

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский  
Академический университет Российской академии наук»  
Центр высшего образования

Кафедра математических и информационных технологий

Гарифуллин Шамиль Раифович

# Генерация зависимых языков по спецификации пользователя

Магистерская диссертация

Допущена к защите.  
Зав. кафедрой:  
д. ф.-м. н., профессор Омельченко А. В.

Научный руководитель:  
аспирант Исаев В. И.

Рецензент:  
аспирант Подкопаев А. В.

Санкт-Петербург  
2017

SAINT-PETERSBURG ACADEMIC UNIVERSITY  
Higher education centre

Department of Mathematics and Information Technology

Shamil Garifullin

# Specification based generation of languages with dependent types

Graduation Thesis

Admitted for defence.

Head of the chair:  
professor Alexander Omelchenko

Scientific supervisor:  
PhD student Valeriy Isaev

Reviewer:  
PhD student Anton Podkopaev

Saint-Petersburg  
2017

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1. Постановка задачи</b>	<b>5</b>
<b>2. Зависимые языки</b>	<b>6</b>
2.1. Проверка типов в зависимых языках . . . . .	6
2.2. Индексы де Брейна . . . . .	7
<b>3. Обзор аналогов</b>	<b>9</b>
3.1. Twelf . . . . .	9
3.2. PLT/Redex . . . . .	9
<b>4. Определение языка спецификаций</b>	<b>10</b>
4.1. Ограничения на спецификации, налагаемые языком . . . . .	11
4.2. Проверки корректности спецификации языка . . . . .	13
<b>5. Реализация</b>	<b>14</b>
5.1. Парсер генераторы . . . . .	14
5.2. Проверка корректного использования метaperменных . . . . .	14
5.3. Индексы де Брейна на уровне типов . . . . .	15
5.4. Построение термов . . . . .	16
5.5. Вывод типов и нормализация . . . . .	17
5.6. Генерация кода . . . . .	20
<b>Заключение</b>	<b>21</b>
<b>Список литературы</b>	<b>22</b>
<b>Приложения</b>	<b>23</b>
А. Доказательство корректности функции filter . . . . .	23

# Введение

Языки программирования с зависимыми типами могут быть использованы для доказательств свойств кода программы. Также возможно ввести типы, аналогичные сущностям области математики, в которой мы хотим доказывать теоремы и просто писать термы, таким образом предъявляя доказательства утверждений. Плюс данного подхода заключается в том, что проверка доказательств перекладывается на тайпчекер.

Однако сами языки программирования, являясь достаточно общими, часто содержат слишком много конструкций для интересующей нас области, и приходится ограничивать язык, на котором мы пишем. Также может возникнуть ситуация, что конструкции, которыми мы хотим пользоваться, не существуют в языке программирования. Поэтому, если мы хотим переложить проверку наших высказываний на тайпчекер, приходится писать свой язык программирования и уже в нем доказывать утверждения.

Решение описанной проблемы — генерация зависимых языков по спецификации конструкций, которые мы хотим от нашего языка, является темой данной работы.

# 1. Постановка задачи

Целью данной работы является дизайн и имплементация языка для спецификации языков программирования с зависимыми типами. Ключевые задачи, которые решает работа:

- Сужение множества возможных спецификаций зависимых языков для возможности генерации тайпчекера.
- Реализация генерации структур данных представления языка и функций манипуляции этими структурами.
- Реализация генерации функций приведения термов специфицированного языка в нормальную форму и проверки типов.

## 2. Зависимые языки

Языки с зависимыми типами позволяют типам зависеть от термов, то есть мы, например, можем иметь тип списков фиксированной длины. Это позволяет нам описывать ограничения налагаемые на использование функций, которые мы пишем.

Одной из наиболее частых ошибок при программировании на языке вида Haskell является взятие первого элемента пустого списка.

```
head :: [a] -> a
head (x:_) = x
head [] = error "No head!"
```

Которая легко решается, если мы можем иметь термы языка в типе.

```
head :: {n : N} -> Vec a (suc n) -> a
head (x:_) = x
```

Здесь тип явно специфицирует, что функция не принимает термы типа 'Vec a 0'

Этот способ обобщается, и можно доказывать корректность работы алгоритмов, например функции filter в Приложении А.

