

Resumen Cálculo Numérico

basado en el resumen de Fernando Nellmédin

Cristian Escudero

September 19, 2012

1 Métodos Directos

1.1 Eliminación de Gauss

Los elementos de la matriz $A^{(k+1)}$ se calculan:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & \text{si } i \leq k, \\ a_{ij}^{(k)} - \left(\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \right) & \text{si } i \geq k+1, \text{ y } j \geq k+1, \\ 0 & \text{si } i \geq k+1, \text{ y } j \leq k. \end{cases}$$

Si tenemos **pivoteo parcial**, trabajamos con el **vector de permutación**:

```
1 # Se resuelve en n - 1 pasos
2 for i = 1 : n - 1
3     if (parcial)
4         # Ponemos la fila con maximo valor
5         [tr, p] = max(abs(Ab(idx(i:n), i)));
6         p = p + i - 1;
7
8         if (idx(i) != idx(p))
9             temp = idx(p);
10            idx(p) = idx(i);
11            idx(i) = temp;
12        end
13    end
14    # ... sigue el metodo...
15 end
```

Y trabajamos usando el `idx(i)` en vez de `i` para los subíndices.

Nota: Si encontramos una columna de ceros, el método no determina una solución **única**.

1.2 Factorización LU

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} = LU$$

Ejemplo 3x3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = LU$$
$$= \begin{bmatrix} l_{11} u_{11} & l_{11} u_{12} & l_{11} u_{13} \\ l_{21} u_{11} & l_{21} u_{12} + l_{22} u_{22} & l_{21} u_{13} + l_{22} u_{23} \\ l_{31} u_{11} & l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22} & l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + l_{33} u_{33} \end{bmatrix}$$

1.2.1 Factorización de Cholesky

Nota: En a_{ij}^{upper} : $\min(i, j) - 1 = i - 1$; y en a_{ij}^{lower} : $\min(i, j) - 1 = j - 1$.

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} u_{kj}, \\
 a_{ij}^{upper} &= \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} + l_{ii} u_{ij} & \Rightarrow u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right] \\
 a_{ij}^{lower} &= \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} + u_{jj} l_{ij} & \Rightarrow l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Factorización de Doolittle } (l_{ii} = 1) & \quad u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \\
 \text{Factorización de Crout } (u_{ii} = 1) & \quad l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}
 \end{aligned}$$

2 Métodos Iterativos

Quiero llevar el SEAL a una forma iterativa ($\mathbf{x} = T\mathbf{x} + C$) para poder resolverla:

$$\begin{aligned}
 A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
 A &= D - L - U \\
 (D - L - U)\mathbf{x} &= \mathbf{b}
 \end{aligned}$$

Jacobi:

$$\begin{aligned}
 D\mathbf{x} - (L + U)\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
 D\mathbf{x} &= (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b} \\
 \mathbf{x} &= D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b} \\
 \mathbf{x} &= T\mathbf{x} + C
 \end{aligned}$$

Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned}
 (D - L)\mathbf{x} - U\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
 (D - L)\mathbf{x} &= U\mathbf{x} + \mathbf{b} \\
 \mathbf{x} &= (D - L)^{-1}U\mathbf{x} + (D - L)^{-1}\mathbf{b} \\
 \mathbf{x} &= T\mathbf{x} + C
 \end{aligned}$$

SOR:

$$\begin{aligned}
 (D - wL)\mathbf{x} &= [(1 - w)D + wU]\mathbf{x} + w\mathbf{b} \\
 \mathbf{x} &= (D - wL)^{-1}[(1 - w)D + wU]\mathbf{x} + (D - wL)^{-1}w\mathbf{b} \\
 \mathbf{x} &= T\mathbf{x} + C
 \end{aligned}$$

Nociones básicas de convergencia:

- Si $\|T\| < 1 \quad \forall \|\cdot\| \Rightarrow$ convergen todos.
- Si A es e.d.d \Rightarrow converge Jacobi y Gauss-Seidel.
- Si A es d.p & $0 < w < 2 \Rightarrow$ SOR converge.
- $\rho(T) < 1 \iff T\mathbf{x} + C$ converge.

2.1 Jacobi

Despejamos x_i del SEAL:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1 & \Rightarrow & & x_1 &= \frac{1}{a_{11}} [b_1 - (a_{12} x_2 + a_{13} x_3)] \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= b_2 & \Rightarrow & & x_2 &= \frac{1}{a_{22}} [b_2 - (a_{21} x_1 + a_{23} x_3)] \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= b_3 & \Rightarrow & & x_3 &= \frac{1}{a_{33}} [b_3 - (a_{31} x_1 + a_{32} x_2)] \end{aligned}$$

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

2.2 Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

2.3 SOR (Successive Over-Relaxation)

$$x_i^{(k)} = (1 - w) x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

2.4 Gradiente Conjugado

Elige las direcciones de búsqueda ($\mathbf{v}^{(k)}$) durante el proceso iterativo de modo que los $\mathbf{r}^{(k)}$ sean mutuamente ortogonales.

1. Partimos de un $\mathbf{x}^{(0)}$ y usamos la **dirección de máximo descenso** $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$ como $\mathbf{v}^{(1)}$.
2. Calculamos el paso de avance t en la dirección \mathbf{v} y la solución aproximada $\mathbf{x}^{(k)}$ (iniciamos con $k = 1$):

$$t = \frac{\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle}, \quad \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k \mathbf{v}^{(k)}.$$

3. Si $\mathbf{x}^{(k)}$ es la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ terminamos. Sino calculamos: $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - t_k A\mathbf{v}^{(k)}$, actualizamos el vector de búsqueda:

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} + s_k \mathbf{v}^{(k)}, \quad s_k = \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle},$$

y volvemos al paso 2.