13E053SSE Stohastički sistemi i estimacija
I domaći zadatak 2019/20

Student sa brojem indeksa BBBB/GGGG radi ovaj zadatak sa vrednostima

$$P = \mathrm{mod}(B+B+B+B, 3),$$

$$Q = \mathrm{mod}(BBBB+GGGG, 4),$$

$$R = \mathrm{mod}(B+B+B+B, 4),$$

gde $\mathrm{mod}(a, b)$ označava a po modulu b.

Rešenje domaćeg zadatka podrazumeva da student, prilikom njegove odbrane, donese sa sobom izveštaj u papirnoj formi.

Napomene:

- Prilikom izrade domaćeg zadatka nije dozvoljeno korišćenje ugrađenih Matlab funkcija za proračun srednje vrednosti, varijanse, funkcije raspodele itd. Jedine funkcije koje se mogu koristiti su `hist`, `histogram`, `hist3`, `rand`, `randn`, kao i standardne funkcije za grafički prikaz rezultata (`plot`, `stem`, `stairs`, `surf` i slično).
- Izveštaj treba da sadrži sva potrebna analitička izvođenja, tražene numeričke vrednosti i grafike. Iza svakog zadatka potrebno je navesti i odgovarajući Matlab kod.
- Datum odbrane prvog domaćeg zadatka biće blagovremeno objavljen na sajtu predmeta.

---

1. Potrebno je simulirati eksperiment iz tabele I.

a) Analitički odrediti funkciju raspodele $F_X(k)$, funkciju mase verovatnoće $p_X(k) = P(X = k)$, matematičko očekivanje $m = E\{X\}$ i varijansu $\sigma^2 = E\{(X - m)^2\}$.

b) Generisati $N = 10^3$ ishoda i prikazati njihov histogram.

c) Na osnovu generisanih odbiraka eksperimentalno proceniti funkciju mase verovatnoće $\hat{p}_X(k)$ kao količnik broja povoljnih ishoda $(X = k)$ i ukupnog broja ishoda. Takođe, odrediti i funkciju raspodele kao:

$$\hat{F}_X(k) = \sum_{n=-\infty}^{k} \hat{p}_X(n).$$

Dobijene funkcije predstaviti grafički, i to:

- Na jednom grafiku predstaviti egzaktnu $(F_X(k))$ i eksperimentalnu $(\hat{F}_X(k))$ funkciju raspodele, jednu preko druge
- Na drugom grafiku predstaviti egzaktnu $(p_X(k))$ i eksperimentalnu $(\hat{p}_X(k))$ funkciju mase verovatnoće, jednu preko druge

d) Na osnovu generisanih odbiraka eksperimentalno odrediti matematičko očekivanje ($\widehat{m}$) i varijansu $\hat{\sigma}^2$ kao:

$$\widehat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \widehat{m})^2 \,.$$

Tabelarno prikazati dobijene vrednosti zajedno sa analitički određenim očekivanjem m i varijansom σ^2.

Tabela I – Eksperiment za prvi zadatak

$P = 0$	Eksperiment bacanja novčića. Verovatnoća da se dobija glava prilikom bacanja je dva puta veća nego verovatnoća da se dobije pismo
$P = 1$	Eksperiment bacanja 4-strane kockice. Verovatnoća da se dobiju parni brojebi je dva puta veća nego verovatnoća da se dobiju neparni.
$P = 2$	Eksperiment bacanja 6-strane kockice. Verovatnoća da se dobije broj 5 je duplo veća nego verovatnoća da se dobiju ostali brojevi.

