

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский
Академический университет Российской академии наук»
Центр высшего образования

Кафедра математических и информационных технологий

Гарифуллин Шамиль Раифович

Генерация зависимых языков по спецификации пользователя

Магистерская диссертация

Допущена к защите.
Зав. кафедрой:
д. ф.-м. н., профессор Омельченко А. В.

Научный руководитель:
Исаев В. И.

Рецензент:
Подкопаев А. В.

Санкт-Петербург
2017

SAINT PETERSBURG ACADEMIC UNIVERSITY
Higher education centre

Department of Mathematics and Information Technology

Shamil Garifullin

Specification based generation of languages with dependent types

Graduation Thesis

Admitted for defence.
Head of the chair:
professor Alexander Omelchenko

Scientific supervisor:
Valeriy Isaev

Reviewer:
Anton Podkopaev

Saint Petersburg
2017

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Введение | 4 |
| 1. Постановка задачи | 9 |
| 2. Зависимые языки | 10 |
| 2.1. Проверка типов в зависимых языках | 10 |
| 2.2. Индексы де Брейна | 11 |
| 3. Обзор аналогов | 13 |
| 3.1. BNFC | 13 |
| 3.2. PLT/Redex | 13 |
| 3.3. Twelf | 13 |
| 4. Определение языка спецификаций | 15 |
| 4.1. Ограничения на спецификации, налагаемые языком | 17 |
| 4.2. Проверки корректности спецификации языка | 19 |
| 5. Реализация | 20 |
| 5.1. Парсер генераторы | 20 |
| 5.2. Проверка корректного использования метапеременных | 22 |
| 5.3. Модуль проверки корректности спецификации | 22 |
| 5.4. Индексы де Брейна на уровне типов | 24 |
| 5.5. Генерация кода | 25 |
| 5.6. Структура модуля генерации кода | 26 |
| 5.7. Построение термов | 28 |
| 5.8. Вывод типов и нормализация | 31 |
| Заключение | 34 |
| Список литературы | 35 |
| Приложения | 38 |
| А. Доказательство корректности функции filter | 38 |
| В. Ссылка на исходный код | 38 |
| С. Спецификация ЛП с булевыми выражениями и сгенерированный код . . | 39 |

Введение

Формальные языки с зависимыми типами могут быть использованы для доказательств свойств кода программы. Также в языке с зависимыми типами возможно определить типы, аналогичные сущностям области математики, в которой мы хотим доказывать теоремы и просто писать термы, таким образом предъявляя доказательства утверждений. Это называется соответствием Карри-Говарда-Ламбека[7]. Достоинство данного подхода заключается в том, что проверка доказательств перекладывается на алгоритм проверки типов соответствующего языка — во многих случаях автоматизированный процесс.

Наиболее известными примерами языков, которые пользуются соответствием Карри-Говарда для доказательства математических утверждений являются Coq[6] и Agda[1]. Например, доказательство теоремы о четырех красках было завершено в 2005 году с помощью Coq[23]. Пример относительно простого доказательства корректности функции `filter` на Agda приведен в Приложении А.

В процессе формализации теории может возникнуть ситуация, что конструкции, которыми мы хотим пользоваться, не существуют в языке программирования. Поэтому, если мы хотим переложить верификацию наших высказываний на алгоритм проверки типов соответствующего языка с зависимыми типами, приходится писать свой язык программирования и уже в нем доказывать утверждения.

Так как типы зависимого языка могут включать в себя произвольные термы, проверка типов является задачей тесно связанной с вычислением языка¹. Поэтому написание функции проверки типов языка становится достаточно ёмкой задачей. В работе описан способ генерации библиотеки Haskell[11] для работы со специфицированным языком, в которой есть функции проверки типов, нормализации, работы с контекстами и стандартные операции над термами (такие как подстановка и абстракция).

Зависимые языки состоят из конструкций языка и их семантика задается с помощью правил вывода и редукций. В работе использована “типизация” конструкций², аналогично языку проверки свойств спецификаций языка Twelf [22].

В спецификации задаются метатипы метапеременных (сорта) и конструкций, сами конструкции, правила вывода каждой конструкции и правила редукции языка. Всегда существует сорт зависимых термов и сорт [зависимых] типов. Во вставке кода 1 приведена спецификация STLC[19]. Стандартная нотация $(x\ y).T$ означает, что

¹В дальнейшем мы понимаем вычисление как переписывание термов согласно редукциям языка, пока не получим терм к которому ни одна редукция неприменима — этот процесс называется приведением терма в *нормальную форму*.

²Это сделано ещё и потому, что работа основана на [13]. В статье предложено описание языков в виде существенно алгебраических теорий. У специфицируемого языка есть конструкции, правила вывода и редукции что транслируется в сигнатуру и аксиомы, соответствующей алгебраической теории.

```

Dependent sorts :
  tm
SimpleSorts :
  ty
FunctionalSymbols :
  lam: (ty,0)*(tm,1) -> tm
  app: (ty,0)*(tm,0)*(tm,0) -> tm
  arrow: (ty,0)*(ty,0) -> ty
Axioms :
  TAbs =
    forall S : ty , T : ty , x.t : tm
      x : S |- t : T ---- |- lam(S , x.t) : arrow(S, T)
  TApp =
    forall t1 : tm , t2 : tm , S : ty , x.T : ty
      |- t1 : arrow(S, T) , |- t2 : S
      -----
      |- app(T, t1 , t2) : T
  IArrow =
    forall T1 : ty , T2 : ty
      ---- |- arrow(T1, T2) def
Reductions :
  Beta =
    forall x.b : tm, A : ty , a : tm, T : ty
      ---- |- app(T, lam(A, x.b) , a) => b[x := a]

```

Listing 1: Описание STLC при помощи языка спецификаций

контекст данной переменной содержит ещё две переменных в дополнение к существующему общему контексту. Конструкции языка, которые имеют в качестве аргументов (sort, $n > 0$) связывают n переменных.

Также спецификация позволяет задать с-стабильность правил вывода относительно замкнутых типов, что означает, что данная конструкция применима только в случае наличия свободных переменных только указанных типов. Например, если мы хотим, чтобы λ -абстракцию можно было применять только, если все свободные переменные внутри неё имеют тип Bool или являются функциями из Bool в Bool, мы аннотируем наше правило вывода соответствующими типами так, как показано во вставке 2.

Чтобы это сделать в STLC появится новая конструкция и правило вывода соответствующая новому типу Bool. Вполне вероятно, мы захотим, чтобы тип имел стандартных представителей False и True, которые в свою очередь должны иметь свои правила вывода и связанные с ними конструкции (например If-then-else).

После проверок спецификации (описанных в Секции 4.1) строится структура хранящая информацию о правилах вывода, редукциях и конструкциях языка. С её по-

```

FunctionalSymbols:
  lam: (ty,0)*(tm,1) -> tm
  app: (ty,0)*(tm,0)*(tm,0) -> tm
  arrow: (ty,0)*(ty,0) -> ty
  bool: ty
Axioms:
  IBool =
    |--- |- Bool def

  [ bool, arrow(bool, bool) ]
  TAbs =
    forall S : ty , T : ty , x.t : tm
      x : S |- t : T |--- |- lam(S, x.t) : arrow(S, T)

```

Listing 2: Пример спецификации того, что конструкция λ должна быть стабильна относительно типа `Bool` и `Bool \rightarrow Bool`

мощью происходит кодогенерация представления термов языка и функций проверки типов и нормализации.

Было выбрано представление структур данных в виде индексов де Брейна[5] через полиморфную рекурсию (подробнее в Секции 5.4). Само представление де Брейна имеет ряд преимуществ: α -эквивалентность превращается в проверку на равенство, и не возникает проблем захвата свободных переменных (подробнее в Секции 2.2). Пример представлен во вставке 3. Как видно роль индексов играет оборачивание термов в конструктор `Score`.

