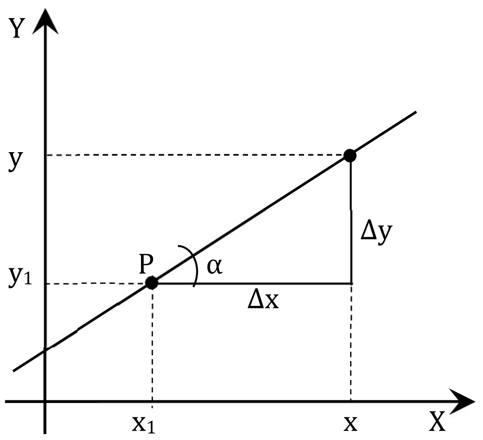
Conceito de Derivada de uma Função

- Considerações Iniciais

A noção de Derivada de uma Função está intuitivamente ligada à ideia da **inclinação da reta tangente a um ponto do gráfico da função** considerada. Assim sendo, os próximos tópicos irão construir essa noção passo a passo.

- A Equação de uma Reta

É possível, pela Geometria Analítica, associar uma dada RETA no Plano Cartesiano a uma EQUAÇÃO algébrica, a partir de um dado ponto $P(x_1, y_1)$ dessa reta e de sua INCLINAÇÃO. Dessa forma, define-se a inclinação "m" de uma reta como segue:



$$\boxed{m = tg\ \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Ou, conhecido o valor de "**m**", temos:

$$\boxed{m = \frac{y - y_1}{x - x_1}}$$

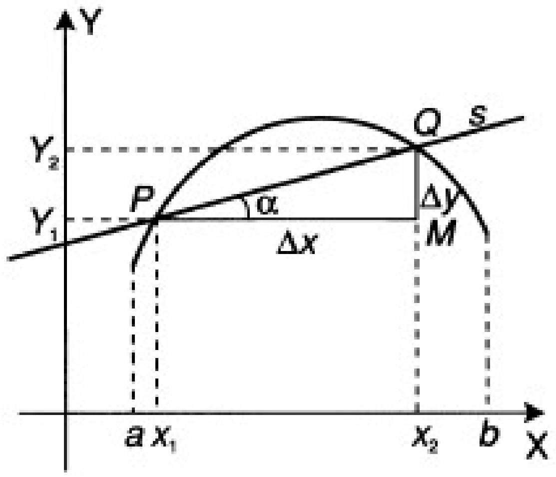
Por outro lado, conhecido o valor da inclinação "**m**", define-se a **Equação da Reta** como:

$$\boxed{y - y_1 = m \cdot (x - x_1)}$$

- Inclinação da Reta Tangente a uma Curva

Iremos definir agora a INCLINAÇÃO da Reta Tangente a uma curva ***y = f(x)*** em um certo ponto de seu Domínio para, em seguida, determinar a equação dessa reta.

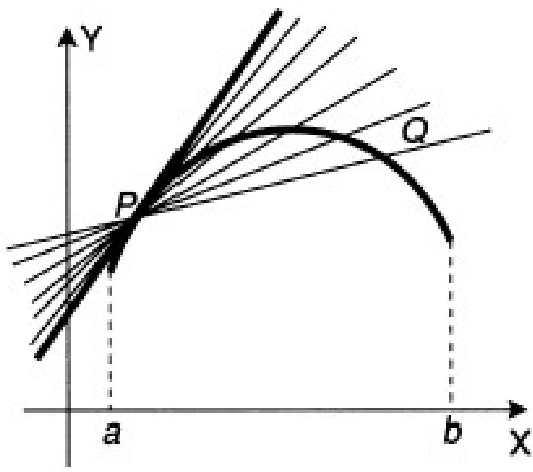
- Seja *y = f(x)* a curva gerada por uma função real definida em um intervalo [a , b] e sejam $P(x_1 , y_1)$ e $Q(x_2 , y_2)$ dois pontos distintos dessa curva.



A inclinação da reta SECANTE "s" aos pontos P e Q é dada por:

$$\mathbf{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Porém, fazendo-se o ponto Q se aproximar indefinidamente de P, faremos com que a inclinação da reta SECANTE à curva se aproxime cada vez mais do valor da inclinação da reta TANGENTE à P, como pode ser observado na figura ao lado.



