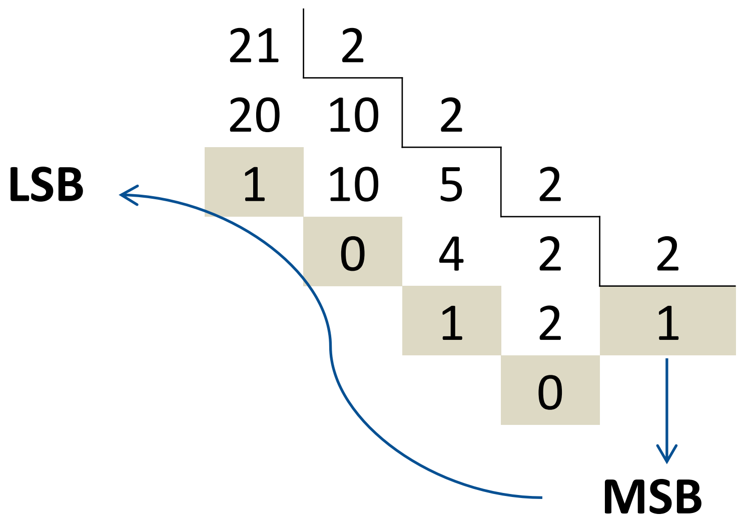
1.2.1. Transformar o número 400_{10} em binário.

	400	2							
	400	200	2						
LSB	0	200	100	2					
		0	100	50	2				
			0	50	25	2			
				0	24	12	2		
					1	12	6	2	
						0	6	3	2
							0	2	1
								1	
									MSB

Sendo assim podemos escrever $400_{10} = 110010000_2$

Resolução

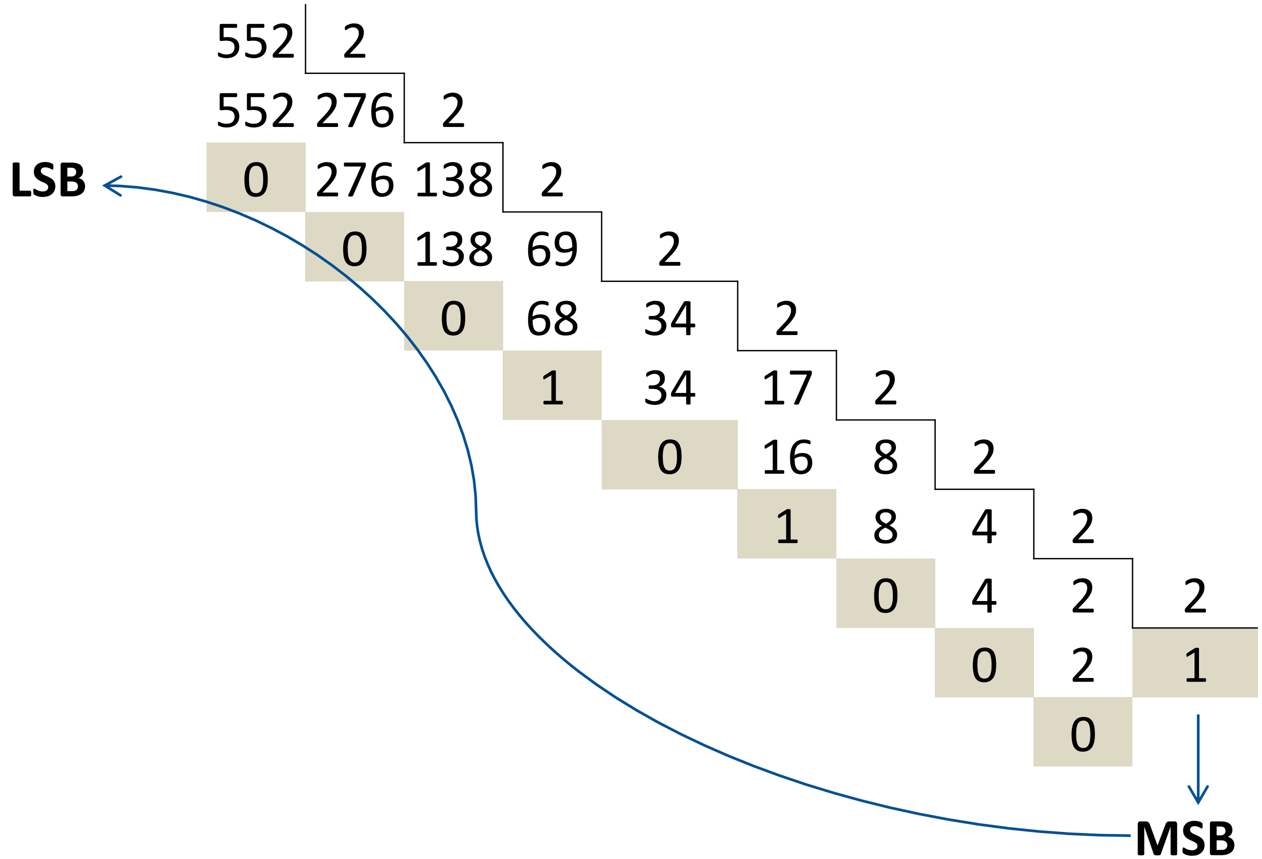
1.2.2. Transformar o número 21_{10} em binário.