Использование полиморфной рекурсии для выражения индексов де Брейна имеет дополнительные преимущества:

- Проверка корректности построения термов на уровне типов (невозможно написать терм `Lam 123` в пустом контексте, так как λ захватывает только одну переменную).
- Можно абстрагировать это представление, превратив `Score` в трансформер монад. Тогда нам остается лишь определить представителя класса `Monad` для нашего представления термов (`bind` работает как подстановка), что делается крайне просто с точки зрения кодогенерации.
- Абстрактное представление дает нам обобщенные функции `abstract` и `instantiate`, которые абстрагируют переменную и инстанцируют самую внешнюю связную переменную соответственно. Таким образом решается проблема представления подстановок.
- С помощью механизма `Deriving Haskell` можно получить представителя классов `Functor`, `Traversable` и `Foldable`. Что дает нам функции `toList` — список свобод-

```

data Term a = Var a
            | TyDef
            | App (Type a) (Term a) (Term a)
            | Lam (Type a) (Scope Term a)
            | Arrow (Type a) (Type a)

instance Monad Term where
    Var v1 >>= f = f v1
    TyDef >>= f = TyDef
    App v1 v2 v3 >>= f = App (v1 >>= f) (v2 >>= f) (v3 >>= f)
    Lam v1 v2 >>= f = Lam (v1 >>= f) (v2 >>= f)
    Arrow v1 v2 >>= f = Arrow (v1 >>= f) (v2 >>= f)

```

Listing 3: Сгенерированное представление АСТ STLC на Haskell и представитель класса Monad

ных переменных терма — и `traverse` — применить аппликативную функцию к переменным терма.

- Можно определить обобщенные `Show` и `Eq` — не теряем простоты использования более простого представления без полиморфной рекурсии.

Затем происходит генерация функций `infer` и `nf`, а остальные функции — проверки типа терма, печати терма, функции управления контекстами — не зависят от специфицируемого языка.

Функция `nf` (подробнее про `nf` и `infer` в Секциях 2.1 и 5.8) сопоставляет терм с образцом, сгенерированном для каждой левой части редукции. Если происходит совпадение — строит правую часть совпавшей редукции. Если нет совпадения, то возвращает конструкцию, которую приняла, предварительно применив себя же ко всем внутренним термам.

Функция `infer` сопоставляет терм с образцом, наличие правил вывода для всех конструкций гарантирует совпадение хоть с одним образцом. Затем проверяет каждую предпосылку отдельно и возвращает тип терма, который ей был передан в соответствии с правилом вывода конструкции. Если переданный терм не является представителем сорта термов, возвращается аналог `кайнда *` для данного сорта.

Для построения термов из переданных нам аргументов функции мы должны уметь строить термы из имеющихся у нас метапеременных, это описано в деталях в Секции 5.7.

Затем используется библиотека `Haskell.src.exts[26]` для замены структур данных и функций заглушек в написанном от руки модуле `LangTemplate`.

Полученный код компилируется Haskell, и на нем можно описывать термы специфицированного языка, его контекст и выводить тип терма или приводить его в

нормальную форму.

1. Постановка задачи

Целью данной работы является разработка и реализация языка для спецификации языков программирования с зависимыми типами. Ключевые задачи:

- Сужение множества возможных спецификаций зависимых языков для возможности генерации алгоритма проверки типов.
- Реализация генерации структур данных представления АСТ языка и функций манипуляции этими структурами.
- Реализация генерации функций приведения термов специфицированного языка в нормальную форму и проверки типов.

2. Зависимые языки

Во многих языках программирования возникают ошибки связанные с доступом за границу массива. Аналогом этого в Haskell является взятие первого элемента в списке.

```
head :: [a] -> a
head (x:_) = x
head [] = error "No head!"
```

Такие ситуации обычно решаются с помощью механизма исключений или его аналогов. Однако эту проблему можно решить иначе, наложив на вход дополнительные ограничения. А именно — не принимать некорректные входные данные.

```
head :: {n : N} -> Vec a (suc n) -> a
head (x:_) = x
```

Здесь тип явно специфицирует, что функция не принимает термы типа ‘Vec a 0’. Языки с зависимыми типами позволяют типам зависеть от термов, именно это позволяет описать тип списков фиксированной длины.

Как правило, программисты все равно проверяют какие-то ограничения перед вызовом функции или обладают дополнительной информацией, на основе которой они пишут код так, как они его пишут. В зависимых языках мы можем писать программы, где передача этого знания будет явно требоваться компилятором, что позволяет не допускать такого рода ошибки.

Этот способ обобщается, и можно доказывать корректность работы алгоритмов, например функции filter в Приложении А.

2.1. Проверка типов в зависимых языках

Рассмотрим пример правила вывода:

$$\frac{\Gamma, x : S \vdash T \text{ type} \quad \Gamma \vdash f : \Pi(S, T) \quad \Gamma \vdash t : S}{\Gamma \vdash \text{app}(T, f, t) : T[x := t]}$$

Это пример правила вывода применения зависимой функции. Π принимает в качестве аргумента терм и в зависимости от аргумента возвращает тип, обычные функции через Π выражаются просто — они всегда возвращают один и тот же тип.

Правила вывода можно представлять как узлы дерева вывода, где заключение является предком всех предпосылок. Проверка типов в любом языке это обход АСТ и происходит так: мы имеем некоторые аргументы внутри примитива, которые мы используем для составления узлов-потомков (предпосылок). На этих узлах вызываем функцию вывода типов в возможно расширенном контексте (конечно, мы должны

для каждого расширения контекста проверять его корректность) рекурсивно. Если потомки составлены корректно, то получаем некие типы, которые можем использовать в проверке равенств в предпосылках и возврате типа примитива.

В зависимых языках все точно так же, однако проверка на равенство должна происходить после нормализации термов. Нормализацию мы применяем только после того, как убедимся, что термы корректно составлены. Получается, что нормализация тесно связана с проверкой типов. Более того проверка типов невозможна без нормализации термов.

Давайте разберём алгоритм на примере выше.

1. Чтобы проверить терм $app(T, f, t)$ (и вернуть его тип $T[x := t]$), поочередно проверяем предпосылки.
2. Вызываемся рекурсивно на терме t и, если не произошло ошибки, получаем тип S .
3. Расширяем контекст типом S и проверяем “тип” T (на самом деле мы проверяем тип T на определенность).
4. Вызываемся рекурсивно на f — получаем его тип. Теперь нужно проверить его на равенство типу $\Pi(S, T)$, который мы строим из имеющихся метапеременных. Подразумевается равенство нормальных форм. Соответственно равенство должно быть вызвано на нормализованных типах.
5. Если мы дошли до этой стадии, значит все определено корректно и мы возвращаем тип $T[x := t]$

Можно заметить, что мы должны уметь корректно выполнять подстановки и проверять термы на равенство, равенство подразумевается до α -эквивалентности.

2.2. Индексы де Брейна

При реализации функциональных языков одной из первых проблем встающих перед программистом является выбор представления АСТ³. Также нужно описывать подстановки, и многие задачи и ошибки в реализации связаны с подстановками.

Одной из задач представления термов является сравнение α -эквивалентных термов. α -эквивалентными называются термы, которые отличаются только в именовании связанных переменных. Например, следующие три терма α -эквивалентны:

$$\begin{aligned} \lambda x y &\rightarrow y (x z) \\ \lambda y x &\rightarrow x (y z) \\ \lambda a b &\rightarrow b (a z) \end{aligned}$$

³В работе подразумевается реализация языков программирования через описание АСТ на Haskell.

Одним из возможных способов представления термов является представление переменных в виде строк. С использованием такого подхода первый приведенный выше терм записывается в виде $[Lam\ "x"\ (Lam\ "y"\ (App\ "y"\ (App\ "x"\ "z"))))]$. Проверка равенства этого терма второму терму $[Lam\ "y"\ (Lam\ "x"\ (App\ "x"\ (App\ "y"\ "z"))))]$ не тривиальна.

Другой проблемой такого представления термов является захвата свободных переменных при подстановке. Предположим, мы подставляем первый терм ниже в переменную “z” во втором.

$$\lambda\ x \rightarrow y$$

$$\lambda\ y \rightarrow z$$

$$\lambda\ y \rightarrow \lambda\ x \rightarrow y = \lambda\ y\ x \rightarrow y$$

Очевидно, что подставлять в переменную так наивно нельзя, так как “y” стала связанной, хотя не была таковой в первоначальном терме.

Ключевым замечанием является то, что переменные в функциональных языках являются “указателями” на место их связывания — таким индексом в контекст — и не несут никакой дополнительной информации.

Результат использования этого наблюдения называется индексами де Брейна. А именно: для каждой связанной переменной мы просто пишем расстояние от неё до ближайшего связывания.

Если переписать термы с альфа эквивалентностью выше, то для всех трех термов получим $[\lambda\ \lambda \rightarrow 1\ (2\ z)]$, и проверка на альфа-эквивалентность превращается в проверку на равенство.

Также решается проблема избегания захвата переменных, а именно:

$$\lambda \rightarrow\ y$$

$$\lambda \rightarrow\ z$$

$$\lambda \rightarrow\ \lambda \rightarrow\ y = \lambda\ \lambda \rightarrow\ y$$

Как видно “y” остался свободным.

Это представление значительно лучше удовлетворяет нашим требованиям разработчика языков. Мы перешли от $[Lam\ "y"\ (Lam\ "x"\ (App\ "x"\ (App\ "y"\ "z"))))]$ к $[Lam\ (Lam\ (App\ 1\ (App\ 2\ "z"))))]$.

