Capítulo 5

Vetores e Matrizes

5.1 INTRODUÇÃO

Dados são freqüentemente organizados em *arrays*[†], isto é, conjuntos cujos elementos são indexados por mais índices. Normalmente, um *array* unidimensional é chamado de vetor, e um *array* bidimensional é ch de matriz. (A dimensão, neste caso, denota o número de índices.) Apresentamos aqui a motivação para es truturas e sua notação.

Suponha que os pesos (em libras) de oito estudantes sejam listados como a seguir:

$$134, \quad 156, \quad 127, \quad 145, \quad 203, \quad 186, \quad 145, \quad 138$$

Pode-se denotar todos os valores na lista inserindo apenas um símbolo, w, com índices diferentes.

$$w_1, \quad w_2, \quad w_3, \quad w_4, \quad w_5, \quad w_6, \quad w_7, \quad w_8$$

Observe que cada índice denota uma posição do valor na lista. Por exemplo,

$$w_1 = 134, \text{ o primeiro número}; \qquad w_2 = 156, \text{ o segundo número}; \ \ldots$$

Essa lista de valores é dita um *vetor* ou *array linear*.

Usando a notação de índices, pode-se escrever a soma S e a média dos pesos, A, como a seguir:

$$S = \sum_{k=1}^{8} w_k = w_1 + w_2 + \ldots + w_8 \qquad \text{e} \qquad A = \frac{S}{8} = \frac{1}{8}\left[\sum_{k=1}^{8} w_k\right]$$

A notação utilizando índices é indispensável no desenvolvimento de expressões concisas para manipulaçõ méticas de listas de valores.

De maneira similar, uma cadeia de 28 lojas, cada loja com quatro departamentos, poderia listar suas ven manais (com valores aproximados, em dólares) como na Tabela 5-1. Precisamos de apenas um símbolo, dig com dois índices para denotar todos os valores na tabela.

$$s_{1,1}, \quad s_{1,2}, \quad s_{1,3}, \quad s_{1,4}, \quad s_{2,1}, \quad s_{2,2}, \quad \ldots, \quad s_{28,4}$$

[†] N. de T. Em português, às vezes se usa a tradução "vetor", mas a palavra *array* é mais freqüente nos textos de ciência da computação e áre

onde $s_{i,j}$ denota as vendas na loja i, departamento j. (Escrevemos s_{ij} em vez de $s_{i,j}$ quando não houver possibilidade de mal-entendidos). Portanto,

$$s_{11} = \$2872, \quad s_{12} = \$805, \quad s_{13} = \$3211, \quad \ldots$$

Um *array* retangular de números como este é denominado *matriz* ou *array bidimensional*.

Este capítulo investiga vetores e matrizes e certas operações algébricas envolvendo-os. Neste contexto, os números em si são ditos *escalares*.

Tabela 5-1

Loja \ Dep.	1	2	3	4
1	2872	805	3211	1560
2	2196	1223	2525	1744
3	3257	1017	3686	1951
...	...	...	...	...
28	2618	931	2333	982

5.2 VETORES

Vamos nos referenciar a uma lista de números, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, como um *vetor u*. Um tal vetor é denotado por

$$u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Os números a_i são ditos *componentes* ou *elementos* de u. Se todos os $a_i = 0$, então u é dito o *vetor zero*. Dois vetores u e v são *iguais* (escreve-se $u = v$) se têm o mesmo número de componentes e os componentes correspondentes são iguais.

Exemplo 5.1

(*a*) São vetores:

$$(3, -4) \qquad (6, 8) \qquad (0, 0, 0) \qquad (2, 3, 4)$$

Os dois primeiros vetores têm dois componentes, enquanto os dois últimos têm três. O terceiro vetor é o vetor zero com três componentes.

(*b*) Embora os vetores (1, 2, 3) e (2, 3, 1) contenham os mesmos números, eles não são iguais, pois os componentes correspondentes não são iguais.

Operações com Vetores

Considere dois vetores arbitrários u e v com o mesmo número de componentes,

$$u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \text{e} \qquad v = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

A *soma* de u e v (escreve-se $u + v$) é o vetor obtido pela adição dos componentes correspondentes de u e v, isto é,

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

O *produto por escalar* ou, simplesmente, *produto*, de um escalar k e um vetor u (escreve-se ku) é o vetor obtido pela multiplicação de cada componente de u por k; isto é,

$$ku = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$$

Também definimos

$$-u = -1(u) \qquad \text{e} \qquad u - v = u + (-v)$$

e escolhemos 0 para denotar o vetor zero. O vetor $-u$ é dito o *negativo* do vetor u.

O *produto interno* dos vetores u e v descritos acima é denotado e definido por

$$u \cdot v = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

A *norma*, ou *comprimento*, do vetor u é denotada e definida por

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Notamos que $\|u\| = 0$ se e somente se $u = 0$; caso contrário, $\|u\|>0$.

Exemplo 5.2 Seja $u = (2, 3, -4)$ e $v = (1, -5, 8)$. Então,

$$\begin{aligned}
u + v &= (2 + 1, 3 - 5, -4 + 8) = (3, -2, 4) \\
5u &= (5 \cdot 2,\ 5 \cdot 3,\ 5 \cdot (-4)) = (10, 15, -20) \\
-v &= -1 \cdot (1, -5, 8) = (-1, 5, -8) \\
2u - 3v &= (4, 6, -8) + (-3, 15, -24) = (1, 21, -32) \\
u \cdot v &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) + (-4) \cdot 8 = 2 - 15 - 32 = -45 \\
\|u\| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}
\end{aligned}$$

Vetores, considerados conjuntamente com as operações de adição de vetores e produto por escalar, têı propriedades, por exemplo,

$$k(u + v) = ku + kv$$

onde k é um escalar, e u e v são vetores. Muitas dessas propriedades aparecem no Teorema 5.1 (veja a Seç que também vale para vetores, uma vez que estes podem ser encarados como um caso particular de matriz

Vetores Coluna

Às vezes uma lista de números é escrita no sentido vertical em vez de horizontal, sendo chamada *vetor colu* te contexto, os vetores escritos no sentido horizontal acima são chamados *vetores linha*. As operações aci vetores linha são definidas de maneira análoga para vetores coluna.

Exemplo 5.3

(*a*) São vetores coluna:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1{,}4 \\ \frac{3}{4} \\ -19 \end{bmatrix}$$

Os primeiros dois vetores têm dois componentes, enquanto os últimos dois têm três.

(*b*) Sejam

$$u = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Então,

$$2u - 3v = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$u \cdot v = 15 - 3 + 8 = 20 \qquad \text{e} \qquad \|u\| = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

5.3 MATRIZES

Uma *matriz A* é um *array* retangular de números, normalmente representado na forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

As m listas horizontais de números são chamadas *linhas* de A, e as n listas verticais de números, suas *colunas*. Portanto, o elemento a_{ij}, chamado *elemento ij*, aparece na linha i e na coluna j. Freqüentemente denotamos uma matriz simplesmente escrevendo $A = [a_{ij}]$.