2. Potrebno je generisati odbirke slučajne promenljive Y čija je funkcija gustine verovatnoće data u tabeli II.

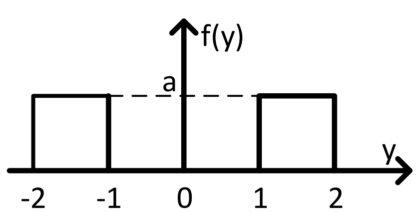
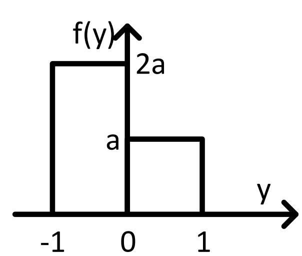
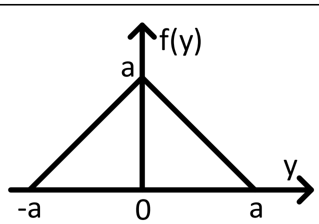
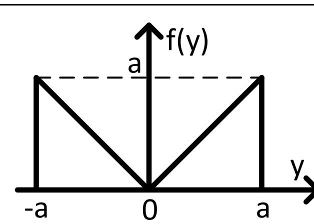
a) Izračunati vrednost realne konstante a.

b) Odrediti funkciju $Y = g(X)$ kojom se postiže željena raspodela slučajne promenljive Y. Ovde je X uniformno raspodeljena slučajna promenljiva na intervalu [0,1].

c) Generisati $N = 10^5$ odbiraka slučajne promenljive Y i na osnovu njih proceniti odgovarajuću funkciju gustine verovatnoće koristeći histogram. Na istom grafiku prikazati i analitičku funkciju gustine verovatnoće datu u tabeli II.

d) Analitički odrediti matematičko očekivanje i varijansu slučajne promenljive Y i uporediti ih sa eksperimentalno procenjenom vrednošću ovih parametara.

Tabela II – Funkcija gustine verovatnoće

$Q = 0$		$Q = 2$	
$Q = 1$		$Q = 3$	

3. Potrebno je generisati $N = 10^4$ odbiraka slučajnog vektora $\boldsymbol{X} = [X_1 \quad X_2]^T$ sa nekorelisanim normalno raspodeljenim komponentama X_1 i X_2 nultog očekivanja i jedinične varijanse (koristiti naredbu `randn`). Odbirci slučajnih vektora $\boldsymbol{Y} = [Y_1 \quad Y_2]^T$ i $\boldsymbol{Z} = [Z_1 \quad Z_2]^T$ dobijaju se linearnim transformacijama $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}_y\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}_z\boldsymbol{X}$. Matrice $\boldsymbol{A}_y$ i $\boldsymbol{A}_z$ su oblika:

$$\boldsymbol{A}_y = \begin{bmatrix} a_{11,y} & a_{12,y} \\ a_{21,y} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_z = \begin{bmatrix} 0 & a_{21,z} \\ a_{21,z} & a_{22,z} \end{bmatrix}.$$

a) Analitički odrediti elemente matrica $\boldsymbol{A}_y$ i $\boldsymbol{A}_z$ tako da kovarijacione matrice slučajnih vektora $\boldsymbol{Y}$ i $\boldsymbol{Z}$ budu kao u tabeli III.

b) Analitički odrediti koeficijente korelacije $\rho(X_1, X_2)$, $\rho(Y_1, Y_2)$ i $\rho(Z_1, Z_2)$.

c) Generisati slučajne vektore $\boldsymbol{Y}$ i $\boldsymbol{Z}$ i prikazati na 3 različita grafika odbirke slučajnih vektora $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ i $\boldsymbol{Z}$ (*scatter plot*).

Tabela III – Kovarijacione matrice

$R = 0$	$R_Y = \begin{bmatrix} 2 & 2.2 \\ 2.2 & 3 \end{bmatrix}$, $R_Z = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
$R = 1$	$R_Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $R_Z = \begin{bmatrix} 2 & -2.2 \\ -2.2 & 3 \end{bmatrix}$
$R = 2$	$R_Y = \begin{bmatrix} 3 & 2.2 \\ 2.2 & 2 \end{bmatrix}$, $R_Z = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
$R = 3$	$R_Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $R_Z = \begin{bmatrix} 3 & -2.2 \\ -2.2 & 2 \end{bmatrix}$