Cálculo do Limite de uma Função

- Propriedades Operatórias sobre Limites

Sejam ***f(x)*** e ***g(x)*** duas funções. Se existirem ambos os limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, então são válidas as seguintes propriedades operatórias para Limites de funções:

P1) Limite da soma (ou subtração) de funções

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

P2) Limite do produto de funções

$$\lim_{x\to a}[f(x)\,.\,g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\,.\,\lim_{x\to a} g(x)$$

P3) Limite do quociente de funções

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \qquad \left(desde\ que\quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$$

- Em particular, para $k \in$ IR e $C \in$ IR , temos:

a) $\lim\limits_{x\to a}[k.f(x)] = k.\lim\limits_{x\to a} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to a} C = C$, $onde\ f(x) = C$ é a $função\ CONSTANTE$

c) $\lim\limits_{x\to a} x = a$, $onde\ f(x) = x$ é a $função\ IDENTIDADE$

Exemplos : Calcule o Limite das funções abaixo, utilizando as propriedades:

$a)\ \lim_{x\to -1} (x+3)$

$b)\ \lim_{x\to 6} \left(\frac{x}{3}-1\right)$

$c)\ \lim_{x\to 2} (x^2-3x+4)$

$d)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$

- ALGUMAS REGRAS DE PRODUTOS NOTÁVEIS

Para a resolução dos exercícios de Limites envolvendo expressões indeterminadas, precisaremos utilizar artifícios para eliminar a indeterminação. Tais artifícios podem ser obtidos a partir das regras de Produtos Notáveis, das quais são apresentadas algumas a seguir:

$$\boldsymbol{x.(a \pm b) = a.x \pm b.x} \qquad (Propr.\ Distributiva)$$

$$\boldsymbol{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2.a.b + b^2} \qquad (Binômio\ ao\ Quadrado)$$

$$\boldsymbol{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3.a^2.b + 3.a.b^2 \pm b^3} \qquad (Binômio\ ao\ Cubo)$$

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)} \qquad (Diferença\ de\ Quadrados)$$

$$\boldsymbol{a.x^2 + b.x + c = a.\left(x - x'\right).\left(x - x''\right)} \qquad (Fat.\ da\ equação\ do\ 2o.\ Grau)$$

$(onde\ \ x'\ e\ \ x''\ são\ as\ raízes\ da\ equação)$

1) Calcule o valor do Limite das funções abaixo:

$a)\ \lim\limits_{x\to -2} (x^3 - 3x^2 + 5x - 3)$

$b)\ \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2}{x^2+1}$

$c)\ \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x+4}{x^2-16}$

$d)\ \lim\limits_{x\to 3} \sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$

$e)\ \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x+2}{x^2-1}$

$f)\ \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}$

$g)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

$h)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

$i)\ \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2+5x+4}{2x^2+6x-8}$

$j)\ \lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{4x^2-1}{2x^2+x-1}$

$k)\ \lim\limits_{x\to {}^1/_3} \dfrac{3x-1}{3x^2-x}$

$l)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-4x^2}{x^3+4x^2}$

$m)\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^2-2ax+x^2}{x^2-a^2}$

$n)\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

$o)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

$p)\ \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-9}$

$q)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

$r)\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-t}}{t}$

$s)\ \lim\limits_{x\to 6} \dfrac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-12}$

$t)\ \lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

$u)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^3-8}{x}$

$v)\ \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\frac{x}{3}+1}{x+3}$

$x)\ \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{x^2-1}$

$y)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{6}{x}-3}{x-2}$

$w)\ \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-x}{x^2-2x-3}$

$z)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2}$

Limites no Infinito

- Considerações Iniciais

Um dos principais objetivos do **Cálculo Diferencial e Integral**, senão o maior deles, é o estudo do comportamento das **Funções Reais**. De fato, se pudéssemos resumir a importância do Cálculo em poucas palavras, diríamos que se trata de uma disciplina que desenvolveu todo um conjunto de ferramentas matemáticas para analisar o comportamento dessas funções, ou seja, para descobrir, ao se variar o valor de “x”, o que ocorre com o valor de “y”.

Nesse sentido, o estudo dos limites no infinito fornece um fragmento de informação importante a respeito desse comportamento ao fazer o valor na variável “x” aumentar indefinidamente, tanto para valores positivos ($x \to +\infty$), quanto para valores negativos ($x \to -\infty$).

Indicamos esses limites da seguinte forma:

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x)} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x)}$$

Exemplos : Calcular o valor dos limites no infinito das funções abaixo.

(Obs: Note que, quando o exercício pede **limites** no infinito, o plural se refere aos dois limites, quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$)

a) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)$ (Resolveremos esse exemplo por substituição direta)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{-\infty} = 0$$

---

b) $f(x) = -2x^4$ (Também resolveremos esse exemplo por substituição direta)

$$\lim_{x\to +\infty} (-2x^4) = (-2).(+\infty)^4 = (-2).(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} (-2x^4) = (-2).(-\infty)^4 = (-2).(+\infty) = -\infty$$

---

c) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x + 15$

(Oops, esse exemplo não poderá ser resolvido por substituição direta, necessitando de resolução detalhada)

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Exercício (1)

$a)\ -33$	$b)\ {}^{1}\!/_{5}$	$c)\ -{}^{1}\!/_{8}$	$d)\ \sqrt{6}$
$e)\ -1$	$f)\ {}^{3}\!/_{4}$	$g)\ 5$	$h)\ -3$
$i)\ {}^{3}\!/_{10}$	$j)\ {}^{4}\!/_{3}$	$k)\ 3$	$l)\ -1$
$m)\ 0$	$n)\ {}^{1}\!/_{2\sqrt{a}}$	$o)\ {}^{1}\!/_{2\sqrt{2}}$	$p)\ {}^{1}\!/_{8}$
$q)\ {}^{2}\!/_{3}$	$r)\ {}^{1}\!/_{4}$	$s)\ 0$	$t)\ -{}^{1}\!/_{56}$
$u)\ 12$	$v)\ {}^{1}\!/_{3}$	$x)\ {}^{1}\!/_{2}$	$y)\ -{}^{3}\!/_{2}$
$w)\ -{}^{1}\!/_{2}$	$z)\ {}^{1}\!/_{4}$		