Stohastički sistemi i estimacija

Rešenje drugog domaćeg zadatka

Ervin Seke

1. zadatak

Na osnovu funkcije raspodele šuma:

$$p(w[n]) = \frac{1}{\pi(1 + w^2[n])}$$

i izraza za opservacije:

$$x[n] = \theta + w[n]$$

Na osnovu ove dve jednačine se dobije funkcija gustine verovatnoće jedne opservacije:

$$p(x[n]; \theta) = \frac{1}{\pi(1 + (x[n] - \theta)^2)}$$

Pošto su opservacije nezavisne iz formule:

$$p(x; \theta) = \prod_{n=0}^{N-1} p(x[n]; \theta)$$

se dobija fgv modela:

$$p(x; \theta) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\pi(1 + (x[n] - \theta)^2)}$$

Logaritmovanjem ove formule se dobija log-verodostojnosti:

$$l(\theta) = -\sum_{n=0}^{N-1} \ln\left(\pi(1 + (x[n] - \theta)^2)\right)$$

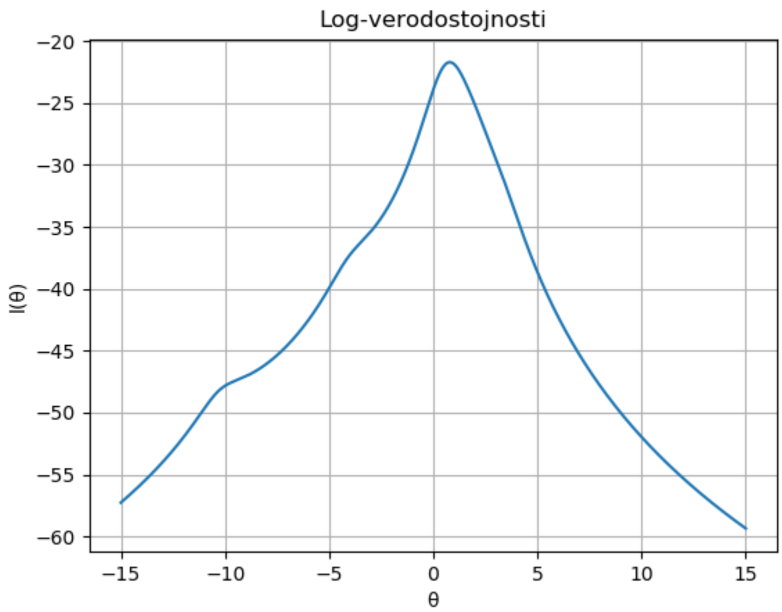
Prvi izvod log-verodostojnosti je:

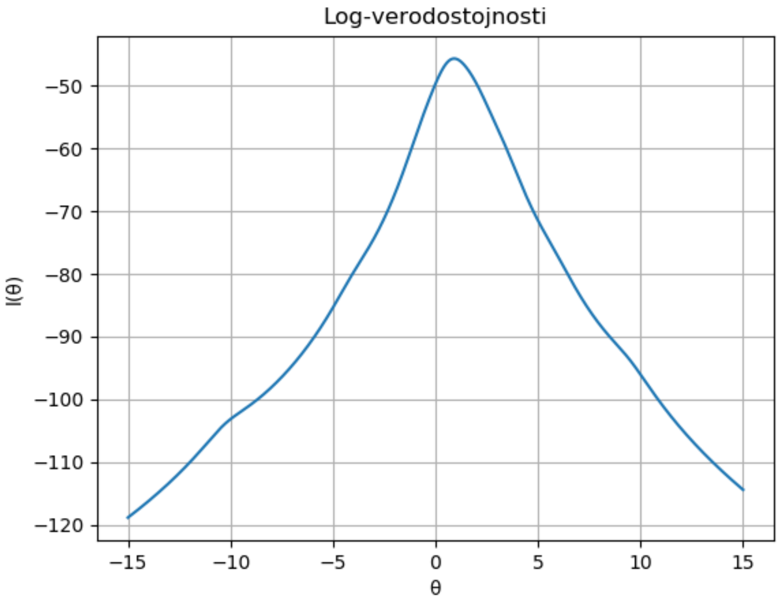
$$l'^{(\theta)} = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2\pi(x[n] - \theta)(-1)}{\pi(1 + (x[n] - \theta)^2)} = 2\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(x[n] - \theta)}{(1 + (x[n] - \theta)^2)}$$

