Integrais Triplas

Esdras R. Carmo - 170656

19 de Outubro de 2016

1 Definição para caixa retangular

Sendo a caixa $E = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, i. e.,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

Temos:

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z)dzdydx$$

Sendo possível alterar a ordem de integração.

2 Cálculo de volume

Dado um sólido E, então temos o seu volume como:

$$V(E) = \iiint\limits_E dV$$

3 Exemplos

Exemplo 3.1. *Calcule* $\iiint\limits_E zdV$, *onde* E *é o tetraedro delimitado por* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Note pelo desenho que a região é:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Assim, temos:

$$\iiint\limits_E z\,dV = \iint\limits_D \left[\int_0^{1-x-y} z\,dz\right] dA$$

$$= \iint\limits_D \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y} dA$$

$$\iiint\limits_E z\,dV = \frac{1}{2}\iint\limits_D (1-x-y)^2 dA$$

Agora precisamos encontrar a região D. Portanto:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$$

Assim, temos:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dydx$$

Fazendo $u(y) = 1 - x - y$, *temos*

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \int_{1-x}^0 -u^2 dudx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[-\frac{u^3}{3}\right]_{1-x}^0 dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3 dx$$

Tomando $v = 1 - x$, *temos:*

$$\frac{1}{6}\int_1^0 -v^3 dv = \frac{1}{6}\int_0^1 v^3 dv = \frac{1}{24}$$