Teorema de Stokes e do Divergente

Esdras R. Carmo - 170656

7 de Dezembro de 2016

1 Teorema de Stokes

Tendo uma superfície S orientada, lisa por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, lisa por partes, com orientação positiva. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial cujas componentes possuem derivadas parciais contínuas em região aberta de $\mathbb{R}^3$ que contém S, então tem-se:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\ \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

1.1 Consequências

Se temos duas superfícies com a mesma fronteira e ambas satisfazendo as hipóteses do Teorema, então a integral sobre suas superfícies do rotacional de $\vec{F}$ são iguais.

Ainda vimos que se $rot\ \vec{F} = 0$, então o campo é conservativo e a integral de linha sobre um caminho fechado C é zero. Isso é verificado também aplicando o Teorema de Stokes.

1.2 Exemplos

Exemplo 1.1. *Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, em que*

$$\vec{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$$

e C é a curva de intersecção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ (com orientação no sentido anti-horário quando vista por cima).

Tomamos como superfície o plano em que intersecta o cilindro e está contido dentro dele.

Calculando o rotacional de $\vec{F}$, temos:

$$rot\ \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$
$$rot\ \vec{F} = (0, 0, 1 + 2y)$$

Então precisamos calcular $\iint\limits_S (1+2y)\vec{k}\cdot d\vec{S}$.

Em coordenadas cilindricas, podemos descrever a superfície:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
z &= 2-y = 2-r\sin\theta \\
1 &\leq r \leq 1 \\
0 &\leq \theta \leq 2\pi \\
s(r,\theta) &= (r\cos\theta, r\sin\theta, 2-r\sin\theta)
\end{aligned}$$

Agora, para calcular a integral de superfície, precisamos:

$$\begin{aligned}
s_r &= (\cos\theta, \sin\theta, -\sin\theta) \\
s_\theta &= (-r\sin\theta, r\cos\theta, r\cos\theta) \\
s_r \wedge s_\theta &= (0, r, r)
\end{aligned}$$

Note que o produto vetorial retornou um vetor sempre acima à superfície, pois temos as componentes y *e* z *positiva. Dessa forma, caminhando pela curva com a cabeça em sentido ao vetor normal, temos a superfície à nossa esquerda. Logo essa superfície tem orientação positiva.*

Portanto, calculamos a integral I*:*

$$\begin{aligned}
I &= \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \\
I &= \iint\limits_S (1+2r\sin\theta)\vec{k}\cdot(s_r\wedge s_\theta)dA \\
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (0,0,1+2r\sin\theta)\cdot(0,r,r)drd\theta \\
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r+2r^2\sin\theta)drd\theta \\
I &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}+\frac{2r^3}{3}\sin\theta\right]_0^1 d\theta \\
I &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sin\theta\right)d\theta \\
I &= \pi
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2. *Calcule a integral* $\iint\limits_S \text{rot } \vec{F}\cdot d\vec{S}$ *em que*

$$\vec{F} = (xz, yz, xy)$$

e S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que está dentro do cilindro $x^2+y^2=1$ e acima do plano xy.

Sabemos, pelo teorema de Stokes que podemos calcular a integral $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ onde C é a curva dada pela interseção da esfera com o cilindro.

Encontrando a interseção:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 4 \\ x^2+y^2 &= 1 \\ z^2 &= 3 \\ z &= \sqrt{3},\ pois\ z>0 \end{aligned}$$

Agora, utilizando coordenadas cilindricas, temos a superfície:

$$\begin{aligned} &x=\cos\theta \\ &y=\sin\theta \\ &0\leq\theta<2\pi \end{aligned}$$

Logo, temos a curva:

$$\begin{aligned} r(\theta) &= (\cos\theta,\sin\theta,\sqrt{3}) \\ r'(\theta) &= (-\sin\theta,\cos\theta,0) \end{aligned}$$

Agora calculamos a integral:

$$\begin{aligned} I &= \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ I &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(\theta))\cdot r'(\theta)d\theta \\ I &= \int_0^{2\pi} (\sqrt{3}\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta,\cos\theta\sin\theta)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,0)d\theta \\ I &= 0 \end{aligned}$$

2 Teorema do Divergente

Também conhecido como Teorema de Gauss. Estabelece uma relação entre a integral do divergente de um campo vetorial $\vec{F}$ sobre uma região com a integral de $\vec{F}$ sobre a fronteira da região.

Se E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E, orientada positivamente. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial com derivadas parciais contínuas, tem-se:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E div\ \vec{F}dV$$

2.1 Exemplos

Exemplo 2.1. *Determine o fluxo do campo vetorial $\vec{F} = (z, y, x)$ sobre a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.*

Temos, pelo Teorema de Gauss, que:

$$I = \iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_E div\ \vec{F} dV$$

Calculamos o divergente:

$$div\ \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$
$$div\ \vec{F} = 1$$

Logo, temos a integral:

$$I = \iiint\limits_E dV$$

Como essa integral retorna o volume da esfera E com raio 1, temos:

$$I = \frac{4}{3}\pi$$

Exemplo 2.2. *Calcule*

$$I = \iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

em que:

$$\vec{F} = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))$$

e S é a superfície da região E limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 0$, $y + z = 2$.

Pelo teorema do divergente, temos I como

$$I = \iiint\limits_E div\ \vec{F} dV$$

Calculando o divergente:

$$div\ \vec{F} = y + 2y = 3y$$

Logo, temos a integral

$$I = \iiint\limits_E 3y dV$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq z \leq 1 - x^2$$

$$0 \leq y \leq 2 - z$$

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{0}^{2-z} 3y dy dz dx$$

$$I = \frac{184}{35}$$