GUÍA PARA LA PREPARACIÓN DE LA PRUEBA DE DIAGNÓSTICO EN MATEMÁTICAS

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

Departamento de Matemáticas

Segundo semestre de 2009

1. Presentación

La Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, dentro de los procesos de admisión a los diferentes programas que ofrece, tiene en cuenta los resultados en el examen del ICFES. De acuerdo a éstos, en el área de Matemáticas el estudiante debe cursar las asignaturas de Fundamentos de Matemáticas, ó Precálculo y Análisis Geométrico, ó Cálculo Diferencial y Álgebra Lineal.

Paralelamente a este proceso, y con el fin de mejorar la calidad de la Educación y facilitar los procesos de inserción y permanencia en la institución, se ha diseñado desde el Departamento de Matemáticas una prueba de conocimientos en esta área para detectar las fortalezas y debilidades de los estudiantes.

Así, el estudiante que considere que de acuerdo a sus capacidades y conocimientos está en posibilidad de cursar las materias del nivel siguiente, puede pedir que los resultados de la prueba de conocimientos de la Escuela sean considerados para su promoción a los cursos inmediatamente posteriores. Igualmente si el estudiante estima que no se encuentra preparado para abordar las materias en las que ha sido ubicado, puede solicitar cursar las asignaturas anteriores.

En cuanto a la presentación del examen es importante aclarar que se realiza en línea, desde cualquier lugar, en la semana de inducción, para lo cual se disponen horarios en los que se habilita la plataforma. Por las condiciones en las que se presenta la prueba, se hace un llamado a los estudiantes para que sean responsables al momento de su presentación, y así queden ubicados en los cursos que les corresponda de acuerdo a su preparación.

Con el fin de orientar la preparación para la prueba, el Departamento de Matemáticas ha diseñado el presente material, en éste encuentra: los temas a evaluar, ejemplos de preguntas y un modelo de cuestionario. Adicionalmente, en la página de Internet

http://copernico.escuelaing.edu.co/ceciba/dep_matematicas

puede encontrar los programas de las asignaturas.

2. Temas a evaluar

En esta sección se presentan los listados de estándares[1] correspondientes a los temas de álgebra y trigonometría, funciones y geometría que se evalúan en la prueba de matemáticas. El propósito es que los lea cuidadosamente y establezca cuáles son de su dominio y cuáles no, para que se prepare en forma adecuada y obtenga buenos resultados.

2.1. Álgebra y trigonometría

Esta área trata sobre la definición de los sistemas numéricos, sus relaciones, operaciones y formas de representarlos, las propiedades de los números reales, el reconocimiento de patrones, razones

[1] Un estándar establece lo qué es importante que conozcan los estudiantes, qué es lo que se espera de ellos y qué es lo que deben ser capaces de hacer para demostrar que han logrado el aprendizaje.

y proporciones, la representación de las matemáticas mediante símbolos algebraicos y gráficos, el manejo de expresiones algebraicas y trigonométricas, la solución de ecuaciones e inecuaciones y la aplicación de todos estos conceptos en el planteamiento, modelación y solución de problemas.

2.1.1. Listado de estándares

- Identifica y diferencia los sistemas numéricos (naturales, enteros, racionales, reales y complejos).
- Realiza operaciones aritméticas con números enteros, racionales y reales.
- Entiende el concepto de proporción, regla de tres simple, inversa y compuesta y lo aplica para resolver problemas.
- Realiza operaciones con potencias, radicales y logaritmos con números reales.
- Encuentra patrones de comportamiento en una sucesión básica y los comprueba.
- Distingue las diferentes clases de expresiones algebraicas y realiza operaciones con ellas.
- Reconoce un polinomio, sus partes y realiza operaciones con ellos.
- Factoriza polinomios.
- Resuelve ecuaciones y desigualdades de primer y segundo orden.
- Traduce problemas del lenguaje común al algebraico y los resuelve.
- Reconoce los números complejos y realiza operaciones con ellos.
- Utiliza las relaciones trigonométricas de triángulos para la solución de problemas.
- Reconoce las identidades trigonométricas fundamentales y deduce otras a partir de ellas.
- Resuelve ecuaciones trigonométricas.

2.2. Funciones

En esta área se estudian las funciones de variable real y valor real, lo que posibilita la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos. Se consideran principalmente las funciones básicas tales como las polinómicas, racionales, trigonométricas y sus inversas, exponenciales y logarítmicas desde sus diferentes formas de representación.

2.2.1. Listado de estándares

- Identifica funciones a partir de las representaciones algebraica, gráfica, tabular o verbal.
- Transforma la representación de una función dada en otra representación.
- Determina el dominio y el rango de una función dada.

- Determina la imagen o preimagenes de un valor, incluyendo interceptos con los ejes.
- Reconoce gráficamente las principales características de las funciones.
- Determina la ecuación de la inversa de una función.
- Reconoce gráficamente la inversa de una función.
- Resuelve inecuaciones del tipo $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$ y $f(x) \leq 0$.
- Efectúa operaciones entre funciones: suma, resta, producto, cociente y composición.
- Reconoce las características de las funciones básicas: lineales, cuadráticas, valor absoluto, parte entera, polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas.
- Aplica propiedades de las funciones logarítmicas y exponenciales.
- Reconoce y efectúa transformaciones de funciones: traslaciones, reflexiones, dilataciones y contracciones.
- Aplica las nociones asociadas al concepto de función al planteamiento, modelación y solución de problemas.

2.3. Geometría

Esta área trata sobre el estudio y análisis de las propiedades de los espacios y los objetos geométricos en dos y tres dimensiones, la geometría en coordenadas, el cálculo de áreas y volúmenes, el estudio de las curvas cónicas y la aplicación de todos estos conceptos al planteamiento, modelación y solución de problemas.

2.3.1. Listado de estándares

- Identifica los elementos geométricos básicos: punto, recta, plano y espacio.
- Reconoce y distingue los diferentes tipos de ángulos, triángulos, cuadriláteros y polígonos en general.
- Identifica los elementos fundamentales de los triángulos y sus propiedades.
- Identifica los elementos fundamentales de los círculos y sus propiedades.
- Conoce y aplica los teoremas de Pitágoras y de Thales.
- Realiza construcciones básicas con regla y compás.
- Entiende y aplica los conceptos de congruencia y semejanza de triángulos y de polígonos en general.

- Reconoce e identifica las propiedades de los prismas, las pirámides, los cilindros, los conos y las esferas.
- Aplica los conceptos de área y volumen en la solución de problemas.
- Encuentra algunos lugares geométricos básicos.
- Reconoce los objetos geométricos básicos desde sus ecuaciones en el plano cartesiano, principalmente rectas, segmentos y cónicas.
- Identifica las curvas cónicas, sus elementos y sus ecuaciones en forma estándar.

