Mudança de Base

Esdras R. Carmo - 170656

6 de Outubro de 2016

1 Notações

Escrevemos a mudança de base da seguinte forma:

$$[X]_{B_1} = M_{B_1 \leftarrow B_2} [X]_{B_2}$$
$$[X]_{B_2} = M_{B_2 \leftarrow B_1} [X]_{B_1}$$

É mais fácil se B_1 é canônica começar por ela.

No entanto, outros livros podem acabar com nossa vida fazendo outras notações, como $[M]_{B_1}^{B_2}$ e $[M]_{B_2}^{B_1}$

2 Exemplos

Exemplo 2.1. *Seja* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *vetor e* $B_3 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. *O que é* $[X]_{B_3}$*?*

Pela primeira solução, basta resolvermos o sistema:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = X$$
$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim, basta encontrar c_1 *e* c_2*. Mas esta solução é sem graça, portanto faremos da segunda forma.*

Pela segunda solução, seja $B_1 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *canônica, observamos que* $X = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$. *Comparando* B_1 *e* B_3, *podemos calcular:*

$$[X]_{B_1} = M_{B_1 \leftarrow B_3}[X]_{B_3}$$

Note que $M_{B_1 \leftarrow B_3}$ *possui colunas com as coordenadas dos vetores na base* B_3 *com relação a* B_1 *(canônica). Portanto:*

$$\begin{aligned} M_{B_1 \leftarrow B_3} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. *Seja* $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. *Qual é a relação entre* $[X]_{B_2}$ *e* $[X]_{B_3}$*?*

Considerando B_1 *canônica, e ainda:*

$$\begin{aligned} B_2 &= \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ B_3 &= \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Escrevemos então $[X]_{B_2}$ *e* $[X]_{B_3}$ *manualmente fazendo cálculos diretos:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.u_1 + 2.u_2 \Rightarrow [X]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} &= 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4.v_1 - \frac{2}{3}v_2 \Rightarrow [X]_{B_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observamos também $[X]_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e possuímos as relações:*

$$\begin{aligned} [X]_{B_1} &= M_{B_1 \leftarrow B_2}[X]_{B_2} \\ [X]_{B_1} &= M_{B_1 \leftarrow B_3}[X]_{B_3} \end{aligned}$$

Como as matrizes são invertíveis, temos:

$$[X]_{B_2} = (M_{B_1 \leftarrow B_2})^{-1}[X]_{B_1}$$

Da segunda relação, temos:

$$[X]_{B_2} = (M_{B_1 \leftarrow B_2})^{-1} M_{B_1 \leftarrow B_3}[X]_{B_3}$$
$$(M_{B_1 \leftarrow B_2})^{-1} M_{B_1 \leftarrow B_3} = M_{B_2 \leftarrow B_3} = M_{B_2 \leftarrow B_1} M_{B_1 \leftarrow B_3}$$

3 Representação Matricial

Agora partiremos de um $T : V \longrightarrow W$ linear e chegaremos a uma matriz.

3.1 Exemplos

Exemplo 3.1. *Seja:*

$$T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$
$$a + bx \mapsto b + ax^2$$

Base de saída é B_1 e de chegada B_2:

$$B_1 = \{1 + x, x\}$$
$$B_2 = \{1 - x^2, x, x^2\}$$

Queremos $T_{B_2 \leftarrow B_1}$. Assim faremos:

$$T(1 + x) = 1 + x^2 = 1(1 - x^2) + 0.x + 2.x^2$$
$$T(x) = 1 = 1(1 - x^2) + 0.x + 1.x^2$$

Assim, temos a transformação como colunas das coordenadas encontradas:

$$T_{B_2 \leftarrow B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que agora essa representação matricial funciona para calcular $T(v)$ *com* $v = 2 + 3x$. *Fazendo a mudança de coordenada:*

$$v = 2 + 3x = 2.(1 + x) + 1.x \Rightarrow [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(v) = 3 + 2x^2 = 3.(1 - x^2) + 0.x + 5.x^2 \Rightarrow [T(v)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Agora observamos que:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = T_{B_2 \leftarrow B_1}[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$