Однако общей проблемой обоих представлений является нетипизированность переменных — никто не контролирует построение термов вида $[Lam\ (Lam\ (App\ 123\ (App\ 23\ "z"))))]$. Решение этой проблемы описано в секции 5.4.

3. Обзор аналогов

Построение языков программирования с зависимыми типами по спецификации является задачей достаточно специфичной. Ниже перечислены некоторые инструменты, применяемые в похожих ситуациях. Таких, как изучение формальных систем, языков программирования и их реализация.

3.1. BNFC

Похожим на программу описанную в дипломной работе средством разработки является BNFC[3]. Эта утилита позволяет генерировать фронтенд компилятора по аннотированной грамматике языка в форме Бэкуса-Наура[8].

Программа генерирует лексический анализатор, синтаксический анализатор и вывод структур на экран языка заданного в спецификации. Также она генерирует абстрактное синтаксическое дерево и заготовку для написания редукций, представленную в виде большой конструкции switch или её аналогов.

Генерирует представления на C, C++, C#, Haskell, Java и OCaml.

3.2. PLT/Redex

PLT/Redex[18] — встроенный DSL на языке Racket, созданный для спецификации и изучения операционных семантик языков программирования. Он используется для спецификации языков программирования, в том числе и с зависимыми типами.

Из отличительных черт: позволяет случайным образом тестировать цикличность редукций или иные свойства языка, задаваемые пользователем в DSL. Также позволяет визуализировать порядок редукций.

Однако описание языков с зависимыми типами не является лишь спецификацией, а требует ещё и реализации пользователя[14]. Некоторую сложность составляют подстановки — проблема, обойденная в данной дипломной работе благодаря использованию представления термов языка в виде индексов де Брейна.

3.3. Twelf

Twelf[22] является реализацией LF[16]. Эта программа используется для спецификации и доказательств свойств логик и языков программирования.

В спецификации задаются высказывания языка (используется принцип “высказывания в качестве типов”[10]) и некоторые операции над ним в виде отношений на языке Twelf. Затем доказываются свойства вида $\forall \Sigma$ специфицированного языка.

Таким образом, в Twelf можно доказывать свойства спецификаций языков или приводить спецификации к форме, в которой выполняются интересные нас, как

разработчика, свойства. Затем можно использовать программу, описанную в данной дипломной работе для реализации языка.

| Syntax | | Kinding | |
|---|-------------------------|--|--------------------------------|
| $t ::=$ | | $\frac{X :: K \in \Gamma \quad \Gamma \vdash K}{\Gamma \vdash X :: K}$ | $\boxed{\Gamma \vdash T :: K}$ |
| x | terms: | | |
| $\lambda x:T.t$ | variable | | |
| $t t$ | abstraction | | |
| $T ::=$ | types: | $\frac{\Gamma \vdash T_1 :: * \quad \Gamma, x:T_1 \vdash T_2 :: *}{\Gamma \vdash \Pi x:T_1.T_2 :: *}$ | (K-PI) |
| X | type/family variable | | |
| $\Pi x:T.T$ | dependent product type | $\frac{\Gamma \vdash S :: \Pi x:T.K \quad \Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash S t : [x \mapsto t]K}$ | (K-APP) |
| $T t$ | type family application | | |
| $K ::=$ | kinds: | $\frac{\Gamma \vdash T :: K \quad \Gamma \vdash K \equiv K'}{\Gamma \vdash T :: K'}$ | (K-CONV) |
| $*$ | kind of proper types | | |
| $\Pi x:T.K$ | kind of type families | | |
| $\Gamma ::=$ | contexts: | $\frac{x:T \in \Gamma \quad \Gamma \vdash T :: *}{\Gamma \vdash x : T}$ | $\boxed{\Gamma \vdash t : T}$ |
| \emptyset | empty context | | |
| $\Gamma, x:T$ | term variable binding | | |
| $\Gamma, X::K$ | type variable binding | $\frac{\Gamma \vdash S :: * \quad \Gamma, x:S \vdash t : T}{\Gamma \vdash \lambda x:S.t : \Pi x:S.T}$ | (T-ABS) |
| Well-formed kinds | | $\frac{\Gamma \vdash t_1 : \Pi x:S.T \quad \Gamma \vdash t_2 : S}{\Gamma \vdash t_1 t_2 : [x \mapsto t_2]T}$ | (T-APP) |
| $\Gamma \vdash *$ | (WF-STAR) | $\frac{\Gamma \vdash t : T \quad \Gamma \vdash T \equiv T' :: *}{\Gamma \vdash t : T'}$ | (T-CONV) |
| $\frac{\Gamma \vdash T :: * \quad \Gamma, x:T \vdash K}{\Gamma \vdash \Pi x:T.K}$ | (WF-PI) | | |

Рис. 1: Язык с лямбдой и Π -типами

4. Определение языка спецификаций

Вдохновением данной работы послужила статьи [15] и [13]. Поэтому сам язык спецификации выглядит как язык описания алгебраических теорий⁴.

А именно, помимо правил вывода у нас есть сорта и функциональные символы. Каждая конструкция в языке — это функциональный символ в логике, а правила вывода и редукции — это аксиомы. Правила вывода говорят, когда некоторый функциональный символ определен. Все функциональные символы являются частичными функциями, поэтому это существенно алгебраические теории, а не просто алгебраические.

Начнем с примера описания языка с зависимыми типами (рис.1) [17, Глава 2.1]

В этом языке явно выделяются три сорта (можно думать о сортах как о метатипах): кайнды, термы и типы (правила связанные с кайндами и само их описание опущены для простоты).

Также явно выделяются примитивы языка (в дальнейшем мы называем их функциональными символами): абстракция, Π -типы (функции в языках с зависимыми ти-

⁴Алгебраическая теория это *сигнатура* — множество сортов и функциональных символов над ними — и набор аксиом — множество уравнений над термами, построенными с помощью типизированных переменных и функциональных символов. Сами функциональные символы тотальные, то есть применимы ко всем представителям данных сортов

пами) и аппликация. Легко заметить, что во всех языках присутствуют подстановка, контексты, символ ‘:’ означающий, что тип терма слева есть терм справа, и связывание переменных.

Правила вида T-Conv и T-Var всегда верны в зависимых языках, поэтому у нас они есть по умолчанию. Также подразумевается рефлексивность, симметричность, транзитивность и конгруэнтность равенства.

Если принять во внимания все наблюдения выше то так этот язык будет выглядеть в нашем языке спецификации⁵:

```

DependentSorts:
  tm, ty
FunctionalSymbols:
  lam: (ty, 0)*(tm, 1) -> tm
  app: (tm, 0)*(tm, 0)*(ty, 1) -> tm
  pi : (ty, 0)*(ty, 1) -> ty
Axioms:
  K-Pi =
    forall T1 : ty, x.T2 : ty
      x : T1 |- T2 def ---- |- pi(T1, x.T2) def
  TAbs =
    forall S : ty, x.T : ty, x.t : tm
      x : S |- t : T ---- |- lam(S, x.t) : pi(S, x.T)
  TApp =
    forall t1 : tm, t2 : tm, S : ty, x.T : ty
      |- t1 : pi(S, x.T),
      |- t2 : S,
      x : S |- T def
      -----
      |- app(t1, t2, x.T) : T[x:=t2]
Reductions:
  Beta =
    forall x.b : tm, A : ty, a : tm, z.T : ty
      ---- |- app(lam(A, x.b), a, z.T) => b[x:=a] : T[z:=a]

```

Типизирование метапеременных позволяет проверять правильность применения функциональных символов и наличие нужных переменных в контексте. Именованные переменные служат для определения порядка переменных в контексте и не несут какой-то дополнительной информации.

⁵Важно понимать, что запись $_ \vdash$ не означает, что контекст пуст, если слева ничего не написано, это эквивалентно записи $\Gamma \vdash$.

Также в язык была добавлена проверка на λ -стабильность — можно пометить аксиомы типами, тогда аксиома применима, только если все переменные входящие в терм являются представителями этих типов. Если список типов пуст, то производится проверка терма на отсутствие свободных переменных.

