# Теория категорий Конструкции в категориях

Валерий Исаев

07 сентября 2015 г.

#### План лекции

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Произведения

Уравнители

▶ В категории **Set** морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он инъективен и сюръективен.

- ▶ В категории **Set** морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он инъективен и сюръективен.
- Верно ли это в произвольной категории?

- ▶ В категории **Set** морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он инъективен и сюръективен.
- Верно ли это в произвольной категории?
- Чтобы данный вопрос имел смысл, нам понадобится обощение понятия инъективных и сюръективных функций.

- ► В категории **Set** морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он инъективен и сюръективен.
- Верно ли это в произвольной категории?
- Чтобы данный вопрос имел смысл, нам понадобится обощение понятия инъективных и сюръективных функций.
- Морфизм  $f:X \to Y$  называется мономорфизмом, если для любых стрелок  $g,h:Z \to Y$  равенство  $f\circ g=f\circ h$  влечет g=h.

$$Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y \implies g = h$$

- ▶ В категории **Set** морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он инъективен и сюръективен.
- Верно ли это в произвольной категории?
- Чтобы данный вопрос имел смысл, нам понадобится обощение понятия инъективных и сюръективных функций.
- Морфизм  $f:X \to Y$  называется мономорфизмом, если для любых стрелок  $g,h:Z \to Y$  равенство  $f\circ g=f\circ h$  влечет g=h.

$$Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y \implies g = h$$

 Мономорфизмы в Set – это в точности инъективные функции.

# Мономорфизмы в алгебраических категориях

#### Proposition

В любой алгебраической категории (**Grp**, **Ab**, **Ring**, ...) мономорфизмы – это в точности инъективные функции.

#### Доказательство.

Докажем для  $\mathbf{Grp}$ , для остальных можно доказать аналогично. Пусть  $f:A\to B$  — инъективный гомоморфизм групп, и  $g,h:C\to A$  — такие, что  $f\circ g=f\circ h$ . Так как f — мономорфизм множеств, то g и h равны как функции над множествами. Но отсюда следует, что они равны как гомоморфизмы групп.

Наоборот, если f — мономорфизм, то пусть  $a_1,a_2\in A$  такие, что  $f(a_1)=f(a_2)$ . Тогда рассмотри пару гомоморфизмов  $g_1,g_2:\mathbb{Z}\to A$  таких, что  $g_i(1)=a_i$ . Так как  $f\circ g_1=f\circ g_2$ , то  $g_1=g_2$ . Следовательно  $a_1=g_1(1)=g_2(1)=a_2$ .

lacktriangle Морфизм f:X o Y называется епиморфизмом, если

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \implies g = h$$

lacktriangle Морфизм f:X o Y называется епиморфизмом, если

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \implies g = h$$

▶ Эпиморфизмы в Set — это в точности сюръективные функции.

lacktriangle Морфизм f:X o Y называется епиморфизмом, если

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \implies g = h$$

- Эпиморфизмы в Set это в точности сюръективные функции.
- Эпиморфизмы в категориях моноидов и колец не обязательно сюръективны.

lacktriangle Морфизм f:X o Y называется епиморфизмом, если

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \implies g = h$$

- Эпиморфизмы в Set это в точности сюръективные функции.
- Эпиморфизмы в категориях моноидов и колец не обязательно сюръективны.
- ▶ Примеры:  $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ .

# Эпиморфизмы в **Set**

#### Proposition

Эпиморфизмы в **Set** – это в точности сюръективные функции.

#### Доказательство.

Пусть  $f:A\to B$  — сюръекция, и  $g,h:B\to C$  — такие, что  $g\circ f=h\circ f$ . Тогда для любого  $b\in B$  существует  $a\in A$  такой, что f(a)=b. Следовательно g(b)=g(f(a))=h(f(a))=h(b). Наоборот, если  $f:A\to B$  — эпиморфизм, то пусть  $g,h:B\to \{0,1\}$  — такие, что g всегда равно 1, а h(b) равно 1 в точности когда существует  $a\in A$  такой, что f(a)=b. Тогда  $g\circ f=h\circ f$ . Следовательно g=h. Следовательно для любого  $b\in B$  верно, что h(b)=g(b)=1, то есть существует  $a\in A$  такой, что f(a)=b, то есть f — сюръекция.

Морфизм  $f:A\to B$  называется расщепленным мономорфизмом, если существует  $g:B\to A$  такой, что  $g\circ f=id_A.$ 

- ightharpoonup Морфизм f:A o B называется расщепленным мономорфизмом, если существует g:B o A такой, что  $g\circ f=id_A$ .
- ightharpoonup Морфизм g:B o A называется расщепленным эпиморфизмом, если существует f:A o B такой, что  $f\circ g=id_B$ .

