Задания

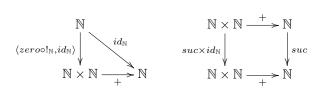
1 марта 2017 г.

- 1. Напомню, что категория называется категорией предпорядка, если для любых объектов A и B в ней существует максимум один морфизм между A и B. Чему в категории предпорядка соответствуют следующие конструкции?
 - (а) Терминальные объекты.
 - (b) Произведения объектов.
- 2. Пусть в категории ${\bf C}$ существует терминальный объект 1. Докажите, что для любого объекта A в ${\bf C}$ существует произведение $A\times 1$.
- 3. Докажите, что любой морфизм из терминального объекта является мономорфизмом.
- 4. Пусть в категории **C** существует терминальный объект 1 и некоторый морфизм $1 \to B$. Докажите, что любая проекция $\pi_1: A \times B \to A$ является эпиморфизмом.
- 5. Докажите, что в **Ab** существуют все произведения.
- 6. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории **C** выполнены следующие утверждения:
 - (a) Для любого объекта A существует изоморфизм $A^1 \simeq A$.
 - (b) Для любых объектов $A,\,B$ и C существует изоморфизм $A^{B \times C} \simeq (A^B)^C.$
- 7. Определите в произвольной декартово замкнутой категории комбинаторы K и S, то есть следующие морфизмы:

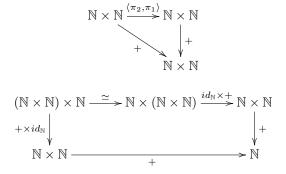
$$\begin{split} K:A &\to A^B \\ S:(C^B)^A &\to (C^A)^{(B^A)} \end{split}$$

8. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что функция *suc* должна быть инъективной. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм *suc* является расщепленным мономорфизмом.

- 9. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что ни для какого x не верно, что 0 = suc(x). В произвольной декартово замкнутой категории это может быть верно, но только если она является категорией предпорядка. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.
 - (а) С категория предпорядка.
 - (b) В ${f C}$ терминальный объект является объектом натуральных чисел.
 - (c) В ${\bf C}$ существует объект натуральных чисел, такой что для любого $x:1\to \mathbb{N}$ верно, что $zero=suc\circ x.$
 - (d) В **С** существует объект натуральных чисел, такой что для некоторого $x:1\to\mathbb{N}$ верно, что $zero=suc\circ x$.
- 10. Определите в произвольной декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм сложения $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющий следующим условиям:



Докажите, что сложение коммутативно и ассоциативно, то есть, что коммутируют следующие диаграммы:



11. Докажите, что если мы добавим в лямбда исчисление тип натуральных чисел № с термами и аксиомами, приведенными ниже, то такое лямбда исчесление можно проинтерпретировать в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел.

$$\begin{tabular}{ll} \hline \Gamma \vdash zero: \mathbb{N} & \hline \Gamma \vdash n: \mathbb{N} \\ \hline \Gamma \vdash suc(n): \mathbb{N} \\ \hline \\ \hline \hline \Gamma \vdash z: D & \Gamma, x: \mathbb{N}, r: D \vdash s: D & \Gamma \vdash n: \mathbb{N} \\ \hline \hline \Gamma \vdash rec(z, s, n): D \\ \hline \end{tabular}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \qquad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D}{\Gamma \vdash rec(z, s, zero) \equiv z : D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \qquad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D \qquad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash rec(z, s, suc(n)) \equiv s[x := n, r := rec(z, s, n)] : D}$$

В качестве примера к предпоследней задаче давайте сконструируем морфизм умножения. Это морфизм *, удовлетворяющий следующим свойствам:

$$\begin{array}{c|c} \mathbb{N} & \stackrel{!_{\mathbb{N}}}{\longrightarrow} 1 \\ \langle zero \circ !_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle & & & \downarrow zero \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\quad * \quad} \mathbb{N} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{id_{\mathbb{N}} \times \langle id_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle} \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \xrightarrow{* \times id_{\mathbb{N}}} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \downarrow suc \times id_{\mathbb{N}} & \downarrow + \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{*} \mathbb{N} \end{array}$$

Чтобы его сконструировать возьмем в определении натуральных чисел $X=\mathbb{N}^\mathbb{N}$. В качестве $z:1\to X$ возьмем морфизм, по каррированию соответствующий функции $\mathbb{N}\to 1 \xrightarrow{zero} \mathbb{N}$. В качестве $s:X\to X$ возьмем морфизм, по каррированию соответствующий следующей функции:

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \xrightarrow{id_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \times \langle id_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \simeq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \xrightarrow{ev \times id_{\mathbb{N}}} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}.$$

Тогда коммутирование двух частей диаграммы в определение $\mathbb N$ эквивалентно коммутированию двух диаграмм в определении *.