### 2.1. Проверка типов в зависимых языках

Рассмотрим пример:

$$\frac{\Gamma, x : S \vdash T \text{ type} \quad \Gamma, \vdash f : pi(S, T) \quad \Gamma \vdash t : S}{\Gamma \vdash app(f, t, T) : T[x := t]}$$

Если считать, что заключение правила вывода, то проверка типов в любом языке происходит так: мы имеем некоторые аргументы внутри примитива, которые мы используем для составления узлов-потомков (предпосылок).

На этих узлах вызываем функцию вывода типов в возможно расширенном контексте<sup>1</sup> рекурсивно. Если потомки составлены корректно, то получаем некие типы, которые можем использовать в проверке равенств в предпосылках и возврате типа примитива.

В зависимых языках все точно так же, однако проверка на равенство должна происходить после нормализации термов. Нормализацию мы применяем только после того как убедимся, что термы корректно составлены. То есть имеем, что нормализация тесно связана с проверкой типов. Более того проверка типов невозможна без нормализации термов.

Действительно, чтобы понять что  $2 + 3 = 5$ , мы должны провести вычисления и убедиться в этом.

---

<sup>1</sup>Конечно, мы должны для каждого расширения контекста проверять его корректность.

## 2.2. Индексы де Брейна

При реализации функциональных языков одной из самых сложных частей является написание подстановок. Большинство проблем и ошибок в реализации тоже связано с ней.

Одной из таких проблем является сравнение альфа-эквивалентных термов. Альфа-эквивалентными называются термы, которые отличаются только в именовании связанных переменных. Например, следующие три терма альфа-эквивалентны:

$$\begin{aligned} \backslash x \ y \rightarrow y \ (x \ z) \\ \backslash y \ x \rightarrow x \ (y \ z) \\ \backslash a \ b \rightarrow b \ (a \ z) \end{aligned}$$

Понятно, что мы сталкиваемся с проблемами при использовании переменных в виде строк, например первый терм сверху выглядел бы как `[Lam "x" (Lam "y" (App "y" (App "x" "z")))]`. И проверка равенства этого терма терму `[Lam "y" (Lam "x" (App "x" (App "y" "z")))]` занятие, склонное к ошибкам.

Другой проблемой такого представления термов является избегание захвата переменных при подстановке. Положим, мы подставляем первый терм ниже в переменную "z" во втором.

$$\begin{aligned} \backslash x \rightarrow y \\ \backslash y \rightarrow z \\ \backslash y \rightarrow \backslash x \rightarrow y = \backslash y \ x \rightarrow y \end{aligned}$$

Очевидно, что подставлять в переменную так наивно нельзя, так как "y" стала связанной, хотя не была таковой в первоначальном терме.

Ключевым замечанием является то, что переменные в функциональных языках являются "указателями" на место их связывания — таким индексом в контекст — и не несут никакой дополнительной информации.

Результат использования этого наблюдения называется индексами де Брейна. А именно: для каждой связанной переменной мы просто пишем расстояние от неё до ближайшего связывания.

Если переписать термы с альфа эквивалентностью выше, то для всех трех термов получим  $[\backslash \rightarrow 1 \ (2 \ z)]$ , и проверка на альфа-эквивалентность превращается в проверку на равенство.

Также решается проблема избегания захвата переменных, а именно:

$$\begin{aligned} \backslash \rightarrow y \\ \backslash \rightarrow z \\ \backslash \rightarrow \backslash \rightarrow y = \backslash \backslash \rightarrow y \end{aligned}$$

Как видно "y" остался свободным.

Это представление значительно лучше удовлетворяет нашим требованиям разработчика языков. Мы перешли от `[Lam "y" (Lam "x" (App "x" (App "y" "z")))]` к `[Lam (Lam (App 1 (App 2 "z")))]`.

Однако общей проблемой обоих представлений является нетипизированность переменных — никто не контролирует построение термов вида `[Lam (Lam (App 123 (App 23 "z")))]`. Решение этой проблемы описано в секции 5.3.



## **3. Обзор аналогов**

Построение языков программирования с зависимыми типами по спецификации является задачей достаточно специфичной. Аналоги являются средствами с более широким спектром применения.