Uma matriz com m linhas e n colunas é dita uma matriz m por n (escreve-se $m \times n$). O par de números m e n é dito a *dimensão*† da matriz. Duas matrizes A e B são iguais se têm a mesma dimensão e se os seus elementos correspondentes são iguais. Portanto, a igualdade de duas matrizes $m \times n$ é equivalente a um sistema de mn igualdades, uma para cada par de elementos correspondentes.

Uma matriz com apenas uma linha é dita uma *matriz linha* ou *vetor linha*, e uma matriz com apenas uma coluna é dita uma *matriz coluna* ou *vetor coluna*. Uma matriz cujos elementos são todos zero é chamada *matriz zero* e será normalmente denotada por 0.

Exemplo 5.4

(*a*) O *array* retangular $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×3. Suas linhas são $[1, -4, 5]$ e $[0, 3, -2]$ e suas colunas são $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(*b*) A matriz zero 2×4 é a matriz $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(*c*) Suponha que

$$\begin{bmatrix} x+y & 2z+t \\ x-y & z-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Então os quatro elementos correspondentes precisam ser iguais. Isto é,

$$x+y=3, \qquad x-y=1, \qquad 2z+t=7, \qquad z-t=5$$

A solução do sistema de equações é

$$x=2, \qquad y=1, \qquad z=4, \qquad t=-1$$

5.4 ADIÇÃO DE MATRIZES E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes de mesma dimensão, isto é, matrizes $m \times n$. A soma de A e B (escreve-se $A + B$) é a matriz obtida pela adição dos elementos correspondentes de A e B. Isto é,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

† N. de T. No original, *size*.

O *produto* de uma matriz A por um escalar k (escreve-se $k \cdot A$, ou simplesmente kA) é a matriz obtida multip do-se cada elemento de A por k. Isto é,

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Observe que $A + B$ e kA são também matrizes $m \times n$. Também definimos

$$-A = (-1)A \qquad \text{e} \qquad A - B = A + (-B)$$

A matriz $-A$ é dita o *negativo* da matriz A. A soma de matrizes de dimensão diferentes não é definida.

Exemplo 5.5 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \end{bmatrix}$. Então,

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+4 & -2+6 & 3+8 \\ 0+1 & 4+(-3) & 5+(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(-2) & 3(3) \\ 3(0) & 3(4) & 3(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & -18 & -24 \\ -3 & 9 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -22 & -18 \\ -3 & 17 & 31 \end{bmatrix}$$

Matrizes consideradas conjuntamente com as operações de adição e multiplicação por escalar têm as pr dades a seguir.

Teorema 5-1: sejam A, B e C matrizes de mesma dimensão, e sejam k e k' escalares. Então:

(i) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(ii) $A + 0 = 0 + A$

(iii) $A + (-A) = (-A) + 0 = A$

(iv) $A + B = B + A$

(v) $k(A + B) = kA + kB$.

(vi) $(k + k')A = kA + k'A$.

(vii) $(kk')A = k(k'A)$.

(viii) $1A = A$.

Note que o primeiro 0 em (ii) e (iii) se refere à matriz zero. Também por (i) e (iv), uma soma qualquer c trizes

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

não requer parênteses, e a soma não depende da ordem das matrizes. Ademais, usando (vi) e (viii), também

$$A + A = 2A, \qquad A + A + A = 3A, \qquad \ldots$$

Finalmente, já que um vetor com n componentes pode ser identificado com uma matriz $1 \times n$ ou $n \times 1$, o Te 5.1 também vale para vetores munidos das operações de adição e multiplicação por escalar.

A demonstração do Teorema 5.1 se reduz a mostrar que o elemento ij de cada matriz é igual em ambos dos da equação. (Veja o Problema 5.10.)

5.5 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

O produto das matrizes A e B (escreve-se AB) é um pouco complicado. Por esta razão, começamos com un especial. (A Seção 3.5 apresenta uma discussão sobre o símbolo de somatório Σ, a letra grega sigma maiúsc

O produto AB de uma matriz linha $A = [a_i]$ e uma matriz coluna $B = [b_i]$ com o mesmo número de elementos é definido como a seguir:

$$AB = [a_1, a_2, \ldots, a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k$$

Isto é, AB é obtido multiplicando os elementos correspondentes em A e B e então adicionando todos os produtos. Enfatizamos que AB é um escalar (ou uma matriz 1×1). O produto AB não é definido quando A e B têm números diferentes de elementos.

Exemplo 5.6

(*a*) $[7, -4, 5]\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 7(3) + (-4)(2) + 5(3) = 21 - 8 - 5 = 8$

(*b*) $[6, -1, 8, 3]\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = 24 + 9 - 16 + 15 = 32$

Agora estamos prontos para definir a multiplicação de matrizes em geral.

Definição: Suponha que $A = [a_{ik}]$ e $B = [b_{kj}]$ são matrizes, e que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B; isto é, A é uma matriz $m \times p$, e B é uma matriz $p \times n$. O produto AB é a matriz $m \times n$ cujo elemento ij é obtido pela multiplicação da i-ésima linha de A pela j-ésima coluna de B. Isto é,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & c_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

onde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Enfatizamos que o produto AB não é definido se A é uma matriz $m \times p$ e B é uma matriz $q \times n$ onde $p \neq q$.

Exemplo 5.7

(*a*) Ache AB onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Como A é 2×2 e B é 2×3, o produto AB é definido, e AB é uma matriz 2×3. Para obter a primeira linha da matriz produto AB, multiplique a primeira linha $(1, 3)$ de A por cada coluna de B,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Isto é,

$$AB = \begin{bmatrix} 2+15 & 0-6 & -4+18 \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -6 & 14 \\ & & \end{bmatrix}$$

Para obter a segunda linha do produto AB, multiplique a primeira linha $(2, -1)$ de A por cada coluna de B, respectivamente. Portanto,

$$AB = \begin{bmatrix} 17 & -6 & 14 \\ 4-5 & 0+2 & -8-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -6 & 14 \\ -1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

(*b*) Suponha que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Então,

$$AB = \begin{bmatrix} 5+0 & 6-4 \\ 15+0 & 18-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 0-6 & 0-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$$

O Exemplo 5.6(*b*) acima mostra que a multiplicação de matrizes não é comutativa, i.e., os produtos das matrizes AB e BA não são necessariamente iguais.

A multiplicação de matrizes satisfaz, entretanto, às seguintes propriedades:

Teorema 5-2: sejam A, B e C matrizes. Então, sempre que o produto e a soma estiverem definidos:

(i) $(AB)C = A(BC)$ (lei associativa).
(ii) $A(B + C) = AB + AC$ (lei distributiva pela esquerda).
(iii) $(B + C)A = BA + CA$ (lei distributiva pela direita).
(iv) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, onde k é um escalar.

Notamos que $0A = 0$ e $B0 = 0$, onde 0 é a matriz zero.

Multiplicação de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Qualquer sistema S de equações lineares é equivalente à equação matricial

$$AX = B$$

onde A é a matriz que contém os coeficientes, X é o vetor coluna de incógnitas e B é o vetor coluna de constantes. (Aqui, *equivalente* quer dizer que qualquer solução do sistema S é uma solução da equação matricial $AX = B$ e vice-versa.) Por exemplo, o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 5x - 6y + 8z &= 9 \end{aligned} \quad \text{é equivalente a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Observe que o sistema é completamente determinado pela matriz

$$M = [A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

que é chamada *matriz aumentada* do sistema.