- ightharpoonup Морфизм f:A o B называется расщепленным мономорфизмом, если существует g:B o A такой, что  $g\circ f=id_A$ .
- ightharpoonup Морфизм g:B o A называется расщепленным эпиморфизмом, если существует f:A o B такой, что  $f\circ g=id_B$ .
- Любой расщепленный мономорфизм является мономорфизмом. Действительно, если  $f\circ h_1=f\circ h_2$ , то  $h_1=g\circ f\circ h_1=g\circ f\circ h_2=h_2$ .

- ightharpoonup Морфизм f:A o B называется расщепленным мономорфизмом, если существует g:B o A такой, что  $g\circ f=id_A$ .
- ▶ Морфизм  $g: B \to A$  называется расщепленным эпиморфизмом, если существует  $f: A \to B$  такой, что  $f \circ g = id_B$ .
- Любой расщепленный мономорфизм является мономорфизмом. Действительно, если  $f\circ h_1=f\circ h_2$ , то  $h_1=g\circ f\circ h_1=g\circ f\circ h_2=h_2$ .
- Любой расщепленный эпиморфизм является эпиморфизмом. Доказательство аналогично предыдущему.

 Категория называется сбалансированной, если любой мономорфный и эпиморфный морфизм является изоморфизмом.

- Категория называется сбалансированной, если любой мономорфный и эпиморфный морфизм является изоморфизмом.
- ▶ Примеры сбалансированных категорий: **Set**, **Grp**, **Ab**.

- Категория называется сбалансированной, если любой мономорфный и эпиморфный морфизм является изоморфизмом.
- ▶ Примеры сбалансированных категорий: **Set**, **Grp**, **Ab**.
- Примеры несбалансированных категорий: категории моноидов и колец.

- Категория называется сбалансированной, если любой мономорфный и эпиморфный морфизм является изоморфизмом.
- ▶ Примеры сбалансированных категорий: **Set**, **Grp**, **Ab**.
- Примеры несбалансированных категорий: категории моноидов и колец.
- ▶ Любой эпиморфный расщепленный мономорфизм является изоморфизмом. Действительно, если  $f:A\to B$  и  $g:B\to A$  такие, что  $g\circ f=id_A$ , то  $f\circ g\circ f=id_B\circ f$ . Следовательно  $f\circ g=id_B$ .

- Категория называется сбалансированной, если любой мономорфный и эпиморфный морфизм является изоморфизмом.
- ▶ Примеры сбалансированных категорий: **Set**, **Grp**, **Ab**.
- Примеры несбалансированных категорий: категории моноидов и колец.
- Любой эпиморфный расщепленный мономорфизм является изоморфизмом. Действительно, если  $f:A\to B$  и  $g:B\to A$  такие, что  $g\circ f=id_A$ , то  $f\circ g\circ f=id_B\circ f$ . Следовательно  $f\circ g=id_B$ .
- Любой мономорфный расщепленный эпиморфизм является изоморфизмом. Доказательство аналогично предыдущему.

#### План лекции

Мономорфизмы и эпиморфизмы

#### Произведения

Уравнители

▶ В категориях **Set** и **Hask** существует много похожих объектов:  $\mathbb{Z}$  и *Integer*,  $\{*\}$  и (),  $A \times B$  и (a,b).

- ▶ В категориях **Set** и **Hask** существует много похожих объектов:  $\mathbb{Z}$  и *Integer*,  $\{*\}$  и (),  $A \times B$  и (a, b).
- Существует ли обобщение этих конструкций в произвольных катгеориях?

- ▶ В категориях Set и Hask существует много похожих объектов:  $\mathbb{Z}$  и Integer,  $\{*\}$  и (),  $A \times B$  и (a, b).
- Существует ли обобщение этих конструкций в произвольных катгеориях?
- ightharpoonup Объект A некоторой категории  ${f C}$  называется Tерминальным, если для любого объекта B существует уникальная стрелка  $B \to A$ .

- ▶ В категориях **Set** и **Hask** существует много похожих объектов:  $\mathbb{Z}$  и *Integer*,  $\{*\}$  и (),  $A \times B$  и (a, b).
- Существует ли обобщение этих конструкций в произвольных катгеориях?
- ▶ Объект A некоторой категории  ${\bf C}$  называется терминальным, если для любого объекта B существует уникальная стрелка  $B \to A$ .
- ▶ Другими словами, A является терминальным, если для любого B множество  $Hom_{\mathbf{C}}(B,A)$  одноэлементно.

