Multiplicadores de Lagrange

Esdras R. Carmo - 170656

27 de Setembro de 2016

1 Método dos Multiplicadores de Lagrange

Resoluções de problemas de otimização com restrições. Dessa forma, se temos m restrições $g_i(x)$, então existem escalares λ_i tais que

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x)$$

Assim precisamos determinar o x e os λ_i tais que:

$$\begin{cases} \nabla f(x) & = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) \\ g_i(x) & = 0 \end{cases}$$

Utilizando os multiplicadores de Lagrande, não faz sentido fazer o teste da matriz Hessiana pois $\nabla f(x) \neq 0$. Além disso, esse método sempre dará os pontos máximos e mínimos, nunca um ponto de sela.

1.1 Exemplo 1

Precisamos de x, y, z que fornecem o volume máximo de uma caixa de $12m^2$ de papelão sem a tampa

Precisamos maximizar $f(x, y, z) = xyz$ com a restrição $g(x, y, z) = xy+2xz+2yz-12 = 0$, que é a quantidade de papelão dada no enunciado. Por lagrange, temos:

$$\begin{cases} \nabla f & = \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) & = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$
$$\nabla g(x, y, z) = (y + 2z, x + 2z, 2y + 2x)$$

$$\begin{cases} yz &= \lambda(y+2z) \\ xz &= \lambda(x+2z) \\ xy &= \lambda(2y+2x) \\ xy+2yz+2xz &= 12 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema não linear, temos, pela primeira e segunda equação:

$$\begin{aligned} \frac{yz}{y+2z} &= \frac{xz}{x+2z} \ , \ z \neq 0 \\ y(x+2z) &= x(y+2z) \\ 2yz &= 2xz \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Pelas equações 2 e 3, temos:

$$\begin{aligned} \frac{xz}{x+2z} &= \frac{xy}{2(x+y)} \ , \ x \neq 0 \\ 2z(x+y) &= y(x+2z) \\ 2zx+2zy &= xy+2zy \\ y &= 2z \end{aligned}$$

Logo, $x = y = 2z$. Portanto, substituindo na equação 4, temos:

$$\begin{aligned} x^2+x^2+x^2 = 12 \\ x = 2 \ , \ como \ x > 0 \end{aligned}$$

Assim temos $(x, y, z) = (2, 2, 1)$.

1.2 Exemplo 2

Determine os valores extremos de $f(x, y)$ no disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2$$

Encontrando os pontos críticos de f.

$$\begin{aligned}\nabla f &= (2x, 4y) = (0,0)\\ x &= 0\\ y &= 0\end{aligned}$$

Portanto, $(0,0)$ é um ponto crítico de f. Note que $f(0,0) = 0$, e $(0,0)$ está no interior do disco. Agora então deveremos encontrar os pontos da fronteira do disco.

Considere maximizar ou minimizar $f(x,y)$ sujeito à $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Note que $y^2 = 1 - x^2$, logo, substituindo em f, temos:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -x^2 + 2\\ \frac{d\varphi}{dx}(x) &= -2x = 0 \Rightarrow x = 0\end{aligned}$$

Então φ tem máximo em $x = 0$. Nesse caso, temos $y = \pm 1$ e $f(0, \pm 1) = 2$. Dessa forma f tem valor máximo em $(0,1)$ e $(0,-1)$ e mínimo em $(0,0)$.

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, temos:

$$\nabla f = (2x, 4y) \ e \ \nabla g = (2x, 2y)$$

$$\begin{cases} 2x & = \lambda 2x\\ 4y & = \lambda 2y\\ x^2 + y^2 & = 1\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos as soluções: $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$. Note que $f(\pm 1, 0) = 1$ e $f(0, \pm 1) = 2$. Então o máximo é 2 e o mínimo 0 (que se encontra no interior da região).

1.3 Exemplo 3

Determine o valor máximo da função $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ na curva da intersecção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Assim precisamos maximizar a função f sendo que (x,y,z) satisfaz $g_1(x,y,z) = x - y + z - 1 = 0$ e $g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Pelo método dos Multiplicadores de Lagrange, temos:

$$\begin{cases} \nabla f &= \lambda \nabla g_1 + \gamma \nabla g_2 \\ g_1(x,y,z) &= 0 \\ g_2(x,y,z) &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 &= \lambda + 2\gamma x \\ 2 &= -\lambda + 2\gamma y \\ 3 &= \lambda \\ x - y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= -\frac{1}{\gamma} \\ y &= \frac{5}{2\gamma} \end{cases}$$

De (5), temos

$$\gamma = \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

TERMINAR