$\therefore\ 21_{10} = 10101_2$

Resolução

1.2.3. Converta o número 552_{10} em binário



Conversão de números binários Fracionários em Decimais

Essa conversão será feita observando o sistema decimal. Usaremos como exemplo um número decimal fracionário qualquer, por exemplo o número $10{,}5_{10}$ e utilizando a regra básica de formação de um número.

10^{1}	10^{0}	10^{-1}
1	0	5

$$1 \times 10^{1} \quad + \quad 0 \times 10^{0} \quad + \quad 5 \times 10^{-1} = 10{,}5_{10}$$

Conversão de números binários Fracionários em Decimais

Para números binários agimos da mesma forma. Para exemplificar vamos transformar o número $101{,}101_2$:

2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
1	0	1	1	0	1

Podemos escrever:

$$1 \text{ x } 2^2 + 0 \text{ x } 2^1 + 1 \text{ x } 2^0 + 1\ x\ 2^{-1} + 0\ x\ 2^{-2} + 1\ x\ 2^{-3} =$$

$$= 1 \text{ x } 4 + 0 \text{ x } 2 + 1 \text{ x } 1 + 1 \text{ x } \frac{1}{2} + 0 \text{ x } \frac{1}{4} + 1 \text{ x } \frac{1}{8} = 4 + 0 + 1 + 0{,}5 + 0 + 0{,}125 = 5{,}625$$

Exercícios

1.3.1. Converta o número binário $111,001_2$ em decimal.

1.3.2. Converta o número $100,11001_2$ em decimal.

1.3.3. Converta o número $1010,1101_2$ em decimal

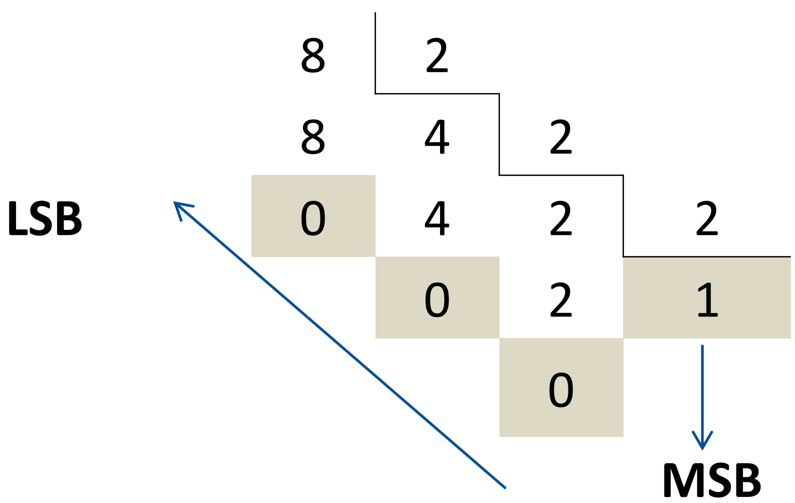
Conversão de números Decimais Fracionários em Binários

- Podemos também converter números decimais fracionários em binários, para isso vamos utilizar a seguinte regra prática.