### **3.1. Twelf**

### **3.2. PLT/Redex**

Syntax		Kinding	
$t ::=$		$\frac{X :: K \in \Gamma \quad \Gamma \vdash K}{\Gamma \vdash X :: K}$	$\boxed{\Gamma \vdash T :: K}$
$x$	terms:		
$\lambda x:T.t$	variable		
$t t$	abstraction		
$T ::=$	types:	$\frac{\Gamma \vdash T_1 :: * \quad \Gamma, x:T_1 \vdash T_2 :: *}{\Gamma \vdash \Pi x:T_1.T_2 :: *}$	(K-PI)
$X$	type/family variable		
$\Pi x:T.T$	dependent product type	$\frac{\Gamma \vdash S :: \Pi x:T.K \quad \Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash S t : [x \mapsto t]K}$	(K-APP)
$T t$	type family application		
$K ::=$	kinds:	$\frac{\Gamma \vdash T :: K \quad \Gamma \vdash K \equiv K'}{\Gamma \vdash T :: K'}$	(K-CONV)
$*$	kind of proper types		
$\Pi x:T.K$	kind of type families		
$\Gamma ::=$	contexts:	$\boxed{\Gamma \vdash t : T}$	
$\emptyset$	empty context	$\frac{x:T \in \Gamma \quad \Gamma \vdash T :: *}{\Gamma \vdash x : T}$	(T-VAR)
$\Gamma, x:T$	term variable binding		
$\Gamma, X::K$	type variable binding	$\frac{\Gamma \vdash S :: * \quad \Gamma, x:S \vdash t : T}{\Gamma \vdash \lambda x:S.t : \Pi x:S.T}$	(T-ABS)
Well-formed kinds		$\frac{\Gamma \vdash t_1 : \Pi x:S.T \quad \Gamma \vdash t_2 : S}{\Gamma \vdash t_1 t_2 : [x \mapsto t_2]T}$	(T-APP)
	$\boxed{\Gamma \vdash K}$	$\frac{\Gamma \vdash t : T \quad \Gamma \vdash T \equiv T' :: *}{\Gamma \vdash t : T'}$	(T-CONV)
	$\Gamma \vdash *$		
	(WF-STAR)		
	$\frac{\Gamma \vdash T :: * \quad \Gamma, x:T \vdash K}{\Gamma \vdash \Pi x:T.K}$		
	(WF-PI)		

Рис. 1: Язык с лямбдой и  $\Pi$ -типами

## 4. Определение языка спецификаций

Вдохновением данной работы послужила статьи [6] и [5]. Поэтому сам язык спецификации выглядит как язык описания алгебраических теорий<sup>2</sup>.

Начнем с примера описания языка с зависимыми типами (рис.1) [7, Глава 2.1]

У нас явно выделяются три сорта (можно думать о сортах как о метатипах): кайнды, термы и типы (правила связанные с кайндами и само их описание опущены для простоты).

Также явно выделяются примитивы языка<sup>3</sup>: абстракция, пи-типы (стрелки в языках без зависимых типов) и аппликация. Легко заметить, что во всех языках присутствуют подстановка, контексты, символ ':' означающий, что тип терма слева есть терм справа, и связывание переменных.

Если принять во внимания все наблюдения выше то так этот язык будет выглядеть в нашем языке спецификации<sup>4</sup>:

DependentSorts :

<sup>2</sup>А именно: помимо правил вывода у нас есть сорта и функциональные символы.

<sup>3</sup>В дальнейшем мы называем из функциональными символами.

<sup>4</sup>Важно понимать, что запись  $\_ \vdash$  не означает, что контекст пуст, если слева ничего не написано, это эквивалентно записи  $\Gamma \vdash$ .

```

tm, ty
FunctionalSymbols:
  lam: (ty, 0)*(tm, 1) -> tm
  app: (tm, 0)*(tm, 0)*(ty, 1) -> tm
  pi : (ty, 0)*(ty, 1) -> ty
Axioms:
  K-Pi =
    forall T1 : ty, x.T2 : ty
      x : T1 |- T2 def ---- |- pi(T1, x.T2) def

  TAbs =
    forall S : ty, x.T : ty, x.t : tm
      x : S |- t : T ---- |- lam(S, x.t) : pi(S, x.T)

  TApp =
    forall t1 : tm, t2 : tm, S : ty, x.T : ty
      |- t1 : pi(S, x.T),
      |- t2 : S,
      x : S |- T def
      -----
      |- app(t1, t2, x.T) : T[x:=t2]

```

Reductions:

```

Beta =
  forall x.b : tm, A : ty, a : tm, z.T : ty
    ---- |- app(lam(A, x.b), a, z.T) => b[x:=a] : T[z:=a]

```

Типизирование метапеременных позволяет проверять правильность применения функциональных символов и наличие нужных переменных в контексте. Именованные переменные служат для определения порядка переменных в контексте и не несут какой-то дополнительной информации.

