

Stohastički sistemi i estimacija

Rešenje prvog domaćeg zadatka

Ervin Seke

Zadatak 1

a) Iz informacije da su parne vrednosti duplo češće od neparnih i iz jednačine $\sum_{i=1}^4 p_X(i) = 1$ sledi da je funkcija mase verovatnoće definisana na sledeći način:

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & k = 1 \\ \frac{1}{3}, & k = 2 \\ \frac{1}{6}, & k = 3 \\ \frac{1}{3}, & k = 4 \end{cases}$$

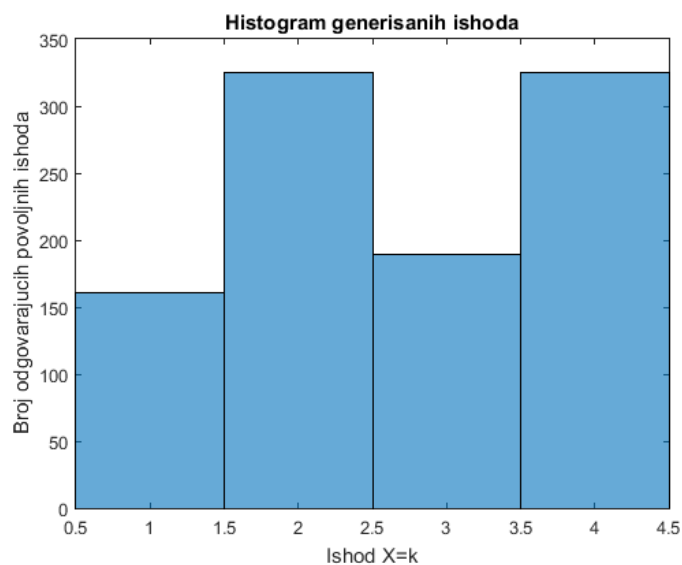
Iz formule $F_X(k) = \sum_{i=1}^k p_X(i)$ sledi da je funkcija raspodele definisana sa:

$$F_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & k = 1 \\ \frac{1}{2}, & k = 2 \\ \frac{2}{3}, & k = 3 \\ 1, & k = 4 \end{cases}$$

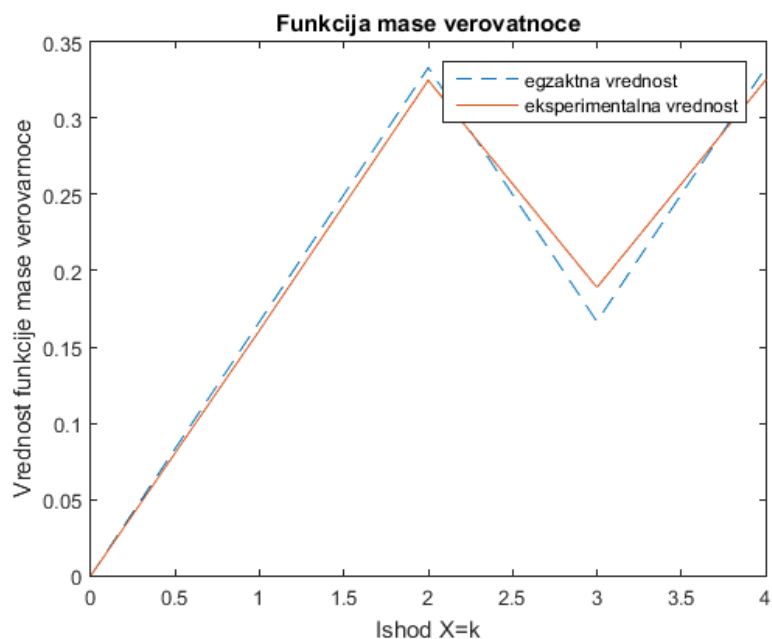
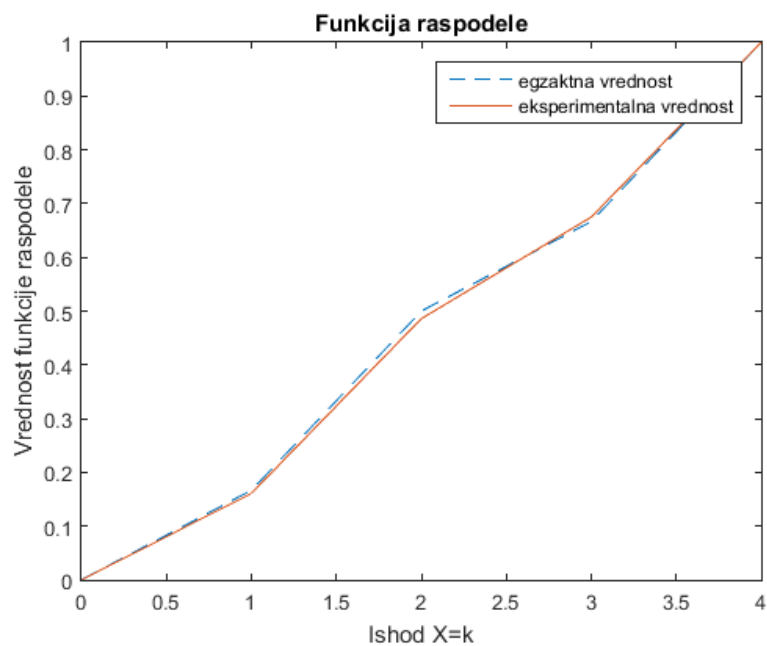
Matematičko očekivanje je definisano formulom $m = E\{X\} = \sum_{k=1}^4 X(k) * p_X(k)$ i ima vrednost $m = 2,667$.