- Como exemplo, vamos converter o número $8{,}375_{10}$ em binário. Este número significa: $8 + 0{,}375 = 8{,}375$

Conversão de números Decimais Fracionários em Binários

- Vamos transformar primeiramente a parte inteira do número, como já explicado anteriormente:



$\therefore \quad 8_{10} = 1000_2$

Conversão de números Decimais Fracionários em Binários

- O passo seguinte é transformar a parte fracionária. A regra consiste na multiplicação sucessiva das partes fracionárias pela base, até atingir zero. O número fracionário convertido será composto pelos algarismos inteiros resultantes tomados na ordem das multiplicações. Temos então:

	0 ,		3	7	5	parte fracionária
				x	2	base do sistema
primeiro algarismo	0,	7	5	0		

Conversão de números Decimais Fracionários em Binários

0 ,	7	5	0
		x	2
1,	5	0	0

Segundo algarismo ← 1,

Quando atingirmos o número 1, e a parte do número após a vírgula não for nula, separamos esta última e reiniciamos o processo

0 ,	5	0	0
		x	2
1,	0	0	0

terceiro algarismo ← 1,

0 → O processo para aqui

Conversão de números Decimais Fracionários em Binários

- Assim sendo, podemos escrever:

  $0{,}011_2 = 0{,}375_{10}$

  Para completarmos a conversão, efetuamos a composição da parte inteira com a fracionária:

  $1000{,}011_2 = 8{,}375_{10}$

Exercícios

1.2.4. Converta o número em binário: $4{,}8_{10}$

1.2.5. converta o número $3{,}380_{10}$ em binário

1.2.6. Converta o número em binário: $57{,}3_{10}$

O sistema octal

- É um sistema de base 8 no qual existem 8 algarismos
- 0 1 2 3 4 5 6 7
- A sua representação é feita da mesma maneira que fizemos para os números binários e decimais, colocamos o algarismos 1 seguido de 0, significando que temos um grupo de oito adicionando nenhuma unidade.
- Atualmente ele é pouco utilizado.

Sistema octal

DECIMAL	OCTAL
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	10
9	11
10	12
11	13
12	14
13	15
14	16
15	17
16	20

Conversão do Sistema Octal para Sistema Decimal

- Essa conversão é feita utilizando-se o conceito básico de formação de número, já visto.
- Como exemplo vamos utilizar o número 144_8 e convertê-lo para decimal.4

8^2 8^1 8^0

1 4 4

$1 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 4 \times 8^0$

$1 \times 64 + 4 \times 8 + 4 \times 1 = 100_{10}$

Exercícios

1.3.1. Converta o número 77_8 em decimal

1.3.2. Converta o número 100_8 em decimal

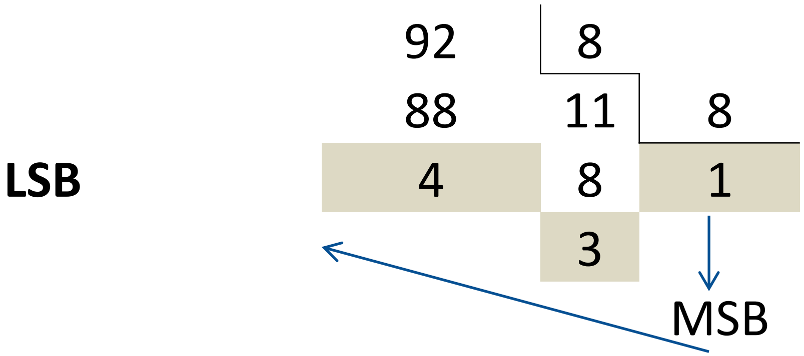
1.3.3. Converta o número 476_8 em decimal

1.3.3. Converta o número 532_8 em decimal

1.3.3. Converta o número 614_8 em decimal

Conversão do sistema decimal para o sistema octal.

- O processo é análogo à conversão do sistema decimal para o binário somente que neste caso a base é 8.
- Como exemplo vamos utilizar o número 92_{10} e convertê-lo para o sistema octal.



$$\therefore\ 92_{10} = 134_8$$

Exercícios

1.3.2.1. Converta o número 74_{10} em octal.

1.3.2.1. Converta o número 100_{10} em octal.

1.3.2.1. Converta o número 476_{10} em octal.

Conversão de Sistema Octal para o Sistema binário

- Esse tipo de conversão é extremamente simples, aplicando-se a regra prática a seguir.

- Sendo o número octal igual a ($2^3 = 8$ ➔ base do sistema octal) ou seja todos os números do sistema octal são compostos ou podem ser representados por três bits do sistema binário. Então a regra consiste em transformar cada algarismo do sistema octal diretamente no correspondente em binário.

- Tomemos como exemplo o número 27_8. vamos convertê-lo em binário.