Drugi izvod log-verodostojnosti je:

$$\begin{aligned} l''(\theta) = \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} &= 2\sum_{n=0}^{N-1} \frac{-1 - (x[n] - \theta)^2 - (x[n] - \theta)2(x[n] - \theta)(-1)}{(1 + (x[n] - \theta)^2)^2} \\ &= 2\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(x[n] - \theta)^2 - 1}{(1 + (x[n] - \theta)^2)^2} \end{aligned}$$

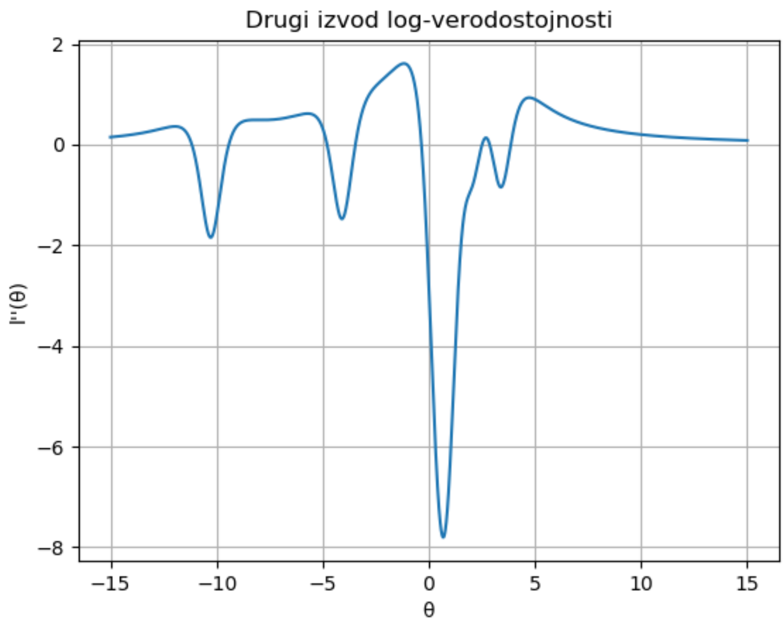
Grafici:

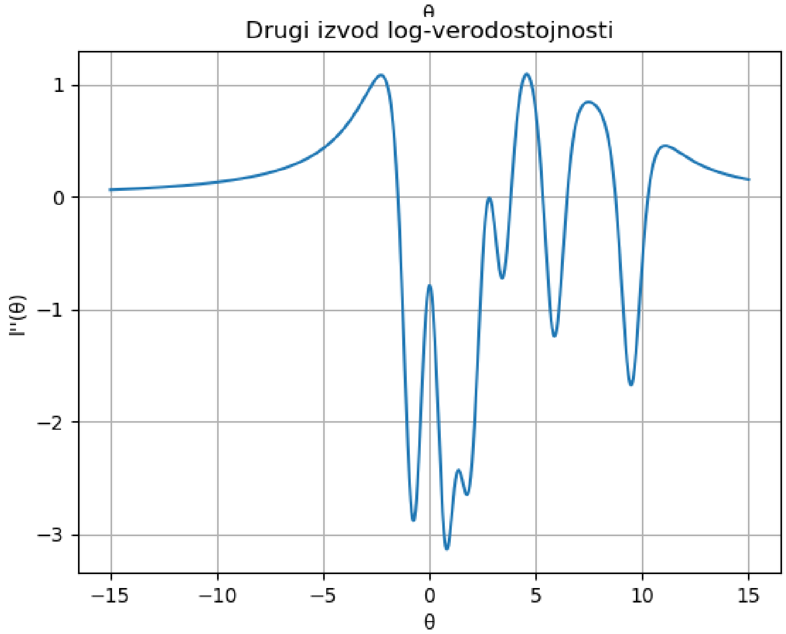

Log-verodostojnosti
l(θ)
θ

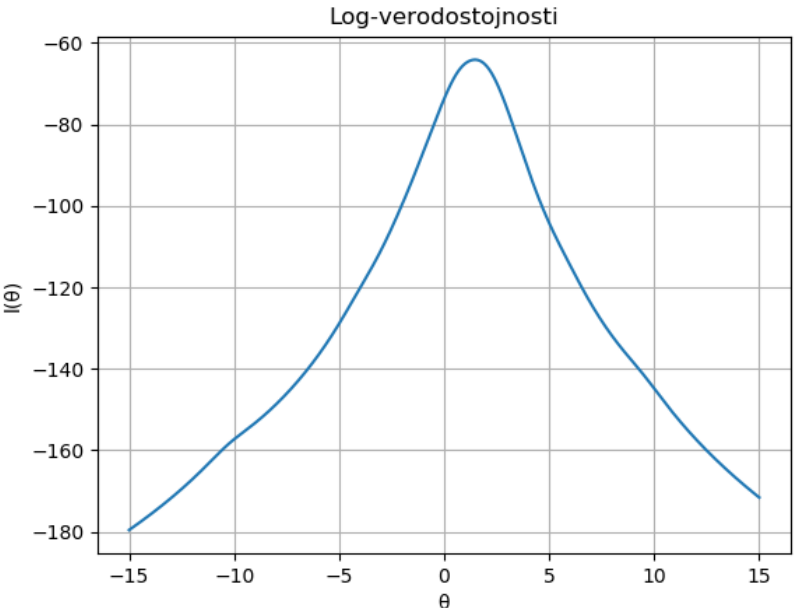

Log-verodostojnosti
l(θ)
θ

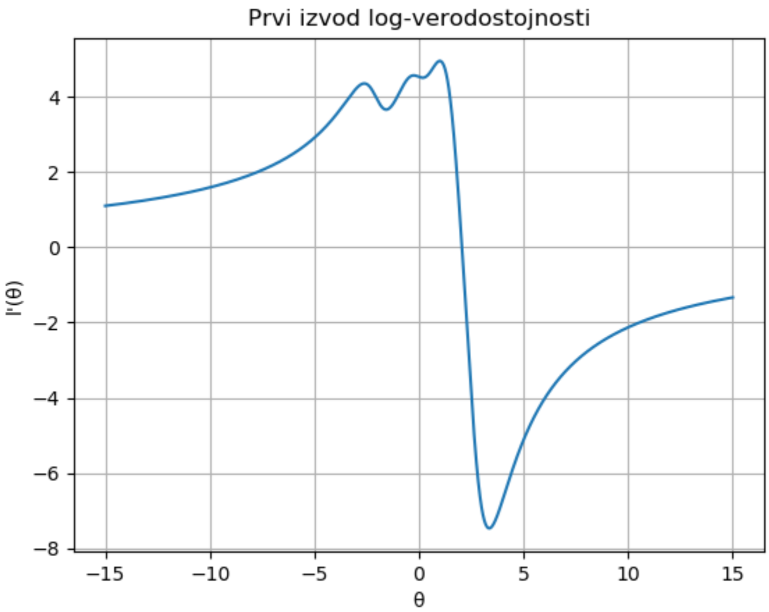

Prvi izvod log-verodostojnosti
l'(θ)
θ

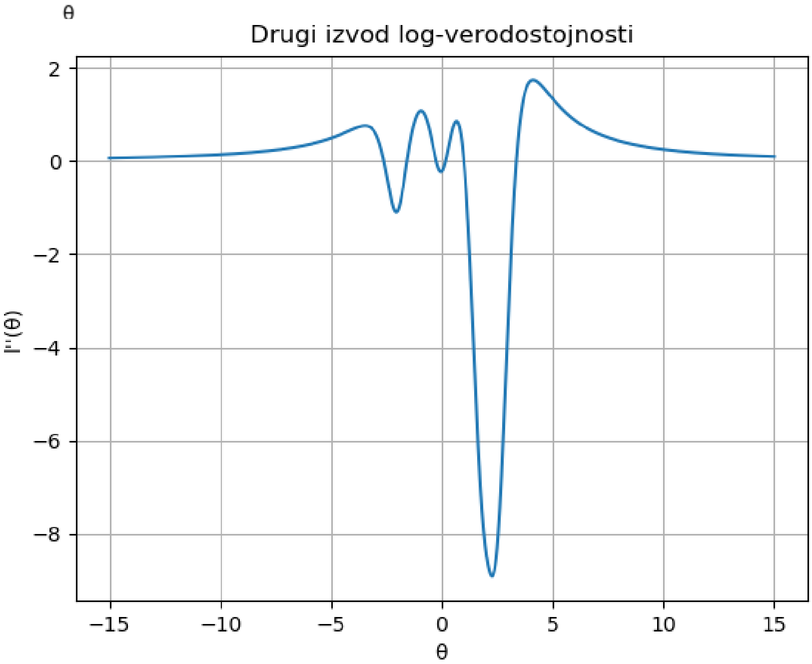

Prvi izvod log-verodostojnosti
l'(θ)
θ


Drugi izvod log-verodostojnosti
