# Geometria com Produto Interno

Esdras R. Carmo - 170656

27 de Outubro de 2016

## 1 Norma e Distância

Se $V$ tem $< \cdot, \cdot >$ produto interno, então:

- $V$ também tem $\| \, . \, \| = \sqrt{< \cdot, \cdot >}$ comprimento;
- $V$ tem uma distância $d(u, v) = \| v - u \|$.

**Exemplo 1.1.** *Sendo $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ com produto interno:*

$$< f(x), g(x) > := \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

*se $f(x) = 3 + 2x$, $g(x) = x^2$.*

$$< f(x), g(x) > = \int_0^1 (3 + 2x)x^2 dx = \frac{3}{2}$$

$$\| f(x) \| = \sqrt{< f(x), f(x) >} = \sqrt{\int_0^1 (3 + 2x)^2 dx} = \frac{9}{\sqrt{3}}$$

## 2 Ângulo

Por Cauchy-Schwarz temos:

$$< u, v >^2 \leq < u, u >< v, v > \Rightarrow \frac{< u, v >^2}{< u, u >< v, v >} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{< u, v >}{\sqrt{< u, u >}\sqrt{< v, v >}} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{< u, v >}{\| u \| \| v \|} \leq 1$$

Portanto definimos:

$$\cos\theta = \frac{< u, v >}{\| u \| \| v \|}$$

Para $\theta \in [0, \pi]$.

# 3 Ortoganalidade

Se $V$ $F$-espaço com $< \cdot, \cdot >$. Os vetores $u, v \in V$ são ortogonais se, e somente se, $< u, v >= 0$, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

## 3.1 Base Ortogonal

Se $V$ um espaço com $< \cdot, \cdot >$ e $\dim V < \infty$ uma base $\beta$.

1. **Ortogonal** se $\beta$ é conjunto ortogonal, ou seja, todos os vetores de $\beta$ são ortogonais entre si;

2. **Ortonormal** se $\beta$ é conjunto ortonormal, ou seja, além de ortogonais, os vetores são unitários (norma $= 1$).

Se tivermos base ortogonal, é muito simples escrever um vetor nessa base, pois teremos uma fórmula para dar os coeficientes da seguinte forma. Para todo $v \in V$, então:

$$\alpha_i = \frac{< v, q_i >}{< q_i, q_i >}$$

onde $q_i$ é o vetor $i$ da base *beta*.