Также в язык была добавлена проверка на с-стабильность — можно помечать аксиомы типами, тогда аксиома применима, только если все переменные входящие в терм являются представителями этих типов<sup>5</sup>.

#### 4.1. Ограничения на спецификации, налагаемые языком

1. Все используемые метапеременные должны иметь аннотацию (сорт), то есть присутствовать в секции forall аксиомы/редукции.
2. Запрещено равенство в заключении аксиом для определенности каждого шага

---

<sup>5</sup>Если список типов пуст, то производится проверка на отсутствие свободных переменных.

в проверке типов определяемого языка (если видим равенство, не ясно в какую сторону идти при редуцировании)

3. Все аргументы в функциональный символ в заключении аксиомы должны быть метапеременными. Ещё и с теми же аргументами, что и в forall (не расширенный контекст).
4. Если в заключении аксиомы написан функциональный символ возвращающий сорт термов, он обязан также иметь тип (нельзя просто написать  $\vdash f(\dots)def$ ).
5. Определения функциональных символов всегда одно, иначе появляется недетерминированность в проверке типов. Не играет особой роли, так как в данном случае можно сделать недетерминированность в проверке.
6. Подстановки разрешены только в метапеременные — в принципе, это слабое ограничение, которое облегчает жизнь при реализации, не ограничивая пользователя.
7. В заключении контекст не должен быть расширен — это ограничение связано с тем, что иначе смысл аксиомы становится странным. А именно: функциональный символ применим только при введении переменных в контекст.
8. Все метапеременные используемые в предпосылках должны либо присутствовать в метапеременных заключения или же должны быть типами какой-либо предпосылки.
9. Если в функциональном символе встречаются метапеременные с контекстами  $x_1 \dots x_k.T$  должна существовать предпосылка вида  $x_1 : S_1 \dots x_k : S_k \vdash T$ . Это сделано для того чтобы не передавать типы контекстов метапеременных функционального символа явно.
10. Если метапеременная является типом предпосылки и не встречается в аргументах функционального символа, то она может использоваться только справа от двоеточия. Таким образом избегаются ситуации связанные с порядком проверки предпосылок языка. А именно: если у нас есть  $x : S \vdash t : T, x : T \vdash r : S$ , то нужно строить граф зависимостей для предпосылок и использовать порядок полученный в результате его топологической сортировки в генерации кода. (Аналогично с 5.2).
11. Все переменные контекстов метапеременных могут использовать только метапеременные левее внутри функционального символа в заключении — это связано с тем, что иначе могут возникнуть циклы в определениях метапеременных: S тип с аргументом типа R, R тип с аргументом типа S, S тип с аргументом типа R.

12. Из-за ослабления условия на метапеременные в Пункте 8, порядок метапеременных неочевиден. Решение данной проблемы и (11) описано в Секции 5.2.
13. Редукции не учитывают предпосылок при приведении в нормальную форму — предполагается что они не конфликтуют с аксиомами и проверки в аксиомах достаточно.
14. В редукциях все метапеременные справа от ' $=>$ ' должны встречаться и слева от него.
15. Подстановка запрещена слева от ' $=>$ '.
16. Все редукции всегда стабильны.

## 4.2. Проверки корректности спецификации языка

Все ограничения выше проверяются при обработке спецификации языка.

Также тривиальными проверками, осуществляемыми после парсинга языка, являются:

- Все метапеременные, используемые в правилах вывода/редукциях находятся в контексте включающем их контекст описанный в секции forall.
- Проверка того, что сорты используемых выражений совпадают с сортами аргументов функциональных символов.
- Подстановка осуществляется в переменные, которые есть в свободном виде в метапеременной.
- Контексты метапеременных содержат все их метапеременные.
- Все функциональные символы имеют ассоциированное правило вывода.

