# Теория категорий Сопряженные функторы

Валерий Исаев

07 сентября 2015 г.

### План лекции

#### Рефклективные подкатегории

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примерь

# Рефлективные подкатегории

- ▶ Пусть **C** полная подкатегория **D**. Допустим мы хотим доказать, что вложение **C**  $\rightarrow$  **D** эквивалентность.
- ▶ Тогда нам нужно найти для каждого объекта X из  $\mathbf{D}$  объект из  $\mathbf{C}$ , изоморфный X.
- Иногда бывает так, что эти категории не эквивалентны, но мы всё же можем найти некоторый объект Y в C, который является в некотором смысле лучшим приближением к X.
- ightharpoonup Конкретно, должна существовать стрелка  $f:X \to Y$ , которая может не быть изоморфизмом, но всё же является в каком-то смысле наилучшей такой стрелкой.

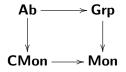
# Определение

▶ Пусть **C** – полная подкатегория **D**. Мы говорим, что **C** – *рефлективная* подкатегория **D**, если для любого объекта X из **D** существует стрелка  $f: X \to Y$ , где  $Y \in \mathbf{C}$ , такая что для любой стрелки  $f': X \to Y'$ , где  $Y' \in \mathbf{C}$ , существует уникальный морфизм  $h: Y' \to Y$ , такой что следующая диаграмма коммутирует:



• Если вместо стрелки  $X \to Y$  существует стрелка  $Y \to X$  с аналогичным универсальным свойством, то категория называется корефлективной.

Все стрелки в следующей диаргамме являются вложениям рефлективных подкатегорий:



Например, чтобы по группе G построить соответствующую ей абелеву группу, нужно взять фактор по коммутанту G/[G,G].

# План лекции

Рефклективные подкатегории

#### Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примерь

#### Моноиды и слова

- ▶ Пусть  $U: \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$  забывающий функтор на категории моноидов.
- ▶ Пусть  $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon} \mathbf{\phi}$ унктор, сопоставляющий множеству A множество слов в алфавите A.

$$F(A) = \{ [a_1 \dots a_n] \mid a_i \in A \}$$

- lacktriangle Тогда любая функция f:A o U(B) уникальным образом доопределяется до морфизма моноидов g:F(A) o B.
- У этого соотвествия существует обратное, каждому морфизму моноидов  $g:F(A)\to B$  сопоставляющее функцию  $f:A\to U(B),\ f(a)=g([a]).$
- ► Таким образом, существует биекция  $\varphi: Hom_{Set}(A, U(B)) \simeq Hom_{Mon}(F(A), B)$ .

### Векторные пространства и базисы

- ▶ Пусть  $\mathbf{Vec}_K$  категория векторных пространств над полем K.
- ightharpoonup Пусть  $U: \mathbf{Vec}_K o \mathbf{Set}$  забывающий функтор.
- ightharpoonup Пусть  $F: \mathbf{Set} o \mathbf{Vec}_K \mathbf{ф}$ унктор, сопоставляющий множеству A векторное пространство с базисом A.

$$F(A) = \{ c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n \mid c_i \in K, a_i \in A \}$$

- lacktriangle Тогда любая функция f:A o U(B) уникальным образом доопределяется до линейного преобразования  $g: F(A) \rightarrow B$ .
- ▶ У этого соотвествия существует обратное, каждому линейному преобразованию  $g:F(A)\to B$  сопоставляющее функцию  $f: A \to U(B)$ , f(a) = g(1a).
- Таким образом, существует биекция  $\varphi: \mathit{Hom}_{\mathsf{Set}}(A, \mathit{U}(B)) \simeq \mathit{Hom}_{\mathsf{Vec}}(F(A), B)$

#### Кольца и полиномы

- ▶ Пусть  $U: \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$  забывающий функтор на категории колец.
- ▶ Пусть  $F: \mathbf{Set} \to \mathbf{Ring} \mathbf{\phi}$ унктор, сопоставляющий множеству X кольцо полиномов с переменными в X.
- ▶ Тогда любая функция  $f:A \to U(B)$  уникальным образом доопределяется до морфизма колец  $g:F(A) \to B$ .
- У этого соотвествия существует обратное, каждому линейному преобразованию  $g:F(A)\to B$  сопоставляющее функцию  $f:A\to U(B),\ f(a)=g(1a^1).$
- ▶ Таким образом, существует биекция  $\varphi: Hom_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq Hom_{\mathbf{Ring}}(F(A), B).$

### Сопряжение

#### Definition

Сопряжение между категориями  ${\bf C}$  и  ${\bf D}$  – это тройка  $(F,U,\varphi)$ , состоящая из функторов  $F:{\bf C}\to {\bf D}$  и  $U:{\bf D}\to {\bf C}$  и естественного изоморфизма  $\varphi_{AB}: Hom_{\bf D}(F(A),B)\simeq Hom_{\bf C}(A,U(B))$ .