	2				7				.				
								.		.	27_8	=	010111_2
0	1	0		1	1	1							

EXERCÍCIOS

1. Converta os números octais em binários.
    1. 34_8
    2. 536_8
    3. 446_8
    4. 723_8
    5. 250_8

Conversão do Sistema Binário para o Sistema Octal

- Para efetuar esta conversão, vamos efetuar o processo inverso ao utilizado na conversão de octal para binário. Como exemplo, vamos utilizar o número 110010_2.
- Essa transformação é feita separando-se esse número binário em grupos de três bits a partir da direita:

$$110 \quad 010$$

- Efetuamos a conversão de cada grupo de bits diretamente para o sistema octal, temos então:

$$\underbrace{110}_{6} \quad \underbrace{010}_{2}$$

- O número obtido será composto pela união dos algarismos obtidos. $\therefore 110010_2 = 62_8$

Conversão do Sistema Binário para o Sistema Octal

- No caso do último grupo se formar incompleto, adicionamos, zeros à esquerda até completa-los com três bits. Para exemplificar, vamos converter o número 1010_2 em octal: 1010
- Acrescentamos zeros a esquerda até completar o grupo de 3 bits. A partir daí, utilizamos o processo já visto:

$$\underbrace{001}_{1} \quad \underbrace{010}_{2}$$

$$\therefore 1010_2 = 12_8$$

Exercícios

- Converta os números binários em octais:

a. 10111_2

b. 11010101_2

c. 1000110011_2

d. 11111110_2

e. 11011101_2

Sistema hexadecimal de numeração

- Esse sistema possui 16 algarismos e sua base é igual a 16. Esses algarismos são enumerados da seguinte forma:

  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E e **F**

- A letra A representada pelo algarismo **"A",** que representa a quantidade dez e assim por adiante até a letra F que representa a quantidade quinze.
- Representamos a quantidade dezesseis com o conceito básico de formação de números, colocando o algarismo 1 seguido de 0.

Tabela de sequência de numeração

DECIMAL	HEXADECIMAL
0	**0**
1	**1**
2	**2**
3	**3**
4	**4**
5	**5**
6	**6**
7	**7**
8	**8**
9	**9**
10	**A**
11	**B**
12	**C**
13	**D**
14	**E**
15	**F**

Conversão do Sistema Hexadecimal para o sistema Decimal

- A regra de conversão é análoga à de outros sistemas, somente que neste caso, a base é 16. Vamos utilizar como exemplo o número $3F_{16}$.

16^1	16^0
3	F

$$3 \times 16^1 + F \times 16^0 = 48 + 15 = 63$$

$$\therefore 3F_{16} = 63_{10}$$

Exercícios

1. Converta os números hexadecimais para decimais:
   a. $1C3_{16}$
   b. 238_{16}
   c. $1FC9_{16}$
   d. $3ABA_{16}$
   e. $4FACA_{16}$

Conversão do Sistema Decimal para o SISTEMA Hexadecimal

- De forma análoga as anteriores, esta conversão é feita por divisões sucessivas pela base do sistema a ser convertido. Vamos utilizar como exemplo o número 1000_{10} em hexadecimal.

	1000	16	
	992	62	16
1º resto	8	48	3
2º resto		14	
último quociente			

Sendo $14_{10} = E_{16}$, temos $3E8_{16}$ $\therefore$ $1000_{10} = 3E8_{16}$

Exercícios

1. Converta para o sistema hexadecimal:
   a. 134_{10}
   b. 384_{10}
   c. 3882_{10}
   d. 1278_{10}
   e. 2476_{10}

Conversão do Sistema Hexadecimal para o Sistema Binário

- É feita da mesma forma como foi feito na conversão do octal para binário só que neste caso, serão necessários 4 bits para representar cada algarismo hexadecimal.
- Para exemplificar vamos utilizar o $C13_{16}$ e transformá-lo para binário.

$$\underbrace{C}_{1100} \qquad C_{16} = 12_{10} \qquad \underbrace{1}_{0001}\ \underbrace{3}_{0011}$$

Exercícios

1. Converta para o sistema binário:

   a. $1ED_{16}$

   b. $6CF9_{16}$

   c. $2FACA_{16}$

   d. $3BEBE_{16}$

   e. $1FEDE_{16}$

Exercícios

1. Converta os seguintes números para octal:

   a. $3A7_{16}$

   b. $FACADA_{16}$

   c. $E167_{16}$

   d. $8CADE_{16}$

   e. $90AB_{16}$

Conversão do Sistema Binário para o Sistema Hexadecimal

- É análoga à conversão do sistema Binário para o sistema Octal, só que neste caso agrupamos de 4 em 4 bits da direita para a esquerda. Para exemplificar vamos converter o número 10011000_2 em hexadecimal.