5.6 TRANSPOSTA

A *transposta* de uma matriz A (escreve-se A^T) é a matriz obtida pela colocação das linhas de A, em ordem, no lugar das colunas. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [1, -3, -5]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Note que, se A é uma matriz $m \times n$, então A^T é uma matriz $n \times m$. Em particular, a transposta de um vetor linha é um vetor coluna e vice-versa. Ademais, se $B = [b_{ij}]$ é a transposta de $A = [a_{ij}]$, então $b_{ij} = a_{ji}$ para todos i e j.

A operação de transposição de matrizes satisfaz às seguintes propriedades.

Teorema 5-3: sejam A e B matrizes e seja k um escalar. Então, sempre que o produto e a soma estiverem definidos:

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$.
(ii) $(kA)^T = kA^T$, onde k é um escalar.
(iii) $(AB)^T = B^T A^T$.
(iv) $(A^T)^T = A$.

Enfatizamos que, por (iii), a transposta de um produto é o produto das transpostas, mas na ordem inversa.

5.7 MATRIZES QUADRADAS

Uma matriz com o mesmo número de linhas e colunas é chamada *matriz quadrada*. Uma matriz quadrada com n colunas e n linhas é dita de *ordem n* e é chamada matriz *n-quadrada*.

A *diagonal principal*, ou simplesmente *diagonal*, de uma matriz n-quadrada $A = [a_{ij}]$ consiste nos elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

A *matriz unitária* n-quadrada, denotada por I_n ou simplesmente I, é a matriz quadrada com 1 ao longo da diagonal e zero nos outros elementos. A matriz unitária I desempenha um papel importante na multiplicação de matrizes, assim como o número 1 o faz na multiplicação usual de números. Especificamente

$$AI = IA = A$$

para qualquer matriz quadrada.

Considere, por exemplo, as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -6 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ambas são matrizes quadradas. A primeira matriz é de ordem 3, e sua diagonal consiste nos elementos 1, –4 e 2. A segunda matriz é de ordem 4; sua diagonal consiste apenas em 1, e existem apenas zeros nas outras posições. Portanto, a segunda matriz é a matriz unitária de ordem 4.

Álgebra de Matrizes Quadradas

Seja A uma matriz quadrada qualquer. Podemos multiplicar A por ela mesma. Na verdade, podemos formar todas as *potências* não negativas de A como a seguir:

$$A^2 = AA, \qquad A^3 = A^2A, \qquad \ldots, \qquad A^{n+1} = A^nA, \qquad \ldots, \qquad \text{e} \qquad A^0 = I \text{ (quando } A \neq 0)$$

Também são definidos polinômios sobre a matriz A. Especificamente, para qualquer polinômio

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

onde os a_i são escalares, definimos $f(a)$ como sendo a matriz

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

Note que $f(a)$ é obtida de $f(x)$ pela substituição da variável x pela matriz A e do termo escalar a_0 pela matriz a_0I. No caso em que $f(a)$ é a matriz zero, a matriz A é dita um *zero* ou uma *raiz* do polinômio $f(x)$.

Exemplo 5.8 Suponha que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Então,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$$

Suponha que $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$. Então,

$$f(A) = 2\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$$

Suponha que $g(x) = x^2 + 3x - 10$. Então,

$$g(A) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, A é um zero do polinômio $g(x)$.

5.8 MATRIZES INVERSÍVEIS (NÃO SINGULARES) E INVERSAS

Uma matriz quadrada A é dita ser *inversível* (*ou não singular*) se existe uma matriz B com a propriedad

$$AB = BA = I, \text{ a matriz identidade.}$$

Uma tal matriz B é única (Problema 5.24); é chamada *inversa* de A e denotada por A^{-1}. Observe que B de A se e somente se A é a inversa de B. Por exemplo, suponha que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$;

Então,

$$AB = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Portanto, A e B são inversas.

É sabido que $AB = I$ se e somente se $BA = I$; portanto, é necessário testar apenas um produto para c se duas matrizes dadas são inversas, como no próximo exemplo.

Exemplo 5.9

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3 \\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, as duas matrizes são inversíveis e são inversa uma da outra.

5.9 DETERMINANTES

Para cada matriz n-quadrada $A = [a_{ij}]$, associamos um número específico chamado *determinante* de A e por det (a) ou $|A|$ ou

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Enfatizamos que um *array* quadrado de números, delimitado por linhas retas, chamado *determinante d* não é uma matriz, mas denota o valor que a função determinante associa ao *array* de números, i.e., a matr da delimitada.

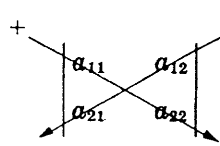
Os determinantes de ordem 1, 2 e 3 são definidos como a seguir:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

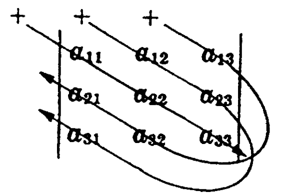
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

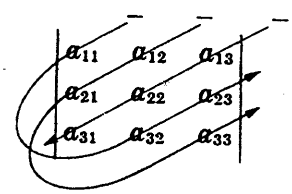
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

O diagrama seguinte pode ajudar o leitor a lembrar o determinante de ordem 2:



Isto é, o determinante é igual ao produto dos elementos ao longo da seta referenciada com sinal de adição menos o produto dos elementos ao longo da seta indicada com o sinal de subtração. Existe uma maneira análoga de lembrar o determinante de ordem 3. Por conveniência de notação, separamos as setas indicadas pelos sinais de soma e subtração.





Enfatizamos que não existem diagramas análogos para lembrar os determinantes de ordem superior.

Exemplo 5.10

(*a*) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5(3) - 4(2) = 15 - 8 = 7, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 2(6) - 1(-4) = 12 + 4 = 16.$

(*b*) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(6)(0) + 1(-1)(5) + 3(1)(4) - 3(6)(5) - 1(4)(0) - 2(1)(-1)$$
$$= 0 - 5 + 12 - 90 - 0 + 2 = -81.$$

Definição Geral de Determinantes

A definição geral de um determinante de ordem n é

$$\det(A) = \sum \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

onde a soma é efetuada sobre todas as permutações $\sigma = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Neste caso, sinal (σ) é igual a +1 ou −1 de acordo com a necessidade de um número par ou ímpar de trocas a fim de que σ esteja na ordem usual. Incluímos aqui a definição geral da função determinante para que o texto fique completo. O leitor deve se referenciar a textos de teoria de matrizes ou álgebra linear para técnicas de cálculo de determinantes de ordem maior do que 3. As permutações são estudadas no Capítulo 6.

Uma propriedade importante da função determinante é a de ser multiplicativa. Isto é,

Teorema 5-4: sejam A e B matrizes quaisquer n-quadradas. Então,

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

A demonstração do teorema acima está além do objetivo deste texto.