В определении  $\varphi$  является естественным изоморфизмом между функторами  $Hom_{\mathbf{D}}(F(-),-), Hom_{\mathbf{C}}(-,U(-)): \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{D} \to \mathbf{Set}.$ 

Во всех примерах, приведенных ранее, изоморфизм  $\varphi_{A,B}$  был естественен по A и B. Таким образом, это были примеры сопряжений.

- ▶ Если  $(F, U, \varphi)$  сопряжение, то пишут  $F \dashv U$  и говорят, что F левый сопряженный к U, а U правый сопряженный к F.
- ▶ Если  $F \dashv U$  и  $F' \dashv U$ , то F и F' изоморфны.
- Доказательство: упражнение.
- ▶ Если  $F \dashv U$  и  $F \dashv U'$ , то U и U' изоморфны.
- Доказательство: по дуальности.

# Сохранение (ко)пределов

#### Proposition

Левые сопряженные функторы сохраняют копределы. Правые сопряженные функторы сохраняют пределы.

#### Доказательство.

Второе утверждение является дуальным к первому. Докажем первое. Пусть  $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$  — левый сопряженный к  $G: \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ . Пусть  $D: J \to \mathbf{C}$  — некоторая диаграмма в  $\mathbf{C}$ . Пусть  $L=colim\ D$  — копредел этой диаграммы. Пусть  $\alpha: F\circ D \to X$  — некоторый коконус в  $\mathbf{D}$ . Тогда существует уникальная стрелка из L в G(X). По сопряженности она соответствует уникальной стрелки из F(L) в X. Таким образом, F(L) — копредел  $F\circ D$ .

Примеры

### План лекции

Рефклективные подкатегории

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примерь

### Определение

- ▶ Пусть (F, G) сопряжение.
- ▶ Тогда  $\varphi_{A,F(A)}: Hom_{\mathbb{D}}(F(A),F(A)) \simeq Hom_{\mathbb{C}}(A,GF(A))$  и  $\varphi_{G(B),B}: Hom_{\mathbb{D}}(FG(B),B) \simeq Hom_{\mathbb{C}}(G(B),G(B)).$
- ▶ Пусть  $\eta_A: A \to GF(A)$  естественное преобразование, которое определяется как  $\eta_A = \varphi_{A,F(A)}(id_{F(A)})$ .
- ightharpoonup С другой стороны  $arphi_{G(B),B}: \mathit{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathit{FG}(B),B) \simeq \mathit{Hom}_{\mathbf{C}}(G(B),G(B)).$
- ▶ Пусть  $\epsilon_B: FG(B) \to B$  естественное преобразование, которое определяется как  $\epsilon_B = \varphi_{G(B),B}^{-1}(id_{G(B)})$ .
- lacktriangledown  $\eta_A$  называется *единицей* сопряжения, а  $\epsilon_B$  *коединицей*.

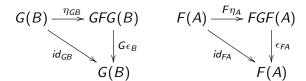
### Примеры

- $ightharpoonup \eta_A(a)$  возвращает "одноэлементное слово на букве a".
  - ightharpoonup Для категории моноидов  $\eta_A(a)=[a]$ .
  - lacktriangle Для категории векторных пространств  $\eta_A(a)=1a$ .
  - ▶ Для категории колец  $\eta_A(a) = a$  полином, состоящий из одной переменной a.
- ullet  $\epsilon_B: FU(B) o B$  "вычисляет" формальное выражение в B.
  - lacktriangle Для категории моноидов  $\epsilon_B([a_1\ldots a_n])=a_1*\ldots*a_n$ .
  - ightharpoonup Для категории векторных пространств  $\epsilon_B(c_1a_1+\ldots+c_na_n)=c_1*a_1+\ldots+c_n*a_n.$
  - ightharpoonup Для категории колец  $\epsilon_B$  определяется аналогичным образом как функция, вычисляющая полином на данных значениях.