3. Ejemplo de prueba

En esta sección se presenta un ejemplo de la prueba de clasificación en matemáticas. Las preguntas de la prueba son de selección múltiple con única respuesta. Al final de esta prueba se encuentran las respuestas correctas. Vale la pena señalar que todas las opciones de respuesta en cada pregunta son diseñadas cuidadosamente y no se colocan al azar, lo que puede verificar en algunas de las respuestas comentadas al final de esta sección.

3.1. Cuestionario de Álgebra

En esta tabla puede marcar las opciones que considere correctas, para que luego verifique y reflexione sobre sus respuestas.

1	a	b	c	d	**8**	a	b	c	d	**15**	a	b	c	d	**22**	a	b	c	d
2	a	b	c	d	**9**	a	b	c	d	**16**	a	b	c	d	**23**	a	b	c	d
3	a	b	c	d	**10**	a	b	c	d	**17**	a	b	c	d	**24**	a	b	c	d
4	a	b	c	d	**11**	a	b	c	d	**18**	a	b	c	d	**25**	a	b	c	d
5	a	b	c	d	**12**	a	b	c	d	**19**	a	b	c	d	**26**	a	b	c	d
6	a	b	c	d	**13**	a	b	c	d	**20**	a	b	c	d	**27**	a	b	c	d
7	a	b	c	d	**14**	a	b	c	d	**21**	a	b	c	d	**28**	a	b	c	d

1. El conjunto

$$A = \left\{ -0{,}05;\ \ -\frac{1}{3};\ \ \sqrt[5]{-32};\ \ 2{,}3\overline{15};\ \ 113{,}2 \right\}$$

es un subconjunto de los números:

a) Irracionales

b) Imaginarios

c) Enteros

d) Racionales

2. De las siguientes igualdades, la verdadera es:

a) $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt{x^3}$

b) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

c) $\dfrac{1}{x^{-n}} = -x^n$

d) $x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3. Al simplificar la expresión $\dfrac{abc+ac}{bc}$, con $bc \neq 0$ se obtiene:

   a) $a + ac$
   b) $\dfrac{abc+a}{b}$
   c) $a + \dfrac{a}{b}$
   d) $\dfrac{b+2ac}{bc}$

4. Al simplificar la expresión $\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1}$ se obtiene:

   a) $\dfrac{x+1}{2x+1}$
   b) $\dfrac{x+4}{x+1}$
   c) $\dfrac{x+4}{2x+1}$
   d) $\dfrac{x-4}{2x-1}$

5. Al simplificar la expresión $\dfrac{4^{-2}+4^{-1}}{4^2}$ se obtiene:

   a) $\dfrac{5}{256}$
   b) $\dfrac{10}{256}$
   c) 4^{-5}
   d) 5

6. Al simplificar la expresión

$$\frac{5}{6(x^2-1)} + \frac{2}{9(x-1)^2}$$

   se obtiene:

   a) $\dfrac{19}{18(x-1)^2}$
   b) $\dfrac{57}{54(x^2-1)}$
   c) $\dfrac{7}{54(x^2-1)(x-1)^2}$
   d) $\dfrac{19x-11}{18(x+1)(x-1)^2}$

7. Al simplificar la expresión $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$, con $x \neq 0$, $h \neq 0$ y $x+h \neq 0$, se obtiene:

   a) 1
   b) $\dfrac{1}{h^2}$
   c) $\dfrac{1}{x(x+h)}$
   d) $\dfrac{-1}{x(x+h)}$

8. Cuando se racionaliza el denominador de la expresión $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, se obtiene:

   a) $\dfrac{(1+\sqrt{x})^2}{1-x}$
   b) 1
   c) $\dfrac{1-x}{(1-\sqrt{x})^2}$
   d) $1+2\sqrt{x}$

9. La ecuación

$$-3(x+2)+1 = -x+2(-3-x)+4$$

   tiene como conjunto solución:

   a) $\left\{-\frac{7}{6}\right\}$
   b) $\mathbb{R}$
   c) $\{0\}$
   d) ϕ

10. La solución de la desigualdad $|-x+1| \leq 1$ es:

   a) $x \leq 2$
   b) $0 \leq x \leq 2$
   c) $x \leq 0$ ó $x \geq 2$
   d) $x \leq 0$

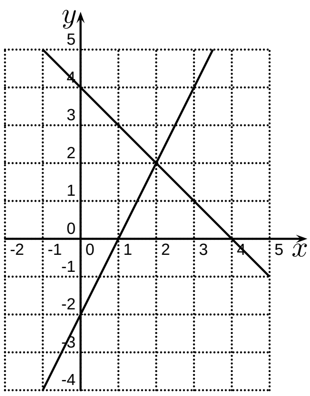
11. La solución de la ecuación $(x-3)(x+5) = -7$ es:

   a) $x = 4$, $x = -12$
   b) $x = -4$, $x = 2$
   c) $x = -4$, $x = -12$
   d) $x = 10$, $x = 2$

12. El conjunto solución de la inecuación $\dfrac{1}{x+2} > 3$ es:

    a) $(-2, -\frac{5}{3})$
    b) $(-\infty, -\frac{5}{3})$
    c) $(-\infty, -2) \cup (-\frac{5}{3}, \infty)$
    d) $(-\frac{7}{3}, -2)$

13. En la siguiente figura se presenta la gráfica cartesiana de un par de rectas,



    El sistema de ecuaciones representado en la gráfica es:

    a) $\begin{cases} x - y &= 0 \\ 3x - y &= 4 \end{cases}$
    b) $\begin{cases} 2x + y &= 6 \\ x - 4y &= -6 \end{cases}$
    c) $\begin{cases} x + y &= 4 \\ 2x - y &= 2 \end{cases}$
    d) $\begin{cases} x - y &= 0 \\ x - y &= 4 \end{cases}$

14. La solución de la ecuación $27^{x-1} = 9^{2x-3}$ es:

    a) $x = 2$
    b) $x = 3$
    c) $x = 6$
    d) $x = 0$

15. Dada la ecuación $\ln(x^2 + x + 1) = 0$ se puede afirmar que:

    a) No existe solución.
    b) $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $x = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ son soluciones.
    c) $x = 0$ es la única solución.
    d) $x = 0$, $x = -1$ son soluciones.

16. El resultado de multiplicar los números complejos $(5 - 3i)$ y $(1 + i)$, es:

    a) $6 - 2i$
    b) $2 + 2i$
    c) 8
    d) $8 + 2i$

17. El conjunto solución de la ecuación $\sqrt{2 - x^2} + x = 0$ es:

    a) ϕ
    b) $\{1\}$
    c) $\{-1\}$
    d) $\{-1, 1\}$

18. De las siguientes expresiones

    i) $\cos 2\alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha$
    ii) $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha$
    iii) $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

    Se puede decir que:

    a) Sólo i es una identidad.
    b) Sólo i y ii son identidades.
    c) Sólo ii y iii son identidades.
    d) i, ii y iii son identidades.

