Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Esdras R. Carmo - 170656

5 de Outubro de 2016

1 Regiões

1.1 Tipo 1

Uma região R do tipo 1 é dada por:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Sendo g_1 e g_2 contínuas em $[a, b]$. Temos a integral:

$$\iint\limits_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx$$

1.2 Tipo 2

A região é dada por R da seguinte forma:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Sendo h_1 e h_2 contínuas em $[c, d]$. Temos a integral:

$$\iint\limits_R f(x, y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy$$

2 Propriedades

Vale todas as propriedades das integrais duplas sobre retângulos. No entando, se $D = D_1 \cup D_2$, com $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, ou seja, interior não se interceptam, então:

$$\iint\limits_D f(x, y)dA = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dA + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dA$$

3 Área da Região

Sendo R uma região plana, então sua área é dada por:

$$A(R) = \iint\limits_R 1 dA$$

4 Exemplos

Exemplo 4.1. Calcula $\iint\limits_R (x + 2y) dA$, em que R é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Note a figura 4.1.

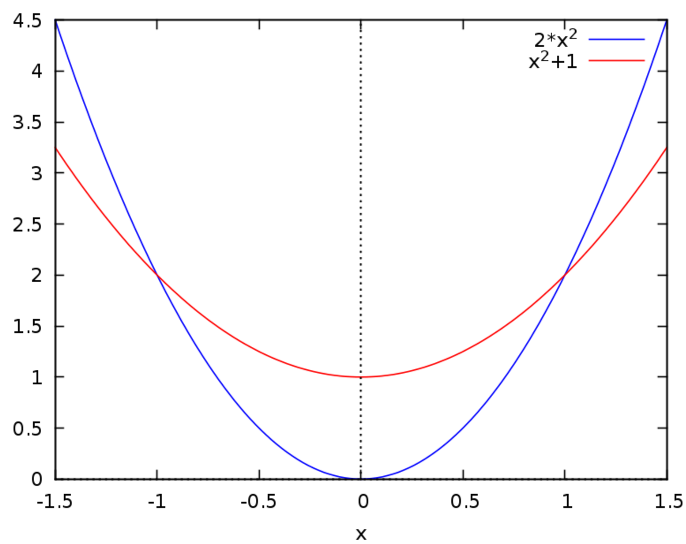

Figura 1: Gráfico das parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$

Assim, temos $2x^2 \leq y \leq 1 + x^2$. Vamos encontrar:

$$2x^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x = \pm 1$$

Portanto $-1 \leq x \leq 1$. Temos:

$$\iint_R (x+2y)dA = \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x}(x+2y)dydx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[xy+y^2\right]_{2x^2}^{1+x^2}dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[1+x+2x^2-x^3-3x^4\right]dy$$

$$\iint_R (x+2y)dA = \left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{3x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

Exemplo 4.2. Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região R do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e parábola $y = x^2$.

Note a figura 4.2.

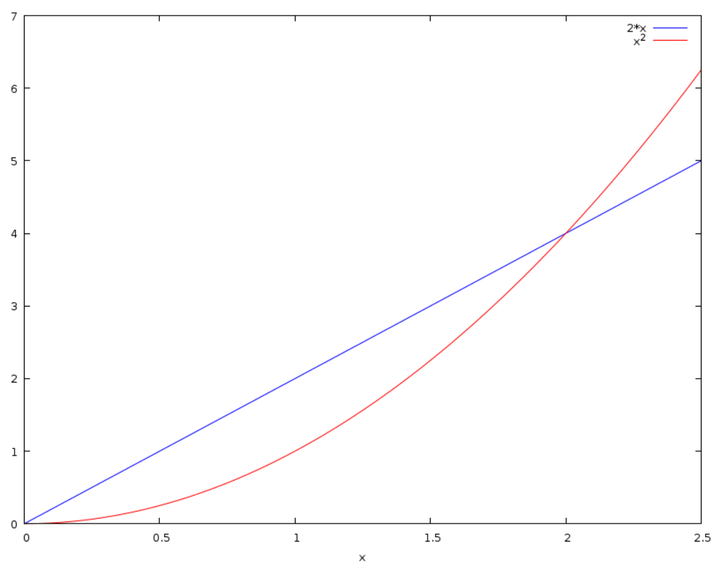

Figura 2: Gráfico da reta $y = 2x$ e parábola $y = x^2$

Assim, precisamos:

$$2x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$
$$0 \leq x \leq 2$$
$$x^2 \leq y \leq 2x$$

Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_R (x^2+y^2)dA &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)dydx \\
&= \int_0^2 \left[x^y + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{2x} \\
&= \int_0^2 \left[\frac{14}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3}\right] dx \\
&= \left[\frac{7x^4}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right]_0^2 \\
\iint\limits_R (x^2+y^2)dA &= \frac{216}{35}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.3. Calcule a integral iterada:

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 dydx$$

Verifique a mudança de região para o tipo 2:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 dydx &= \int_0^1 \int_0^y \sin y^2 dxdy \\
&= \int_0^1 \left[x \sin y^2\right]_0^y dy \\
&= \int_0^1 y \sin y^2 dy
\end{aligned}
$$

Tome $u = y^2$, $du = 2ydy$, $u(0) = 0$ e $y(1) = 1$, então:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 dydx &= \int_0^1 \frac{\sin u}{2} du \\
&= \frac{1}{2}\left[-\cos u\right]_0^1 \\
\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 dydx &= \frac{1}{2}(1 - \cos 1)
\end{aligned}
$$