Aula PED de Integrais Duplas

Esdras R. Carmo - 170656

7 de Outubro de 2016

1 Exercício 12, c)

Calcule:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos y dy dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos y dx dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx\right) dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy = 1
\end{aligned}$$

2 Exercício 17, d)

Calcule o volume de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}$.
Note a figura 1 que representa o que queremos calcular:

Assim temos:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1\int_0^1 2 dx dy - \int_0^1\int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy \\
V &= 2 - \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_0^1 dy \\
V &= 2 - \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y}{3}\right]_0^1 \\
V &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

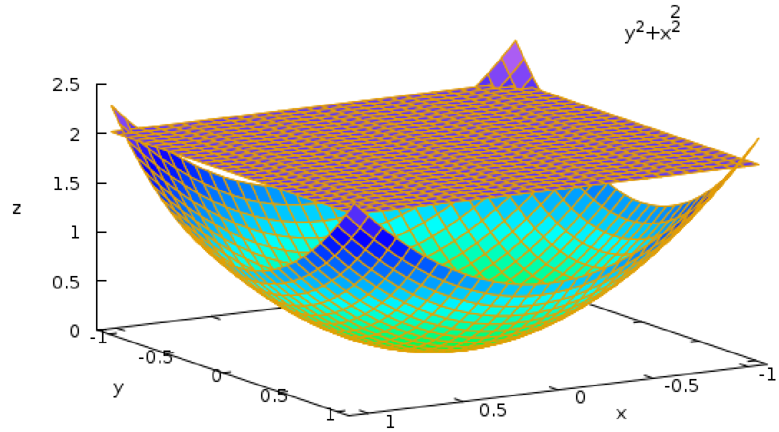

Figura 1: Gráfico de z

3 Exercício 26

Calcule:

$$\int_0^1 \int_x^1 3y^4 \cos{(xy^2)} dy dx$$

Assim temos, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq x \leq y$, representado em figura2

Alterando a ordem de integração temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^y 3y^4 \cos{(xy^2)} dx dy &= \int_0^1 \left[3x^2 \sin{(xy^2)}\right]_0^y dy \\
&= \int_0^1 [3y^2 \sin y^3] dy \\
&= \int_0^1 (\sin u) du \\
\int_0^1 \int_0^y 3y^4 \cos{(xy^2)} dx dy &= [-\cos u]_0^1 = 1 - \cos 1
\end{aligned}$$

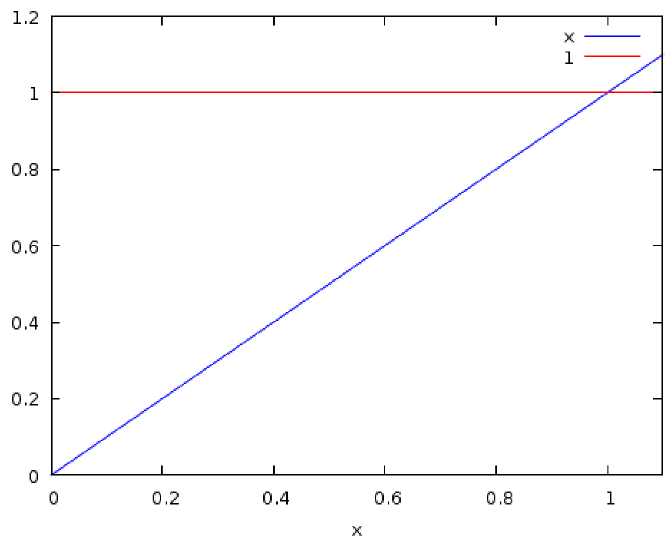

Figura 2: Região de integração

4 Exercício 37

Considere a seguinte integral:

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dxdy$$

1. Esboce a região de integração:
   Veja Figura 3

2. Mude a ordem de integração:

$$V = \int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2) dydx$$
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x\}$$

3. Resolva a integral:

$$\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2) dydx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_x^{2-x} dx$$
$$= \int_0^1 \left[(2 - x)x^2 + \frac{(2 - x)^3}{3} - x^3 - \frac{x^3}{3} \right] dx = \frac{4}{3}$$

A partir daí, a resolução fica a cargo do leitor.

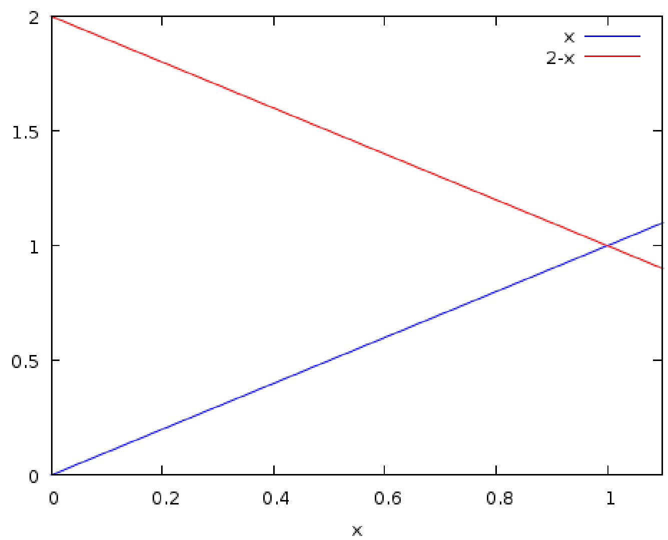

Figura 3: Região de integração

5 Exercício 30 c)

Determine o volume do sólido abaixo de $z = xy$ e acima do triângulo de vértices $(1,1)$, $(4,1)$, $(1,2)$. Dessa forma, temos o intervalo:

$$1 \leq x \leq 4$$
$$1 \leq y \leq -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

Resolvendo a integral, temos:

$$V = \int_1^4 \int_1^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}x} xydydx$$
$$V = \int_1^4 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_1^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}x} dx$$
$$V = \int_1^4 \frac{x}{2}\left[\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{3}x\right)^2 - 1\right] dx$$
$$V = \left[\frac{49x^2}{36} - \frac{14x^3}{54} + \frac{x^4}{72} - \frac{x^2}{4}\right]_1^4$$

O restante fica a cargo do leitor.