Aula PED de Integrais Duplas sobre Coord. Polares

Esdras R. Carmo - 170656

14 de Outubro de 2016

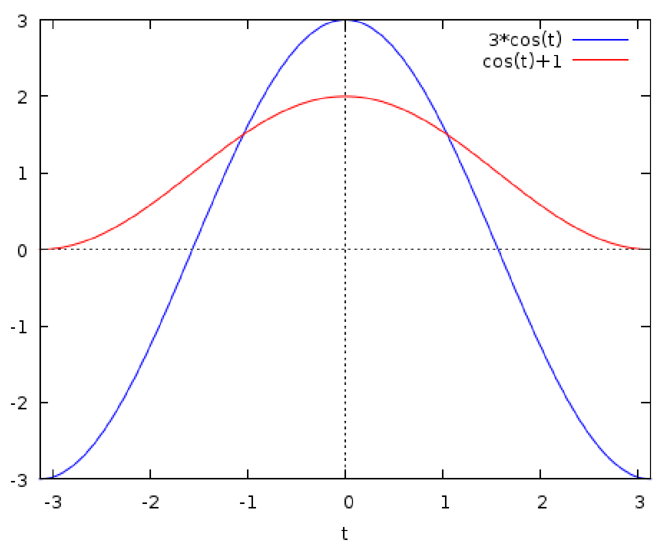
1 Exerc. 09 Lista 7

Calcule a área fora do círculo $r = 3\cos\theta$ e dentro de $r = 1 + \cos\theta$.

Precisamos calcular

$$\iint\limits_{R} dA = \iint\limits_{R_{r\theta}} r dr d\theta$$

Plotando os dois gráficos em coordenadas polares, temos:



Desconsiderando a parte em que $r < 0$, pois não possui significado geométrico, temos duas regiões simétricas e podemos calcular a integral de apenas uma e multiplicar por 2.

Dessa forma, podemos encontrar as duas regiões que formam a parte positiva:

$$
\begin{aligned}
1 + \cos\theta &= 3\cos\theta \\
\cos\theta &= \frac{1}{2} \\
\theta &= \frac{\pi}{3},\ pois\ -\pi \leq \theta \leq \pi
\end{aligned}
$$

Assim temos as regiões:

$$
\begin{aligned}
R_1 &:= \{(r,\theta) \mid \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 3\cos\theta \leq r \leq 1 + \cos\theta\} \\
R_2 &:= \{(r,\theta) \mid \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 1 + \cos\theta\}
\end{aligned}
$$

E podemos integrar:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\iint\limits_{R_{r\theta}} r dr d\theta \\
V &= 2\left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{3\cos\theta}^{1+\cos\theta} r dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{1+\cos\theta} r dr d\theta\right) \\
V &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

2 Exerc. 10 Lista 7

Calcule o volume do sólido limitado pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = x$.

Encontramos o centro da circunferência que determina o cilindro:

$$
\begin{aligned}
x^2 - x + y^2 &= 0 \\
x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 &= \frac{1}{4} \\
\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Note que o cone possui apenas o ponto $(0,0,0)$ no plano xy. Além disso, ele é simétrico em relação ao plano xy, logo podemos definir a região de integração como a circunferência geradora do cilindro e o volume será a integral da parte positiva multiplicada por 2.

Então, transformando em coordenadas polares temos:

$$x^2 + y^2 = x \Rightarrow r = \cos\theta$$

Vamos integrar $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$V = 2 \iint\limits_{R_{r\theta}} r r dr d\theta$$

$$V = 2 \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\cos\theta} r^2 dr d\theta$$

$$V = \frac{2}{3} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta$$

$$V = \frac{2}{3} \left\{ [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right\}$$