4.1. Ограничения на спецификации, налагаемые языком

Если рассматривать спецификации как произвольные существенно алгебраические теории, то пользователь может написать спецификацию, для которой мы не сможем сгенерировать функцию проверки типов. Поэтому вводятся следующие ограничения на спецификации языков:

1. Запрещено равенство в заключении аксиом для определенности каждого шага в проверке типов определяемого языка. Это связано с тем, что, если мы видим равенство, не ясно в какую сторону идти при редуцировании. Поэтому мы обязываем пользователя пользоваться редукциями.
2. Если в заключении аксиомы написан функциональный символ возвращающий сорт термов, он обязан также иметь тип (нельзя просто написать $\vdash f(\dots)def$). Так как иначе становится неясно какой тип возвращать при выводе типа данного функционального символа.
3. Определения функциональных символов всегда одно, иначе появляется недетерминированность в проверке типов. Не играет особой роли, так как в данном случае можно сделать недетерминированность в проверке. Однако в ходе эксплуатации не возникало нужды в обратном. Понадобилось бы более тщательное обдумывание последствий отсутствия данного ограничения. В будущем возможны изменения.
4. Подстановки разрешены только в метапеременные — в принципе, это слабое ограничение, которое облегчает жизнь при реализации, не ограничивая пользователя. Нам не нужно ещё и на метауровне заботиться о подстановках.
5. Все метапеременные используемые в предпосылках должны либо присутствовать в метапеременных заключения или же должны быть типами какой-либо предпосылки. Иначе не ясно откуда брать эти метапеременные при проверке типов. Получается, что нужно будет считать, что высказывание с метапеременной верно для любого представителя сорта этой метапеременной.
6. Если в функциональном символе встречаются метапеременные с контекстами $x_1 \dots x_k.T$ должна существовать предпосылка вида $x_1 : S_1 \dots x_k : S_k \vdash T$. Это сделано для того чтобы не передавать типы контекстов метапеременных функционального символа явно, а выводиться их из таких условий.

7. Если метапеременная является типом предпосылки и не встречается в аргументах функционального символа, то она может использоваться только справа от двоеточия. Таким образом избегаются ситуации связанные с порядком проверки предпосылок языка. А именно: если у нас есть $x : S \vdash t : T$, $x : T \vdash r : S$, то нужно строить граф зависимостей для предпосылок и использовать порядок полученный в результате его топологической сортировки в генерации кода. (Аналогично с 5.2).
8. Все переменные контекстов определения метапеременных могут использовать только метапеременные левее внутри функционального символа в заключении — это связано с тем, что иначе могут возникнуть циклы в определениях метапеременных: S тип с аргументом типа R, R тип с аргументом типа S, S тип с аргументом типа R...
9. Из-за ослабления условия на метапеременные в Пункте 5, порядок метапеременных неочевиден. Решение данной проблемы и (8) описано в Секции 5.2.
10. Редукции не учитывают предпосылок при приведении в нормальную форму — предполагается что они не конфликтуют с аксиомами и проверки в аксиомах достаточно.
11. В редукциях все метапеременные справа от ' $=>$ ' должны встречаться и слева от него. Иначе непонятно откуда взять эти метапеременные при формировании правой части редукции.
12. Подстановка запрещена слева от ' $=>$ '. Это сделано для возможности сопоставления с образцом при генерации функции приведения в нормальную форму.
13. Все редукции всегда стабильны. Иначе требует дальнейшего исследования, так как появится требование передачи контекста в функцию нормализации.
14. Все аргументы в функциональный символ в заключении аксиомы должны быть метапеременными — случай с не только метапеременными требует дальнейшего исследования. Ещё и с теми же аргументами, что и в forall (не расширенный контекст, не существенно).
15. В заключении контекст не должен быть расширен — это ограничение связано с тем, что иначе смысл аксиомы становится странным. А именно: функциональный символ применим только при введении переменных в контекст.

Также у нашего языка есть ограничения, налагаемые существенно-алгебраическими теориями:

- Все используемые метапеременные должны иметь аннотацию (сорт), то есть присутствовать в секции forall аксиомы/редукции.
- Мы явно специфицируем все сорта, которые используем.

4.2. Проверки корректности спецификации языка

Все ограничения выше проверяются при обработке спецификации языка.

Также, тривиальными проверками, осуществляемыми после парсинга языка, являются:

- Все метапеременные, используемые в правилах вывода/редукциях находятся в контексте включающем их контекст описанный в секции forall.
- Проверка того, что сорта используемых выражений совпадают с сортами аргументов функциональных символов.
- Подстановка осуществляется в переменные, которые есть в свободном виде в метапеременной.
- Контексты метапеременных содержат все их метапеременные.
- Все функциональные символы имеют ассоциированное правило вывода.

5. Реализация

В этой секции описана реализация языка спецификации языков с зависимыми типами.

5.1. Парсер генераторы

В ходе всей работы использовались генераторы лексических и синтаксических анализаторов alex[2] и happy[9].

Решение использовать именно генераторы синтаксических анализаторов, а не парсер комбинаторы[28] или другие методы синтаксического анализа было обусловлено тем, что прогнозировались частые изменения грамматики вместе с эволюцией языка.

```
Axiom      :   Header '=' '\t' Forall '\t'
              Premise '|---' JudgementNoEq '/t' '/t'
              { Axiom (snd $1) (fst $1) $4 $6 $8 }
            |   Header '=' '\t'
              Premise '|---' JudgementNoEq '/t'
              { Axiom (snd $1) (fst $1) [] $4 $6 }
```

Listing 4: Часть спецификации синтаксического анализатора

Все изменения связанные с грамматикой языка проводились на уровне спецификации AST.

Стоит заметить, что в языке спецификации отступы значительны. Это известная проблема реализации лексического/синтаксического анализа — так как такая грамматика не является контекстно-свободной. В работе была решена с помощью монадического лексического анализатора, который преобразовывал отступы в аналог открывающих и закрывающих скобок.

```

data LangSpec = LangSpec {
  stabilities      :: Stab
, depSortNames    :: [SortName]
, simpleSortNames :: [SortName]
, funSyms         :: [FunctionalSymbol]
, axioms          :: [Axiom]
, reductions      :: [Reduction]
}

data Axiom = Axiom {
  name      :: Name
, stab     :: Stab
, forallVars :: [(MetaVar, Sort)]
, premise  :: [Judgement]
, conclusion :: Judgement
}

data Judgement =
  Statement {
    jContext  :: [(VarName, Term)]
, jTerm      :: Term
, jType      :: Maybe Term    — def as maybe
} |
  Equality {
    jContext  :: [(VarName, Term)]
, jLeft      :: Term
, jRight     :: Term
, jType      :: Maybe Term — equality t1 = t2 : Maybe t3
}

data Term = Var VarName
          | Meta MetaVar
          | FunApp Name [(Ctx, Term)]
          | Subst Term VarName Term
          deriving (Eq)

```

Listing 5: АСТ языка спецификации

Синтаксический анализатор выдает АСТ языка спецификации, которое идет на

вход алгоритму проверки спецификации⁶.

5.2. Проверка корректного использования метапеременных

В секции 4 описывался язык и ограничения налагаемые на спецификации.

Здесь описан алгоритм проверки использования метапеременных в контекстах других метапеременных. А если конкретнее — проверки того, что метапеременные не используют метапеременных переданных правее в функциональном символе, который мы определяем.

Так как язык не обязывает пользователя явно передавать типы переменных метапеременных, используемых в функциональных символах, метапеременные могут быть не только аргументами определяемого функционального символа, но и типами термов предпосылок.

Вначале рассмотрим алгоритм, в предположении того, что все метапеременные переданы нам в функциональный символ. Тогда единственные места где должна проводится проверка — это определения метапеременных. То есть предпосылки вида $x_1 : tm_1 \dots x_k : tm_k \vdash T$.

Давайте строить граф зависимости и проверять его на ацикличность. В предпосылке выше из T будет исходить стрелки во все метапеременные tm_i .

Если же добавить предпосылки вида: $x_1 : tm_1 \dots x_k : tm_k \vdash t : T$, которые определяют T и t , то мы ещё и добавляем стрелку из t в T , так как T используется в определении t .

Вообще говоря, все другие варианты линеаризуемы и можно проверять строгий порядок, а не частичный. Приведем последний возможный случай — случай из-за которого введена топологическая сортировка — $x_1 : tm_1 \dots x_k : tm_k \vdash tm : T$. Здесь мы ставим стрелки аналогично первому варианту, но сама метапеременная T не имеет фиксированной позиции в списке аргументов функционального символа из заключения.

Итак, мы построили граф зависимостей одних метапеременных от других. Для проверки корректности правила вывода мы делаем топологическую сортировку и проверяем что наш граф является DAG'ом.

5.3. Модуль проверки корректности спецификации

Вся проверка корректности проходит внутри монады `SortCheckM`, которая является стэком монад `StateT` и `Either`. Понятно, что `Either` используется для обработки ошибок.

⁶Можно сравнить с гораздо более структурированной структурой (см. вставку 6), выдаваемой алгоритмом на выходе.

