Produto Interno

Esdras R. Carmo - 170656

25 de Outubro de 2016

1 Teoria

Se $< \cdot, \cdot >$ é produto interno sobre V com $dim < \infty$, então:

$$< u, v >= Y^t AX$$

Onde:

$$\begin{aligned} X &= [u]_\beta \\ Y &= [v]_\beta \\ A &= (< v_j, v_i >) = (a_{ij}) \end{aligned}$$

2 Exemplo

Se $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ e $\beta = \{1, x, x^2\}$ definimos

$$< p(x), q(x) >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

O produto interno.

Calculemos a matriz A de $< \cdot, \cdot >$ com relação a β.

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \int_{-1}^{1} v_1 v_1 dx = \int_{-1}^{1} 1 dx = 2 \\
a_{12} &= \int_{-1}^{1} v_2 v_1 dx = \int_{-1}^{1} x dx = 0 = a_{21} \\
a_{22} &= \int_{-1}^{1} v_2 v_2 dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \\
a_{23} &= \int_{-1}^{1} v_3 v_2 dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = a_{32} \\
a_{33} &= \int_{-1}^{1} v_3 v_3 dx = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \\
a_{13} &= \int_{-1}^{1} v_3 v_1 dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = a_{31}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}
$$

Assim o teorema fala:

$$
< a + bx + cx^2, d + ex + fx^2 > = \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
$$