19. La ecuación $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ tiene como soluciones, en el intervalo $(0, \pi)$:

   a) $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{5\pi}{6}$
   b) $x = \dfrac{\pi}{12}$, $x = \dfrac{11\pi}{12}$
   c) $x = \dfrac{\pi}{8}$, $x = \dfrac{7\pi}{8}$
   d) $x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{5\pi}{3}$

20. El monto total A que se obtiene al cabo de 3 años si se colocan \$100.000 a una tasa de interés compuesto del 7 % anual, se puede calcular con la ecuación:

   a) $A = 100000(1 + 0{,}07)$
   b) $A = 100000(1 + 7)^3$
   c) $A = 3 \times 100000(1 + 0{,}07)$
   d) $A = 100000(1 + 0{,}07)^3$

21. Un jardín rectangular es 10 m más largo que ancho. Si su área es de 875 metros cuadrados y w representa el ancho, la ecuación que permite calcular el valor de w es:

   a) $875 = 2(10 + 2w)$
   b) $875 = (10w)w$
   c) $875 = w(10 + w)$
   d) $875 = 2w(10 + w)$

22. El n-ésimo término de la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ es:

   a) $1 - \dfrac{n}{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}$
   b) $\dfrac{n-1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$
   c) $\dfrac{n}{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}$
   d) $\dfrac{n+1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$

23. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces de las siguientes afirmaciones la verdadera es.

   a) Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $ab > 0$
   b) Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $a + b > 0$
   c) Si $a > b$ entonces $a^2 > b^2$
   d) Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

24. De los siguientes polinomios el que tiene como raíces a los números -1, 1, 0 y 2 es:

   a) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
   b) $p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x$
   c) $p(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$
   d) $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

25. La expresión equivalente a $\dfrac{6}{3x^2 - 2x} + \dfrac{5}{3x - 2} - \dfrac{2}{x^2}$ es:

   a) $\dfrac{9}{x^2(3x - 2)}$
   b) $\dfrac{5x^2 + 4}{x^2(3x - 2)}$
   c) $\dfrac{9}{2x^2 + x - 2}$
   d) $\dfrac{5x^2 - 4}{x^2(3x - 2)}$

26. La solución de la ecuación $\sqrt{x - 5}\sqrt{x + 3} = 3$ es:

   a) $x = 6$, $x = 4$
   b) $x = -4$
   c) $x = 6$, $x = -4$
   d) $x = 6$

27. El conjunto solución de la desigualdad $2x^2 + x \leq 1$ es:

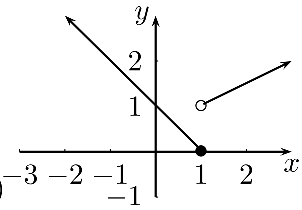
   a) $(-\infty, -1]$
   b) $[\frac{1}{2}, \infty)$
   c) $[-1, \frac{1}{2}]$
   d) $(-1, \frac{1}{2})$

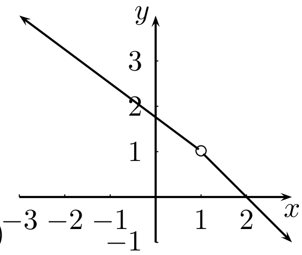
3.2. Cuestionario de Funciones

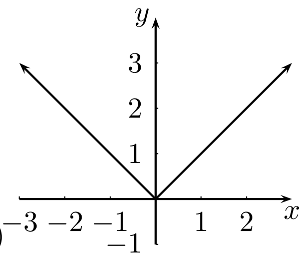
En esta tabla puede marcar las opciones que considere correctas, para que luego verifique y reflexione sobre sus respuestas.

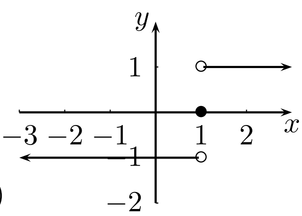
1	*a*	*b*	*c*	*d*	**8**	*a*	*b*	*c*	*d*	**15**	*a*	*b*	*c*	*d*	**22**	*a*	*b*	*c*	*d*
2	*a*	*b*	*c*	*d*	**9**	*a*	*b*	*c*	*d*	**16**	*a*	*b*	*c*	*d*	**23**	*a*	*b*	*c*	*d*
3	*a*	*b*	*c*	*d*	**10**	*a*	*b*	*c*	*d*	**17**	*a*	*b*	*c*	*d*	**24**	*a*	*b*	*c*	*d*
4	*a*	*b*	*c*	*d*	**11**	*a*	*b*	*c*	*d*	**18**	*a*	*b*	*c*	*d*	**25**	*a*	*b*	*c*	*d*
5	*a*	*b*	*c*	*d*	**12**	*a*	*b*	*c*	*d*	**19**	*a*	*b*	*c*	*d*	**26**	*a*	*b*	*c*	*d*
6	*a*	*b*	*c*	*d*	**13**	*a*	*b*	*c*	*d*	**20**	*a*	*b*	*c*	*d*	**27**	*a*	*b*	*c*	*d*
7	*a*	*b*	*c*	*d*	**14**	*a*	*b*	*c*	*d*	**21**	*a*	*b*	*c*	*d*	**28**	*a*	*b*	*c*	*d*

1. Indique la gráfica que no representa una función con dominio igual a todos los reales.

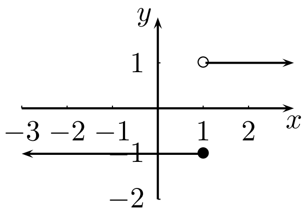
a)


b)


c)


d)


2. En la siguiente figura se presenta la gráfica cartesiana de la función f.



El rango de f es:

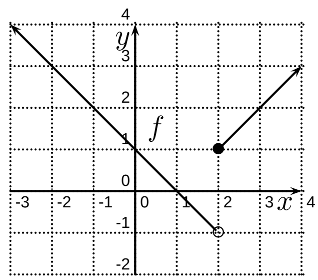
a) Todo $\mathbb{R}$

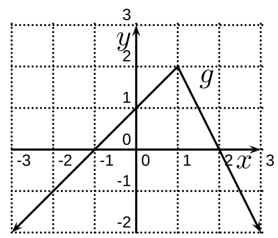
b) $[-1, 1)$

c) $\{-1, 1\}$

d) $\{1\}$

Considere las gráficas de las funciones f y g, que se presentan a continuación, para solucionar las preguntas 3, 4, 5 y 6.