А State нужен, так как в ходе работы алгоритма постепенно заполняется таблица определений языка спецификации.

```
data SymbolTable = SymbolTable {  
  stabs          :: AST.Stab  
, depSorts      :: Set AST.SortName  
, simpleSorts   :: Set AST.SortName  
, funSyms       :: Map AST.Name AST.FunctionalSymbol  
, axioms        :: Map AST.Name Axiom  
, reductions    :: Map AST.Name Reduction  
, iSymAxiomMap  :: Map AST.Name AST.Name — intro axioms of  
  funSyms  
}
```

Listing 6: Структура заполняемая модулем проверки спецификации

Изначально заполняются множества зависимых и независимых сортов. Затем происходит проверка и заполнение определения функций.

Сами аксиомы и редукции, в виду однопроходности синтаксического анализатора могут быть заполнены изначально некорректно. Все 0-арные функциональные символы и все метапеременные синтаксическим анализатором распознаются как переменные. Это поправляется на этапе рекурсивного обхода переменных. Сперва просматривается таблица функциональных символов затем метапеременных аксиомы/редукции. Если ни там, ни в другом месте ничего не находится считается, что это переменная и проверяется на перекрытие других переменных.

Затем проводятся проверки описанные в Секции 4.1. Эти проверки достаточно очевидно ложатся на код, поэтому описывать здесь их не имеет особого смысла.

5.4. Индексы де Брейна на уровне типов

В нашем описании индексов де Брейна в Секции 2.2 мы упомянули, что наивное их использование склонно к ошибкам и не использует систему типов Haskell.

Эту проблему можно решить с помощью полиморфной рекурсии[4]. По сути, каждый раз когда мы абстрагируемся по переменной в представлении де Брейна, мы добавляем единицу ко всем связанным переменным внутри терма. Ключевым наблюдением является то, что мы можем добавлять единицу оборачивая терм в Maybe. Например:

```
data Term a
  = Var a
  | App (Term a) (Term a)
  | Lam (Term (Maybe a))
```

Однако этот метод не очень удобен при кодогенерации, так как instance Monad будет зависеть от определения Term. В той же статье предложен способ превращения этого паттерна программирования в трансформер монад⁷.

```
data Var a = B | F a
newtype Scope f a = Scope { fromScope :: f (Var a) }

instance Monad f => Monad (Scope f) where
  return = Scope . return . F
  Scope m >>= f = Scope $ m >>= varAppWithDefault (return B)
    (fromScope . f)

instance MonadTrans Scope where
  lift = Scope . liftM F
```

Теперь мы можем написать общие функции абстрагирования по переменной и подстановки в самую внешнюю переменную терма.

```
abstract :: (Functor f, Eq a) => a -> f a -> Scope f a
abstract x xs = Scope (fmap go xs) where
  go y = y <$ guard (x /= y)

instantiate :: Monad f => f a -> Scope f a -> f a
instantiate x (Scope xs) = xs >>= go where
  go B = x
  go (F y) = return y
```

⁷В коде Maybe заменен на Var, в соответствие со своей семантикой.

При кодогенерации нам всего лишь понадобится определить гораздо более простую монаду подстановок для ADT термов, которые выглядят теперь так:

```
data Term a
  = Var a
  | App (Term a) (Term a) (Scope Term a)
  | Lam (Term a) (Scope Term a)

instance Monad Term where
  Var v1 >>= f = f v1
  App v1 v2 >>= f = App (v1 >>= f) (v2 >>= f)
  Lam v1 v2 >>= f = Lam (v1 >>= f) (v2 >>= f)

(>>>=) :: (Monad f) => Scope f a -> (a -> f b) -> Scope f b
m >>>= f = m >>= lift . f
```

Этот метод использован в библиотеке `bound`[24]. В виду того, что нам часто приходится заходить внутрь контекстов (это необходимо при приведении в нормальную форму), обобщенные индексы де Брейна используемые в `bound` нам не подходят. Это связано с тем, что мы не можем просто сопоставлять с образцом, нам нужно вызывать функцию `fromScope`, которая работает нетривиально. При реализации описанной выше `fromScope` соответствует паттерматчингу на терме.

5.5. Генерация кода

Генерация кода происходит с использованием библиотеки `haskell-src-extends`[26], которая дает нам функции генерации и манипуляции АСТ Haskell.

Так как большинство кода используемого для проверки не зависит от специфицированного языка, мы просто модифицируем написанный от руки модуль `LangTemplate`. В нем нужно определить функции приведения в нормальную форму и вывода типов. Также нужно определить тип данных термов и определить монадическое действие на типе данных термов.

Всё остальное либо генерируется с помощью `Template Haskell`[21] — `instance Traversable`[20], `Functor`, `Foldable` (`Foldable` дает нам функцию `toList`, которая возвращает свободные переменные терма, `Traversable` позволяет применять функции `swap`, `rem` и `add` к переменным обходя весь терм), либо написано от руки с вызовами функций `nf` или `infer`.

Представители классов `Eq` и `Show` получаются с помощью механизма `DeriveEq1`, `DeriveShow1`[25] — так как `Term` имеет кайнд `* → *`, для него можно определить только представителей высших классов[29]. Затем мы просто пишем определения независимые от представления:

```

emptyCtx :: (Show a, Eq a) => Ctx a
emptyCtx x = Left $ "Variable not in scope: " ++ show x

consCtx :: (Show a, Eq a) => Type a -> Ctx a -> Ctx (Var a)
consCtx ty ctx B = pure (F <$> ty)
consCtx ty ctx (F a) = (F <$>) <$> ctx a

checkT :: (Show a, Eq a) => Ctx a -> Type a -> Term a -> TC ()
checkT ctx want t = do
  have <- infer ctx t
  when (nf have /= nf want) $ Left $
    "type mismatch, have: " ++ (show have) ++ " want: " ++ (show
      want)

```

Listing 7: Проверка типов и контексты

```

instance Eq a => Eq (Term a) where (==) = eq1
instance Show a => Show (Term a) where showsPrec = showsPrec1

```

5.6. Структура модуля генерации кода

Генерация кода происходит внутри монады GenM, которая является стэком монад: ReaderT SymbolTable (StateT CodeGen (ErrorM)).

```

data CodeGen = Gen{
  , decls :: [Decl]
}

```

Listing 8: Структура используемая при кодогенерации

Так как структура заполняемая модулем проверки спецификации не меняется на этапе кодогенерации, она находится внутри монады ReaderT. При кодогенерации происходит генерация деклараций языка Haskell, которые хранятся в виде списка.

При генерации каждой отдельной декларации функций infer и nf создается внутренняя монада BldRM, которая определена как StateT Q (ErrorM).

```

data Q = Q {
  _count :: Int ,
  _doStmts :: [Stmt] ,
  _juds :: Juds ,

  _metas :: Map.Map MetaVar [(Ctx, Exp)] ,
  _foralls :: Map.Map MetaVar Sort ,
  _funsyms :: Map.Map AST.Name FunctionalSymbol
}

```

```
data Juds = Juds {
  _metaTyDefs :: [(MetaVar, Judgement)],
  _notDefsTy  :: [(Term, Judgement)],
  _otherJuds  :: [Judgement]
}
```

Listing 9: Структура используемая при кодогенерации функции infer

Для простоты реализации так же как и в модуле проверки корректности спецификации (Секция 5.3) использована библиотека lens[27]. Что позволяет писать следующие функции в Haskell, например при манипуляции State (акцент на использовании кода, выглядящего императивно):

```
appendStmt :: Stmt -> BldRM ()
-- Modify part of the State using a function
appendStmt st = doStmts %= (++ [st])

genCheckMetaEq :: BldRM ()
genCheckMetaEq = do
  ms <- gets _metas
  -- Replaces metas inside State Monad
  metas <~ sequence (genMetaEq <$> ms)
```

Структура Q содержит всю информацию, нужную для генерации определения функций infer и nf. Так как весь код который генерируется будет исполняться внутри монады с возможностью обработки ошибок, можно просто сгенерировать список выражений Haskell, а затем приписать сверху do, таким образом будет обеспечен порядок выполнения выражений.

Для создания свободных переменных используется простой счетчик, так как вряд ли появится так уж много переменных внутри одной декларации.

Все предпосылки делятся на три типа:

1. Вводящие метапеременные — меняют таблицу метапеременных. Удобно иметь соответствующую метапеременную, вводимая данным выражением.
2. Имеющие тип у терма заключения, а значит нужно ещё строить этот тип и проверять его на равенство выведенному. Терм, на равенство которому будет проведена проверка, хранится рядом для удобства.
3. Остальные — просто нужно проверить на определенность.