Com esse raciocínio, é possível determinar a inclinação da reta TANGENTE à P, denotada por $\mathbf{m(x_1)}$, como segue:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad ; \quad \text{quando esse limite existe.}$$

Além disso, lembrando que estamos tratando com a curva gerada por uma função real, podemos escrever y como f(x). E, fazendo-se $\boldsymbol{x_2 = x_1 + \Delta x}$, temos:

$$m(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{(x_1 + \Delta x) \to x_1} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{(x_! + \Delta x) - x_1}$$

O que nos leva a expressão:

$$\boldsymbol{m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}}$$

Que define a ***Inclinação da Reta Tangente a uma curva y = f(x) em um certo ponto de seu Domínio***.

- Equação da Reta Tangente a uma Curva

Se a função *f(x)* é **contínua** em x_1, então a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto "**P**" de coordenadas $(x_1 , f(x_1))$ será dada:

- pela reta que passa pelo ponto P com a inclinação $\mathbf{m(x_1)}$ definida acima, formando a equação $\mathbf{y - f(x_1) = m(x_1) \cdot (x - x_1)}$.
- pela reta $\mathbf{x = x_1}$ se o limite que define $\mathbf{m(x_1)}$ for infinito.

Exemplos :

a) Encontre a **inclinação** da reta tangente à curva $\mathbf{y = 2x^2 - 5}$ no ponto (x_1 , y_1):

- No ponto (x_1 , y_1), temos $\mathbf{f(x_1) = 2x_1^2 - 5}$;
- A inclinação será dada por :

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[\,2(x_1 + \Delta x)^2 - 5] - (2{x_1}^2 - 5)}{\Delta x}$$

$$\cdots \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m(x_1) = 4x_1}$$

(desenvolver a resolução)

---

b) Determine a **equação da reta** tangente à curva $\mathbf{y = x^2 - 3x}$ no ponto de abscissa $\mathbf{x_1 = 2}$ e construa os gráficos da função e da reta tangente:

- O ponto procurado é (2 , f(2)) , portanto, **(2 , –2)** ;
- A inclinação será dada por :

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[\,(x_1 + \Delta x)^2 - 3(x_1 + \Delta x)] - ({x_1}^2 - 3x_1)}{\Delta x}$$

$$\cdots \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m(x_1) = 2x_1 - 3}$$

E, como $m(x_1) = 2x_1 - 3$, temos que $m(2) = 2 \cdot 2 - 3 \;\Rightarrow\; m(2) = 1$

- Assim, a Equação da Reta tangente será:

$$y - f(x_1) = m(x_1) \cdot (x - x_1) \;\Rightarrow\; y - f(2) = m(2) \cdot (x - 2) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y = x - 4}$$

(desenvolver a resolução)

1) Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico das funções abaixo em um ponto arbitrário (x_1, y_1):

a) $f(x) = -x^2 + 2$

b) $f(x) = -2x + 3$

c) $f(x) = x^3 + 1$

d) $f(x) = x^3 - x$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = -\frac{2}{x}$

2) Encontre a ***equação*** da reta tangente ao gráfico das funções abaixo nos pontos dados e construa os gráficos da função e da reta tangente:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x \quad em \quad x_1 = 1$

b) $f(x) = -x^2 + 4 \quad nos\ pontos \quad P(1, 3) \quad e \quad Q(0, 4)$

Definições da Derivada de uma Função

- A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO

A *Derivada* de uma função *f(x)* no ponto $\boldsymbol{x_1}$, denotada por $\boldsymbol{f'(x_1)}$, (lê-se: f linha de *x*, no ponto $\boldsymbol{x_1}$), é definida pelo seguinte limite:

$$\boldsymbol{f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}}$$

, quando esse limite existe.

Ou seja, como vimos anteriormente, esse limite é o mesmo que nos dá a inclinação da reta tangente à curva *y = f(x)* no ponto (x_1). Portanto, geometricamente, a derivada de uma função *y = f(x)* num ponto x_1 irá representar exatamente essa inclinação.

- Definição de Derivada de uma Função

A *Derivada* de uma função *y = f(x)* é uma outra função, denotada por $\boldsymbol{f'(x)}$, (lê-se: f linha de *x*), tal que seu valor para qualquer $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D(f)}$ é dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}}$$, se esse limite existir.

É importante destacar que, apesar da grande semelhança das expressões acima, sua interpretação é muito diferente, pois a *derivada de uma função num ponto* é um número real, enquanto a *função derivada* (como o nome sugere) é uma função.

Observações:

- Dizemos que uma função é *derivável* quando existe a derivada em todos os pontos de seu Domínio.

