Teorema de Green

Esdras R. Carmo - 170656

23 de Novembro de 2016

1 Introdução

O teorema estabelece uma relação entre a integral de linha e uma integral dupla sobre a superfície delimitada pela curva fechada simples.

1.1 Orientação

Em uma região fechada, a orientação positiva significa percorrê-la no sentido anti-horário, enquanto negativa no sentido horário.

2 Teorema

Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente e D a região delimitada por C. Se P e Q tem derivadas parciais contínuas, então:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

2.1 Cálculo de Áreas

Para o cálculo de áreas da região D delimitada pela curva C, temos:

$$A = \int_C x dy$$
$$A = -\int_C y dx$$
$$A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$$

3 Exemplos

Exemplo 3.1. *Calcule*

$$\oint_C x^4 dx + xy dy$$

em que C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(1,0)$, de $(1,0)$ a $(0,1)$ e de $(0,1)$ a $(0,0)$.

Pelo Teorema de Green, temos:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\
P(x,y) &= x^4 \\
Q(x,y) &= xy \\
I &= \iint\limits_D y dA \\
I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} y dy dx \\
I &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx \\
I &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2x+x^2) dx \\
I &= \frac{1}{2}\left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
I &= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.2. *Calcule*

$$I = \int_C (3y - e^{\sin x})dx + (7x + \sqrt{y^4+1})dy$$

em que C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

Pelo Teorema de Green, temos:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\
I &= \iint\limits_D (7-3) dA \\
I &= 4\iint\limits_D dA \\
I &= 4(\pi.9) = 36\pi
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.3. *Determine a área delimitada pela elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pelo Teorema de Green, considerando C a elipse, podemos encontrar a área como:

$$A = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$$

Parametrizando a elipse, temos

$$\begin{aligned}
x &= a\cos t \\
y &= b\sin t \\
0 \leq\ & t \leq 2\pi \\
dx &= -a\sin t dt \\
dy &= b\cos t dt
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t(b\cos t)dt - b\sin t(-a\sin t)dt \\
A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)dt \\
A &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} 1dt \\
A &= ab\pi
\end{aligned}$$

Exemplo 3.4. *Calcule*

$$\oint_C y^2dx + 3xydy$$

em que C é a fronteira da região semianular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Pela definição de integral de linha, teríamos que parametrizar 4 curvas para realizar o cálculo. No entanto, pelo Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\
I &= \iint\limits_D (3y - 2y)dA = \iint\limits_D ydA
\end{aligned}$$

Utilizando coordenadas polares, podemos descrever D da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & \theta \leq \pi \\
1 \leq\ & r \leq 2 \\
dA &= rdrd\theta
\end{aligned}$$

Temos então a integral

$$I = \int_0^{\pi} \int_1^2 r \sin \theta r dr d\theta$$
$$I = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_1^2 r^2 dr$$
$$I = [-\cos \theta]_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2$$
$$I = 2 \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right)$$
$$I = \frac{14}{3}$$

Exemplo 3.5. *Se*

$$F(x, y) = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$$

Mostre que $\int_C F \cdot dr = 2\pi$ *para todo caminho fechado simples que circunde a origem.*

Temos:

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$
$$Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Note que as derivadas são iguais, mas NÃO SÃO CONTÍNUAS, portanto o campo não é conservativo pois suas derivadas não são contínuas na origem, onde justamente o enunciado pede.

Portanto, considerando C *uma curva positiva qualquer e* C_a *um círculo negativo contendo a origem, temos uma região sem a origem entre* C_a *e* C *com derivadas contínuas, já que não possui a origem como ponto singular. Pelo Teorema de Green, temos que*

$$\int_C F \cdot dr - \int_{C_a} F \cdot dr = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = 0$$
$$\int_C F \cdot dr = \int_{C_a} F \cdot dr$$

Portanto, agora podemos calcular a integral sobre C_a.

$$
\begin{aligned}
&x = a\cos t\\
&y = a\sin t\\
&0 \le t \le 2\pi\\
&I = \int_0^{2\pi} -\frac{a\sin t}{a^2}(-a\sin t dt) + \frac{a\cos t}{a^2}(a\cos t dt)\\
&I = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi
\end{aligned}
$$