Varijansa je definisana formulom $\sigma^2 = E\{(X - m)^2\} = \sum_{k=1}^4 p_X(k) * (X(k) - m)^2$ i ima vrednost $\sigma^2 = 1,222$.

b)



c)



d)

	Matematičko očekivanje	Varijansa
Egzaktne vrednosti	2,667	1,222
Eksperimentalne vrednosti	2,678	1,1915

Matlab kod uz zadatak 1:

```
a = rand(1,1000); % a - niz od 1000 bacanja 4 - strane kocke
```

```
for i = 1:1000
    if a(1,i)<=1/6
        a(1,i) = 1;
    elseif a(1,i)<=1/2
        a(1,i) = 2;
    elseif a(1,i)<=2/3
        a(1,i) = 3;
    else
        a(1,i) = 4;
    end
end
```

```
figure(1)
histogram(a);
title('Histogram generisanih ishoda');
xlabel('Ishod X=k');
ylabel('Broj odgovarajucih povoljnih ishoda');
```

```
b1 = [0 1/6 1/3 1/6 1/3]; % b1 - egzaktne vrednosti mase verovatnoce
b = zeros(1,5); % b - eksperimentalne vrednosti mase verovatnoce
```

```

for i = 1:4
    b(1,i+1) = sum(a==i)/1000;
end

figure(2)
plot(0:4,b1,'--',0:4,b);
title('Funkcija mase verovatnoce');
xlabel('Ishod X=k');
ylabel('Vrednost funkcije mase verovarnoce');
legend('egzaktna vrednost','eksperimentalna vrednost');

c1 = [0 1/6 1/2 2/3 1]; % egzaktne vrednosti funkcije raspodele
c = zeros(1,5); % c - eksperimentalne vrednosti funkcije raspodele

for i = 1:4
    c(1,i+1) = c(1,i) + b(1,i+1);
end

figure(3)
plot(0:4,c1,'--',0:4,c);
title('Funkcija raspodele');
xlabel('Ishod X=k');
ylabel('Vrednost funkcije raspodele');
legend('egzaktna vrednost','eksperimentalna vrednost');

d = sum(a)/1000 % d - matematicko ocekivanje
e = (sum((a-d).^2))/(999) % e - varijansa