Determinantes e Inversas de Matrizes 2×2

Seja A uma matriz 2×2 arbitrária:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Queremos deduzir uma fórmula para A^{-1}, a inversa de A. Especificamente procuramos $2^2 = 4$ escalares, x_1, y_1, x_2, y_2, tais que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na forma escalonada, a metade esquerda de M está na forma triangular; logo, A é inversível. Depois reduza M à sua forma canônica por linhas:

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

A matriz identidade está na metade esquerda da matriz final; portanto, a metade direita é A^{-1}. Em outras palavras,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

5.11 MATRIZES BOOLEANAS (ZERO – UM)

Os *dígitos binários*, ou *bits*, são os símbolos 0 e 1. Considere as operações seguintes com estes dígitos:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Entendendo esses dígitos como valores lógicos (0 representando FALSO e 1 representando VERDADEIRO), as operações acima correspondem, respectivamente, às operações lógicas OU ($\vee$) e E ($\wedge$); isto é,

$\vee$	F	V
F	F	V
V	V	V

$\wedge$	F	V
F	F	F
V	F	V

(As operações acima em 0 e 1 são chamadas de *operações booleanas*, uma vez que também correspondem às operações da álgebra booleana, discutida no Capítulo 15.)

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz cujos elementos são os *bits* 0 e 1 sujeitos às operações booleanas definidas acima. Então A é chamada *matriz booleana*. O *produto booleano* de duas tais matrizes é o produto usual, exceto pelo fato de que agora usamos as operações booleanas de adição e multiplicação. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{então} \qquad AB = \begin{bmatrix} 0+0 & 1+1 \\ 0+0 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se mostrar facilmente que, se A e B são matrizes booleanas, o produto booleano AB pode ser obtido calculando o produto usual de A e B e depois substituindo todo dígito não nulo por 1.

Problemas Resolvidos

Vetores

5.1 Seja $u = (2, -7, 1)$, $v = (-3, 0, 4)$ e $w = (0, 5, 8)$. Ache:

(a) $u + v$; (b) $v + w$; (c) $-3u$; (d) $-w$.

(a) Some os componentes correspondentes:

$$u + v = (2, -7, 1) + (-3, 0, 4) = (2 - 3, -7 + 0, 1 + 4) = (-1, -7, 5)$$

(b) Some os componentes correspondentes:

$$v + w = (-3, 0, 4) + (0, 5, -8) = (-3 + 0, 0 + 5, 4 - 8) = (-3, 5, -4)$$

(*c*) Multiplique cada componente de u pelo escalar –3.

$$-3u = -3(2,-7,1) = (-6,21,-3)$$

(*d*) Troque o sinal de cada componente ou, equivalentemente, multiplique cada componente por –1;

$$-w = -(0,5,-8) = (0,-5,8)$$

5.2 Sejam u, v e w os vetores do Problema 5.1. Ache: (*a*) $3u - 4v$; (*b*) $2u + 3v - 5w$.

Primeiramente efetue a multiplicação por escalar e depois a adição de vetores.

(*a*) $3u - 4v = 3(2,-7,1) - 4(-3,0,4) = (6,-21,3) + (12,0,-16) = (18,-21,-13)$.

(*b*) $2u + 3v - 6w =$

$2(2,-7,1) + 3(-3,0,4) - 5(0,5,-8) = (4,-14,2) + (-9,0,12) + (0,-25,40) = (-5,-39,54)$.

5.3 Sejam u, v e w os vetores do Problema 5.1. Ache: (*a*) $u \cdot v$; (*b*) $u \cdot w$; (*c*) $v \cdot w$.

Multiplique os componentes correspondentes e então some.

(*a*) $u \cdot v = 2(-3) - 7(0) + 1(4) = -6 + 0 + 4 = -2$.

(*b*) $u \cdot w = 2(0) - 7(5) + 1(-8) = 0 - 35 - 8 = -43$.

(*c*) $v \cdot w = -3(0) + 0(5) + 4(-8) = 0 + 0 - 32 = -32$.

5.4 Ache $\|u\|$ onde: (*a*) $u = (3,-12,-4)$; (*b*) $u = (2,-3,8,-7)$.

Primeiramente ache $\|u\|^2 = u \cdot u$ elevando os componentes ao quadrado e depois somando. Então, $\|u\| = \sqrt{\|u$

(*a*) $\|u\|^2 = (3)^2 + (-12)^2 + (-4)^2 = 9 + 144 + 16 = 169$.

Portanto, $\|u\| = \sqrt{169} = 13$.

(*b*) $\|u\|^2 = 4 + 9 + 64 + 49 = 126$. Portanto, $\|u\| = \sqrt{126}$.

5.5 Ache x e y se $x(1,1) + y(2,-1) = (1,4)$.

Primeiramente multiplique pelos escalares x e y e depois some.

$$x(1,1) + y(2,-1) \quad = \quad (x,x) + (2y,-y) \quad = \quad (x+2y, x-y) \quad = \quad (1,4)$$

Dois vetores são iguais apenas quando seus componentes correspondentes são iguais; portanto, iguale os compon correspondentes para obter $x + 2y = 1$ e $x - y = 4$. Finalmente resolva o sistema de equações para obter $x = 3$ e $y =$

5.6 Suponha que $u = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Ache: (*a*) $5u - 2v$; (*b*) $-2u + 4v - 3w$.

(*a*) $5u - 2v = 5\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \\ -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 5 \\ -24 \end{bmatrix}$.

(*b*) $-2u + 4v - 3w = \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ 17 \\ 22 \end{bmatrix}$.

Adição de Matrizes e Multiplicação por Escalar

5.7 Dados $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$. Ache: (*a*) $A + B$; (*b*) $3A$ e $-4B$.

(*a*) Ache os elementos correspondentes:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+(-1) & -3+2 \\ 4+0 & -5+3 & 6+(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(*b*) Multiplique cada elemento pelo escalar dado.

$$3A = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) & 3(-3) \\ 3(4) & 3(-5) & 3(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 12 & -15 & 18 \end{bmatrix}$$

$$-4B = \begin{bmatrix} -4(1) & -4(-1) & -4(2) \\ -4(0) & -4(3) & -4(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -8 \\ 0 & -12 & 20 \end{bmatrix}$$

5.8 Ache $2A - 3B$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

Primeiramente efetue a multiplicação por escalar e depois a adição de matrizes.

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & 0 & -6 \\ 21 & -3 & -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{bmatrix}$$

(Note que multiplicamos B por -3 e depois somamos, no lugar de multiplicar B por 3 e depois subtrairmos. Em geral, isso evita erros.)

5.9 Ache x, y, z, t, onde $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{bmatrix}$.

Primeiramente escreva cada lado como uma única matriz:

$$\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+t-1 & 2t+3 \end{bmatrix}$$

Iguale os elementos correspondentes para obter um sistema de quatro equações.

$$\begin{aligned} 3x &= x+4 \\ 3y &= x+y+6 \\ 3z &= z+t-1 \\ 3t &= 2t+3 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 2x &= 4 \\ 2y &= 6+x \\ 2z &= t-1 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

A solução é $x = 2, y = 4, z = 1, t = 3$.