3. $f(2)$ es igual a:

   a) 1
   b) -1
   c) 0
   d) $f(2)$ no esta definida

4. $(f+g)(-2)$ es igual a:

   a) -2
   b) 2
   c) 4
   d) -4

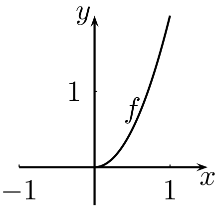
5. Si $g(x)=0$, entonces x es igual a:

   a) -1 y 2
   b) 1
   c) 2, -1 y 1
   d) 0

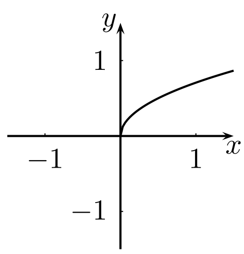
6. $f(g(2))$ es igual a:

   a) 2
   b) 1
   c) -1
   d) 0

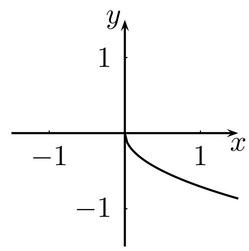
7. En la siguiente figura se presenta la gráfica cartesiana de la función f,



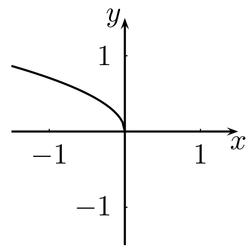
La gráfica de la función inversa de f es:



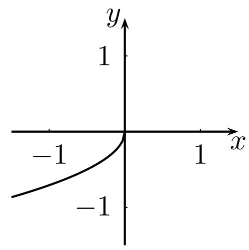
a)



b)



c)



d)

8. Si $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=3x+5$ entonces $f(g(x))$ es igual a:

   a) $(3x+5)^2-1$
   b) $3(x^2-1)+5$
   c) $(x^2-1)(3x+5)$
   d) $(3x+5)x-1$

9. De las siguientes expresiones la que no representa la ecuación de una función $y=f(x)$ es:

   a) $y=\begin{cases} x & \text{si } x\le 1 \\ x^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$
   b) $x^2+y^2=1$
   c) $yx=1$
   d) $y=1$

10. El rango de la función definida por la ecuación $f(x) = 2x^2 + 1$ es:

   a) Todos los números reales.

   b) Todos los números reales mayores o iguales que 1.

   c) Todos los números reales mayores o iguales que $-\frac{1}{2}$.

   d) Todos los números reales mayores o iguales que 2.

11. Si $g(x) = \log_3 x$, entonces $g(\frac{1}{3})$ es igual a:

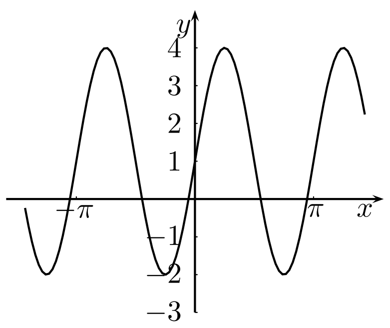
   a) -1

   b) $3^{\frac{1}{3}}$

   c) $\frac{1}{3}$

   d) 1

12. A continuación se presenta la gráfica cartesiana de una cierta función f,



   La ecuación de la forma $y = a\,\mathrm{sen}(bx) + c$ que mejor se ajusta a la gráfica de la función f es:

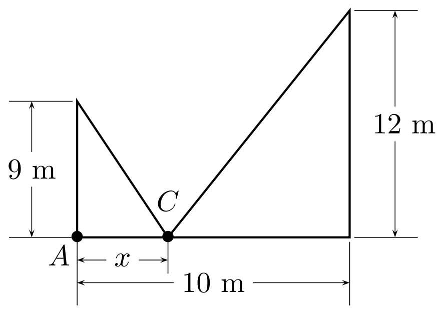
   a) $y = 4\,\mathrm{sen}(2x) - 2$

   b) $y = 3\,\mathrm{sen}(2x) + 1$

   c) $y = 4\,\mathrm{sen}(\frac{1}{2}x) - 2$

   d) $y = 3\,\mathrm{sen}(\frac{1}{2}x) + 1$

13. Dos postes de 9 m y 12 m de altura, respectivamente, que distan 10 m se deben conectar desde la parte superior hasta un punto C del suelo mediante un cable,como se muestra en la figura.



   Si x representa la distancia del punto A al punto C, la expresión que representa la longitud del cable en función de la longitud x es:

   a) $(9 + x) + (12 + (10 - x))$

   b) $\sqrt{9^2 + x^2} + \sqrt{12^2 + (10 - x)^2}$

   c) $\sqrt{9^2 - x^2} + \sqrt{12^2 - (10 - x^2)}$

   d) $(9 - x) + (12 - (10 - x))$

14. La ecuación de la función inversa de $g(x) = \dfrac{1}{2x + 5}$ para $x \neq -\frac{5}{2}$ es:

   a) $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - 5\right)$

   b) $g^{-1}(x) = 2x + 5$

   c) $g^{-1}(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 7\right)$

   d) $g^{-1}(x) = -\dfrac{2}{x}$

15. Si (a, b) es un punto que pertenece a la curva de f entonces en la curva de la inversa de f debe estar el punto de coordenadas:

   a) (b, a)

   b) $(-a, -b)$

   c) $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$

   d) $(-b, -a)$

Considere la función dada por la ecuación $f(x) = (x-2)^2$ para solucionar las preguntas 16, 17 y 18.

16. El mínimo de la función f está en el punto de coordenadas:

    a) $(2,0)$
    b) $(-2,0)$
    c) $(0,2)$
    d) $(0,-2)$

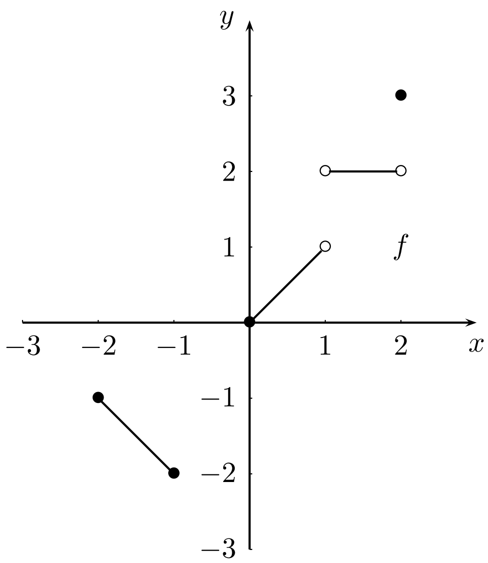
17. El intervalo en donde la función f decrece es:

    a) $(-\infty,2)$
    b) $(2,\infty)$
    c) $(0,2)$
    d) $(-\infty,0)$

18. El conjunto en donde se cumple que $f(x) \geq 0$ es:

    a) $[0,\infty)$
    b) $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2},\infty\right)$
    c) $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$
    d) Todo $\mathbb{R}$

Considere la gráfica de la función f, para responder las preguntas 19 y 20.



