Integrais de Linha

Esdras R. Carmo - 170656

7 de Novembro de 2016

1 Curvas

Descrevemos uma curva C através do parâmetro t da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ a &\leq t \leq b \end{aligned}$$

Ou ainda, através da equação vetorial:

$$r(t) = x(t)i + y(t)j = (x(t), y(t))$$

Além disso, consideramos C curva lisa se $r'(t) = (x'(t), y'(t))$ é contínua.

2 Integral de Linha

Se f uma função de duas variáveis sobre uma curva lisa C, então a integral de linha de f sobre C é:

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x_i}, \bar{y_i})\Delta s_i$$

Sendo $\Delta s_i \approx \parallel r_i'(t_i) \parallel \Delta t$, temos:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(r(t)) \parallel r'(t) \parallel dt$$

2.1 Comprimento de Arco

Podemos ainda calcular o comprimento da curva C da seguinte forma:

$$\int_C 1ds = \int_a^b \parallel r'(t) \parallel dt$$

2.2 Curvas lisas por partes

C é uma curva lisa por partes se for união de curvas lisas $C_1, \ldots, C_n$. Assim, podemos fazer a integral de linha sobre C:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \cdots + \int_{C_n} f(x,y)ds$$

3 Exemplos

Exemplo 3.1. *Calcule* $\int_C (2+x^2y)ds$, *em que* C *é a metade superior do círculo unitário* $x^2+y^2=1$.

Em coordenadas polares, temos:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin t \\ 0 \leq\ & t \leq \pi \\ r(t) &= (\cos t, \sin t) \\ r'(t) &= (-\sin t, \cos t) \end{aligned}$$

Assim, temos a integral I:

$$\begin{aligned} I &= \int_C f(x,y)ds \\ &= \int_0^\pi f(\cos t, \sin t) \parallel (-\sin t, \cos t) \parallel dt \\ &= \int_0^\pi (2+\cos^2 t \sin t) \cdot \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= [2t]_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 t \sin t dt \end{aligned}$$

Tomando $u = \cos t$, $du = -\sin t dt$, *temos:*

$$\begin{aligned} I &= 2\pi - \int_1^{-1} u^2 du \\ I &= 2\pi - \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^{-1} \\ I &= 2\pi + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 3.2. *Calcule* $\int_C 2x ds$, *em que* C *é formada pelo arco* C_1 *da parábola* $y=x^2$ *de* $(0,0)$ *a* $(1,1)$, *seguido pelo segmento de reta vertical* C_2 *de* $(1,1)$ *a* $(1,2)$.

Sabemos que, como C é lisa por partes, temos:

$$I = \int_C f(x,y)ds$$
$$I_1 = \int_{C_1} f(x,y)ds$$
$$I_2 = \int_{C_2} f(x,y)ds$$
$$I = I_1 + I_2$$

Sobre a curva C_1, temos:

$$r_1(t) = (t, t^2), \text{ para } 0 \le t \le 1$$
$$r_1'(t) = (1, 2t)$$
$$I_1 = \int_0^1 2t \parallel (1,2t) \parallel dt$$
$$I_1 = \int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}dt$$

Tome $u = 1 + 4t^2$, $du = 8tdt$, temos:

$$I_1 = \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{u}du$$
$$I_1 = \frac{1}{6}\left[u^{3/2}\right]_1^5$$
$$I_1 = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1)$$

Sobre a curva C_2, temos:

$$r_2(t) = (1, t), \text{ para } 1 \le t \le 2$$
$$r_2'(t) = (0, 1)$$
$$I_2 = \int_1^2 2 \parallel (0,1) \parallel dt$$
$$I_2 = 2$$

Assim, concluimos que:

$$\int_C 2xds = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1) + 2$$