Pontos de máximo, mínimo e sela

Esdras R. Carmo - 170656

21 de Setembro de 2016

1 Ponto crítico

1.1 Exemplo 8

Como exemplo a função $f(x, y) = xy$ possui um ponto estacionário em $(0, 0)$:

$$\nabla f(x, y) = (y, x)$$
$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

Porém, $(0, 0)$ não é um extremo de f. Considerando uma bola aberta β que contém $(0, 0)$. Se considerarmos (x_1, y_1) no primeiro quadrante e (x_2, y_2) no segundo quadrante, temos:

$$f(x_2, y_2) < f(0, 0) < f(x_1, y_1)$$

Dessa forma provamos que $(0, 0)$ é um ponto de sela em f.

1.2 Exemplo 9

Considerando a função $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ possui um ponto de sela na origem.

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y^2, -6xy)$$
$$\nabla f(x, y) = 3(x^2 - y^2, -2xy)$$
$$\nabla f(x, y) = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Assim a função tem um ponto crítico em $(0, 0)$.

1.3 Exemplo 10

A função $f(x,y) = x^2y^2$ tem um mínimo absoluto na origem pois $f(x,y) \geq f(0,0)\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2 Matriz Hessiana

A matriz $n \times n$ com derivadas de segunda ordem é chamada matriz Hessiana ($H(\mathbf{x})$), que tem o papel de segunda derivada de uma função de n variáveis.

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

Por exemplo, temos a seguinte matriz Hessiana para 2 variáveis:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

2.1 Hessiana do exemplo 9

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix}$$

2.2 Teste com auto-valores

Se todos os auto-valores de $H(\mathbf{a})$ são positivos, f tem um ponto mínimo relativo. Caso todos forem negativos, f tem um ponto de máximo relativo. Caso possua auto-valores positivos e negativos, então $\mathbf{a}$ é um ponto de sela de f.

2.3 Teste com determinante para $H_{2\times 2}$

Para uma função f de duas variáveis (x,y) com derivadas de segunda ordem contínuas, temos o teste de segunda derivada pelo determinante da matriz Hessiana:

$$D = |H(x,y)|$$

Assim temos os seguintes casos:

- Se $D > 0$ e $f_{xx} > 0$, f tem um mínimo relativo;
- Se $D > 0$ e $f_{xx} < 0$, f tem um máximo relativo;
- Se $D < 0$, é um ponto de sela de f;
- Se $D = 0$, não podemos deduzir nada sobre f.

3 Exemplos

3.1 Exemplo 15

Determine pontos máximo, mínimo e sela da função $f(x, y) = x^4+y^4-4xy+1$.

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x)\\ \nabla f(x, y) &= (0, 0)\end{aligned}$$

Assim temos a relação:

$$\begin{cases} x^3 - y &= 0\\ y^3 - x &= 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} y &= x^3\\ x(x^8 - 1) &= 0\end{cases}$$

Temos então com raizes reais:

$$\begin{aligned}(x_0, y_0) &= (0, 0)\\ (x_1, y_1) &= (1, 1)\\ (x_2, y_2) &= (-1, -1)\end{aligned}$$

Calculando a matriz Hessiana:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4\\ -4 & 12y^2\end{bmatrix}$$

- Para o ponto $(0, 0)$, temos $\det H(0, 0) = -16$, ponto de sela;
- Para o ponto $(1, 1)$, temos $\det H(1, 1) = 12^2 - 16 > 0$, $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, ponto de mínimo;
- Para o ponto $(-1, -1)$, temos $\det H(-1, -1) = 12^2-16 > 0$, $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, ponto de mínimo;

3.2 Exemplo 16

Determinar a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x+2y+z=4$

$$d^2 = (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+2)^2$$
$$z = 4 - x - 2y, \textit{ Pela equação do plano}$$

Considerando a seguinte função:

$$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$$

Enconstrando um ponto de mínimo para a função $f(x,y)$:

$$\nabla f(x,y) = (2(x-1) + 2(6-x-2y)(-1), 2y + 2(6-x-2y)(-2))$$
$$\nabla f(x,y) = 0$$

TERMINAR...