Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

Esdras R. Carmo - 170656

20 de Setembro de 2016

1 Derivadas Direcionais

Resolução de problemas para calcular a taxa de variação de função $f(x)$, sendo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, no ponto $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ na direção de um vetor unitário $u = (u_1, \ldots, u_n)$.

1.1 Definição

Sendo $u \in \mathbb{R}^n$:

$$D_u f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu) - f(a)}{h}$$

1.2 Derivadas Parciais

Derivadas direcionais generalizam as derivadas parciais, já que se $u = (1, 0)$ temos $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f((a,b) + h(1,0)) - f(a,b)}{h}$$

Pode-se escrever as derivadas direcionais em função das parciais.

Sendo:

$$g(h) = f(a + hu)$$
$$g(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = D_u f(a)$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$g(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \mid_a u_j$$

1.3 Vetor Gradiente

Pode-se escrever a derivada direcional de f com relação a u como produto escalar do gradiente ∇:

$$D_u f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} u_j = \nabla f \cdot u$$

1.4 Interpretação do Vetor Gradiente

$$D_u f = \nabla f \cdot u = \parallel \nabla f \parallel \parallel u \parallel \cos\theta = \parallel \nabla f \parallel \cos\theta$$

Para qualquer direção da derivada, iremos multiplicar o vetor gradiente pelo cosseno do ângulo. Portanto o maior valor possível para a derivada direcional é quando $\theta = 0$, i. e., a maior variação ocorre na direção do vetor gradiente.

Portanto o vetor gradiente nos diz a direção de maior variação da função $f(x)$

1.4.1 Em $\mathbb{R}^2$

O vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ também é perpendicular (ortogonal) à reta tangente à curva de nível $f(x, y) = k$ que passa por $P = (x_0, y_0)$.

1.4.2 Em $\mathbb{R}^3$

O vetor gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é perpendicular ao plano tangente à superfície $F(x, y, z) = k$ que passa por $P = (x_0, y_0, z_0)$.

1.4.3 Plano Tangente

Dado f, o plano tangente à f em (x_0, y_0, z_0) é:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$

1.4.4 Reta Normal

O vetor gradiente é múltiplo da reta normal, portanto temos o ponto P e o vetor diretor da reta como $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \lambda(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \text{ , sendo } \lambda \in \mathbb{R}$$

2 Exemplos

2.1 Exemplo 6

Determine a derivada direcional sendo u o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$ no ponto $(1, 2)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 - 3xy + 4y^2 \\ D_u f(1,2) &= \nabla f(1,2) \cdot u \\ \nabla f &= (3x^2 - 3y, -3x + 8y) \\ \nabla f(1,2) &= (-3, 13) \end{aligned}$$

Determinando o vetor u...

$$u = (\cos \pi/6, \sin \pi/6) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$$

Portanto, a derivada direcional...

$$D_u f(1,2) = \frac{1}{2}(13 - 3\sqrt{3})$$

2.2 Exemplo 7

Determine a derivada direcional da função no ponto $P = (2, -1)$ na direção $v = 2i + 5j$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y^3 - 4y \\ \nabla f &= (2xy, 3x^2y^2 - 4) \\ \nabla f(2,-1) &= (-4, 8) \\ D_u f(2,-1) &= \nabla f(2,-1) \cdot u \end{aligned}$$

$\parallel v \parallel \neq 1$, portanto precisamos encontrar u

$$\begin{aligned} u &= \frac{v}{\parallel v \parallel} = \frac{2i + 5i}{\sqrt{4 + 25}} = \left(\frac{2}{\sqrt{24}}, \frac{5}{\sqrt{24}}\right) \\ D_u f(2,-1) &= \frac{32}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

2.3 Exemplo 10

Determine o plano tangente e a reta normal no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsóide.

$$
\begin{aligned}
x^2/4 + y^2 + z^2/9 = 3 \\
F(x,y,z) &= \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 3 \\
\nabla F(x,y,z) &= \left(\frac{x}{2}, 2y, \frac{2y}{9}\right) \\
\nabla F(-2,1,-3) &= (-1, 2, -2/3)
\end{aligned}
$$

Portanto agora podemos determinar o plano tangente

$$
\begin{aligned}
\nabla F(-2,1,-3) \cdot (x+2, y-1, z+3) = 0 \\
-(x+2) + 2(y-1) - \frac{2}{3}(z+3) = 0
\end{aligned}
$$

E a equação da reta normal é dada por

$$(x+2, y-1, z+3) = \lambda(-1, 2, -2/3)$$

A Direção e vetor unitário

Caso seja pedido a direção, pode ser v com $\| v \| \neq 1$, porém para os cálculos é necessário um vetor unitário u e se u estiver no mesmo sentido de v, então $u = \frac{v}{\| v \|}$. Portanto é importante sempre checar se o vetor dado é unitário ou não.