Rotacional e Divergente

Esdras R. Carmo - 170656

28 de Novembro de 2016

1 Introdução

As operações de rotacional e divergente são escritos com respeito ao operador ∇ dado como:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Assim, operamos da seguinte forma:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

2 Definições

2.1 Rotacional

Se $F = (P)\,\mathbf{i} + (Q)\,\mathbf{j} + (R)\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, então o rotacional de F, denotado por *rot* F.

$$rot\ F = \nabla \times F$$

Em outras palavras:

$$rot\ F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \times (P, Q, R)$$

$$rot\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

2.2 Divergente

Da mesma forma como o Rotacional, temos o divergente ($div\ F$) que é dado pelo produto escalar:

$$div\ F = \nabla \cdot F$$

2.3 Exemplos

Exemplo 2.1. *Determine o rotacional e o divergente de:*

$$F(x,y,z) = (xz)\,\boldsymbol{i} + (xyz)\,\boldsymbol{j} + \left(-y^2\right)\boldsymbol{k}$$

Temos que o rotacional é:

$$\begin{aligned}
&rot\ F = \nabla \times F\\
&rot\ F = \left(\frac{\partial(-y^2)}{\partial y} - \frac{\partial xyz}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial xz}{\partial z} - \frac{\partial y^2}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial xyz}{\partial x} - \frac{\partial xz}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\
&rot\ F = (-2y - xy)\,\boldsymbol{i} + (x)\,\boldsymbol{j} + (yz)\,\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

De forma análoga, temos o divergente:

$$\begin{aligned}
&div\ F = \nabla \cdot F\\
&div\ F = \frac{\partial xz}{\partial x} + \frac{\partial xyz}{\partial y} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial z}\\
&div\ F = z + xz
\end{aligned}$$

3 Consequências

Teorema 3.1. *Se f é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então o rotacional do gradiente de f é o vetor nulo, ou seja,*

$$rot\ \nabla f = \vec{0}$$

Esse teorema é facilmente provado pelo teorema de Clairaut.

Agora, sabemos que $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo se $\vec{F} = \nabla f$ para alguma função escalar f. Note então que se $\vec{F}$ é um campo conservativo, então $rot\ \nabla\vec{F} = 0$. Então, temos que se $rot\ \nabla\vec{F} \neq 0$, então o campo não é conservativo.

A recíproca do Teorema 3.1 pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 3.2. *Se $\vec{F}$ for um campo vetorial definido sobre todo $\mathbb{R}^3$ cujas funções componentes possuem derivadas de segunda ordem contínuas e $rot\ \vec{F} = \vec{0}$, então F será um campo conservativo.*

Teorema 3.3. *Se $\vec{F}$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ e suas componentes têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então*

$$div\ rot\ \vec{F} = 0$$

O Teorema 3.3 também pode ser demonstrado pelo Teorema de Clairaut. Além disso, ele nos diz se algum campo vetorial é divergente de outro campo vetorial. Caso o $div\ rot\ \vec{F} \neq 0$, então $\vec{F}$ não é rotacional de outro campo vetorial.

3.1 Operador e Equação de Laplace

Temos que o operador de Laplace ou laplaciano, denotado por ∇^2 temos:

$$\nabla^2 f := \nabla \cdot \nabla f = div\ \nabla f$$

3.2 Exemplos

Exemplo 3.1. *1. Mostre que o campo vetorial*

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(y^2z^3\right) \boldsymbol{i} + \left(2xyz^3\right) \boldsymbol{j} + \left(3xy^2z^2\right) \boldsymbol{k}$$

é conservativo.

Como temos as componentes de $\vec{F}$ polinômios, então as derivadas de segunda ordem são contínuas em todo $\mathbb{R}^3$.

Vamos verificar então seu rotacional:

$$rot\ \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y^2z^3) & (2xyz^3) & (3xy^2z^2) \end{vmatrix}$$
$$rot\ \vec{F} = \vec{0}$$

2. *Determine uma função potencial f tal que $\vec{F} = \nabla f$.*

   Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= P \\
f(x,y,z) &= \int y^2z^3 dx = xy^2z^3 + g(y,z) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= Q \\
2xyz^3 + \frac{\partial g}{\partial y} &= 2xyz^3 \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\
g(y,z) &= h(z) \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= R \\
3xy^2z^2 + h'(z) &= 3xy^2z^2 \\
h'(z) &= 0 \Rightarrow h(z) = K \in \mathbb{R} \\
f(x,y,z) &= xy^2z^3 + K
\end{aligned}$$

   Assim encontramos f tal que $\vec{F} = \nabla f$.

3.3 Formas vetoriais do Teorema de Green

Sabemos que:

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Além disso, podemos facilmente mostrar que se $\vec{F} = (P(x,y))\,\mathbf{i} + (Q(x,y))\,\mathbf{j} + (0)\,\mathbf{k}$, então:

$$rot\ \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

logo, como $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$, então

$$rot\ \vec{F} \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Dessa forma, podemos denotar o Teorema de Green como:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_D rot\ \vec{F} \cdot \mathbf{k} dA$$

Por outro lado, considerando

$$\vec{n} = \left(\frac{x'(t)}{\parallel r'(t) \parallel}, \frac{y'(t)}{\parallel r'(t) \parallel} \right)$$

Então temos:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint\limits_D div\ \vec{F} dA$$