5.10 Prove o Teorema 5.1(v): $k(A + B) = kA + kB$.

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$. Então, o elemento ij de $A + B$ é $a_{ij} + b_{ij}$. Portanto, $k(a_{ij} + b_{ij})$ é o elemento ij de $k(A + B)$. Por outro lado, os elementos ij de kA e kB são ka_{ij} e kb_{ij}, respectivamente. Portanto, $ka_{ij} + kb_{ij}$ é o elemento ij. Entretanto, para escalares, $k(a_{ij} + b_{ij}) = ka_{ij} + kb_{ij}$. Logo, $k(A + B)$ e $kA + kB$ têm os mesmos elementos ij. Portanto, $k(A + B) = kA + kB$.

Multiplicação de Matrizes

5.11 Calcule: (*a*) $[3, -2, 5]\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$; (*b*) $[2, -1, 7, 4]\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Multiplique os elementos correspondentes e então some.

(*a*) $[3, -2, 5]\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = 3(6) - 2(1) + 5(-4) = 18 - 2 - 20 = -4.$

(*b*) $[2, -1, 7, 4]\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix} = 10 + 3 - 42 + 36 = 7.$

5.12 Denote por ($r \times s$) uma matriz $r \times s$. Ache a dimensão das matrizes produto definidas:

(*a*) $(2 \times 3)(3 \times 4)$ (*c*) $(1 \times 2)(3 \times 1)$ (*e*) $(4 \times 4)(3 \times 3)$
(*b*) $(4 \times 1)(1 \times 2)$ (*d*) $(5 \times 2)(2 \times 3)$ (*f*) $(2 \times 2)(2 \times 4)$

Em cada caso, o produto é definido se os números internos são iguais, e então o produto terá a dimensão dc ros externos na ordem dada.

(*a*) 2×4 (*c*) Não definido (*e*) Não definido
(*b*) 4×2 (*d*) 5×3 (*f*) 2×4

5.13 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$. Ache: (*a*) AB; (*b*) BA.

(*a*) Como A é 2×2 e B é 2×3, o produto AB é definido e é uma matriz 2×3. Para obter a primeira linha de AB plique a primeira linha [1, 3] de A pelas colunas $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ de B, respectivamente :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(2)+3(3) & 1(0)+3(-1) & 1(-4)+3(6) \\ & & \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2+9 & 0-6 & -4+18 \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ & & \end{bmatrix}$$

Para obter os elementos da segunda linha de AB, multiplique a segunda linha $[2, -1]$ de A pelas colunas de pectivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 4-3 & 0+2 & -8-6 \end{bmatrix}$$

Portanto
$$AB = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

(*b*) Note que B é 2×3 e A é 2×2. Como os números internos, 3 e 2, não são iguais, o produto BA não é definido

5.14 Compute: (*a*) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; (*b*) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$; (*c*) $\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$; (*d*) $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

(*e*) $[2, -1]\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$.

(*a*) O primeiro fator é 2×2, e o segundo é 2×2; logo, o produto é definido e é uma matriz 2×2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+12 & 0+12 \\ -12+10 & 0-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

(*b*) O primeiro fator é 2×2, e o segundo é 2×1; logo, o produto é definido e é uma matriz 2×1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-42 \\ -6-35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ -41 \end{bmatrix}$$

(*c*) O primeiro fator é 2×1, e o segundo é 2×2. Como os números internos, 1 e 2, são diferentes, o produto não é definido.

(*d*) Aqui o primeiro fator é 2×1, e o segundo é 1×2; logo, o produto é definido e é uma matriz 2×2:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}[3, 2] = \begin{bmatrix} 1(3) & 1(2) \\ 6(3) & 6(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}$$

(*e*) O primeiro fator é 1×2, e o segundo é 2×1; logo, o produto é definido como uma matriz 1×1, que escrevemos, tipicamente, como um escalar:

$$[2, -1]\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} = 2(1) - 1(-6) = 2 + 6 = 8$$

5.15 Prove o Teorema 5.2(i): $(AB)C = A(BC)$.

Sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{jk}]$ e $C = [c_{kl}]$. Além disto, sejam $AB = S = [s_{ik}]$ e $BC = T = [t_{jl}]$.
Então,

$$s_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

$$t_{jl} = b_{j1}c_{sl} + b_{j2}c_{2l} + \cdots + b_{jn}c_{nl} = \sum_{k=l}^{n} b_{jk}c_{kl}$$

Agora, multiplicando S por C, i.e., (AB) por C, o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $(AB)C$ é

$$s_{i1}c_{1l} + s_{i2}c_{2l} + \cdots + s_{in}c_{nl} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}b_{jk})c_{kl}$$

Por outro lado, multiplicando A por T, i.e., AB por BC, o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $A(BC)$ é

$$a_{i1}t_{1l} + a_{i2}t_{2l} + \cdots + a_{im}t_{ml} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}t_{jl} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}c_{kl})$$

Como as somas acima são iguais, o teorema está provado.

Transposta

5.16 Ache a transposta de cada matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \quad C = [1, -3, 5, -7]; \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Reescreva as linhas de cada matriz como colunas para obter as transpostas das matrizes:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 8 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad D^T = [2, -4, 6]$$

(Note que $B^T = B$; uma tal matriz é dita *simétrica*. Note também que a transposta do vetor linha C é um vetor coluna, e a transposta do vetor coluna D é um vetor linha.)

5.17 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Ache: (*a*) AA^T; (*b*) A^TA.

Para obter A^T, reescreva as linhas de A como colunas: $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Então,

(*a*) $$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+0 & 3-2+0 \\ 3-2+0 & 9+1+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}.$$

(*b*) $$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+9 & 2-3 & 0+12 \\ 2-3 & 4+1 & 0-4 \\ 0+12 & 0-4 & 0+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{bmatrix}.$$

5.18 Prove o Teorema 5.3(iii): $(AB)^T = B^TA^T$.

Suponha que $A = [a_{ik}]$ e $B = [b_{kj}]$. Então, o elemento ij de AB é

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

Portanto, (1) é o elemento ji (ordem reversa) de $(AB)^T$.

Por outro lado, a coluna j de B torna-se a linha j de B^T e a linha i de A torna-se coluna i de A^T. Conseqüenter o elemento ij de B^TA^T é

$$[b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{mj}]\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdots \\ a_{im} \end{bmatrix} = b_{ij}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{mj}a_{im}$$

Portanto, $(AB)^T = B^TA^T$, já que os elementos correspondentes são iguais.

Matrizes Quadradas

5.19 Ache a diagonal de cada uma das matrizes seguintes:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & 8 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}; \quad (b)\ B = \begin{bmatrix} t-2 & 3 \\ -4 & t+5 \end{bmatrix}; \quad (c)\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

(*a*) A diagonal consiste nos elementos do canto superior esquerdo ao canto inferior direito da matriz, isto é, os ele: tos a_{11}, a_{22} e a_{33}. Portanto, a diagonal consiste nos escalares 1, – 5 e 7.

(*b*) A diagonal consiste no par $[t-2t, t+5]$.

(*c*) A diagonal é definida apenas para matrizes quadradas.

5.20 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$. Ache: (*a*) A^2; (*b*) A^3.

(*a*) $$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & 8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}.$$

(*b*) $$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-16 & -4+34 \\ 36+24 & -16-51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}.$$

5.21 Sejam $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ e $g(x) = x^2 + 2x - 11$. Para a matriz A do Problema 5.20, ache: $(a)\, f(A)$; $(b)\, g(A)$.