```

Zadatak 2

a)

$$2 * \frac{a * a}{2} = 1$$

$$a = 1$$

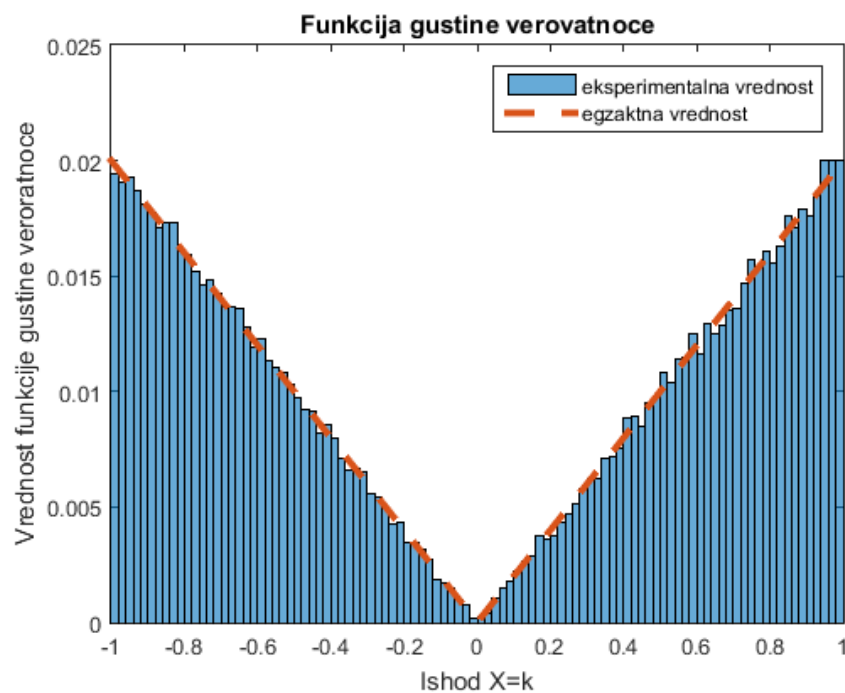
b)

$$f_Y(y) = |x|, -1 < x < 1$$

$$x = F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - x^2), & -1 < y < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 - 1) & 0 < y < 1 \end{cases}$$

$$Y = g(X) = \begin{cases} -\sqrt{1 - 2y} & 0 < y < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2y - 1}, & \frac{1}{2} < y < 1 \end{cases}$$

c)



d)

$$m = E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_X(x) dx = - \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^1 x^2 dx = 0$$

$$\sigma^2 = E\{(X - m)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 * f_X(x) dx =$$

$$= - \int_{-1}^0 x^2 x dx + \int_0^1 x^2 x dx = 0,5$$

	Matematičko očekivanje	Varijansa
Egzaktne vrednosti	0	0,5
Eksperimentalne vrednosti	$1,6 * 10^{-4}$	0,5011

Matlab kod uz zadatka 2:

```
close all
g = 100000; %broj eksperimenata
g1 = 100; %broj stubaca u histogramu

a = rand(1,g);
for i =1:g
    if a(1,i)<=1/2
        a(1,i) = -sqrt(1-2*a(1,i));
    else
        a(1,i) = sqrt(2*a(1,i)-1);
    end
end
```

```

end
histogram(a,g1,'Normalization','Probability');

n = [-1 0 0 1];
k = [1/(g1/2) 0 0 1/(g1/2)];

hold all
plot(n,k,'--','LineWidth',3);
title('Funkcija gustine verovatnoce');
xlabel('Ishod X=k');
ylabel('Vrednost funkcije gustine verovatnoce');
legend('eksperimentalna vrednost','egzaktna vrednost');

m = sum(a)/g;
e = (sum((a-m).^2))/(99999);

