# Integrais Duplas sobre Retângulos

Esdras R. Carmo - 170656

3 de Outubro de 2016

## 1 Definição de Retângulo

Dado dois intervalos, podemos definir o retângulo $R$ como o produto cartesiano entre eles, ou seja, todas as possibilidades de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem ambos os intervalos:

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

## 2 Volume de $f$ definido em um retângulo

Dado uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos aproximar o volume dela em $R$ como:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \Delta A$$
$$\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$$

Quando $n \to \infty$, temos:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \Delta A$$

Chamada a integral dupla de Riemann.

### 2.1 Propriedades da Integral Dupla

Analogamente com o que temos para a integral simples, segue:

$$\iint\limits_R (f(x,y)+g(x,y))dA = \iint\limits_R f(x,y)dA + \iint\limits_R g(x,y)dA$$
$$\iint\limits_R cf(x,y)dA = c\iint\limits_R f(x,y)dA$$

E ainda temos um comportamento linear, pois se $f(x,y) \geq g(x,y)\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}$, então:

$$\iint\limits_R f(x,y)dA \geq \iint\limits_R g(x,y)dA$$

## 2.2 Valor Médio de $f$

O valor médio da função $f$ no retângulo $A$ é dado por:

$$\bar{f} = \frac{1}{A(R)} \iint\limits_R f(x,y)dA$$

Em que $A(R)$ é a área do retângulo $R$.

Além disso, se $f(x,y) > 0$, então:

$$A(R) \cdot \bar{f} = \iint\limits_R f(x,y)dA$$

## 2.3 Teorema de Fubini

Por Teorema de Fubini, podemos definir nossa integral dupla sobre retângulo da seguinte forma:

$$R = [a,b] \times [c,d]$$
$$V = \int_a^b A(x)dx$$
$$V = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

## 2.4 Caso especial para função produto

Caso temos uma função $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$, então podemos:

$$R = [a,b] \times [c,d]$$
$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_a^b \left( \int_c^d g(x)h(y)dy \right) dx$$
$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy$$