19. El dominio de f es:

    a) $[-2,2)$
    b) $[-2,-1] \cup [0,2]$
    c) $[-2,-1] \cup [0,1) \cup (1,2]$
    d) $[-2,2]$

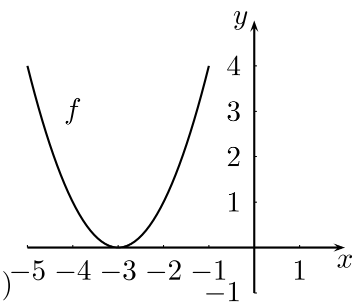
20. El rango de f es:

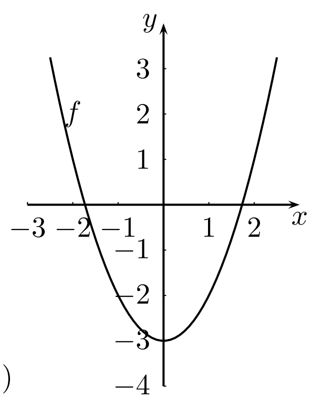
    a) $[-2,3]$
    b) $[-2,-1] \cup [0,1) \cup \{2,3\}$
    c) $[-2,-1] \cup [0,1) \cup \{3\}$
    d) $[-2,-1] \cup [0,1) \cup [2,3]$

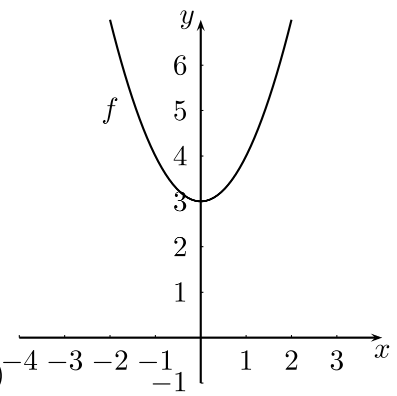
21. Si $\csc u = 2$ y $\cos u < 0$, entonces $\tan u$ es igual a:

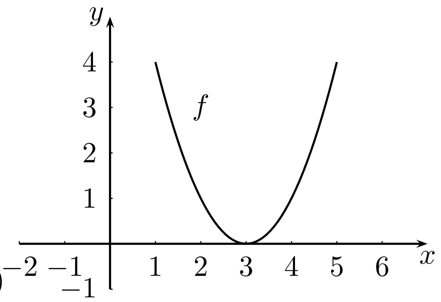
    a) $-\sqrt{3}$
    b) $\sqrt{3}$
    c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
    d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

22. La gráfica que mejor representa la función dada por la ecuación $f(x) = (x-3)^2$ es:

    a)


    b)


c) 

d) 

23. Los valores de x, en notación de intervalos, para los que la función dada por la ecuación $f(x) = \dfrac{1}{x} - 3$ cumple que $f(x) < 0$ son:

    a) $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$
    b) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$
    c) $(-\infty, 0)$
    d) $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

24. El dominio de la función definida por la ecuación $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+2}}$ es:

    a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -2, 1\}$
    b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > -2\}$
    c) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -2\}$
    d) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < -2\}$

3.3. Cuestionario de Geometría

En esta tabla puede marcar las opciones que considere correctas, para que luego verifique y reflexione sobre sus respuestas.

1	*a*	*b*	*c*	*d*	**8**	*a*	*b*	*c*	*d*	**15**	*a*	*b*	*c*	*d*	**22**	*a*	*b*	*c*	*d*
2	*a*	*b*	*c*	*d*	**9**	*a*	*b*	*c*	*d*	**16**	*a*	*b*	*c*	*d*	**23**	*a*	*b*	*c*	*d*
3	*a*	*b*	*c*	*d*	**10**	*a*	*b*	*c*	*d*	**17**	*a*	*b*	*c*	*d*	**24**	*a*	*b*	*c*	*d*
4	*a*	*b*	*c*	*d*	**11**	*a*	*b*	*c*	*d*	**18**	*a*	*b*	*c*	*d*	**25**	*a*	*b*	*c*	*d*
5	*a*	*b*	*c*	*d*	**12**	*a*	*b*	*c*	*d*	**19**	*a*	*b*	*c*	*d*	**26**	*a*	*b*	*c*	*d*
6	*a*	*b*	*c*	*d*	**13**	*a*	*b*	*c*	*d*	**20**	*a*	*b*	*c*	*d*	**27**	*a*	*b*	*c*	*d*
7	*a*	*b*	*c*	*d*	**14**	*a*	*b*	*c*	*d*	**21**	*a*	*b*	*c*	*d*	**28**	*a*	*b*	*c*	*d*

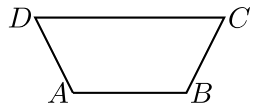
1. Establezca el orden de los cuatro pasos que se presentan a continuación, si se desea construir una circunferencia que pase por los puntos dados A, B y C no colineales.

    i) Se trazan las mediatrices de los segmentos AB y BC.
    ii) Se trazan los segmentos AB y BC.
    iii) Se nombra O al punto de intersección de las mediatrices.
    iv) Se traza la circunferencia con centro en O y radio la distancia desde O a cualquiera de los puntos A, B y C.

    La secuencia de los trazos correcto es:

    a) *iii*, *iv*, *ii* y *i*
    b) *ii*, *i*, *iii* y *iv*
    c) *ii*, *iv*, *iii* y *i*
    d) *i*, *ii*, *iii* y *iv*

2. Considere el siguiente trapecio isósceles $ABCD$



Se tiene que $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$ porque:

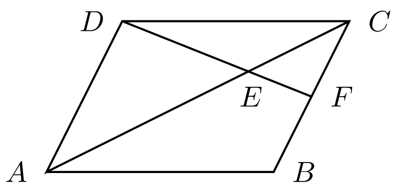
a) Son ángulos homólogos o correspondientes en triángulos congruentes.

b) Son ángulos alternos internos entre paralelas.

c) Son ángulos correspondientes entre paralelas.

d) Las diagonales DB y AC son bisectrices de ángulo iguales.

3. Considere el paralelogramo $ABCD$



Si $DE = 15$, $EF = 4$ y $FB = 55$, entonces la medida de CF es:

a) $\frac{44}{3}$

b) $\frac{12}{11}$

c) $\frac{825}{4}$

d) 20

4. En una ciudad, a la misma hora, la sombra de un edificio es de 50 m y la de una casa de 5 m de altura es de 10 m. La altura del edificio es:

a) 1 m

b) 25 m

c) 45 m

d) 40 m

5. Cada una de las medianas en un triángulo:

a) Une los puntos medios de dos lados del triángulo.

b) Es perpendicular y pasa por el punto medio de uno de los lados.

c) Equidista de dos lados del triángulo.

d) Une el punto medio de uno de los lados con el vértice opuesto.