l''(θ)
θ

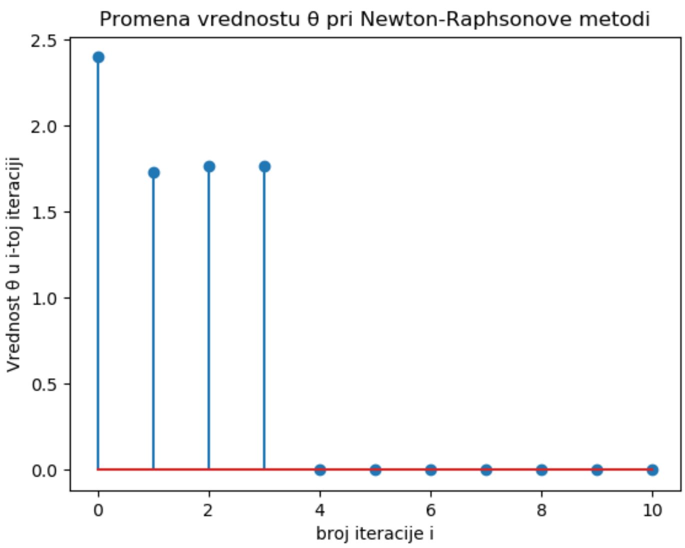

Drugi izvod log-verodostojnosti
l''(θ)
θ

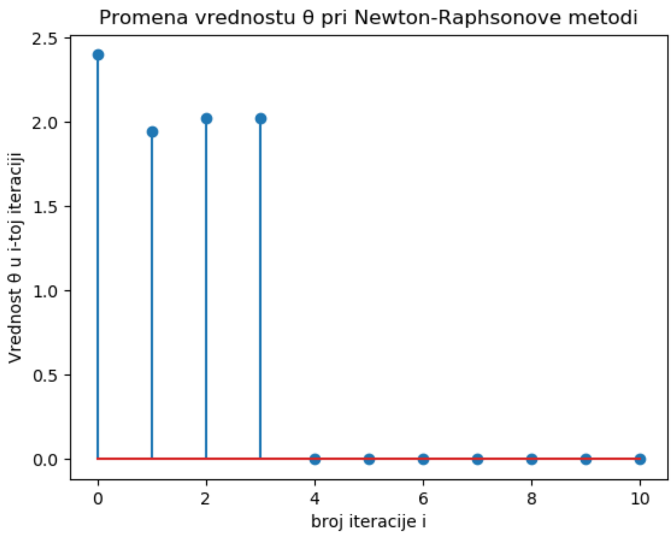


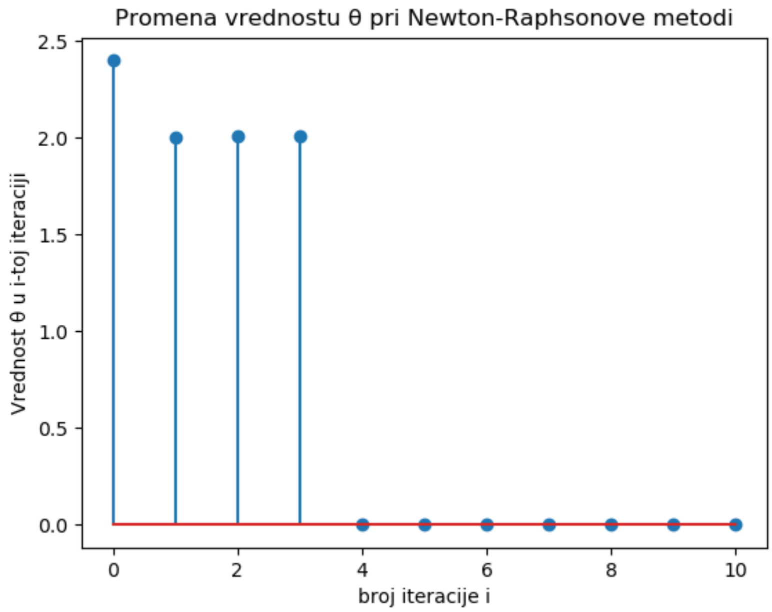




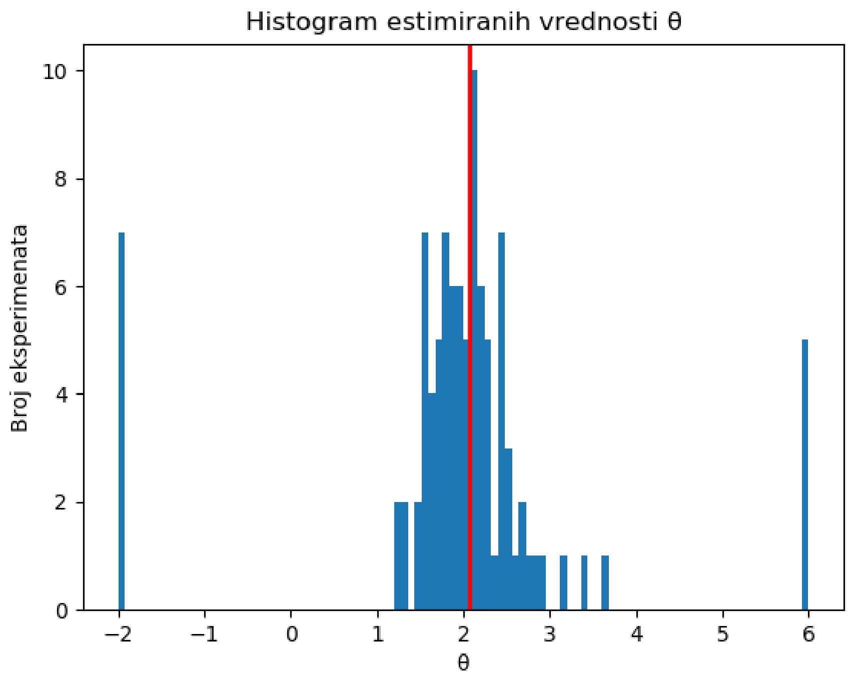
Promena procene $\hat{\theta}_k$po iteracijama:







Histogram konačnih estimacija za sve realizacije:



2. zadatak

Pošto hoćemo da estimiramo poziciju, brzinu i ubrzanje vektor estimacije je:

$$S[n]_{3x1} = \begin{bmatrix} p[n] \\ v[n] \\ a[n] \end{bmatrix}$$

Iz jednačina:

$$v[n] = v[n-1] + T_s a[n] \qquad (1)$$

$$p[n] = p[n-1] + T_s v[n] + \frac{{T_s}^2}{2} a[n] \qquad (2)$$

$$a[n] = a[n-1] + u[n] \qquad (3)$$

treba da formiramo sistem oblika:

