Integrais de Superfícies

Esdras R. Carmo - 170656

5 de Dezembro de 2016

1 Área de Superfícies Parametrizadas

Lembramos que a área do paralelogramo dado por 2 vetores (u e v) é dada por:

$$S = \| u \wedge v \|$$

Portanto, se temos uma superfície parametrizada lisa S, então sua área é:

$$A(S) = \iint_D \| r_u \wedge r_v \| \, dA$$

onde

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u}$$
$$r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$$

1.1 Área de Superfície de Gráfico de uma Função

Uma função de duas variáveis pode ser escrita como:

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

Assim encontramos:

$$\| r_x \wedge r_y \| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

1.2 Exemplos

Exemplo 1.1. *Determine a área da esfera de raio a.*

Descrevemos então a esfera em coordenadas esféricas:

$$
\begin{aligned}
x &= a\sin\phi\cos\theta \\
y &= a\sin\phi\sin\theta \\
z &= a\cos\phi \\
r(\phi,\theta) &= (a\sin\phi\cos\theta, a\sin\phi\sin\theta, a\cos\phi) \\
0 &\le \phi \le \pi \\
0 &\le \theta < 2\pi
\end{aligned}
$$

Agora precisamos calcular:

$$
\begin{aligned}
r_\phi &= (a\cos\phi\cos\theta, a\cos\phi\sin\theta, -a\sin\phi) \\
r_\theta &= (-a\sin\phi\sin\theta, a\sin\phi\cos\theta, 0) \\
\parallel r_\phi \wedge r_\theta \parallel &= a^2\sin\phi
\end{aligned}
$$

Logo, podemos encontrar a área:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\phi d\phi d\theta \\
A &= 4\pi a^2
\end{aligned}
$$

2 Integrais de Superfície de Campo Escalar

Sendo a função f de três variáveis, cujo domínio é dado pela superfície S descrita por

$$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

então a integral de superfície é:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(r(u,v)) \parallel r_u \wedge r_v \parallel dA$$

Note que é o mesmo que calcular a área, mas multiplicando pelo valor do campo escalar f.

2.1 Exemplos

Exemplo 2.1. *Calcule a integral de superfície*

$$\iint\limits_S x^2 dS$$

em que S é a esfera unitária $x^2 + y^2 + x^2 = 1$.

Semelhante ao Exemplo 1.1, temos:

$$x^2 = \sin^2 \phi \cos^2 \theta$$
$$a = 1$$
$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \phi \cos^2 \theta \sin \phi d\phi d\theta$$
$$I = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi \sin^2 \phi d\phi$$
$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta \int_0^{\pi} (\sin \phi - \sin \phi \cos^2 \phi) d\phi$$
$$I = \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} (1 - u^2) du$$
$$I = \frac{1}{2} \pi \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^{1}$$
$$I = \frac{4\pi}{3}$$

Exemplo 2.2. *Calcule*

$$\iint_S y dS$$

em que S *é a superfície* $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$ *e* $0 \leq y \leq 2$.

Nesse caso podemos parametrizar a superfície facilmente como:

$$r(x, y) = (x, y, x + y^2)$$
$$r_x = (1, 0, 1)$$
$$r_y = (0, 1, 2y)$$
$$r_x \wedge r_y = (-1, -2y, 1)$$
$$\| \, r_x \wedge r_y \, \| = \sqrt{2 + 4y^2}$$

Portanto, podemos calcular a integral:

$$I = \iint_D y \, \| \, r_x \wedge r_y \, \| \, dA$$
$$I = \int_0^1 \int_0^2 y \sqrt{2 + 4y^2} dy dx$$
$$I = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$

3 Integrais de Superfície de Campos Vetoriais

Se $\vec{F}$ um campo vetorial, então a integral de superfície de $\vec{F}$ sobre S é:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

onde $\vec{n}$ é o vetor unitário da superfície S. A integral acima também é chamada de fluxo de $\vec{F}$ através de S.

$$\vec{n} = \frac{r_u \wedge r_v}{\| r_u \wedge r_v \|}$$

Em outras palavras:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F} \cdot \frac{r_u \wedge r_v}{\| r_u \wedge r_v \|} \| r_u \wedge r_v \| dA$$
$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F} \cdot (r_u \wedge r_v) dA$$

3.1 Exemplos

Exemplo 3.1. *Determine o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = (z, y, x)$ através da esfera unitária.*

Temos então, em coordenadas esféricas:

$$r_\phi \wedge r_\theta = (\sin^2\phi\cos\theta, \sin^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi)$$
$$\vec{F} = (\cos\phi, \sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta)$$
$$\vec{F} \cdot (r_\phi \wedge r_\theta) = 2\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta$$

Portanto a integral que queremos é:

$$I = \iint_E \vec{F} \cdot d\vec{E}$$
$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (2\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta) d\theta d\phi$$
$$I = \frac{4\pi}{3}$$