Aproximando Raizes de Funções de Duas Variáveis

Esdras R. Carmo

17 de Setembro de 2016

1 Aproximação afim de função $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, sabemos que a transformação linear que aproxima f em (x_0, y_0) é dada por T da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ T(u) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \cdot u, \, \forall u \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Assim, tomando $u = (x - x_0, y - y_0)$, conseguimos uma aproximação afim (linear) $L(x, y)$ para a função f da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u &= (x - x_0, y - y_0) \\ L(x, y) &= T(x - x_0, y - y_0) + f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

2 Método de Newton para Funções $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

O método de Newton consiste em que, partindo de um ponto inicial (x_1, y_1), escolhido arbitrariamente, pode-se iterar de forma a obter (x_2, y_2) a partir de uma das raizes da aproximação afim no ponto (x_1, y_1). Dessa forma, iterando em um número suficiente de vezes, aproximamos nosso ponto (x_n, y_n) de uma das raízes da função f.

Portanto, a partir de (x_{n-1}, y_{n-1}), temos:

$$\begin{aligned} L(x_n, y_n) &= 0 \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_{n-1}, y_{n-1}) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n - x_{n-1} \\ y_n - y_{n-1} \end{bmatrix} &= -f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

Dessa forma, encontre as soluções para a equação de forma que, fixando uma das variáveis seja possível calcular computacionalmente a outra.

O método não irá funcionar caso em algum dos pontos, ambas as derivadas parciais se anulem, sendo impossível encontrar o zero da aproximação afim. Caso isso aconteça, deve-se alterar a escolha do ponto inicial (x_1, y_1).

3 Implementação em Linguagem C

Para a implementação desse método, é preciso determinar um δ como condição de parada, de modo que $|f(x_n, y_n) - 0| \leq \delta$. Além disso, é preciso sempre checar se ambas as derivadas não se anulam.

Para facilitar a implementação, pode-se determinar funções em C para representar a função f e suas derivadas. Por exemplo, se escolhermos $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3$, podemos implementar da seguinte forma:

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define DELTA 0.000001

// funcao f
double f(double x, double y) {
    return pow(x, 3) + pow(y, 2) - 3;
}

// derivada de f com relacao a x
double fx(double x) {
    return 3 * pow(x, 2);
}

// derivada de f com relacao a y
double fy(double y) {
    return 2 * y;
}

// funcao principal
int main(void) {
    /* ... */

    /* Exemplo de chamada das funcoes */
    a = f(2.3, 5.1);
    b = fx(2.1);
    c = fy(-6.8);

    /* ... */
}
```