Isomorfismos

Esdras R. Carmo - 170656

4 de Outubro de 2016

1 Trasformação isomorfismo

Definição 1.1. *$T : V \longrightarrow W$ linear é isomorfismo se T é bijetora. Escrevemos $V \cong W$.*

Teorema 1.1. *Se V é espaço vetorial tal que $dim_F V = n < \infty$, então $V \cong F^n$.*

O Teorema fala que "vetores são equivalentes a coordenadas"em algum sentido.

Demonstração. Peguem $B = v_1, \ldots, v_n$ base ordenada de V. Agora definimos uma transformação linear $T : V \longrightarrow F^n$ da seguinte forma:

$$v \mapsto [v]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Assim podemos demonstrar que T é linear, sobrejetora e injetora (por construção). ∎

1.1 Relação entre dimensões

Teorema 1.2. *Sejam V, W espaços vetoriais com dimensão finita. Então $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$*

Demonstração. $\Rightarrow$ Se $V \cong W$, então $\exists T : V \longrightarrow W$ isomorfismo (i. e., bijetora e linear). Assim $\dim(\ker(T)) = 0$ e $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim W$

Através do teorema posto-nulidade, temos:

$$\dim V = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 0 + \dim W = \dim W$$

$\Leftarrow$ Se $\dim V = \dim W = n$, então $V \cong F^n$ e $F^n \cong W$, portanto, $\exists T : V \longrightarrow F^n$ isomorfismo $S : F^n \longrightarrow W$ isomorfismo. Logo:

$$T \circ S : V \longrightarrow W \textit{ isomorfismo}$$

■

2 Exemplos

Exemplo 2.1. *Existe um isomorfismo entre*

$$U = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a - b = 0 = c - d\}$$
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mid x = 0 = z - 3y \right\}$$

Precisamos de bases de U *e* W*.*

$$U \Rightarrow t + tx + sx^2 + sx^3 = t(1 + x) + s(x^2 + x^3)$$
$$W \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & t \\ 3t & s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que os geradores são L.I., logo são bases. Portanto criamos $T : U \longrightarrow W$ *definindo:*

$$T(1 + x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T(x^2 + x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Além disso existe inversa, apenas invertendo os geradores da imagem com os do domínio.