6. Señale cuál de las siguientes afirmaciones sobre un paralelogramo es falsa:

a) Las diagonales se bisecan entre si.

b) Los lados opuestos son congruentes.

c) Cada diagonal es eje de simetría del paralelogramo.

d) Las diagonales forman ángulos alternos internos iguales con los lados del paralelogramo.

7. El número de lados de un polígono regular que tiene un ángulo interior de 175° es:

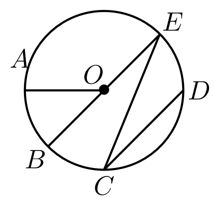
a) 5

b) 35

c) 36

d) 72

8. Considere la siguiente circunferencia



Si los arcos AB y BC son congruentes, $\overline{CD}$ es paralelo $\overline{BE}$ y medida del ángulo $DCE = 30°$, entonces el ángulo AOB mide:

a) 15°

b) 30°

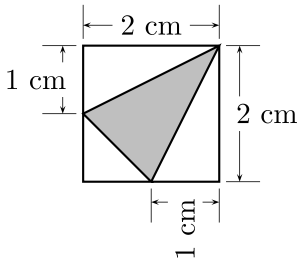
c) 45°

d) 60°

9. Se hace rodar, sin resbalar, un aro (circunferencia) de un metro de perímetro por la parte exterior de los lados de un cuadrado que tiene un metro de lado. El número de vueltas que habrá dado el aro cuando retorne a su posición inicial es:

   a) 4
   b) 5
   c) 1
   d) 3

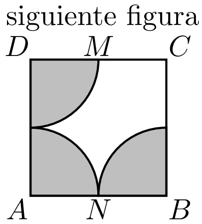
10. Considere la siguiente figura



El área del triángulo sombreado es:

   a) 2 cm^2
   b) $\frac{5}{2}$ cm^2
   c) 4 cm^2
   d) $\frac{3}{2}$ cm^2

11. Considere la siguiente figura



Si $ABCD$ es un cuadrado de lado l, M y N son puntos medios de los segmentos DC y AB, respectivamente, entonces la razón entre el área sombreada y la del cuadrado es:

   a) $\frac{3}{4}\pi$
   b) l^2
   c) $\frac{3}{16}\pi$
   d) $\frac{l^2}{8}\pi$

12. Pedro tiene un cuaderno de 25 cm de alto por 20 cm de ancho. Si en la tapa se quiere pegar un círculo, el valor del área del círculo de mayor área que se puede pegar sin salirse de la tapa del cuaderno es:

   a) 20π cm^2
   b) 100π cm^2
   c) 400π cm^2
   d) 625π cm^2

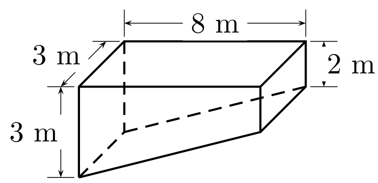
13. Una pirámide de base cuadrada de 6 cm de lado y altura de una cara $\sqrt{73}$ cm, tiene un volumen de:

   a) $36\sqrt{73}$ cm^3
   b) $12\sqrt{73}$ cm^3
   c) 96 cm^3
   d) 288 cm^3

14. Una fábrica de aluminio desea cuadruplicar el volumen de una lata cilíndrica. Lo que deben realizar para lograrlo es:

   a) Duplicar solo el radio de la base.
   b) Duplicar solo la altura de la lata.
   c) Cuadruplicar solo el radio de la base.
   d) Duplicar el radio de la base y la altura de la lata.

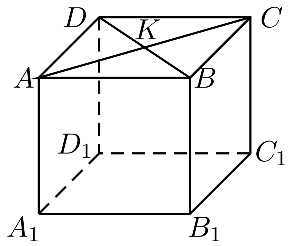
15. A continuación se presenta la gráfica de una piscina,



La capacidad que tiene la piscina es:

   a) 36 m^3
   b) 48 m^3
   c) 60 m^3
   d) 72 m^3

16. Considere la siguiente figura,



Si en este paralelepípedo rectangular $AB = 8$, $BC = 6$, $AA_1 = 12$, entonces la distancia del punto K al vértice B_1 es:

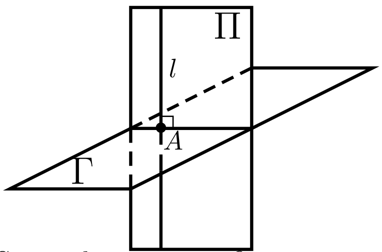
a) 5

b) 8

c) 10

d) 13

17. La recta l está en el plano Π y es perpendicular al plano Γ en el punto A. Entonces,



a) Se pueden trazar infinitas rectas en el plano Γ, perpendiculares a l que pasan por el punto A.

b) Se pueden trazar sólo 2 rectas en el plano Γ, perpendiculares a l que pasan por el punto A.

c) Se puede trazar sólo una recta en el plano Γ, perpendicular a l que pasa por el punto A.

d) No se puede trazar ninguna recta en el plano Γ, perpendicular a l que pase por el punto A.

18. Un lugar geométrico se define como el conjunto de puntos que cumple con una o varias condiciones. Se puede afirmar que el lugar geométrico generado por el centro O de una circunferencia de radio r al rodar por el exterior de otra circunferencia de centro O' y de radio R es:

a) El segmento de recta $\overline{OO'}$.

b) Una circunferencia concéntrica a la de centro O' y de radio $R + r$.

c) Una circunferencia concéntrica a la de centro O y de radio $R + r$.

d) Una circunferencia concéntrica a la de radio O' de radio $R - r$.

19. La ecuación $\dfrac{(x+2)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$ representa:

a) Una elipse con centro en $(-2, 1)$, y uno de sus vértices en $(2, 1)$.

b) Una hipérbola con centro en $(-2, 1)$ y uno de sus vértices en $(-6, 1)$.

c) Una circunferencia con centro en $(-2, 1)$ y radio $r = 1$.

d) Una parábola con vértice en $(-2, 1)$ y ecuación de la directriz $y = 0$.