## 5. Реализация

В данной секции описана реализация языка спецификации языков с зависимыми типами.

### 5.1. Парсер генераторы

В ходе всей работы использовались лексер и парсер генераторы alex[2] и happy[4].

Решение использовать именно парсер генераторы, а не парсер комбинаторы[11] или другие методы парсинга было обусловлено тем, что прогнозировались частые изменения грамматики вместе с эволюцией языка.

```
Axiom      :   Header '=' '\t' Forall '\t'
               Premise '|---' JudgementNoEq '/t' '/t'
               { Axiom (snd $1) (fst $1) $4 $6 $8 }
           |   Header '=' '\t'
               Premise '|---' JudgementNoEq '/t'
               { Axiom (snd $1) (fst $1) [] $4 $6 }
```

Listing 1: Часть спецификации парсера

Все изменения связанные с грамматикой языка проводились на уровне спецификации AST.

### 5.2. Проверка корректного использования метапеременных

В секции 4 описывался язык и ограничения налагаемые на спецификации.

Здесь описан алгоритм проверки использования метапеременных в контекстах других метапеременных. А если конкретнее — проверки того, что метапеременные не используют метапеременных переданных правее в функциональном символе, который мы определяем.

Так как язык не обязывает пользователя явно передавать типы переменных метапеременных, используемых в функциональных символах, метапеременные могут быть не только аргументами определяемого функционального символа, но и типами термов предпосылок.

---

Итак, мы построили граф зависимостей одних метапеременных от других. Для проверки корректности правила вывода мы делаем топологическую сортировку и проверяем что наш граф является DAG'ом.

### 5.3. Индексы де Брейна на уровне типов

В нашем описании индексов де Брейна в Секции 4 мы упомянули, что наивное их использование склонно к ошибкам и не использует систему типов Haskell.

Эту проблему можно решить с помощью полиморфной рекурсии[3]. По сути, каждый раз когда мы абстрагируемся по переменной в представлении де Брейна, мы добавляем единицу ко всем связанным переменным внутри терма. Ключевым наблюдением является то, что мы можем добавлять единицу оборачивая терм в Maybe. Например:

```
data Term a
  = Var a
  | App (Term a) (Term a)
  | Lam (Term (Maybe a))
```

Однако этот метод не очень удобен при кодогенерации, так как instance Monad будет зависит от определения Term. В той же статье предложен способ превращения этого паттерна программирования в трансформер монад<sup>6</sup>.

```
data Var a = B | F a
newtype Scope f a = Scope { fromScope :: f (Var a) }

instance Monad f => Monad (Scope f) where
  return = Scope . return . F
  Scope m >>= f = Scope $ m >>= varAppWithDefault (return B)
    (fromScope . f)

instance MonadTrans Scope where
  lift = Scope . liftM F

abstract :: (Functor f, Eq a) => a -> f a -> Scope f a
abstract x xs = Scope (fmap go xs) where
  go y = y <$ guard (x /= y)

instantiate :: Monad f => f a -> Scope f a -> f a
instantiate x (Scope xs) = xs >>= go where
  go B = x
  go (F y) = return y
```

---

<sup>6</sup>в коде Maybe заменен на Var, в соответствие со своей семантикой.

При кодогенерации нам всего лишь понадобится определить гораздо более простую монаду подстановок для ADT термов, которые выглядят теперь так:

```
data Term a
  = Var a
  | App (Term a) (Term a) (Scope Term a)
  | Lam (Term a) (Scope Term a)

instance Monad Term where
  Var v1 >>= f = f v1
  App v1 v2 >>= f = App (v1 >>= f) (v2 >>= f)
  Lam v1 v2 >>= f = Lam (v1 >>= f) (v2 >>= f)

(>>>=) :: (Monad f) => Scope f a -> (a -> f b) -> Scope f b
m >>>= f = m >>= lift . f
```

Этот метод использован в библиотеке `bound`[9]. В виду того, что нам часто приходится заходить внутрь контекстов<sup>7</sup> обобщенные индексы де Брейна используемые в `bound` нам не подходят. Это связано с тем, что мы не можем просто паттернматчить-ся, нам нужно вызывать функцию `fromScope`, которая работает нетривиально. При реализации описанной выше `fromScope` соответствует паттерматчингу на терме.

