

# Aproximando Raízes de Funções de Duas Variáveis

Esdras R. Carmo

17 de Setembro de 2016

## 1 Aproximação afim de função $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, sabemos que a transformação linear que aproxima  $f$  em  $(x_0, y_0)$  é dada por  $T$  da seguinte forma:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$T(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \cdot u, \forall u \in \mathbb{R}^2$$

Assim, tomando  $u = (x - x_0, y - y_0)$ , conseguimos uma aproximação afim (linear)  $L(x, y)$  para a função  $f$  da seguinte forma:

$$u = (x - x_0, y - y_0)$$
$$L(x, y) = T(x - x_0, y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

### 1.1 Método para estimar a raiz

O método sugerido para estimar a raiz da função  $f(x)$  consiste em uma simplificação do método de Newton.

Supondo que a função tem uma raiz no intervalo  $I = ]i, s[$ , sendo  $i$  e  $s$  constantes conhecidas, podemos aproximar a raiz da seguinte forma:

1. Tomamos  $m$  o ponto médio do intervalo, i. e.,  $m = \frac{i+s}{2}$ ;
2. Assumindo uma função crescente em  $I$ , então verificamos os seguintes casos:
  - Se  $f(m) > 0$ , então tomamos  $s' = m$  e atualizamos o nosso intervalo para  $I' = ]i, s'[,$
  - Se  $f(m) < 0$ , então tomamos  $i' = m$  e atualizamos o nosso intervalo para  $I' = ]i', s[,$

3. Sendo  $\delta$  uma constante conhecida que dirá a precisão buscada pelo método, verificamos se, no novo intervalo formado,  $f(s) - f(i) \leq \delta$ . Caso a desigualdade se observe, a raiz de  $f(x)$  será  $x = \frac{i+s}{2}$ . Caso contrário, deve-se retornar ao item 1 com o novo intervalo.

## 1.2 Implementação em linguagem C

Sabendo disso, é possível escrever um programa que calcule  $\sqrt{2}$  utilizando um intervalo  $I$  e um erro  $\delta$  conhecidos.

Para esse caso, suponha inicialmente  $I = ]1, 2[$ , i. e.,  $i = 1$  e  $s = 2$ . Utilize também  $\delta = 0.000001$ . Para isso, pode-se definir uma constante com o valor de  $\delta$  no início do programa da seguinte forma:

```
1 #include <stdio.h>
2 #define DELTA 0.000001
3
4 int main(void) {
5     /* ... */
6     // referenciando a constante definida no início
7     if (x <= DELTA) { /* ... */ }
8     /* ... */
9 }
```

Lembre-se de utilizar apenas a biblioteca *stdio.h* e apenas estruturas de laços e condicionais. Além disso, é aconselhável a utilização de variáveis tipo *double* quando necessitar de ponto flutuante.

## 2 Implementação para $\sqrt{n}$

Quando o seu programa funcionar para o caso  $\sqrt{2}$ , altere-o para calcular  $\sqrt{n}$  sendo  $n$  um número natural. Para isso, receba um inteiro da entrada e modifique os limites iniciais do intervalo  $I$  conforme o inteiro dado, e não mais como uma constante conhecida no momento da programação.