20. Las coordenadas de los vértices de un paralelogramo son $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(7, 4)$ y $D(3, 3)$. La ecuación de la recta que contiene a la altura del vértice C al lado AB es:

a) $y = -4x + 32$

b) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{4}$

c) $y = \frac{1}{4}x + 4$

d) $y = -4x + 23$

21. Para el paralelogramo de la pregunta anterior, la longitud de la diagonal AC y las coordenadas de su punto medio son:

a) $\sqrt{45}$ y $(3, \frac{3}{2})$

b) $\sqrt{89}$ y $(3, \frac{3}{2})$

c) $\sqrt{45}$ y $(4, \frac{5}{2})$

d) $\sqrt{89}$ y $(4, \frac{5}{2})$

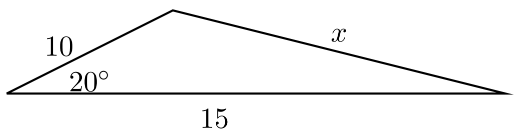
22. La ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ representa un círculo con radio r y centro $C(x, y)$, entonces:

    a) $r = 4$ y $C(1, -2)$
    b) $r = \sqrt{19}$ y $C(2, -4)$
    c) $r = 2$ y $C(1, -2)$
    d) $r = 2$ y $C(-1, 2)$

23. Señale la afirmación que es falsa. La imagen del punto $A(3, 5)$ es el punto:

    a) $B(-3, -5)$ si se realiza una simetría central con respecto al origen del plano cartesiano.
    b) $C(-7, 5)$ bajo una simetría axial con respecto a la recta $x = -2$.
    c) $D(3, -9)$ bajo una simetría axial con respecto a la recta $y = -2$.
    d) $E(-5, -3)$ bajo una simetría axial con respecto a la recta $y = x$.

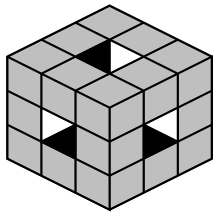
24. Considere un triángulo con lados 10, 15 y x y uno de sus ángulos con medida igual a 20°, como se muestra en la siguiente figura.



El lado x puede encontrarse directamente aplicando:

    a) El Teorema de Pitágoras.
    b) La Ley de los senos.
    c) La Ley de los cosenos.
    d) $\operatorname{sen} 20°$

25. Un cubo de lado 3 tiene tres agujeros, cada uno con una sección de 1 por 1 que van desde el centro de cada cara al centro de la cara opuesta, como se muestra en la siguiente figura.



El área, en unidades cuadradas, del sólido que resulta es:

    a) 66
    b) 69
    c) 71
    d) 72

26. Los ángulos α y β son suplementarios. Si α mide 40° más que β, entonces el complemento de β es:

    a) 20°
    b) 25°
    c) 110°
    d) 70°

27. Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo que mide 45°. Los triángulos entre si:

    a) Tienen los lados congruentes
    b) Son semejantes
    c) Tienen dos ángulos congruentes y uno diferente
    d) Tiene sólo un ángulo congruente

28. Un círculo de radio r y un cuadrado de lado l tienen el mismo perímetro, entonces la razón $\frac{l}{r}$ es:

    a) $\sqrt{\pi}$
    b) $\frac{\pi}{4}r$
    c) $\frac{\sqrt{2\pi}}{r}$
    d) $\frac{\pi}{2}$

3.4. Respuestas

A continuación se presentan las soluciones correctas de los tres cuestionarios. El estudiante debe comparar sus respuestas con las correctas y en caso de ser diferentes aclarar qué errores se han cometido y repasar el tema sobre el que trate la pregunta. Al finalizar este material se encuentran los comentarios a las preguntas cuyas respuestas están marcadas con un asterisco ($*$).

Álgebra-trigonometría		Funciones		Geometría	
Pregunta	Respuesta	Pregunta	Respuesta	Pregunta	Respuesta
1	d	1	b	1	b
2	d	2	c	2	a
3	c	3	a	3	d
4	c	4	b	4	b
5	a	5	a	5	d
6	d	6	b	6	c
7	d	7	a	7	d
8	a	8	a	8	d
9	d	9	b	9	a
10	b	10	b	10	d
11	b	11	a	11	c
12	a	12	b	12	b
13	c	13	b	13	c
14	b	14	a	14	a
15	d	15	a	15	c
16	d	16	a	16	d
17	c	17	a	17	a
18	c	18	d	18	b
19	b	19	c	19	a
20	d	20	b	20	a
21	c	21	c	21	c
22	c	22	$d*$	22	c
23	d	23	$a*$	23	d
24	b	24	$b*$	24	c
25	$b*$	25		25	d
26	$d*$	26		26	$a*$
27	$c*$	27		27	$a*$
28		28		28	$b*$

3.4.1. Respuestas comentadas

Álgebra

Comentario pregunta 25
La opción de respuesta correcta es la b), que se obtiene encontrando el denominador común y efectuando la suma correspondiente, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2} &= \frac{6x+5x^2-2(3x-2)}{x^2(3x-2)}\\ &= \frac{5x^2+4}{x^2(3x-2)}\end{aligned}$$

La opción a) es incorrecta y se obtiene al determinar el denominador común, sin hallar los numeradores correspondientes, sumándolos directamente. La opción c) es incorrecta y se obtiene al sumar directamente los numeradores y dividir el resultado entre la suma de los denominadores. También la opción d) es errada, al calcular mal el tercer numerador correspondiente, olvidando efectuar el producto de signos en el segundo sumando, así $-2(3x-2)=-6x-4$.

Comentario pregunta 26
La opción correcta es la d) que se obtiene al elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad de donde se llega a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\sqrt{x-5}\sqrt{x+3} &= 3\\ \left(\sqrt{x-5}\sqrt{x+3}\right)^2 &= 3^2\\ (x-5)(x+3) &= 9\\ x^2-2x-15 &= 9\\ x^2-2x-24 &= 0\\ (x-6)(x+4) &= 0\end{aligned}$$

de donde $x=6$ o $x=-4$. Sin embargo al sustituir $x=-4$ se observa que no es solución, luego la única solución de la ecuación es $x=6$.

La opción a) surge de errores cometidos en la solución de la ecuación cuadrática, bien sea por la factorización o por aplicar mal la fórmula de solución de cuadráticas. La opción b) se obtiene al escoger el valor de $x=-4$ y no el de $x=6$ en las opciones encontradas. Aunque los valores de $x=6$ y de $x=-4$ se obtienen en la solución de la ecuación cuadrática, una de ellas no es solución de la ecuación original.

Comentario pregunta 27
La opción correcta es la c) que se obtiene al factorizar $2x^2+x-1$ y comparar sus signos para determinar sólo el intervalo en que es negativa, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}2x^2+x &\leq 1\\ 2x^2+x-1 &\leq 0\\ 2(x+1)(x-\tfrac{1}{2}) &\leq 0\\ (x+1)(x-\tfrac{1}{2}) &\leq 0\end{aligned}$$

Ahora se hace el análisis de los signos

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \infty)$
Signo de $(x+1)$ en el intervalo	$-$	$+$	$+$
Signo de $(x-\frac{1}{2})$ en el intervalo	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x+1)(x-\frac{1}{2})$ en el intervalo	$+$	$-$	$+$

y así es claro que $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$, en intervalo cerrado, puesto que el producto puede tomar el valor de cero.