$$\underbrace{1001}_{9}\underbrace{1000}_{8} \quad \therefore \quad 10011000_2 = 98_{16}$$

Exercícios

1. Converta para o sistema hexadecimal os números:

   a. 01100011_2

   b. 0001100011110001100_2

   c. 11111110_2

   d. 1111110000_2

   e. 0001100110001111_2

Operações aritméticas no sistema binário

- Nas áreas da Eletrônica Digital e dos microprocessadores, o estudo das operações aritméticas no sistema binário é muito importante, pois estas serão utilizadas em circuitos aritméticos, tópico este, que será visto em capitulo mais adiante.

Adição no sistema binário

- Para efetuarmos a adição no sistema binário, agimos como em uma adição convencional no sistema decimal, lembrando que, no sistema binário temos apenas 2 algarismos significativos.

$$\begin{array}{r} 0 \\ +0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +0 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +1 \\ \hline 1 \end{array}$$

- Pela operação realizada, notamos a regra de transporte para a próxima coluna: 1 + 1 = 0 e transporta 1 “vai um”.

Adição no sistema binário

A operação de transporte também é denominada **carry,** termo derivado do inglês.

Como exemplo, vamos somar os binários 11_2 e 10_2.

Efetuaremos a adição coluna a coluna, considerando o transporte proveniente da coluna anterior.

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$1 + 1 = 0$ e transporta 1

$\therefore 11_2 + 10_2 = 101_2$ Verificação: $3_{10} + 2_{10} = 5_{10}$

Exercícios

1. Efetue as operações no sistema binário

   a. $11001_2 + 1011_2$

   b. $101101_2 + 11100011_2$

   c. $11111_2 + 111111_2$

   d. $1010_2 + 111011_2$

   e. $11001101_2 + 1111100_2$

Subtração no sistema binário

- O método de resolução é análogo a uma subtração no sistema decimal.

0	0	1	1
-0	-1	-0	-1
0	1	1	0

- Observamos que para o caso de 0 – 1, o resultado será igual a 1, porém haverá um transporte para a coluna seguinte que deve ser acumulado no subtraendo e, obviamente, subtraído do minuendo.

Subtração no sistema binário

Vamos agora melhor elucidar o caso de 0 – 1, vamos efetuar a subtração de 1000_2 – 111_2 passo a passo. Assim teremos:

1	0	0	0
-	1	$^{1}1$	1
			1

0 – 1 = 1 e transporta 1 para a coluna seguinte

Transporte da coluna anterior

1	0	0	0
-	$^{1}1$	$^{1}1$	1
		0	1

0 - 1 - 1= 0 e transporta 1 para a coluna seguinte

Subtração no sistema binário

Dando continuidade a operação temos:

1	0	0	0
-	^{1}1	1	1
	0	0	1

0 - 1 - 1= 0 e transporta 1 para a coluna seguinte

1	0	0	0
-^{1}	1	1	1
0	0	0	1

1 – 1 = 0 Transporte da coluna anterior

Exercícios

1. Efetue as operações no sistema binário:

   a. $1010_2 - 1000_2$

   b. $11000_2 - 111_2$

   c. $101000_2 - 1111_2$

   d. $11111111_2 - 101100_2$

Multiplicação no sistema binário

- O procedimento é o mesmo realizado com o sistema decimal. Então temos:

0	x	0	=	0
0	x	1	=	0
1	x	0	=	0
1	x	1	=	1

- Como exemplo vamos efetuar a operação 11010_2 x 10_2:

	1	1	0	1	0
			X	1	0
	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	+
1	1	0	1	0	0

$\therefore 11010_2 \text{ X } 10_2 = 110100_2$

Exercícios

1. Efetue as multiplicações no sistema binário:

   a. 100_2 x 011_2

   b. 10010_2 x 10001_2

   c. 11000_2 x 111_2

   d. 1010_2 x 011_2

   e. 1001001_2 x 1001_2

Notação dos números binários positivos e negativos

Essa representação poderia ser realizada através dos sinais “**+**” e “**–**” . Na prática isso não é possível pois nos computadores tudo deve ser expresso através de “0” e “1”. Então uma forma para representar os números binários positivos e negativos seria acrescentar um bit de sinal colocado a esquerda, na posição do algarismo mais significativo. Quando o número for positivo acrescenta-se o “0”, se for negativo acrescenta-se o “1”. Esse processo é denominado **sinal-módulo**.