## 5.4. Построение термов

Одной из проблем индексов де Брейна является их жесткая привязка к порядку переменных в контексте. Действительно чтобы переставить аргументы терма `[Lam "y" (Lam "x" (App "x" (App "y" (App "y" "y"))))]` мы всего-лишь меняем их местами в моменты их связывания и получаем `[Lam "x" (Lam "y" (App "x" (App "y" (App "y" "y"))))]`. Однако схожая операция для представления с использованием индексов де Брейна выливается в обход всего терма(!) `[Lam (Lam (App 1 (App 2 (App 2 2))))]` превращается в `[Lam (Lam (App 2 (App 1 (App 1 1))))]`.

Но если уж пользователь так написал спецификацию, что мы имеем терм с другим порядком переменных или терм с большим их количеством, то мы должны поменять эти переменные местами и даже попытаться удалить лишние переменные.

Например чтобы привести `"(x y z).T"` к `"(z x).T"`. Мы должны удалить `"y"` и переставить `"x"` и `"z"` местами.

Так же мы поступаем при возможном расширении контекста нашей метапеременной, например имеем `"S"` и хотим построить `"Lam A x.S"` — здесь нужна метапеременная `"x.S"`, мы получаем её добавляя переменную в её контекст.

---

<sup>7</sup>Необходимо при приведении в нормальную форму.



Решение предлагаемое в данной работе состоит из композиций операций `swap_i`, `remove_i` и `add_i`. Каждая операция выполняет `traverse` терма, который мы меняем. Примеры функций:

```
swap1'2 :: Var (Var a) -> Identity (Var (Var a))
swap1'2 (B ) = pure (F (B ))
swap1'2 (F (B )) = pure (B)
swap1'2 x = pure x
```

```
rem2 :: Var (Var a) -> TC (Var a)
rem2 B = pure B
rem2 (F B) = Left "There is var at 2"
rem2 (F (F x)) = pure (F x)
```

```
add2 :: Var a -> Identity (Var (Var a))
add2 B = pure $ B
add2 (F x) = pure $ F (F x)
```

Решение не является оптимальным, так как можно пройти по всему терму единожды и применить все эти операции сразу, но сложность генерации/написания такого кода возрастает значительно.

Для решения этой задачи написан модуль `Solver`<sup>8</sup>.

По сути мы либо имеем больший контекст и из него получаем меньший, либо наоборот. Хотим делать меньше `swap`'ов.

Рассмотрим случай приведения большего контекста к меньшему, "[x, y, z]" к "[y, x]". Мы идем справа налево, так как наиболее близкая связанная переменная наиболее правая. Удаляем те переменные которых нет в контексте к которому мы хотим прийти, таким образом обеспечиваем меньше вызовов к разным функциям `rem`<sup>9</sup>. Затем просто применяем алгоритм `insertion sort` на оставшихся контекстах. На количестве сгенерированных функций `swap` это не отразится.

## 5.5. Вывод типов и нормализация

Сам `infer` работает как описано в Секции 2.1. Мы последовательно строим каждую предпосылку и вызываем функцию вывода типов или проверки типа выражения на равенство типу. Термы, которые мы передаем в эти функции, строим последовательно

<sup>8</sup>Стоит отметить что функции `swap`, `rem` и `add` должны быть сгенерированы и для этого ведется подсчёт в монаде кодогенерации путем записи максимального индекса. Следовательно функция `swap` дороже, так как мы генерируем  $C_2^i$  функций. Именно поэтому алгоритм пытается использовать как можно меньше разных функций.

<sup>9</sup>Мы не можем удалить переменную из контекста, если она присутствует в терме. Монада `TC` обеспечивает обработку ошибок удаления.