- Diferentes notações podem ser utilizadas para indicar a função derivada:

· $\boldsymbol{y' = f'(x)}$ que é a notação mais comum.

· $\boldsymbol{D_x f(x)}$

· $\boldsymbol{D_x y}$

· $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$

lê-se: derivada de *f(x)* (ou de "*y*") em relação à variável "*x*".

Exercícios Propostos

3) Calcule a derivada das funções abaixo, utilizando a definição por limites:

$a)\ \ f(x) = x + 5$

$b)\ \ f(x) = -2x + 1$

$c)\ \ f(x) = \frac{x}{3} - 4$

$d)\ \ f(x) = x^2 - 5x + 3$

$e)\ \ f(x) = \sqrt{2x - 1}$

$f)\ \ f(x) = \frac{3}{x + 1}$

Propriedades Operatórias da Função Derivada

- Considerações Iniciais

Ao longo do tempo, o cálculo da Derivada de uma Função, pela sua definição por limites, mostrou diversas similaridades em seus resultados e, com o surgimento desses padrões, rapidamente foram demonstradas matematicamente diversas fórmulas gerais com o intuito de tornar o cálculo das derivadas mais rápido e fácil. Essas fórmulas são chamadas de Propriedades Operatórias.

- Propriedades Operatórias da Função Derivada

Sejam $\boldsymbol{f(x)}$ e $\boldsymbol{g(x)}$ duas funções deriváveis e seja $\boldsymbol{k}$ uma constante ($k \in$ IR). Então são válidas as seguintes propriedades operatórias:

P1) Derivada de uma constante vezes uma função

$$\boxed{[\boldsymbol{k} \,.\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]' = \boldsymbol{k} . \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})}$$

P2) Derivada da soma (ou subtração) de funções

$$\boxed{[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \pm \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \pm \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})}$$

P3) Derivada do produto de funções

$$\boxed{[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \,.\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \,.\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \,.\, \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})}$$

P4) Derivada do quociente de funções

$$\boxed{\left[\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}\right]' = \frac{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \,.\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \,.\, \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))^2}}$$

- Em particular, para $C \in$ IR , temos:

$a)\ \ para \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \qquad (função\ CONSTANTE)$

$b)\ \ para \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{1} \qquad (função\ IDENTIDADE)$

$c)\ \ para \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}} \qquad (para\ n\ \in\ IR)$

Exemplos : Calcule a derivada das funções abaixo, utilizando as propriedades:

$a)\ \ f(x) = x + 5\ ,\qquad ou\ seja,\ \ [x+5]'$

$b)\ [-2x+1]' =$

$c)\ \left[\frac{x}{3} - 4\right]' =$

$d)\ [x^2 - 5x + 3]' =$

$e)\ \left[\frac{3}{2x^4}\right]' =$

$f)\ \left[\sqrt[5]{x^3}\right]' =$

$g)\ \left[\frac{2x-3}{x^3+4x}\right]' =$

(desenvolver a resolução)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4) Calcule a derivada das funções abaixo, utilizando as propriedades operatórias da função derivada:

$a)\ \ [x^3 - 7x + 5]'$

$b)\ \left[\frac{2x^3}{3}\right]'$

$c)\ \left[-\frac{4x}{5}\right]'$

$d)\ \left[-3x^2 + \frac{7x}{4} - 2\right]'$

$e)\ \left[\frac{1}{x^7}\right]'$

$f)\ \left[\frac{4}{5x}\right]'$

$g)\ \left[-\frac{3}{2x^6}\right]'$

$\mathrm{h})\ [3.\sqrt{x}]'$

$i)\ [\sqrt{3}\ .\ x]'$

$j)\ [\sqrt{3x}]'$

$l)\ [\sqrt{5}]'$

$m)\ \left[\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\right]'$

$n)\ \left[-\frac{4}{3\sqrt{x}}\right]'$

$o)\ \left[\frac{x^2+1}{1-x^2}\right]'$

$p)\ \ [(3x^5 - 1).(2 - x^4)]'$

$q)\ \left[\frac{2x^4 - 5x}{x^3+3}\right]'$

$r)\ \left[\frac{2x^4}{3 - x^2}\right]'$

$\mathrm{s})\ [x^3.\sqrt{x}]'$

$t)\ \ [(\sqrt{x} - 1).(\sqrt{x} + 1)]'$

$u)\ \left[\frac{\sqrt[4]{x^5}}{x^2}\right]'$

$v)\ \ \left[\left(x^2 - \frac{1}{x}\right).(3x^4 + 2)\right]'$