Это хранится в структуре Q в виде трёх списков предпосылок.

```

FRule =
  forall S : ty, t : tm, T : ty
    x:S, y:S |- t : T,
    x:T |- t : bool,
    |- gf(S, (x z).rf(T, (y r).T)) : rf(S, (x z).T)
    -----
    |- ff(S, t) def

```

Listing 10: Искусственное правило вывода для конструкции ff

Также существует таблица, где для каждой метапеременной написан её контекст и терм языка Haskell, который ей соответствует в коде. Это нужно для генерации всех других термов специфицированного языка.

Хранится таблица всех метапеременных из секции forall и функциональных символов, так как в предпосылках вида $\dots \vdash T \text{ def}$ и $\dots \vdash f(\dots) \text{ def}$ нам нужно знать сорт метапеременной или сорт возвращаемый нашим функциональным символом, чтобы вернуть его из функции infer.

5.7. Построение термов

На данной стадии работы алгоритма у нас имеется ассоциативный массив метапеременных и связанных с ними переменных внутри функции Haskell. Давайте рассмотрим пример, что нужно делать дальше, положим нам дана аксиома ff (см. вставку 10).

На момент вызова у нас есть S и t в пустом контексте. Мы уже отсортировали предпосылки, так как нам нужны предпосылки вводящие метапеременные. Первой предпосылкой которую мы проверяем является $x:S, y:S \vdash t : T$. Чтобы поучить терм T мы должны вызвать функцию вывода типов в контексте который нам передан, расширенном двумя вхождениями типа S. Ещё мы должны проверить что эти расширения определены, то есть вызывать функции infer в постепенно увеличивающихся контекстах, с термом который мы хотим добавить в контекст в качестве аргумента.

Для этого мы должны расширить контекст терма t. Это является ограничением, наложенным на нас нашим же представлением, так как иначе у нас не сойдутся типы. Также могло случится так что мы должны были бы переставить наши переменные в контексте.

Затем, получив нашу переменную в увеличенном контексте (в forall она имеет контекст меньшей длины), до того как мы добавим переменную, которая является её представителем в коде Haskell, мы должны уменьшить её контекст до того, что указан в forall⁸.

⁸Не обязателен тот же порядок контекста, тк мы все равно о нём заботимся во время построения термов, то есть мы можем хранить в массиве представление метапеременной $(z \ y \ x).T$ вместо $(x \ y \ z).T$. Главное чтобы это было указано в структуре, которую мы храним.

Затем мы проверяем вторую предпосылку, аналогично описанному выше способу. В третьей предпосылке мы должны строить терм $gf(S, (x\ z).rf(T, (y\ r).T))$. Это делается рекурсивно внутри монады кодогенерации, чтобы мы имели доступ к нашему ассоциативному массиву метапеременных. В данном примере нам потребуется из $x.T$ получить $(x\ z).T$ и $(x\ z\ y\ r).T$. Затем все аналогично.

Но при получении типа мы должны проверить его на равенство типу $rf(S, (x\ z).T)$. Который мы строим аналогично предыдущему описанию, затем вызываем функцию проверки равенства типов, на терме полученном при выводе типа $gf(S, (x\ z).rf(T, (y\ r).T))$ и построенном из метапеременных терма $rf(S, (x\ z).T)$ (см. вставку 13).

Одной из проблем индексов де Брейна является их жесткая привязка к порядку переменных в контексте. Действительно чтобы переставить аргументы терма $[Lam\ "y"\ (Lam\ "x"\ (App\ "x"\ (App\ "y"\ (App\ "y"\ "y")))))]$ мы всего-лишь меняем их местами в моменты их связывания и получаем $[Lam\ "x"\ (Lam\ "y"\ (App\ "x"\ (App\ "y"\ (App\ "y"\ "y")))))]$. Однако схожая операция для представления с использованием индексов де Брейна выливается в обход всего терма(!) $[Lam\ (Lam\ (App\ 1\ (App\ 2\ (App\ 2\ 2)))))]$ превращается в $[Lam\ (Lam\ (App\ 2\ (App\ 1\ (App\ 1\ 1)))))]$.

Но если уж пользователь так написал спецификацию, что мы имеем терм с другим порядком переменных или терм с большим их количеством, то мы должны поменять эти переменные местами и даже попытаться удалить лишние переменные.

Например чтобы привести $(x\ y\ z).T$ к $(z\ x).T$. Мы должны удалить y и переставить x и z местами.

Так же мы поступаем при возможном расширении контекста нашей метапеременной, например имеем S и хотим построить $Lam\ A\ x.S$ — здесь нужна метапеременная $x.S$, мы получаем её добавляя переменную в её контекст.

Решение предлагаемое в данной работе состоит из композиций операций $swap_i\ j$, $remove_i$ и add_i . Каждая операция выполняет traverse терма, который мы меняем. Примеры во вставке 11.

Решение не является оптимальным, так как можно пройти по всему терму единожды и применить все эти операции сразу, но сложность генерации/написания такого кода возрастает значительно.

Для решения этой задачи написан модуль Solver⁹.

По сути мы либо имеем больший контекст и из него получаем меньший, либо наоборот. Хотим делать меньше swap'ов.

Рассмотрим случай приведения большего контекста к меньшему, $[x, y, z]$ к $[y,$

⁹Стоит отметить что функции $swap$, rem и add должны быть сгенерированы и для этого ведется подсчёт в монаде кодогенерации путем записи максимального индекса. Следовательно функция $swap$ дороже, так как мы генерируем C_2^i функций. Именно поэтому алгоритм пытается использовать как можно меньше разных функций.

```

swap1 '2 :: Var (Var a) -> Identity (Var (Var a))
swap1 '2 (B ) = pure (F (B ))
swap1 '2 (F (B )) = pure (B)
swap1 '2 x = pure x

rem2 :: Var (Var a) -> TC (Var a)
rem2 B = pure B
rem2 (F B) = Left "There is var at 2"
rem2 (F (F x)) = pure (F x)

add2 :: Var a -> Identity (Var (Var a))
add2 B = pure $ B
add2 (F x) = pure $ F (F x)

```

Listing 11: Примеры функций

x]”. Мы идем справа налево, так как наиболее близкая связанная переменная наиболее правая. Удаляем те переменные которых нет в контексте к которому мы хотим прийти, таким образом обеспечиваем меньше вызовов к разным функциям `rem`¹⁰. Затем просто применяем алгоритм `insertion sort` на оставшихся контекстах. На количестве сгенерированных функций `swap` это не отразится.

¹⁰Мы не можем удалить переменную из контекста, если она присутствует в терме. Монада `TC` обеспечивает обработку ошибок удаления.

```

If-then =
  forall t : tm, t1 : tm, t2 : tm, x.A : ty
    x : bool |- A def,
    |- t1 : A[x:=true],
    |- t2 : A[x:=false],
    |- t : bool
  -----
  |- if(x.A, t, t1, t2) : A[x:=t]

infer ctx (If v1 v2 v3 v4)
= do v5 <- infer ctx v2
    checkEq Bool v5
    v6 <- infer ctx v4
    checkEq (instantiate False (toScope (fromScope v1))) v6
    v7 <- infer ctx v3
    checkEq (instantiate True (toScope (fromScope v1))) v7
    checkT ctx TyDef Bool
    checkT (consCtx Bool ctx) TyDef (fromScope v1)
    infer ctx v2
    infer ctx v3
    infer ctx v4
    pure (instantiate v2 (toScope (fromScope v1)))

```

Listing 12: Пример правила вывода и части сгенерированной функции `infer`, соответствующей этому правилу

5.8. Вывод типов и нормализация

Сам `infer` работает как описано в Секции 2.1. Мы последовательно строим каждую предпосылку и вызываем функцию вывода типов или проверки типа выражения на равенство типу. Термы, которые мы передаем в эти функции, строим последовательно на основе переданных нам в функциональном символе или полученных при вызове функции вывода типов (подробно описано в Секции 5.7).

Стоит отметить, что порядок или количество переменных метапеременных которые у нас есть могут отличаться от порядка и вида контекста в котором наша метапеременная должна быть. Эту проблему мы решаем приводя метапеременные к контексту данному в секции `forall` правила вывода, методом описанным в Секции 5.7.