```

Zadatak 3

a) Za vrednosti kovarijacione matrice $R_y = \begin{bmatrix} 3 & 2,2 \\ 2,2 & 0 \end{bmatrix}$ vrednosti matrice $A_y = \begin{bmatrix} a_{11,y} & a_{12,y} \\ a_{21,y} & \end{bmatrix}$ u jednačini $Y = A_y X$, gde je $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11,y}X_1 + a_{12,y}X_2 \\ a_{21,y}X_1 \end{bmatrix}$, se dobijaju na sledeći način:

$$\text{var}(Y_2) = \text{var}(a_{21,y}X_1) = a_{21,y}^2 \text{var}(X_1)$$

Pošto znamo da je $\text{var}(Y_2) = 2$ i da je $\text{var}(X_1) = 1$ dobijamo $a_{21,y}^2 = 2$ i biramo rešenje

$$a_{21,y} = \sqrt{2}.$$

Rešavajući jednačinu: $\text{cov}(Y_1, Y_2) = \text{cov}(\frac{a_{11,y}}{a_{21,y}}Y_2 + a_{12,y}X_2, Y_2)$ dobijamo $a_{11,y} = \frac{2,2}{\sqrt{2}}$.

Rešavajući jednačinu: $\text{var}(Y_1) = \text{var}(a_{11,y}X_1 + a_{12,y}X_2)$ dobijamo $a_{12,y} = \sqrt{3 - 2,42}$. Pa je

$$A_y = \begin{bmatrix} \frac{2,2}{\sqrt{2}} & \sqrt{3 - 2,42} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Analogno ovom izvođenju se dobija:

$$A_z = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{5}{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

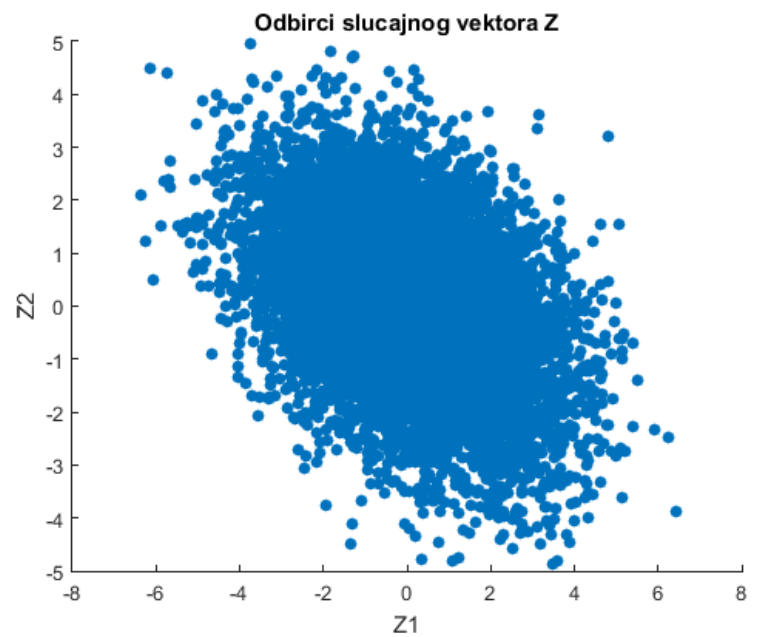
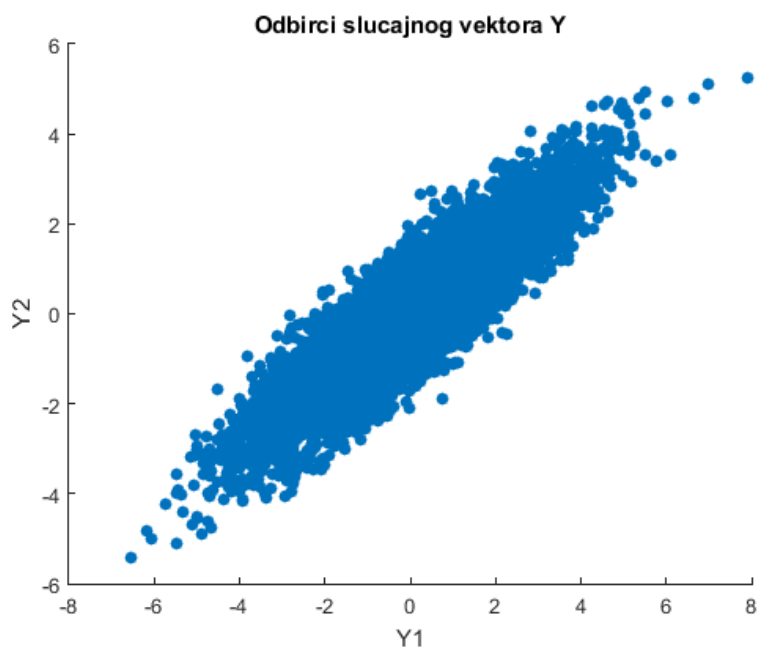
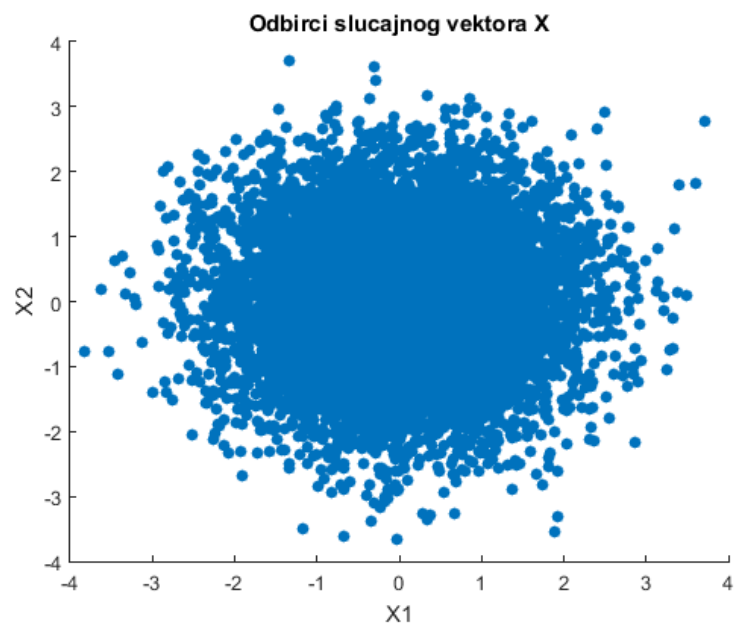
b)