(a) Compute $f(a)$ primeiramente substituindo x por A e $5I$ no termo constante 5 em $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$:

$$f(A) = 2A^3 - 4A + 5I = 2\begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então multiplique cada matriz pelo seu respectivo escalar:

$$f(A) = \begin{bmatrix} -14 & 60 \\ 120 & -134 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -16 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Finalmente, some os elementos correspondentes nas matrizes:

$$f(A) = \begin{bmatrix} -14 - 4 + 5 & 60 - 8 + 0 \\ 120 - 16 + 0 & -134 + 12 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{bmatrix}$$

(b) Compute $g(a)$ primeiramente substituindo x por A e $11I$ no termo constante 11 em $g(x) = x^2 + 2x - 11$:

$$g(A) = A^2 + 2A - 11I = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 11\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Como $g(A) = 0$, a matriz A é um zero do polinômio $g(x)$.)

Determinantes e Inversas

5.22 Compute o determinante de cada matriz:

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} a-b & b \\ b & a+b \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{bmatrix}$.

Use a fórmula $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ para obter:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4(-2) - 5(-3) = -8 + 15 = 7.$

(b) $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -2(6) - 7(0) = -12 + 0 = -12.$

(c) $\begin{vmatrix} a-b & b \\ b & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(a+b) - b^2 = a^2 - b^2 - b^2 = a^2 - 2b^2.$

(d) $\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(a+b) - a^2 = a^2 - b^2 - a^2 = -b^2.$

5.23 Ache o determinante de cada matriz:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

(*Sugestão:* use o diagrama da Seção 5.9.)

(*a*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 60 - 0 - 15 + 8 = 55.$

(*b*) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 15 + 0 + 20 + 24 + 0 = 67.$

(*c*) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 9 - 8 + 8 - 12 + 15 = 14.$

5.24 Ache a inversa, se possível, de cada matriz:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}; \qquad (b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad (c)\ C = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}.$$

Para uma matriz 2×2, use a fórmula desenvolvida na Seção 5.9.

(*a*) Primeiramente ache $|A| = 5(2) - 3(4) = 10 - 12 = -2$. Depois, troque a posição dos elementos da diagonal, negativos dos elementos na antidiagonal e multiplique por $1/|A|$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

(*b*) Primeiramente ache $|B| = 2(3) - (-3)(1) = 6 + 3 = 9$. Depois, troque a posição dos elementos da diagonal, negativos dos elementos na antidiagonal e multiplique por $1/|B|$:

$$B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

(*c*) Primeiramente ache $|C| = -2(-9) - 6(3) = 18 - 18 = 0$. Como $|C| = 0$, C não tem inversa.

5.25 Ache a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

Forme a matriz $M = (A, I)$ e reduza M por linhas para a forma escalonada:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Na forma escalonada, a metade esquerda de M está na forma triangular; portanto, A tem inversa. Agora reduza M nhas à forma canônica:

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 11 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 27 & -16 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

A matriz final tem a forma $[I, A^{-1}]$; isto é, A^{-1} é a metade direita da última matriz. Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 27 & -16 & 6 \\ 8 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

5.26 Ache a inversa de $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -6 \end{bmatrix}$.

Forme a matriz $M = [B, I]$ e reduza M por linhas à forma escalonada:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 13 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Na forma escalonada, M tem uma linha zero na sua metade esquerda; isto é, B não é redutível por linhas à forma triangular. Conseqüentemente, B não tem inversa.

5.27 Seja A uma matriz inversível com inversa B. Em outras palavras, $AB = BA = I$. Mostre que a matriz inversa B é única.

Sejam B_1 e B_2 duas inversas da matriz A. Em outras palavras, $AB_1 = B_1A = I$ e $AB_2 = B_2A = I$. Então, $B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$.

5.28 Suponha que A e B são matrizes inversíveis de mesma ordem. Mostre que AB é inversível e que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Temos

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

e

$$(B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

Portanto, $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de AB; isto é, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Matrizes Escalonadas, Redução por Linhas, Eliminação Gaussiana

5.29 Troque a posição das linhas de cada matriz para obter uma matriz escalonada:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 8 \end{bmatrix}; \quad (b)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 7 \end{bmatrix}; \quad (c)\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(*a*) Troque a primeira e a segunda linhas.

(*b*) Leve a linha zero para a parte inferior da matriz.

(*c*) Nenhuma troca de linhas pode levar a uma matriz escalonada.

5.30 Reduza por linhas a matriz seguinte à forma escalonada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Use a_{11} como pivô para obter zeros abaixo de a_{11}; isto é, aplique a operação entre as linhas "Some $-2R_1$ a R_2" e "Some $-3R_1$ a R_3". Isso leva à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Agora use $a_{23} = 4$ como pivô para obter um zero abaixo de a_{23}; isto é, aplique a operação sobre as linhas "So $4R_3$" para obter a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que está na forma escalonada.

5.31 Quais das seguintes matrizes escalonadas estão na forma canônica por linhas?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

A primeira matriz não está na forma canônica por linhas já que, por exemplo, dois dos pivôs não-nulos s não 1. Além disso, há um elemento não-nulo acima dos pivôs não nulos 5 e 7. A segunda e a terceira matrizes es ma canônica por linhas.

5.32 Reduza a seguinte matriz à forma canônica por linhas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Primeiramente reduza A à forma escalonada aplicando as operações "Some $-R_1$ a R_2" e "Some $-2R_1$ a R a operação "Some $-3R_2$ a R_3". Essas operações levam à

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora use a substituição para trás na matriz escalonada para obter a forma canônica por linhas de A. Especificar primeiro lugar multiplique R_3 por $\frac{1}{2}$ para obter o pivô $a_{34} = 1$, então aplique as operações "Some $2R_3$ a R_2" e " a R_1". Essas operações levam a

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Agora multiplique R_2 por $\frac{1}{3}$ tornando o pivô $a_{22} = 1$, e então aplique a operação "Some $2R_2$ a R_1". Obtemos

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{17}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Já que $a_{11} = 1$, a última matriz é a forma canônica por linhas de A, como desejado.

5.33 Resolva o sistema seguinte usando a matriz aumentada M:

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z + \ t &= 3 \\ 2x + 6y - 5z - 3t &= 7 \end{aligned}$$

Reduza a matriz aumentada M à forma escalonada e depois à forma canônica por linhas:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & -5 & -3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Escreva o sistema correspondente à forma canônica por linhas de M, isto é,

$$\begin{aligned} x + 3y \qquad\quad - 9t &= 5 \\ z - 5t &= 1 \end{aligned}$$

As incógnitas x e z, que aparecem mais à esquerda na forma escalonada do sistema, são chamadas *variáveis básicas*, e as incógnitas remanescentes y e t são chamadas *variáveis livres*. Transfira as variáveis livres para o outro lado para obter a solução em função das variáveis livres[†]:

$$\begin{aligned} x &= 5 - 3y + 9t \\ z &= 1 + 5t \end{aligned}$$

A forma *paramétrica* da solução pode ser obtida tomando as variáveis livres como parâmetros, por exemplo, $y = a$ e $t = b$. Esse processo permite concluir

$$x = 5 - 3a + 9t, \qquad y = a, \qquad z = 1 + 5b, \qquad t = b \qquad \text{ou} \qquad u = (5 - 3a + 9t,\ a,\ 1 + 5b,\ b)$$

(que é uma outra forma da solução).