$$s[n]_{3x1} = A_{nxn} s[n-1] + B_{3x3} u[n] \qquad (4)$$

$$x[n] = Hs[n] + w[n]$$

Prvo ćemo zameniti jednačinu (3) u (1) i (2) :

$$v[n] = v[n-1] + T_s a[n-1] + T_s u[n]$$

$$p[n] = p[n-1] + T_s v[n] + \frac{{T_s}^2}{2} a[n-1] + \frac{{T_s}^2}{2} u[n]$$

Pa ćemo zameniti (2) u poslednju jednačinu:

$$p[n] = p[n-1] + T_s v[n-1] + {T_s}^2 a[n-1] + {T_s}^2 u[n] + \frac{{T_s}^2}{2} a[n-1] + \frac{{T_s}^2}{2} u[n]$$

Pa se dobije za matrice A i B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{3{T_s}^2}{2} \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3{T_s}^2}{2} \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pošto se merenja sastoje samo od vrednosti brzine matrica H ima oblik:

$$H = [1\ 0\ 0]$$

Matrica C koja predstavlja varijansu šuma merenja se dobija iz podatka da je standardna devijaca 10 pa je:

$$C = [100]$$

Model šuma procesa se možemodelovati raspodelom:

$$u[n] \sim N\left(0, \left(\frac{a_{max}[n]}{\mathrm{a}}\right)^2\right),$$

gde je 2σ interval poverenja. Pa matrica Q_{1x1} ima vrednosti:

$$Q_{1x1} = \begin{cases} \left(\frac{10}{2}\right)^2 & n < 30 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 & 30 < n < 70 \\ \left(\frac{10}{2}\right)^2 & , n > 70 \end{cases}$$

Za vrednost s[-1] je uzeta raspodela:

$$s[-1] \sim N(0{,}10)$$

Za izračunavanje estimacija Kalmanovog filtra korišćene su sledeće formule:

Predikcija:

$$\hat{s}[n|n-1] = A\hat{s}[n-1|n-1]$$

MSKG predikcije:

$$M[n|n-1] = AM[n-1|n-1]A^T + BQB^T$$

Kalanovo pojačanje:

$$K[n] = M[n|n-1]H^T(C + HM[n|n-1]H^T)^{-1}$$

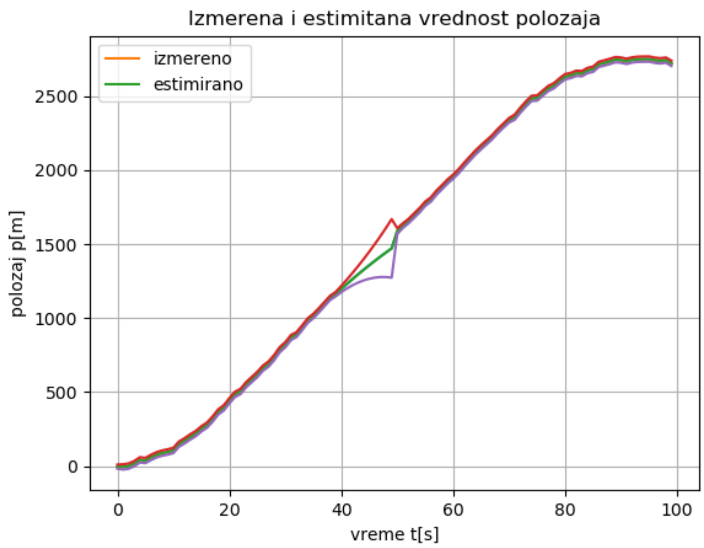
Korekcija:

