Transformações Lineares

Esdras R. Carmo - 170656

20 de Setembro de 2016

As transformações lineares podem ser vistas como função que relaciona dois espaços vetoriais, um chamado de domínio e outro de contra-domínio, da seguinte forma: $T : V \longrightarrow W$.

1 Axiomas da linearidade

1. $T(v + w) = T(v) + T(w)$
2. $T(\lambda v) = \lambda T(v)$

2 Transformações Lineares como matrizes

Sendo $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, temos, se $w \in V$ e $E_n \in W$:

$$
\begin{aligned}
w &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \\
T(w) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \\
T(w) &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) \\
T(v_n) &= E_n \\
T(w) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i
\end{aligned}
$$

Dessa forma podemos representar as transformações lineares como multiplicação matricial. Se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \in \mathbb{R}^n$, então $T(X) = AX$ sendo A uma matriz $m \times n$.

2.1 Kernel (Núcleo)

Sendo A a matriz da transformação linear T, então $\ker(A)$ é um subespaço vetorial.

$$\ker(A) = \{x \in V \mid T(x) = 0\}$$

2.2 Imagem

A imagem $\operatorname{Im}(A)$ é um subespaço vetorial de W tal que:

$$\operatorname{Im}(A) = \{y \in W \mid \exists\, x \in V, y = T(x)\}$$

3 Teorema Posto-nulidade

Sendo Nulidade a dimensão do kernel de A e posto a dimensão da imagem de A, então:

$$\operatorname{Nul}(A) + \operatorname{Posto}(A) = \dim V$$

Escalonando a matriz A, podemos dizer que a quantidade de linhas com zeros é a nulidade de A, portanto, a partir desse teorema é possível identificar seu posto.

4 Posto-linha e Posto-coluna

$$\operatorname{Posto}(A) = \operatorname{Posto}\left(A^t\right)$$

Dessa forma, afirmamos que o posto-linha da matriz A é igual ao seu posto-coluna, ou seja, há a mesma quantidade de vetores L.I. em A e A^t.