Teorema Fundamental das Integrais de Linhas

Esdras R. Carmo - 170656

21 de Novembro de 2016

1 Teorema para Integrais de Linha

Seja C uma curva lisa descrita por $r(t)$, $a \leq t \leq b$. Se f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então:

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

Análogo ao teorema fundamental do cálculo, sendo que o gradiente faz o papel da derivada.

1.1 Campo vetorial conservativo

Se o campo vetorial for gradiente de uma função, então é dito campo conservativo. Portanto, para esse caso, podemos calcular a integral conhecendo apenas o valor de f nas extremidades da curva C, se considerarmos o campo F:

$$F = \nabla f$$

1.2 Exemplo

Exemplo 1.1. *Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional:*

$$F(x) = -\frac{mMG}{\| x \|^3} x$$

ao mover uma particula de massa m *do ponto* $(3, 4, 12)$ *para o ponto* $(2, 2, 0)$ *ao longo de uma linha reta.*

Note que o trabalho é dado por:

$$W = \int_C F \cdot dr$$

Sabemos que o campo gravitacional é conservativo, i. e.:

$$F = \nabla f$$

onde:

$$f(x,y,z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Portanto, temos a seguinte integral, que pode ser resolvida pelo teorema fundamental das integrais de linha:

$$\begin{aligned} W &= \int_C \nabla f \cdot dr \\ W &= f(2,2,0) - f(3,4,12) \\ W &= \frac{mMG}{\sqrt{8}} - \frac{mMG}{13} \\ W &= mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right) \end{aligned}$$

2 Independência do Caminho

Dizemos que a integral de linha é independente do caminho se a integral sobre C_1 é igual à integral sobre C_2 para quaisquer C_1 e C_2 que possuam os mesmos pontos iniciais e finais.

Note que a integral de linha de um campo vetorial conservativo $F = \nabla f$ é independente do caminho, pois pelo teorema fundamental das integrais de linha, essa integral só irá depender do ponto inicial e final aplicados em f.

3 Curva Fechada

Uma curva é fechada se o ponto final e inicial são equivalentes, i. e., $r(b) = r(a)$.

Teorema 3.1. *A integral de linha $\int_C F \cdot dr$ é independente do caminho em D se e somente se $\int_C F \cdot dr = 0$ para toda curva fechada C.*

4 Determinando se F é um campo vetorial conservativo

Teoricamente, se a integral de linha é 0 para qualquer curva fechada C, então F é um campo vetorial conservativo. No entanto, esse teorema não nos ajuda na prática.

Supondo que

$$F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$$

é um campo vetorial conservativo, então existe f tal que $F = \nabla f$, portanto,

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ Q &= \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Pelo teorema de Clairaut, então:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Assim, caso essa igualdade não for válida, então o campo vetorial não é conservativo.

5 Tipos de Região

5.1 Curva Simples

Uma curva é dita simples se ela não se autointercepta em nenhum ponto entre as extremidades, excluindo os extremos. Podemos ter uma curva simples e fechada, por exemplo.

5.2 Região Simplesmente Conexa

Uma região D é simplesmente conexa se toda curva simples fechada em D contorna somente pontos que estão em D. Em outras palavras, a região não pode ter buracos. E também não é constituída por pedaços separados.

6 Recíproca do Teorema da Seção 4

Se $F = Pi + Qj$ um campo vetorial sobre uma região D aberta e simplesmente conexa. Se P e Q possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas e

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

então F é um campo vetorial conservativo.

7 Exemplos

Exemplo 7.1. *Determine se o campo vetorial*

$$F(x, y) = (x - y)i + (x - 2)j$$

é ou não conservativo.

Como não especifica a região D, então está considerando todo o plano xy. Portanto, é uma região simplesmente conexa e podemos aplicar a recíproca apresentada na Seção 6.

Considerando:

$$P(x, y) = x - y$$
$$Q(x, y) = x - 2$$

Temos as derivadas:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Portanto o campo vetorial F não é conservativo.

Exemplo 7.2. *Determine se o campo vetorial*

$$F(x,y) = (3+2xy)i + (x^2 - 3y^2)j$$

é ou não conservativo.

Consideremos

$$P(x,y) = 3 + 2xy$$
$$Q(x,y) = x^2 - 3y^2$$

Assim, temos as derivadas:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Logo, pela Seção 6, o campo vetorial F é conservativo.

Exemplo 7.3. ***a)*** *Se $F(x,y) = (3+2xy)i + (x^2 - 3y^2)j$, determine uma função f tal que $F = \nabla f$.*

Como já sabemos que F é um campo vetorial conservativo pelo Exemplo 7.2, então temos:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j = P(x,y)i + Q(x,y)j$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 + 2xy$$
$$f(x,y) = \int (3+2xy)dx = 3x + x^2y + g(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 3y^2$$
$$g'(y) = -3y^2$$
$$g(y) = -\int 3y^2 dy = -y^3 + K$$

Logo, a função que estávamos procurando:

$$f(x,y) = 3x + x^2y - y^3 + K$$

onde K é uma constante real.

b) *Calcule a integral de linha $\int_C F \cdot dr$, em que C é a curva dada por*

$$r(t) = e^t \sin t\boldsymbol{i} + e^t \cos t\boldsymbol{j}$$

com $0 \leq t \leq \pi$.

Pelo teorema fundamental das integrais de linha, então

$$\int_C F \cdot dr = f(r(\pi)) - f(r(0))$$

Logo:

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= f(0, -e^{\pi}) - f(0,1)\\ &= -\left(-e^{\pi}\right)^3 + K - (-1^3 + K)\\ \int_C F \cdot dr &= e^{3\pi} + 1\end{aligned}$$

Exemplo 7.4. *Se*

$$F(x,y,z) = y^2\boldsymbol{i} + (2xy + e^{3z})\boldsymbol{j} + 3ye^{3z}\boldsymbol{k}$$

é um campo vetorial conservativo, determine f função potencial.

Temos as seguintes relações entre f e F:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y^2\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2xy + e^{3z}\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 3ye^{3z}\end{aligned}$$

Temos que:

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int y^2 dx = xy^2 + g(y,z) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2xy + g_y(y,z) = 2xy + e^{3z} \\
g(y,z) &= \int e^{3z} dy = ye^{3z} + h(z) \\
f(x,y,z) &= xy^2 + ye^{3z} + h(z) \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 3ye^{3z} + h'(z) = 3ye^{3z} \\
h'(z) &= 0 \\
h(z) &= K \in \mathbb{R} \\
f(x,y,z) &= xy^2 + ye^{3z} + K
\end{aligned}
$$