Функция `nf` пытается паттернматчиться на терме, если это не выходит, то данная редукция неприменима. Стоит отметить, что такое сопоставление с образцом невозможно с использованием библиотеки `bound`[24], поэтому был написан модуль `SimpleBound` с обычными, а не обобщенными, индексами де Брейна.

```

FRule =
  forall S : ty, t : tm, T : ty
    x:S, y:S |- t : T,
    x:T |- t : bool,
    |- gf(S, (x z).rf(T, (y r).T)) : rf(S, (x z).T)
    -----
    |- ff(S, t) def

infer ctx (Ff v1 v2) = do
  checkT ctx TyDef v1
  checkT (consCtx v1 ctx) TyDef (rt add1 v1)
  v3 <- infer (consCtx (rt add1 v1) (consCtx v1 ctx))
    (rt add1 (rt add1 v2))
  v4 <- pure (nf v3) >>= traverse rem1 >>= traverse rem1
  v5 <- infer ctx
    (Gf v1
      (toScope2
        (Rf (rt add1 (rt add1 v4))
          (toScope2 (rt add1 (rt add1 (rt add1 (rt
            add1 v4))))))))))
  checkEq (Rf v1 (toScope2 (rt add1 (rt add1 v4)))) v5
  checkT ctx TyDef v4
  v6 <- infer (consCtx v4 ctx) (rt add1 v2)
  checkEq Bool v6
  infer ctx v2
  pure TyDef

```

Listing 13: Искусственный пример случая несоответствия контекстов: контекст t нужно сократить до использования в предпосылке.


```

nf (If v1 v2 v3 v4)
  = nf' (U (U Bot)) (If (nf1 v1) (nf v2) (nf v3) (nf v4))

nf' (U (U _)) al@(If (Scope v1) True v2 v3)
  = case
    do v4 <- pure v1
       v5 <- pure v2
       v6 <- pure v3
       pure v5
    of
      Left _ -> nf' (U Bot) al
      Right x -> nf x
nf' (U _) al@(If (Scope v1) False v2 v3)
  = case
    do v4 <- pure v1
       v5 <- pure v2
       v6 <- pure v3
       pure v6
    of
      Left _ -> nf' Bot al
      Right x -> nf x
nf' _ x = x

```

Listing 14: Приведение в нормальную форму пытается применить все редукции данного функционального символа

Заключение

В рамках данной работы достигнуты следующие результаты:

- Определен язык спецификаций зависимых языков с дальнейшей возможностью генерации алгоритма проверки типов.
- Реализована генерация структур данных представления языка с использованием индексов де Брюйна на уровне типов и функций манипуляции этими структурами.
- Реализованы генерация функций приведения термов специфицированного языка в нормальную форму и проверки типов.

Существует несколько направлений развития данной работы:

- Можно реализовать поддержку определения функций над термами языка. Что даст возможность работать с языком, как это делается обычно, а именно:
 - Определяем некие константы (термы без свободных переменных).
 - Определяем функции, внутри которых можем использовать конструкции языка и функции определенные ранее.
 - Пишем функцию `main`, которая выполняется нашим языком (все функции и константы должны проходить проверку типов).
- Генерировать ещё и синтаксический анализатор специфицированного языка, чтобы пользователь все действия описанные выше проделывал в отдельном текстовом файле.
- Дать пользователю определять функции на уровне языка спецификации. Чтобы изолировать общие паттерны определения языка в отдельную функцию. Это предлагается для ещё большего удобства работы с языком спецификаций.
- Поддержать возможность композиции спецификации языков — тогда можно будет собирать языки из частей как предложено в [13]. Например: отдельно определяем языки с Σ , с Π , с *Bool*, *Nat* и т.д. И просто добавляем их наверху спецификации. Затем определяем редукции как они взаимодействуют между собой, добавляем своих функциональных символов и готово.
- Использовать в качестве IR[12] не АСТ Haskell, а что-то более оптимизированное под выполнение языков.

Список литературы

- [1] Agda programming language. — Access mode: <http://wiki.portal.chalmers.se/agda/pmwiki.php> (online; accessed: 25.05.2017).
- [2] Alex: A lexical analyser generator for Haskell. — Access mode: <https://www.haskell.org/alex/> (online; accessed: 25.05.2017).
- [3] BNF Converter. — Access mode: <http://bnfc.digitalgrammars.com/> (online; accessed: 25.05.2017).
- [4] Bird Richard S., Paterson Ross. De Bruijn Notation As a Nested Datatype // J. Funct. Program. — 1999. — Jan. — Vol. 9, no. 1. — P. 77–91. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1017/S0956796899003366>.
- [5] Bruijn N. G. De. Lambda calculus notation with nameless dummies, a tool for automatic formula manipulation, with application to the Church-Rosser Theorem // INDAG. MATH. — 1972. — Vol. 34. — P. 381–392.
- [6] The Coq proof assistant. — Access mode: <https://coq.inria.fr/> (online; accessed: 25.05.2017).
- [7] Curry-Howard correspondence. — Access mode: <https://goo.gl/TwG1Sk> (online; accessed: 25.05.2017).
- [8] Forsberg Markus, Ranta Aarne. The labelled bnf grammar formalism.
- [9] Happy, The Parser Generator for Haskell. — Access mode: <https://www.haskell.org/happy/> (online; accessed: 25.05.2017).
- [10] Harper Robert, Honsell Furio, Plotkin Gordon. A Framework for Defining Logics // J. ACM. — 1993. — Jan. — Vol. 40, no. 1. — P. 143–184. — Access mode: <http://doi.acm.org/10.1145/138027.138060>.
- [11] Haskell. An advanced, purely functional programming language. — Access mode: <https://www.haskell.org/> (online; accessed: 25.05.2017).
- [12] Intermediate representation. — Access mode: https://en.wikipedia.org/wiki/Intermediate_representation (online; accessed: 25.05.2017).
- [13] Isaev Valery. Algebraic Presentations of Dependent Type Theories. — arxiv : math.LO, cs.LO, math.CT/<http://arxiv.org/abs/1602.08504v3>.
- [14] LambdaPi in PLT/Redex. — Access mode: <https://github.com/racket/redex/blob/master/redex-examples/redex/examples/pi-calculus.rkt> (online; accessed: 25.05.2017).

- [15] Palmgren E., Vickers S.J. Partial Horn logic and cartesian categories // *Annals of Pure and Applied Logic*. — 2007. — Vol. 145, no. 3. — P. 314 – 353. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168007206001229>.
- [16] Pfenning Frank. Logical Frameworks—A Brief Introduction // *Proof and System-Reliability* / Ed. by Helmut Schwichtenberg, Ralf Steinbrüggen. — Dordrecht : Springer Netherlands, 2002. — P. 137–166. — ISBN: 978-94-010-0413-8. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1007/978-94-010-0413-8_5.
- [17] Pierce Benjamin C. *Advanced Topics in Types and Programming Languages*. — The MIT Press, 2004. — ISBN: 0262162288.
- [18] Run Your Research: On the Effectiveness of Lightweight Mechanization / Casey Klein, John Clements, Christos Dimoulas et al. // *SIGPLAN Not.* — 2012. — Jan. — Vol. 47, no. 1. — P. 285–296. — Access mode: <http://doi.acm.org/10.1145/2103621.2103691>.
- [19] Simply Typed Lambda Calculus. — Access mode: https://en.wikipedia.org/wiki/Simply_typed_lambda_calculus (online; accessed: 25.05.2017).
- [20] Support for deriving Functor, Foldable, and Traversable instances. — Access mode: <https://ghc.haskell.org/trac/ghc/wiki/Commentary/Compiler/DeriveFunctor> (online; accessed: 25.05.2017).
- [21] Template Haskell. — Access mode: https://wiki.haskell.org/Template_Haskell (online; accessed: 25.05.2017).
- [22] The Twelf Project. — Access mode: http://twelf.org/wiki/Main_Page (online; accessed: 25.05.2017).
- [23] Weisstein Eric W. Four-Color theorem. — 2002.
- [24] bound: Making de Bruijn Succ Less. — Access mode: <https://hackage.haskell.org/package/bound> (online; accessed: 25.05.2017).
- [25] deriving-compat: Backports of GHC deriving extensions. — Access mode: <https://hackage.haskell.org/package/deriving-compat> (online; accessed: 25.05.2017).
- [26] haskell-src-exts: Manipulating Haskell source: abstract syntax, lexer, parser, and pretty-printer. — Access mode: <https://hackage.haskell.org/package/haskell-src-exts> (online; accessed: 25.05.2017).
- [27] lens: Lenses, Folds and Traversals. — Access mode: <https://hackage.haskell.org/package/lens> (online; accessed: 25.05.2017).

- [28] parsec: Monadic parser combinators. — Access mode: <https://hackage.haskell.org/package/parsec> (online; accessed: 25.05.2017).
- [29] prelude-extras: Higher order versions of Prelude classes. — Access mode: <https://hackage.haskell.org/package/prelude-extras> (online; accessed: 25.05.2017).