Notação dos números binários positivos e negativos

Para exemplificar vamos representar os números decimais $+35_{10}$ e -73_{10} em binário utilizando a notação sinal-módulo:

$$35_{10} = 100011_2 \ \therefore\ +100011_2 = \mathbf{0}100011_2$$

0 em negrito é o bit de sinal (0 indica número positivo)

$$73_{10} = 1001001_2 \ \therefore\ -1001001_2 = \mathbf{1}1001001_2$$

1 em negrito é o bit de sinal (1 indica número negativo)

Notação de complemento de 2

O complemento de 2 é bastante utilizado para representar números binários negativos, contudo primeiramente devemos obter o complemento de 1.

Para obtermos o complemento de 1 de um número binário efetuamos a troca de cada bit do número pelo seu inverso ou complemento. Vamos demonstrar obtendo o complemento de 1 do número 10011011_2.

Número binário	1	0	0	1	1	0	1	1
Complemento de 1	0	1	1	0	0	1	0	0

$\therefore$ O complemento de 1 de 10011011_2 é 01100100_2

Notação de complemento de 2

A obtenção do complemento de 2 é utilizada para representar números binários negativos e é feita somando-se 1 ao complemento de 1 do número binário inicial. Como exemplo vamos representar o número -11001101_2 na notação de complemento de 2

Número binário	1	1	0	0	1	1	0	1
Complemento de 1	0	0	1	1	0	0	1	0
							+	1
Complemento de 2	0	0	1	1	0	0	1	1

∴ A representação na notação do complemento de 2 do número -11001101_2 é 00110011_2

Notação de complemento de 2

- Convém observar que estas representações, por serem utilizadas no hardware de sistemas, possuem sempre um número predefinido de bits, não devendo ser desconsiderado nenhum deles na resposta. Até agora só utilizamos números com 8 bits.

Utilização do complemento de 2 operações aritméticas

- Podemos utilizar a notação do complemento de 2 para efetuar operações diversas que envolvam soma ou subtração. De maneira geral, podemos considera-las como operações de soma envolvendo números positivos e negativos, ou entre números quaisquer, obtendo uma resposta apropriada conforme a situação.
- Para solucionar qualquer operação desse tipo, basta determinar o complemento de 2 do número negativo envolvido, com o mesmo número de bits do outro membro da operação e realizar a soma, desconsiderando se houver, o estouro do número de bits no resultado.

Utilização do complemento de 2 operações aritméticas

Procedendo assim, temos:

$11010111_2 - 100101$:

Complemento de 1 de 00100101: 11011010

Complemento de 2:

$$\begin{array}{r} 11011010 \\ + \quad\quad 1 \\ \hline 11011011 \end{array}$$

Operação:

$$\begin{array}{r} 11010111 \\ +11011011 \\ \hline \cancel{1}10110010 \end{array}$$

→ estouro do número de bits desconsiderado

$\therefore 11010111_2 - 100101_2 = 10110010_2$

Utilização do complemento de 2 operações aritméticas

- A vantagem deste processo é que nos sistemas digitais pode-se utilizar um mesmo circuito somador para efetuar-se operações que envolvam números negativos ou ainda subtrações, simplificando a quantidade de componentes no sistema. Utilizaremos também estes conceitos em outros capítulos relativos a circuitos aritméticos.

Minuendo menor que o subtraendo

- Exemplo: $10011_2 - 100101_2$
- Trata-se de um número menor subtraindo um outro maior. Agindo da mesma forma, temos:
- Complemento de 1 de 100101 = 0 1 1 0 1 0
- Complemento de 2: 0 1 1 0 1 1
- Operação: 0 1 0 0 1 1

$$
\begin{array}{r}
0\,1\,0\,0\,1\,1 \\
+\,0\,1\,1\,0\,1\,1 \\
\hline
1\,0\,1\,1\,1\,0
\end{array}
$$

Minuendo menor que o subtraendo

- Pelo fato de o minuendo (10011_2) ser menor que o subtraendo (100101_2) a resposta é negativa, estando na notação do complemento de 2. Para obtê-la na notação binária normal, basta determinar novamente o complemento de 2 e acrescentar o sinal negativo:

1 0 1 1 1 0 → 0 1 0 0 0 1 → 0 1 0 0 0 1 + 1 = 0 1 0 0 1 0

Logo $1\ 0\ 0\ 1\ 1_2 = -1\ 0\ 0\ 1\ 0_2$ (ou **101110** em complemento de 2)

- FIM