# Свойства единицы и коединицы

#### **Proposition**

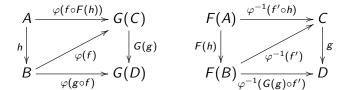
Если  $(F, G, \varphi)$  – сопряжение, то следующие диаграммы коммутируют:



### Доказательство

#### Доказательство.

Условия естественности  $\varphi$  и  $\varphi^{-1}$  можно переписать в следующем виде:



Нижний треугольник в первой диаграмме дает первое необходимое равенство при  $f=id_{FG(B)}$  и  $g=\epsilon_B$ . Второе необходимое равенство получается из верхнего треугольника во второй диаграмме при  $f'=id_{GF(A)}$  и  $h=\eta_A$ .

# Определение сопряжения через единицу и коединицу

Существует эквивалентное определение понятия сопряжения через единицу и коединицу.

#### Proposition

#### Четверка

$$(F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G: \mathbf{D} \to \mathbf{C}, \eta_A: A \to GF(A), \epsilon: FG(B) \to B),$$
 состоящая из пары функторов и пары естественных преобразований, удовлетворяющих условию, приведенному в предыдущем утверждении, определяет сопряжение  $(F, G, \varphi)$ , где  $\varphi(f) = G(f) \circ \eta_A$  для любого  $f: F(A) \to B$ ,  $\varphi^{-1}(g) = \epsilon_B \circ F(g)$  для любого  $g: A \to G(B)$ . Единицей и коединицей этого сопряжения являются  $\eta$  и  $\epsilon$  соответственно.

Единица и коединица сопряжения

#### Доказательство

#### Доказательство.

Последнее утверждение элементарно следует из определения arphiи  $arphi^{-1}$ . Докажем, что arphi и  $arphi^{-1}$  взаимообратны:

$$arphi^{-1}(arphi(f))=$$
 (по определению  $arphi$  и  $arphi^{-1})$   $\epsilon_B\circ FG(f)\circ F(\eta_A)=$  (по естественности  $\epsilon$ )  $f\circ \epsilon_{F(A)}\circ F(\eta_A)=$  (по свойству  $\epsilon$  и  $\eta$ )  $f.$  
$$\varphi(arphi^{-1}(g))=$$
 (по определению  $arphi$  и  $arphi^{-1})$   $G(\epsilon_B)\circ GF(g)\circ \eta_A=$  (по естественности  $\eta$ )  $G(\epsilon_B)\circ \eta_{G(B)}\circ g=$  (по свойству  $\epsilon$  и  $\eta$ )  $g.$ 

### Доказательство

#### Доказательство.

Осталось доказать, что  $\varphi$  естественно. Для этого достаточно проверить равенства, приводившиеся в доказательстве предыдущего утверждения.

$$G(g)\circ arphi(f)=$$
 (по определению  $arphi)$   $G(g)\circ G(f)\circ \eta_B=$  (так как  $G$  – функтор)  $G(g\circ f)\circ \eta_B=$  (по определению  $arphi)$   $arphi(g\circ f).$   $arphi(f)\circ h=$  (по определению  $arphi)$   $G(f)\circ \eta_B\circ h=$  (по естественности  $\eta$ )  $G(f)\circ GF(h)\circ \eta_A=$  (по определению  $arphi$ )  $arphi(f\circ F(h)).$ 

### План лекции

Рефклективные подкатегории

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

# Эквивалентность категорий

- ▶ Если  $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$  эквивалентность категорий, то F одновеременно и левый и правый сопряженный.
- Любой обратный к F будет его правым и левым сопряженным.

# Рефлективные подкатегории

- ▶ Если  $i: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$  функтор вложения полной подкатегории, то i является правым сопряженным тогда и только тогда, когда  $\mathbf{C}$  рефлективная подкатегория.
- Левый сопряженный к і называется рефлектором.
- ▶ Если  $F \dashv i$ , то  $\eta_X : X \to i(F(X))$  дает нам необходимую аппроксимацию к X в C.
- ▶ Если  ${\bf C}$  рефлективная подкатегория, то  $F: {\bf D} \to {\bf C}$  на объектах определяется очевидным образом, а на морфизмах по универсальному свойству.

- Декартова категория является декартово замкнутой тогда и только тогда, когда для любого объекта В функтор
  — × В является левым сопряженным.
- ▶ Действительно, правый сопряженный к нему это функтор  $(-)^B$ , а коединица сопряжения  $\epsilon_C: C^B \times B \to C$  это морфизм вычисления ev.
- ▶ Биекция, которая появляется в определении сопряженных функторов, — это в точности биекция каррирования.