Integrais Duplas sobre Retângulos

Esdras R. Carmo - 170656

3 de Outubro de 2016

1 Definição de Retângulo

Dado dois intervalos, podemos definir o retângulo R como o produto cartesiano entre eles, ou seja, todas as possibilidades de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem ambos os intervalos:

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

2 Volume de f definido em um retângulo

Dado uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos aproximar o volume dela em R como:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \Delta A$$
$$\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$$

Quando $n \to \infty$, temos:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \Delta A$$

Chamada a integral dupla de Riemann.

2.1 Propriedades da Integral Dupla

Analogamente com o que temos para a integral simples, segue:

$$\iint\limits_R (f(x,y) + g(x,y))dA = \iint\limits_R f(x,y)dA + \iint\limits_R g(x,y)dA$$
$$\iint\limits_R cf(x,y)dA = c\iint\limits_R f(x,y)dA$$

E ainda temos um comportamento linear, pois se $f(x,y) \geq g(x,y)\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}$, então:

$$\iint\limits_R f(x,y)dA \geq \iint\limits_R g(x,y)dA$$

2.2 Valor Médio de f

O valor médio da função f no retângulo A é dado por:

$$\bar{f} = \frac{1}{A(R)} \iint\limits_R f(x,y)dA$$

Em que $A(R)$ é a área do retângulo R.

Além disso, se $f(x,y) > 0$, então:

$$A(R) \cdot \bar{f} = \iint\limits_R f(x,y)dA$$

2.3 Teorema de Fubini

Por Teorema de Fubini, podemos definir nossa integral dupla sobre retângulo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
R &= [a,b] \times [c,d] \\
V &= \int_a^b A(x)dx \\
V &= \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx
\end{aligned}$$

2.4 Caso especial para função produto

Caso temos uma função $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$, então podemos:

$$
\begin{aligned}
R &= [a,b] \times [c,d] \\
\iint\limits_R f(x,y)dA &= \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y)dy \right) dx \\
\iint\limits_R f(x,y)dA &= \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy
\end{aligned}
$$

3 Exemplos

Exemplo 3.1. Calcule a integral dupla:

$$\iint\limits_R (x - 3y^2)dA$$

Em que:

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$

Separando a integral e calculando a integral iterada, temos:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_R (x - 3y^2)dA &= \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)dydx \\
&= \int_0^2 \left[xy - y^3 \right]_1^2 dx \\
&= \int_0^2 (x - 7)dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - 7x \right]_0^2 \\
\iint\limits_R (x - 3y^2)dA &= -12
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.2. Calcule a integral dupla

$$\iint\limits_R y \sin{(xy)} dA$$

em que

$$R = [1,2] \times [0,\pi]$$

Note que se iniciarmos a integrar por dy, teremos um processo muito mais trabalhoso, portanto faremos:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R y\sin(xy)dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y\sin(xy)dxdy \\
&= \int_0^\pi \left[-\cos(xy)\right]_1^2 dy \\
&= -\int_0^\pi (\cos(2y)\cos y)dy \\
&= -\left[\frac{\sin(2y)}{2} - \sin y\right]_0^\pi \\
\iint\limits_R y\sin(xy)dA &= 0
\end{aligned}$$

Exemplo 3.3. Determine o volume do sólido S que é delimitado pelo paraboloide elíptico:

$$x^2 + 2y^2 + z = 16$$

e pelos planos $x = 2$, $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

Note que a região de integração é o mesmo que $R = [0,2] \times [0,2]$. Além disso, temos $z = f(x,y)$ onde $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$. Portanto:

$$\begin{aligned}
V &= \iint\limits_R f(x,y)dA \\
V &= \int_0^2 \int_0^2 [16 - x^2 - 2y^2]dxdy \\
V &= \int_0^2 \left[16x - \frac{x^3}{3} - 2y^2x\right]_0^2 dy \\
V &= \int_0^2 \left[32 - \frac{8}{3} - 4y^2\right] dy \\
V &= \left[32y - \frac{8y}{3} - \frac{4}{3}y^3\right]_0^2 \\
V &= 48
\end{aligned}$$