Uma solução particular do sistema pode ser agora obtida pela associação de valores às variáveis livres (ou parâmetros) e resolvendo para as variáveis básicas usando a forma em variáveis livres (ou paramétrica) da solução. Por exemplo, fazendo $y = 2$ e $t = 3$, obtemos $x = 26$ e $z = 16$. Portanto,

$$x = 26, \qquad y = 2, \qquad z = 16, \qquad t = 3 \qquad \text{ou} \qquad u = (26, 2, 16, 3)$$

é uma solução particular do sistema.

5.34 Resolva o sistema seguinte usando a matriz aumentada M:

$$\begin{aligned} x + y - 2z + 4t &= 5 \\ 2x + 2y - 3z + t &= 4 \\ 3x + 3y - 4z - 2t &= 3 \end{aligned}$$

Reduza a matriz aumentada M à forma escalonada e depois à forma canônica por linhas:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -6 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-14} & \cancel{-12} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

(A terceira linha da matriz é excluída, uma vez que é múltipla da segunda e resultará em uma linha nula.)

Escreva o sistema correspondente à forma canônica por linhas de M e então transfira as variáveis livres para o outro lado para obter a solução em função das variáveis livres:

$$\begin{aligned} x + y \qquad - 10t &= -7 \\ z - 7t &= -6 \end{aligned} \qquad \text{e então} \qquad \begin{aligned} x &= -7 - y + 10t \\ z &= -6 + 7t \end{aligned}$$

Aqui, x e z são as variáveis básicas, e y e t são as variáveis livres.

5.35 Resolva o sistema seguinte usando a matriz aumentada M:

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 2 \\ 2x - 3y + 5z &= 3 \\ 3x - 4y + 6z &= 7 \end{aligned}$$

Primeiramente reduza por linhas a matriz aumentada M à forma escalonada:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & -4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

[†] N. de T. No original, *free-variable form*.

Na forma escalonada, a terceira linha corresponde à equação degenerada

$$0x + 0y + 0z = 3$$

Portanto, o sistema não tem solução. (Note que a forma escalonada indica se o sistema tem ou não solução.)

Problemas Variados

5.36 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrizes booleanas. Ache os produtos booleanos AB, BA e A^2.

Ache a matriz produto usual e substitua qualquer escalar não-nulo por 1. Portanto:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.37 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$. (*a*) Ache um vetor coluna não nulo $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tal que $Au = 3u$. (*b*) Descreva todos os ve res que satisfazem o item anterior.

(*a*) Monte primeiramente a equação na forma matricial $Au = 3u$ e depois escreva cada lado como uma única matriz (tores coluna);

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} x + 3y \\ 4x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

Iguale os elementos correspondentes para obter um sistema de equações e reduza o sistema à forma escalonada.

$$\begin{aligned} x + 3y &= 3x \\ 4x - 3y &= 3y \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ 4x - 6y &= 0 \end{aligned} \quad \text{para} \quad \begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad 2x - 3y = 0$$

O sistema se reduz a uma equação linear (não degenerada) com duas incógnitas e, portanto, tem um número inf to de soluções. Para obter uma solução não nula, tome, por exemplo, $y = 2$; então, $x = 3$. Logo, $u = [3, 2]^T$ é u solução não nula, como desejado.

(*b*) Para achar a solução geral, faça $y = a$, onde a é um parâmetro. Substitua $y = a$ em $2x - 3y = 0$ para obter $x = 3$ Logo, $u = [3a/2, a]^T$ representa todas as soluções em questão.

Problemas Complementares

Vetores

5.38 Sejam $u = (1, -2, 4)$, $v = (3, 5, 1)$ e $w = (2, 1, -3)$. Ache: (*a*) $3u - 2v$; (*b*) $4u - v - 3w$; (*c*) $5u + 7v - 2w$.

5.39 Para os vetores no Problema 5.38, ache:

(*a*) $u \cdot v$, $u \cdot w$, $v \cdot w$; (*b*) $\|u\|$, $\|v\|$, $\|w\|$.

5.40 Sejam $u = (2, -1, 0, -3)$, $v = (1, -1, -1, 3)$ e $w = (1, 3, -2, 2)$. Ache: (*a*) $2u - 3v$; (*b*) $5u - 3v - 4w$; (*c*) $-u + 2v - 2w$; (*d*) $u \cdot v$, $u \cdot w$, $v \cdot w$; (*e*) $\|u\|$, $\|v\|$, $\|w\|$.

5.41 Sejam $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$. Ache: (*a*) $5u - 3v$; (*b*) $2u + 4v - 6w$; (*c*) $u \cdot v$, $u \cdot w$, $v \cdot w$;

(*d*) $\|u\|$, $\|v\|$, $\|w\|$.

5.42 Ache x e y, onde: (*a*) $x(2,5)+y(4,-3)=(8,33)$; (*b*) $x(1,4)+y(2,-5)=(7,2)$.

5.43 Ache x, y, z, onde: $x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\5\\-1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}4\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\-3\\16\end{bmatrix}$.

Operações entre Matrizes

Os problemas 5.44 a 5.58 se referem às seguintes matrizes:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&-4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5&0\\-6&7\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1&-3&4\\2&6&-5\end{bmatrix};\quad D=\begin{bmatrix}3&7&-1\\4&-8&9\end{bmatrix}$$

5.44 Ache (*a*) $5A-2B$; (*b*) $C+D$; (*c*) $2C-3D$.

5.45 Ache (*a*) AB; (*b*) BA.

5.46 Ache (*a*) AC; (*b*) AD; (*c*) BC; (*d*) BD.

5.47 Ache (*a*) A^T; (*b*) C^T; (*c*) C^TC; (*d*) CC^T.

5.48 Ache (*a*) $A^2=AA$; (*b*) $B^2=BB$; (*c*) $C^2=CC$.

Os problemas 5.49 a 5.52 se referem às seguintes matrizes:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&3&4\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}4&0&-3\\-1&-2&3\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}2&-3&0&1\\5&-1&-4&2\\-1&0&0&3\end{bmatrix};\quad D=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$$

5.49 Ache (*a*) $A+B$; (*b*) $A+C$; (*c*) $3A-4B$.

5.50 Ache (*a*) AB; (*b*) AC; (*c*) AD.

5.51 Ache (*a*) BC; (*b*) BD; (*c*) CD.

5.52 Ache (*a*) A^T; (*b*) A^TB; (*c*) A^TC.

5.53 Seja $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$. Ache uma matriz 2×3 B com elementos distintos tal que $AB=0$.

Matrizes Quadradas

5.54 Ache a diagonal de cada matriz:

$$(a)\ \begin{bmatrix}2&-7&8\\3&-6&-5\\4&0&-1\end{bmatrix};\quad (b)\ \begin{bmatrix}1&2&-9\\3&1&8\\5&-6&-1\end{bmatrix};\quad (c)\ \begin{bmatrix}3&4&-8\\2&-7&0\end{bmatrix}.$$

5.55 Seja $A=\begin{bmatrix}2&-5\\3&1\end{bmatrix}$. Ache:

(*a*) A^2 e A^3; (*b*) $f(A)$, onde $f(x)=x^3-2x^2-5$; (*c*) $g(A)$, onde $g(x)=x^2-3x+17$.