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{var}(X_1)}\sqrt{\text{var}(X_2)}} = \frac{0}{1 * 1} = 0$$

$$\rho(Y_1, Y_2) = \frac{\text{cov}(Y_1, Y_2)}{\sqrt{\text{var}(Y_1)}\sqrt{\text{var}(Y_2)}} = \frac{2,2}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = 0,8981$$

$$\rho(Z_1, Z_2) = \frac{\text{cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{\text{var}(Z_1)}\sqrt{\text{var}(Z_2)}} = \frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = -0,4082$$

c)



Matlab kod uz zadatak 3:

```
X = zeros(2,10000);  
X(1,:) = randn(1,10000);  
X(2,:) = randn(1,10000);  
  
Ay = [2.2/sqrt(2) sqrt(3-2.42);sqrt(2) 0];  
Az = [0 sqrt(3);sqrt(5/3) -1/sqrt(3)];  
Y = Ay*X;  
Z = Az*X;  
  
figure(1)  
scatter(X(1,:),X(2:,:), 'filled');  
title('Odbirci slucajnog vektora X');  
xlabel('X1');
```

```
ylabel('X2');

figure(2)
scatter(Y(1,:),Y(2,:), 'filled');
title('Odbirci slucajnog vektora Y');
xlabel('Y1');
ylabel('Y2');

figure(3)
scatter(Z(1,:),Z(2,:), 'filled');
title('Odbirci slucajnog vektora Z');
xlabel('Z1');
ylabel('Z2');
```