En las opciones *a*) y *b*) se ha hecho mal el análisis de signos y se han tomado intervalos en los que el producto es positivo. En la opción *d*) a pesar de que el producto es negativo, no cumple con la condición de ser igual a cero.

Funciones

Comentario pregunta 22
La respuesta correcta es la opción *d*), puesto que la gráfica de la función dada por la ecuación $f(x) = (x-3)^2$ se obtiene al desplazar hacia la derecha tres unidades la gráfica de la función dada por $f(x) = x^2$. Las gráficas representadas en las opciones *a*), *b*) y *c*) no corresponden a la función dada, ellas tendrían como ecuaciones, respectivamente: $f(x) = (x+3)^2$, $f(x) = x^2 - 3$ y $f(x) = x^2 + 3$.

Comentario pregunta 23
La respuesta correcta es la opción *a*). Como se pide que $f(x) < 0$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - 3 &< 0 \\ \frac{1-3x}{x} &< 0 \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\begin{array}{rcl} 1-3x<0 \;\text{ y }\; x>0 & \text{ó} & 1-3x>0 \;\text{ y }\; x<0 \\ 1<3x \;\text{ y }\; x>0 & \text{ó} & 1>3x \;\text{ y }\; x<0 \\ \frac{1}{3}<x \;\text{ y }\; x>0 & \text{ó} & \frac{1}{3}>x \;\text{ y }\; x<0 \\ \frac{1}{3}<x & \text{ó} & 0>x \end{array}$$

luego $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$.

La opción *b*) no es correcta ya que es el resultado de considerar de manera incorrecta

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1-3x}{x} & < & 0 \\ 1-3x>0 & \text{y} & x>0 \text{ así que} \\ x<\frac{1}{3} & \text{y} & x>0 \text{ de donde} \\ x \in (0, \frac{1}{3}) & & \end{array}$$

La opción c) no es correcta porque considera parcialmente las condiciones para que el cociente $\dfrac{1-3x}{x}$ sea menor que cero, es decir que solamente tiene en cuenta el caso

$$\begin{array}{rcl} 1-3x>0 & \text{y} & x<0 \\ 1>3x & \text{y} & x<0 \\ x<\frac{1}{3} & \text{y} & x<0 \text{ de donde} \\ x\in(-\infty,0) & & \end{array}$$

La opción d) es incorrecta porque se puede obtener del siguiente procedimiento que es incorrecto

$$\begin{array}{rcl} f(x) & < & 0 \text{ entonces} \\ \frac{1}{x}-3 & < & 0 \\ \frac{1}{x} & < & 3 \\ 1 & < & 3x \\ \frac{1}{3} & < & x \text{ y así} \\ x\in(\frac{1}{3},\infty) & & \end{array}$$

este procedimiento solamente es válido si $x>0$.

Comentario pregunta 24

La respuesta correcta es la opción b). Se puede razonar de la siguiente forma: la función f puede verse como el cociente de las dos funciones $h(x)=x-1$ y $g(x)=\sqrt{x+2}$, así que el dominio de f está conformado por todos los puntos en la intersección del dominio de h y el dominio de g excluyendo los valores en los que $g(x)=0$.

Como $h(x)=x-1$ es la ecuación de una línea recta, entonces $D_h=\mathbb{R}$ y para el dominio de la función g se debe tener que $x+2\geq 0$ de donde se tiene que $x\geq -2$ y además $g(x)=0$ si y solo si $x=-2$, así que

$$\begin{array}{rcl} D_f & = & D_h\cap D_g-\{x\in\mathbb{R}\ /\ g(x)=0\} \\ & = & \{x\in\mathbb{R}\ /\ x>-2\} \end{array}$$

La opción a) es falsa ya que es el resultado de considerar que tanto el numerador como el denominador no pueden ser cero lo cual es incorrecto, en este caso el numerador por corresponder a una función lineal puede dar cero, por otra parte se deja de lado la restricción sobre la raíz, es decir que $x+2>0$.

La opción c) no corresponde porque solamente considera el caso en que el denominador debe ser diferente de cero.

Por último, la opción d) corresponde a todos los valores para los que $x+2<0$ y para éstos no está definida la raíz en los reales.

Geometría

Comentario pregunta 26

La respuesta correcta es la opción a) ya que la suma de ángulos suplementarios es un ángulo llano, es decir $\alpha+\beta=180°$, además como $\alpha=40°+\beta$, entonces $\beta=70°$.

Como la suma de las medidas de dos ángulos complementarios es un ángulo recto, entonces el complemento de β es un ángulo de $20°$. Las opciones *b*), *c*) y *d*) son incorrectas puesto que en *b*) se toma erróneamente que la suma de las medidas de de ángulos suplementarios es de $90°$ en vez de $180°$, entonces $\alpha + \beta = 90°$ y como $\alpha = 40° + \beta$, entonces $\beta = 25°$, que es el complemento del ángulo α. En *c*), como $\alpha = 40° + \beta$ y $\beta = 70°$, entonces $110°$ es la medida del ángulo α y no su complemento. En *d*) la medida del ángulo que se obtiene es la de β, pero no se halla su complemento.

Comentario pregunta 27

La respuesta correcta es la opción *b*) ya que dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos son congruentes, las demás opciones son incorrectas puesto en *a*) no hay información sobre la medida de los lados, por lo que no se puede concluir sobre la congruencia de ellos. En *c*) si se tienen dos ángulos congruentes, el tercero también lo es debido a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre es igual a $180°$. En *d*) no puede haber sólo un ángulo congruente debido a que los triángulos rectángulos siempre tienen el ángulo recto ($90°$) congruente, de hecho los triángulos de la pregunta tienen los tres ángulos congruentes.

Comentario pregunta 28

La respuesta correcta es la opción *d*) puesto que como tienen perímetros iguales, entonces

$$2\pi r = 4l, \quad \text{de donde} \quad \frac{l}{r} = \frac{\pi}{2}$$

La opción *a*) se obtiene al igualar las áreas del círculo y el cuadrado en lugar de sus perímetros, así $\pi r^2 = l^2$, de donde $\frac{l}{r} = \sqrt{\pi}$. La opción *b*) se obtiene al igualar el área del círculo con el perímetro del cuadrado, así $\pi r^2 = 4l$, de donde $\frac{l}{r} = \frac{\pi r}{4}$. La opción *c*) se obtiene al igualar el perímetro del círculo con el área del cuadrado, así $2\pi r = l^2$, de donde $\frac{l}{r} = \sqrt{\frac{2\pi}{r}}$.