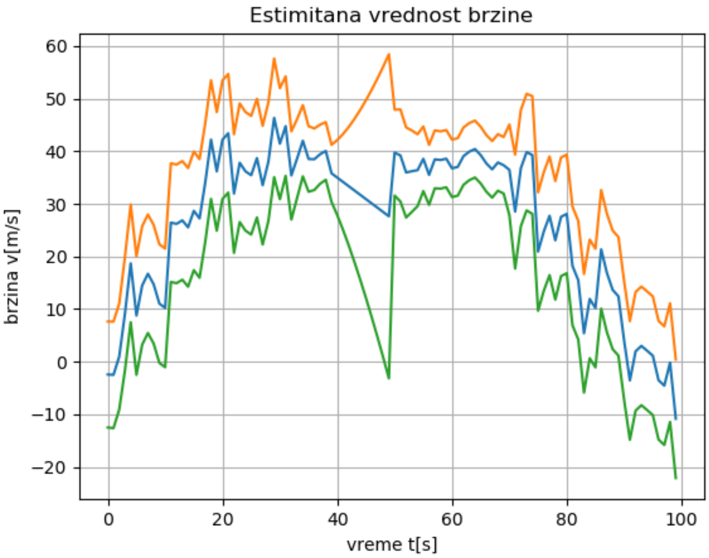
$$\hat{s}[n|n] = \hat{s}[n|n-1] + K[n](x[n] - \hat{s}[n|n-1])$$

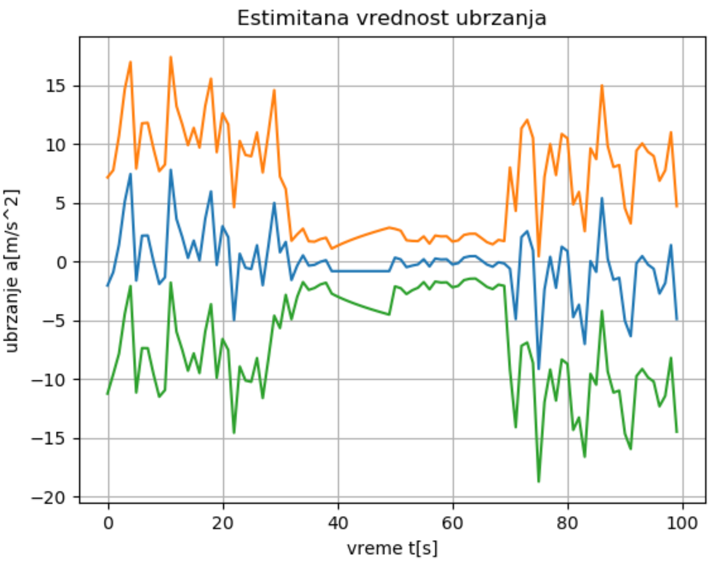
MSKG korekcije:

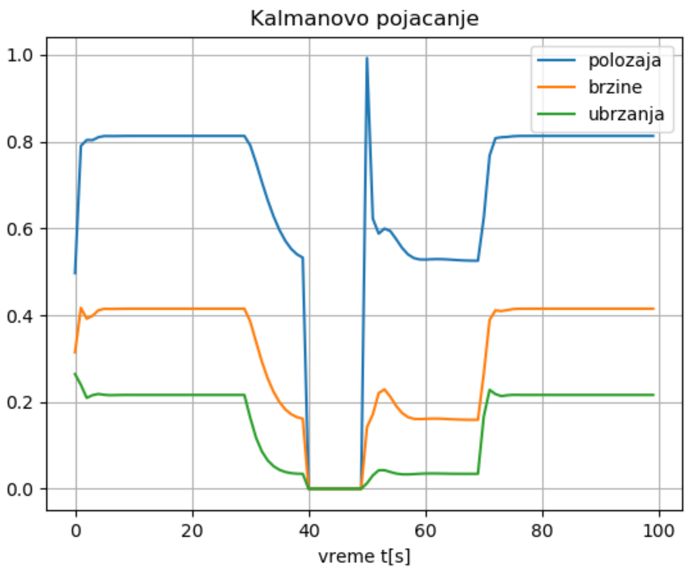
$$M[n|n] = (1 - K[n])M[n|n-1]$$

Grafici:




Estimitana vrednost brzine
brzina v[m/s]
vreme t[s]


Estimitana vrednost ubrzanja
ubrzanje a[m/s^2]
vreme t[s]


Kalmanovo pojacanje
polozaja
brzine
ubrzanja
vreme t[s]