Приложения

А. Доказательство корректности функции `filter`

Ниже показан пример доказательства того, что функция `filter` выдает подсписок исходного списка. Код написан на Agda[1].

```
data _in_ {A : Set} : List A → List A → Set where
  nil : [] in []
  larger : {y : A} {xs ys : List A} → xs in ys → xs in (y ::
    ys)
  cons : {x : A} {xs ys : List A} → xs in ys → (x :: xs) in
    (x :: ys)
```

Listing 15: Определяем предикат означающий “список `xs` является подсписком `ys`”

```
filter' : {A : Set} → (A → Bool) → List A → List A
filter' p [] = []
filter' p (x :: xs) = if p x then x :: filter' p xs else filter'
  p xs

filterLess : {A : Set} → (p : A → Bool) → (xs : List A) →
  filter' p xs in xs
filterLess p [] = nil
filterLess p (x :: xs) with p x
filterLess p (x :: xs) | false = larger (filterLess p xs)
filterLess p (x :: xs) | true = cons (filterLess p xs)
```

Listing 16: Докажем, что `filter xs` подсписок `xs` для любого списка `xs`

В. Ссылка на исходный код

Имплементация работы описанной в дипломе находится на репозитории на гитхаб:
github.com/esengie/fpl-exploration-tool

С. Спецификация $\lambda\Pi$ с булевыми выражениями и сгенерированный код

lambdaPi.fpl

```
DependentSorts :
  tm, ty
FunctionalSymbols :
Axioms :
  Tr =
    |--- |- true : bool
  Fls =
    |--- |- false : bool
  Bool =
    |--- |- bool def
  If-then =
    forall t : tm, t1 : tm, t2 : tm, x.A : ty
      x : bool |- A def, |- t1 : A[x:=true],
      |- t2 : A[x:=false], |- t : bool
      |--- |- if(x.A, t, t1, t2) : A[x:=t]
  K-Pi =
    forall T1 : ty , x.T2 : ty
      x : T1 |- T2 def |--- |- pi(T1, x.T2) def
  TAbs =
    forall S : ty , x.T : ty , x.t : tm
      x : S |- t : T |--- |- lam(S , x.t) : pi(S , x.T)
  TApp =
    forall t1 : tm , t2 : tm , S : ty, x.T : ty
      |- t1 : pi(S, x.T) , |- t2 : S , x : S |- T def |---- |- app(t1 , t2, x.T)
Reductions :
  Beta =
    forall x.b : tm, A : ty, a : tm, z.T : ty
      |--- |- app(lam(A , x.b), a, z.T) => b[x := a] -- : T[z:=a]
  IfRed1 =
    forall x.A : ty, f : tm , g : tm
      |--- |- if(x.A, true, f, g) => f : A[x:=true]
  IfRed2 =
    forall x.A : ty, f : tm , g : tm
      |--- |- if(x.A, false, f, g) => g : A[x:=true]
```

```
{-# LANGUAGE TemplateHaskell #-}
import SimpleBound

type TC = Either String
type Ctx a = a -> TC (Type a)

data Term a = Var a
            | TyDef
            | App (Term a) (Term a) (Scope Type a)
            | Bool
            | False
            | If (Scope Type a) (Term a) (Term a) (Term a)
            | Lam (Type a) (Scope Term a)
            | Pi (Type a) (Scope Type a)
            | True

type Type = Term

deriveEq1 ''Term
deriveShow1 ''Term
instance Eq a => Eq (Term a) where (==) = eq1
instance Show a => Show (Term a) where showsPrec = showsPrec1

instance Functor Term where
    fmap = fmapDefault
instance Foldable Term where
    foldMap = foldMapDefault

deriveTraversable ''Term

instance Monad Term where
    Var v1 >>= f = f v1
    App v1 v2 v3 >>= f = App (v1 >>= f) (v2 >>= f) (v3 >>= f)
    Bool >>= f = Bool
    False >>= f = False
    If v1 v2 v3 v4 >>= f
        = If (v1 >>= f) (v2 >>= f) (v3 >>= f) (v4 >>= f)
```



```

    Lam v1 v2 >>= f = Lam (v1 >>= f) (v2 >>>= f)
    Pi v1 v2 >>= f = Pi (v1 >>= f) (v2 >>>= f)
    True >>= f = True
    TyDef >>= f = TyDef

checkT :: (Show a, Eq a) => Ctx a -> Type a -> Term a -> TC ()
checkT ctx want t
  = do have <- infer ctx t
    when (nf have /= nf want) $
      Left $
        "type mismatch, have: " ++ (show have) ++ " want: " ++ (show want)

checkEq :: (Show a, Eq a) => Term a -> Term a -> TC ()
checkEq want have
  = do when (nf have /= nf want) $
    Left $
      "Terms are unequal, left: " ++
        (show have) ++ " right: " ++ (show want)

report :: String -> TC (Type a)
report nm = throwError $ "Can't have " ++ nm ++ " : " ++ nm

emptyCtx :: (Show a, Eq a) => Ctx a
emptyCtx x = Left $ "Variable not in scope: " ++ show x

consCtx :: (Show a, Eq a) => Type a -> Ctx a -> Ctx (Var a)
consCtx ty ctx B = pure (F <$> ty)
consCtx ty ctx (F a) = (F <$>) <$> ctx a

infer :: (Show a, Eq a) => Ctx a -> Term a -> TC (Type a)
infer ctx (Var v1) = ctx v1
infer ctx TyDef = report "TyDef"
infer ctx al@(App v1 v2 v3)
  = do v4 <- infer ctx v2
    v5 <- pure (nf v4)
    v6 <- infer ctx v1
    checkEq (Pi v5 (toScope (fromScope v3))) v6
    checkT ctx TyDef v5
    checkT (consCtx v5 ctx) TyDef (fromScope v3)

```

```

    infer ctx v1
    infer ctx v2
    pure (instantiate v2 (toScope (fromScope v3)))
infer ctx al@Bool = pure TyDef
infer ctx al@False = pure Bool
infer ctx al@(If v1 v2 v3 v4)
  = do v5 <- infer ctx v2
      checkEq Bool v5
      v6 <- infer ctx v4
      checkEq (instantiate False (toScope (fromScope v1))) v6
      v7 <- infer ctx v3
      checkEq (instantiate True (toScope (fromScope v1))) v7
      checkT ctx TyDef Bool
      checkT (consCtx Bool ctx) TyDef (fromScope v1)
      infer ctx v2
      infer ctx v3
      infer ctx v4
      pure (instantiate v2 (toScope (fromScope v1)))
infer ctx al@(Lam v1 v2)
  = do checkT ctx TyDef v1
      v3 <- infer (consCtx v1 ctx) (fromScope v2)
      v4 <- pure (nf v3)
      pure (Pi v1 (toScope v4))
infer ctx al@(Pi v1 v2)
  = do checkT ctx TyDef v1
      checkT (consCtx v1 ctx) TyDef (fromScope v2)
      pure TyDef
infer ctx al@True = pure Bool

nf :: (Show a, Eq a) => Term a -> Term a
nf (Var v1) = Var v1
nf TyDef = TyDef
nf (App v1 v2 v3) = nf' (U Bot) (App (nf v1) (nf v2) (nf1 v3))
nf Bool = Bool
nf False = False
nf (If v1 v2 v3 v4)
  = nf' (U (U Bot)) (If (nf1 v1) (nf v2) (nf v3) (nf v4))
nf (Lam v1 v2) = Lam (nf v1) (nf1 v2)
nf (Pi v1 v2) = Pi (nf v1) (nf1 v2)

```

```

nf True = True

nf' :: (Show a, Eq a) => Cnt -> Term a -> Term a
nf' (U _) al@(App (Lam v1 (Scope v2)) v3 (Scope v4))
  = case
    do v5 <- pure v1
       v6 <- pure v4
       v7 <- pure v3
       v8 <- pure v2
       pure (instantiate v7 (toScope v8))
    of
      Left _ -> nf' Bot al
      Right x -> nf x
nf' (U (U _)) al@(If (Scope v1) True v2 v3)
  = case
    do v4 <- pure v1
       v5 <- pure v2
       v6 <- pure v3
       pure v5
    of
      Left _ -> nf' (U Bot) al
      Right x -> nf x
nf' (U _) al@(If (Scope v1) False v2 v3)
  = case
    do v4 <- pure v1
       v5 <- pure v2
       v6 <- pure v3
       pure v6
    of
      Left _ -> nf' Bot al
      Right x -> nf x
nf' _ x = x

rt f x = runIdentity (traverse f x)
nf1 x = (toScope $ nf $ fromScope x)

data Cnt = Bot | U (Cnt)
  deriving (Eq, Show)

```