на основе переданных нам в функциональном символе или полученных при вызове функции вывода типов.

```

If-then =
  forall t : tm, t1 : tm, t2 : tm, x.A : ty
    x : bool |- A def ,
    |- t1 : A[x:=true] ,
    |- t2 : A[x:=false] ,
    |- t : bool
  -----
  |- if(x.A, t, t1, t2) : A[x:=t]

infer ctx (If v1 v2 v3 v4)
= do v5 <- infer ctx v2
    checkEq Bool v5
    v6 <- infer ctx v4
    checkEq (instantiate False (toScope (fromScope v1))) v6
    v7 <- infer ctx v3
    checkEq (instantiate True (toScope (fromScope v1))) v7
    checkT ctx TyDef Bool
    checkT (consCtx Bool ctx) TyDef (fromScope v1)
    infer ctx v2
    infer ctx v3
    infer ctx v4
    pure (instantiate v2 (toScope (fromScope v1)))

```

Listing 2: Пример правила вывода и части сгенерированной функции `infer`, соответствующей этому правилу

Стоит отметить, что порядок или количество переменных метапеременных которые у нас есть могут отличаться от порядка и вида контекста в котором наша метапеременная должна быть. Эту проблему мы решаем приводя метапеременные к контексту данному в секции `forall` правила вывода, методом описанным в Секции 5.4.

```

FRule =
  forall S : ty, t : tm, T : ty
    x:S, y:S |- t : T,
    x:T |- t : bool
  -----
  |- ff(S, t) def

```

```
infer ctx (Ff v1 v2)
```

```

= do checkT ctx TyDef v1
    checkT (consCtx v1 ctx) TyDef (rt add1 v1)
    v3 <- infer (consCtx (rt add1 v1) (consCtx v1 ctx))
              (rt add1 (rt add1 v2))
    v4 <- pure (nf v3) >>= traverse rem1 >>= traverse rem1
    checkT ctx TyDef v4
    v5 <- infer (consCtx v4 ctx) (rt add1 v2)
    checkEq Bool v5
    pure TyDef

```

Listing 3: Искусственный пример случая несоответствия контекстов (контекст  $t$  нужно сократить до использования в предпосылке)

Функция  $nf$  пытается паттернматчиться на терме, если это не выходит, то данная редукция неприменима<sup>10</sup>.

```

nf (If v1 v2 v3 v4)
  = nf' (U (U Bot)) (If (nf1 v1) (nf v2) (nf v3) (nf v4))

nf' (U (U _)) al@(If (Scope v1) True v2 v3)
  = case
    do v4 <- pure v1
       v5 <- pure v2
       v6 <- pure v3
       pure v5
    of
      Left _ -> nf' (U Bot) al
      Right x -> nf x
nf' (U _) al@(If (Scope v1) False v2 v3)
  = case
    do v4 <- pure v1
       v5 <- pure v2
       v6 <- pure v3
       pure v6
    of
      Left _ -> nf' Bot al
      Right x -> nf x
nf' _ x = x

```

Listing 4: Приведение в нормальную форму пытается применить все редукции данного

---

<sup>10</sup>Такой паттернматчинг невозможен с использованием библиотеки `bound`[9], поэтому был написан модуль `SimpleBound` с обычными индексами де Брейна.

## 5.6. Генерация кода

Генерация кода происходит с использованием библиотеки `haskell-src-extends`[10], которая дает нам функции генерации и манипуляции АСТ Haskell.

Так как большинство кода используемого для проверки не зависит от специфицированного языка, мы просто модифицируем написанный от руки модуль `LangTemplate`. В нем нужно определить функции приведения в нормальную форму и вывода типов. Также нужно определить тип данных термов и определить монадическое действие на типе данных термов.

Всё остальное либо генерируется с помощью `Template Haskell`[8] — `instance Traversable, Functor, Eq, Show, Foldable`<sup>11</sup>, либо написано от руки с вызовами функций `nf` или `infer`.

```
emptyCtx :: (Show a, Eq a) => Ctx a
emptyCtx x = Left $ "Variable not in scope: " ++ show x

consCtx :: (Show a, Eq a) => Type a -> Ctx a -> Ctx (Var a)
consCtx ty ctx B = pure (F <$> ty)
consCtx ty ctx (F a) = (F <$>) <$> ctx a

checkT :: (Show a, Eq a) => Ctx a -> Type a -> Term a -> TC ()
checkT ctx want t = do
  have <- infer ctx t
  when (nf have /= nf want) $ Left $
    "type mismatch, have: " ++ (show have) ++ " want: " ++ (show
      want)
```

Listing 5: Проверка типов и контексты

---

<sup>11</sup>`Foldable` дает нам функцию `toList`, которая возвращает свободные переменные терма, `Traversable` позволяет применять функции `swap`, `rem` и `add` к переменным обходя весь терм.

