Revisão para a P2

Esdras R. Carmo - 170656

1 de Novembro de 2016

Exemplo 0.1. *Seja $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ com produto interno:*

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

(a) Determine a matriz A com relação a $\beta = \{1, x, x^2\}$ canônica:
Como $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é produto interno, então A é simétrica. Então calculamos:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \langle v_1, v_1\rangle = 3\\
a_{22} &= \langle v_2, v_2\rangle = 2\\
a_{33} &= \langle v_3, v_3\rangle = 2\\
a_{12} &= \langle v_2, v_1\rangle = 0 = a_{21}\\
a_{13} &= \langle v_3, v_1\rangle = 2 = a_{31}\\
a_{23} &= \langle v_3, v_2\rangle = 0 = a_{32}\\
A &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto a fórmula completa é:

$$\langle a + bx + cx^2, d + ex + fx^2\rangle = \begin{pmatrix} d & e & f\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

(b) Se $p = -1 + 3x + x^2$ e $q = 4 + 2x - x^2$, encontre $\langle p, q\rangle$ usando Y^tAX

Faremos os cálculos:

$$\langle p, q\rangle = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\langle p, q\rangle = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1\\ 6\\ 0\end{pmatrix} = 8$$

(c) *Achem todos $t \in V$, t. q., $\langle p, t\rangle = 0$, i. e., são perpendiculares.*

Tome $t = d + ex + fx^2$, $d, e, f \in \mathbb{R}$. Então teremos:

$$
\begin{aligned}
\langle p, t\rangle &= 0 \\
\begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} &= -d + 6e = 0 \\
6e &= d \\
t &= 6e + ex + fx^2 \;\forall\; e, f \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Exemplo 0.2. *Seja $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $T : V \longrightarrow V$ tal que $A \mapsto A^t$. Mostre que os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Encontre os autoespaços.*

Para a solução, suponha que existam autopares (λ, A) e deduzimos λ.

- *Temos, se (λ, A) autopar:*

$$T(A) = \lambda A = A^t$$

- *Aplicando a transformação novamente em ambos os lados, teremos:*

$$
\begin{aligned}
T(T(A)) &= T(\lambda A) = \lambda T(A) \\
A &= \lambda^2 A.
\end{aligned}
$$

Como $A \neq 0$, então teremos $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

- *Encontramos V_1 e V_{-1}.*

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \{A \in V \mid A^t = A\} \\
V_{-1} &= \{A \in V \mid A^t = -A\}
\end{aligned}
$$

Ou seja, V_1 é o espaço das matrizes simétricas e V_{-1} das antissimétricas.