Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

Esdras R. Carmo - 170656

24 de Outubro de 2016

1 Mudança de Coordenadas

Temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
z &= z \\
r^2 &= x^2 + y^2
\end{aligned}$$

Ou seja, temos x e y em coordenadas polares e z livre em cartesiana. Essas coordenadas são boas para descrever figuras de revolução.

1.1 Exemplos

Exemplo 1.1. *Descreva a superfície cuja equação em coordenadas cilindricas é $z = r$.*

Temos:

$$\begin{aligned}
z^2 &= r^2 \\
z^2 &= x^2 + y^2
\end{aligned}$$

Ou seja, temos um cone.

1.2 Integrais Triplas

Se precisamos calcular a integral $\iiint\limits_E f(x,y,z)dV$ e

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

E além disso:

$$D = \{(r,\theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

Então:

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\alpha)}^{h_2(\beta)} \int_{u_1(r,\theta)}^{u_2(r,\theta)} f(r,\theta,z) r dz dr d\theta$$

2 Exemplos

Exemplo 2.1. *Um sólido E está contido no cilindro $x^2+y^2=1$, abaixo do plano $z=4$ e acima do paraboloide $z=1-x^2-y^2$. A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E.*

Lembramos que a massa é:

$$m = \iiint\limits_E \rho(x,y,z)dV$$

Descrevendo o sólido E:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 1-x^2-y^2 \leq z \leq 4\}$$
$$E_{r\theta z} = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1-r^2 \leq z \leq 4\}$$

Agora podemos calcular a integral, sabendo que $\rho(r,\theta,z) = kr$:

$$m = \iiint\limits_{E_{r\theta z}} \rho(x,y,z) r dz dr d\theta$$
$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 kr^2 dz dr d\theta$$
$$m = k \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2(3+r^2) dr d\theta$$
$$m = k \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r^2+r^4) dr d\theta$$
$$m = k \int_0^{2\pi} \left(1+\frac{1}{5}\right) d\theta$$
$$m = \frac{6}{5} k \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$m = \frac{12k\pi}{5}$$

Exemplo 2.2. *Calcule*

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2+y^2) dz dy dx$$

Note que a integral é muito mais fácil de calcular em coordenadas cilíndricas. De fato, podemos calcular da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r^2 r dz dr d\theta \\
I &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 [z]_r^2 dr d\theta \\
I &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r^3 - r^4) dr d\theta \\
I &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{2} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 d\theta \\
I &= \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{32}{5} \right) d\theta \\
I &= \left[\frac{8}{5}\theta \right]_0^{2\pi} \\
I &= \frac{16\pi}{5}
\end{aligned}
$$