Diagonalização

Esdras R. Carmo - 170656

18 de Outubro de 2016

1 Definições úteis

Teorema 1.1. *$T : V \longrightarrow V$ linear,* $\dim T = n < \infty$. *Então T é diagonalizável $\Leftrightarrow \exists \beta$ base ordenada de autovetores.*

Teorema 1.2. *(Autovetores correspondentes a autovalores distintos são sempre L.I.). Seja $T : V \longrightarrow V$ linear e (λ_1, v_1), ... , (λ_k, v_k) autopares tais que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são todos distintos $\Rightarrow$ o conjunto $\{v_1, \dots, v_k\}$ é L.I.*

Neste caso, se $k = \dim V$, então existe base de auto vetores, logo T é diagonalizável. No entanto essa condição é somente necessária, não valendo a inversa.

2 Exemplos

Exemplo 2.1. *Vamos encontrar uma base de autovetores para A:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que, $\forall v \in \mathbb{R}^3$ $T(v) = (x + y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e queremos que

$$(x + y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, então:

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3v_1$$

Note que se os vetores não forem múltiplos de v_1, então a equação não teria solução a menos que os dois lados sejam 0, i. e., $\lambda = 0$.

Portanto, adivinhando outros autovetores temos:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Logo v_1, v_2, v_3 é base de autovetores.

De outra forma podemos calcular a solução do polinômio característico:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2(3 - \lambda) = 0$$
$$\lambda_1 = 3$$
$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

E assim podemos calcular os subespaços dos lambda:

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Temos que os 3 autovetores encontrados são L.I.. Como $V = \mathbb{R}^3$ espaço de $\dim = 3$, então temos uma base de $\mathbb{R}^3$. Sendo γ a base ordenada com os autovetores, i. e.,

$$\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Assim podemos determinar a matriz diagonalizada como:

$$T_{\gamma \leftarrow \gamma} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.2.

$$T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$$
$$a + bx \mapsto (5a + 4b) + (-3a - 2b)x$$

Queremos autovalores, autovetores, é diagonalizável?
Escolhemos $\beta = \{1, x\}$ *canônica, então:*

$$\begin{aligned} T(1) &= 5 - 3x \\ T(x) &= 4 - 2x \\ T_{\beta \leftarrow \beta} &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim, podemos calcular pelo polinômio característico:

$$P(\lambda) = \det\left(T_{\beta \leftarrow \beta} - \lambda I_2\right) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

Os autovalores são distintos ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$*). Oba, então a matriz é diagonizável, já que* $\dim \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = 2$ *(OBA!)*
Vamos encontrar uma base de autovetores.
Para $\lambda_1 = 1$*, temos:*

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ i. e., } V_1 = \{1 - x\}$$

Similarmente, para $\lambda_2 = 2$*, temos:*

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \text{ i. e., } V_2 = \{4 - 3x\}$$

Portanto, temos a seguinte base de autovetores e a matriz diagonizada:

$$\begin{aligned} \gamma &= \{1 - x, 4 - 3x\} \\ T_{\gamma \leftarrow \gamma} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$