## Заключение

В рамках данной работы достигнуты следующие результаты:

- Определен язык спецификаций зависимых языков с дальнейшей возможностью генерации тайпчекера.
- Реализована генерация структур данных представления языка с использованием индексов де Брюйна на уровне типов и функций манипуляции этими структурами.
- Реализованы генерация функций приведения термов специфицированного языка в нормальную форму и проверки типов.

Существует несколько направлений развития данной работы:

- Можно реализовать поддержку определения функций над термами языка.
- Дать пользователю определять функции на уровне языка спецификации.
- Поддержать возможность композиции спецификации языков — тогда можно будет собирать языки из частей как предложено в [5].

## Список литературы

- [1] Agda programming language. — Access mode: <http://wiki.portal.chalmers.se/agda/pmwiki.php> (online; accessed: 25.05.2017).
- [2] Alex: A lexical analyser generator for Haskell. — Access mode: <https://www.haskell.org/alex/> (online; accessed: 25.05.2017).
- [3] Bird Richard S., Paterson Ross. De Bruijn Notation As a Nested Datatype // J. Funct. Program. — 1999. — Jan. — Vol. 9, no. 1. — P. 77–91. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1017/S0956796899003366>.
- [4] Happy, The Parser Generator for Haskell. — Access mode: <https://www.haskell.org/happy/> (online; accessed: 25.05.2017).
- [5] Isaev Valery. Algebraic Presentations of Dependent Type Theories. — arxiv : math.LO, cs.LO, math.CT/<http://arxiv.org/abs/1602.08504v3>.
- [6] Palmgren E., Vickers S.J. Partial Horn logic and cartesian categories // Annals of Pure and Applied Logic. — 2007. — Vol. 145, no. 3. — P. 314 – 353. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168007206001229>.
- [7] Pierce Benjamin C. Advanced Topics in Types and Programming Languages. — The MIT Press, 2004. — ISBN: 0262162288.
- [8] Template Haskell. — Access mode: [https://wiki.haskell.org/Template\\_Haskell](https://wiki.haskell.org/Template_Haskell) (online; accessed: 25.05.2017).
- [9] bound: Making de Bruijn Succ Less. — Access mode: <https://hackage.haskell.org/package/bound> (online; accessed: 25.05.2017).
- [10] haskell-src-exts: Manipulating Haskell source: abstract syntax, lexer, parser, and pretty-printer. — Access mode: <https://hackage.haskell.org/package/haskell-src-exts> (online; accessed: 25.05.2017).
- [11] parsec: Monadic parser combinators. — Access mode: <https://hackage.haskell.org/package/parsec> (online; accessed: 25.05.2017).

# Приложения

## А. Доказательство корректности функции `filter`

Ниже показан пример доказательства того, что функция `filter` выдает подсписок исходного списка. Код написан на Agda[1]

— Определяем предикат принадлежности элемента списку

```
data ∈_ {A : Set} (a : A) : List A → Set where
  here : (xs : List A) → a ∈ (a ∷ xs)
  there : (x : A) (xs : List A) → a ∈ xs → a ∈ (x ∷ xs)
```

— Определяем предикат `xs ∷ ys`, означающий список `xs` является подсписком `ys`.

```
data ∷_ {A : Set} : List A → List A → Set where
  nil : [] ∷ []
  larger : {y : A} {xs ys : List A} → xs ∷ ys → xs ∷ (y ∷ ys)
  cons : {x : A} {xs ys : List A} → xs ∷ ys → (x ∷ xs) ∷ (x ∷ ys)
```

— Докажем, что `filter xs ∷ xs` для любого списка `xs`.

```
filter' : {A : Set} → (A → Bool) → List A → List A
filter' p [] = []
filter' p (x ∷ xs) = if p x then x ∷ filter' p xs else filter' p xs
```

```
filterLess : {A : Set} → (p : A → Bool) → (xs : List A) →
  filter' p xs ∷ xs
filterLess p [] = nil
filterLess p (x ∷ xs) with p x
filterLess p (x ∷ xs) | false = larger (filterLess p xs)
filterLess p (x ∷ xs) | true = cons (filterLess p xs)
```