Transformação Inversa

Esdras R. Carmo - 170656

4 de Outubro de 2016

1 Inversas a esquerda e a direita

Definição 1.1. *$T : V \longrightarrow W$ linear.*

- *Uma aplicação $L : Im(T) \longrightarrow V$ é uma inversa a esquerda se*

$$(L \circ T)v = v \ \forall \ v \in V$$

- *Uma aplicação $R : Im(T) \longrightarrow V$ é inversa a direita se*

$$(T \circ R)w = w \ \forall \ w \in Im(T)$$

Teorema 1.1. *V, W dimensão finita (talvez diferentes). Se $T : V \longrightarrow W$ tem uma inversa a esquerda L, então T também tem uma inversa a direita. Além disso, L é única*

Teorema 1.2. *$T : V \longrightarrow W$ linear. Então T tem uma inversa a esquerda $\Leftrightarrow$ T é injetora.*

Definição 1.2. *Se $T : V \longrightarrow W$ linear com inversa a esquerda, denotamos a únicda inversa a esquerda com $T^{-1} : Im(T) \longrightarrow V$ e dizemos que T é invertível.*

Teorema 1.3. *Se $T : V \longrightarrow W$ isomorfismo $\Rightarrow T^{-1} : W \longrightarrow V$ é isomorfismo.*

2 Exemplos

Exemplo 2.1. *Definimos $T : P_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ como $a + bx \mapsto (a, 2b, a + b)$*

$$\ker(T) = \{a + bx \mid (a, 2b, a + b) = (0, 0, 0)\} = \{(0, 0, 0)\}$$

Dessa forma, concluimos que T é injetora e possui inversa a esquerda. Agora a construímos:

$$\begin{aligned}
Im\,(T) &= span\,\{(1,0,1),(0,2,1)\} \\
T^{-1} : Im\,(T) \longrightarrow P_1(\mathbb{R}) & \\
(1,0,1) &\mapsto 1 \\
(0,2,1) &\mapsto x \\
(\alpha,\beta,\gamma) &\mapsto \alpha + \frac{\beta}{2}x
\end{aligned}$$

Verificar!

Exemplo 2.2. *Definimos* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *como* $(x,y,z) \mapsto (x-z, 2z+y)$.

$$\begin{aligned}
Im\,(T) &= span\,\{(1,0),(0,1),(-1,2)\} = \mathbb{R}^2 \\
\ker(T) &= span\,\{(1,-2,1)\} \neq \{(0,0,0)\}
\end{aligned}$$

T não é injetora, logo T não tem inversa a esquerda. No entando, existem mais de uma inversa direita.

$$\begin{aligned}
R_1 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ \ (a,b) \mapsto (a,b,0) \\
R_2 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ \ (a,b) \mapsto \left(a + \frac{b}{2}, 0, \frac{b}{2}\right)
\end{aligned}$$

Verificar!