5.56 Seja $B=\begin{bmatrix}4&-2\\1&-6\end{bmatrix}$. Ache:

(*a*) B^2 e B^3; (*b*) $f(B)$, onde $f(x)=x^2+2x-22$; (*c*) $g(B)$, onde $g(x)=x^2-3x-6$.

5.57 Seja $A=\begin{bmatrix}6&-4\\3&-2\end{bmatrix}$. Ache um vetor coluna não nulo $u=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ tal que $Au=4u$.

Determinantes e Inversas

5.58 Compute o determinante de cada matriz:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix};\quad (b)\ \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix};\quad (c)\ \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};\quad (d)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\quad (e)\ \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

5.59 Compute o determinante de cada matriz:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix};\quad (b)\ \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix};\quad (c)\ \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix};\quad (d)\ \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.60 Ache a inversa de cada matriz (se existir):

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix};\quad C = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix};\quad = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

5.61 Ache a inversa de cada matriz (se existir):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix};\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes Escalonadas, Redução por Linhas, Eliminação Gaussiana

5.62 Reduza A à forma escalonada e, depois, à forma canônica por linhas, onde:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix};\quad (b)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 6 & -5 & 7 \end{bmatrix}.$$

5.63 Usando apenas 0s e 1s, liste todas as possíveis matrizes 2×2 na forma escalonada.

5.64 Usando apenas 0s e 1s, ache o número de possíveis matrizes 3×3 na forma canônica por linhas.

5.65 Resolva cada sistema usando sua matriz aumentada M.

$$(a)\ \begin{aligned} x + 2y - 4z &= -3 \\ 2x + 6y - 5z &= 2 \\ 3x + 11y - 4z &= 12 \end{aligned}\qquad (b)\ \begin{aligned} x + 2y - 4z &= 3 \\ 2x + 6y - 5z &= 10 \\ 3x + 10y - 6z &= 14 \end{aligned}$$

5.66 Resolva cada sistema usando sua matriz aumentada M.

$$(a)\ \begin{aligned} x - 3y + 2z - t &= 2 \\ 3x - 9y + 7z - t &= 7 \\ 2x - 6y + 7z + 4t &= 7 \end{aligned}\qquad (b)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 7 \\ x + 3y + z &= 6 \\ 2x + 6y + 5z &= 15 \\ 3x + 10y + 7z &= 23 \end{aligned}$$

Problemas Variados

5.67 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ache A^n.

5.68 Diz-se que duas matrizes A e B comutam se $AB = BA$. Ache todas as matrizes $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ que comutam com $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.69 Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrizes booleanas.

Ache as matrizes booleanas: (*a*) $A + B$; (*b*) AB; (*c*) BA; (*d*) A^2; (*e*) B^2.

Respostas dos Problemas Complementares

5.38 (*a*) $(-3, -16, 10)$; (*b*) $(-5, -16, 24)$; (*c*) $(22, 23, 33)$.

5.39 (*a*) $-3, -12, 8$; (*b*) $\sqrt{21}, \sqrt{35}, \sqrt{14}$.

5.40 (*a*) $(1, 1, 3, -15)$; (*b*) $(3, -14, 11, -32)$; (*c*) $(-2, -7, 2, 5)$; (*d*) $-6, -7, 6$; (*e*) $\sqrt{14}, \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

5.41 (*a*) $(-1, 12, -35)^T$; (*b*) $(-8, 22, -24)^T$; (*c*) $-15, -27, 34$; (*d*) $\sqrt{26}, \sqrt{30}, 7$.

5.42 (*a*) $x = 2, y = -1$; (*b*) $x = 3, y = 2$.

5.43 $x = 3, y = -1, z = 2$.

5.44 (*a*) $\begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 27 & -34 \end{bmatrix}$; (*b*) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$; (*c*) $= \begin{bmatrix} -7 & -27 & 11 \\ -8 & 36 & -37 \end{bmatrix}$.

5.45 $AB = \begin{bmatrix} -7 & 14 \\ 39 & -28 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & -40 \end{bmatrix}$.

5.46 $AC = \begin{bmatrix} 5 & 9 & -6 \\ -5 & -33 & 32 \end{bmatrix}$; $AD = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 17 \\ -7 & 53 & -39 \end{bmatrix}$; $BC = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 20 \\ 8 & 60 & -59 \end{bmatrix}$; $BD = \begin{bmatrix} 15 & 35 & -5 \\ 10 & -98 & 69 \end{bmatrix}$.

5.47 $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$; $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$; $C^TC = \begin{bmatrix} 5 & 9 & -6 \\ 9 & 45 & -42 \\ -6 & -42 & 41 \end{bmatrix}$; $CC^T = \begin{bmatrix} 26 & -36 \\ -36 & 65 \end{bmatrix}$.

5.48 $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$; $B^2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ -72 & 49 \end{bmatrix}$; C^2 é não definido.

5.49 (*a*) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$; (*b*) não definido; (*c*) $\begin{bmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{bmatrix}$

5.50 AB é não definido; $AC = \begin{bmatrix} -5 & -22 & 4 & 5 \\ 11 & -3 & -12 & 18 \end{bmatrix}$; $AD = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$.

5.51 $BC = \begin{bmatrix} 11 & -12 & 0 & -5 \\ -15 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$; $BD = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$; CD é não definido.

5.52 $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $A^TB = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -7 & -6 & 12 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$; A^Té não definido.

5.53 $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

5.54 (*a*) $[2, -6, -1]$; (*b*) $[1, 1, -1]$; (*c*) não definido.

5.55 $A^2 = \begin{bmatrix} -11 & -15 \\ 9 & -14 \end{bmatrix}$; $A^3 = \begin{bmatrix} -67 & 40 \\ -24 & -59 \end{bmatrix}$; $f(A) = \begin{bmatrix} -50 & 70 \\ -42 & -36 \end{bmatrix}$; $g(A) = 0$.

5.56 $B^2 = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ -2 & 34 \end{bmatrix}$; $B^3 = \begin{bmatrix} 60 & -52 \\ 26 & -200 \end{bmatrix}$; $f(B) = 0$; $g(B) = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -5 & 46 \end{bmatrix}$.

5.57 $u = (2a, a)^T$, para todo a não nulo.

5.58 (*a*) -18; (*b*) -15; (*c*) 8; (*d*) 1; (*e*) 44.

5.59 (*a*) 21; (*b*) -11; (*c*) 100; (*d*) 0.

5.60 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; C^{-1} é não definido; $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$.

5.61 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -16 & -11 & 3 \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; C^{-1} é não definido.

5.62 (*a*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

(*b*) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -11 & 10 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{11} & \frac{15}{11} & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5.63 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5.64 Existem 13.

5.65 (*a*) $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$; (*b*) sem solução.

5.66 (*a*) $x = 3y + 5t$, $y = 1 - 2t$; (*b*) $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$.

5.67 $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5.68 $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

5.69 $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$