Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

Esdras R. Carmo - 170656

26 de Outubro de 2016

1 Mudança de Coordenadas

Dado um ponto P com coordenadas (x, y, z) no sistema cartesiano, ele pode ser representado da seguinte forma em coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ):

$$
\begin{aligned}
&\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
&\theta = \arctan \frac{y}{x} \\
&z = \rho \cos \phi \\
&x = \rho \sin \phi \cos \theta \\
&y = \rho \sin \phi \sin \theta
\end{aligned}
$$

Onde $\rho \geq 0$ e $0 \leq \phi \leq \pi$.

1.1 Exemplo de Sólidos

1.1.1 Cunha Esférica

Uma cunha esférica é dada por:

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \pi, c \leq \phi \leq d\}$$

em que $0 \leq a, \beta - \alpha \leq 2\pi, 0 \leq c$ e $d \leq \pi$.

Olhando esse sólido em um sistema de coordenadas esféricas daria uma caixa, e no sistema cartesiano justamente uma cunha esférica.

1.2 Integral

Para a mudança de variável na integral temos que multiplicar o integrando por $\rho^2 \sin \phi$.

2 Exemplos

Exemplo 2.1. *Calcule*

$$I = \iiint\limits_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$$

em que B é a bola unitária

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Em coordenadas esféricas temos

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$
$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

Tomando $u = \rho^3$, temos $du = 3\rho^2 d\rho$. Logo,

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{3} e^u \sin \phi du d\theta d\phi$$
$$I = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (e - 1) \sin \phi d\theta d\phi$$
$$I = \frac{e - 1}{3} \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi$$
$$I = \frac{4}{3} \pi (e - 1)$$

Exemplo 2.2. *Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido delimitado abaixo pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.*

Note que, temos a seguinte esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - z + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$
$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Ou seja, uma esfera de raio $\frac{1}{2}$ centrada no ponto $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Note que o cone possui exatamente o raio da esfera para $z = \frac{1}{2}$ que é quando os dois sólidos se encontram.

Vamos descrever a esfera:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= z \\
\rho^2 &= \rho \cos\phi \text{ , } \textit{considerando } \rho \geq 0 \\
\rho &= \cos\phi
\end{aligned}
$$

Descrevendo o cone:

$$
\begin{aligned}
z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
\rho \cos\phi &= \rho \sin\phi \\
\cos\phi &= \sin\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Portanto a região que temos é:

$$E = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq \cos\phi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

Então podemos calcular a integral:

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_E dV \\
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta \\
V &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\phi \sin\phi d\phi d\theta
\end{aligned}
$$

Tomando $u = \cos\phi$, *temos* $du = -\sin\phi d\phi$. *Logo,*

$$
\begin{aligned}
V &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^3 du d\theta \\
V &= -\frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) d\theta \\
V &= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$