▶ В **Set** множество терминально тогда и только тогда, когда оно одноэлементно.

- ▶ В Set множество терминально тогда и только тогда, когда оно одноэлементно.
- ▶ В Grp группа терминальна тогда и только тогда, когда она одноэлементна.

- ▶ В **Set** множество терминально тогда и только тогда, когда оно одноэлементно.
- В Grp группа терминальна тогда и только тогда, когда она одноэлементна.
- ▶ В Hask есть следующие терминальные объекты: (), data Unit = Unit.

- ▶ В Set множество терминально тогда и только тогда, когда оно одноэлементно.
- В Grp группа терминальна тогда и только тогда, когда она одноэлементна.
- В Hask есть следующие терминальные объекты: (), data Unit = Unit.
- Утверждение строчкой выше не является верным :(

- ▶ В Set множество терминально тогда и только тогда, когда оно одноэлементно.
- В Grp группа терминальна тогда и только тогда, когда она одноэлементна.
- B Hask есть следующие терминальные объекты: (),
  data Unit = Unit.
- Утверждение строчкой выше не является верным :(
- В группоиде существует терминальный объект только если он тривиален.

# Уникальность терминальных объектов

#### Proposition

Любые два терминальных объекта изоморфны.

#### Доказательство.

Если A и B — терминальные объекты, то существует пара стрелок  $f:A\to B$  и  $g:B\to A$ . При этом по уникальности верно, что  $g\circ f=id_A$  и  $f\circ g=id_B$ .



# Уникальность терминальных объектов

#### Proposition

Любые два терминальных объекта изоморфны.

#### Доказательство.

Если A и B — терминальные объекты, то существует пара стрелок  $f:A\to B$  и  $g:B\to A$ . При этом по уникальности верно, что  $g\circ f=id_A$  и  $f\circ g=id_B$ .

Терминальный объект обычно обозначают 1. Уникальный морфизм из X в 1 обычно обозначают  $!_X:X o 1$ .

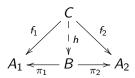


#### Декартово произведение

• Множество B вместе с парой функций  $\pi_i: B \to A_i$  является декартовым произведением множеств  $A_1$  и  $A_2$ , если для любых  $a_i \in A_i$  существует уникальный  $b \in B$  такой, что  $\pi_i(b) = a_i$ .

## Декартово произведение

- Множество B вместе с парой функций  $\pi_i: B \to A_i$  является декартовым произведением множеств  $A_1$  и  $A_2$ , если для любых  $a_i \in A_i$  существует уникальный  $b \in B$  такой, что  $\pi_i(b) = a_i$ .
- Объект B вместе с парой отображений  $\pi_i: B \to A_i$  называется декартовым произведением  $A_1$  и  $A_2$ , если для любых  $f_i: C \to A_i$  существует уникальная стрелка  $h: C \to B$  такая, что  $\pi_i \circ h = f_i$ .



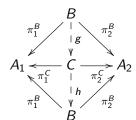
#### Уникальность декартова произведения

#### Proposition

Если  $(B, \pi_i^B)$  и  $(C, \pi_i^C)$  – произведения объектов  $A_1$  и  $A_2$ , то B и C изоморфны.

#### Доказательство.

По определению декартова произведения существуют стрелки  $g: B \to C$  и  $h: C \to B$  как на диаграмме ниже. По уникальности  $h \circ g = id_B$  и, аналогично,  $g \circ h = id_C$ .



### Произведение множества объектов

▶ Если  $\{A_i\}_{i\in I}$  – колекция объектов некоторой категории, то объект B вместе с морфизмами  $\pi_i: B \to A_i$  называется декартовым произведением объектов  $A_i$ , если для любой коллекции морфизмов  $\{f_i: C \to A_i\}_{i\in I}$  существует уникальная стрелка  $h: C \to B$  такая, что  $\pi_i \circ h = f_i$ .

#### Произведение множества объектов

- ▶ Если  $\{A_i\}_{i\in I}$  колекция объектов некоторой категории, то объект B вместе с морфизмами  $\pi_i: B \to A_i$  называется декартовым произведением объектов  $A_i$ , если для любой коллекции морфизмов  $\{f_i: C \to A_i\}_{i\in I}$  существует уникальная стрелка  $h: C \to B$  такая, что  $\pi_i \circ h = f_i$ .
- ▶ Декартово произведение объектов  $\{A_i\}_{i\in I}$  уникально с точностью до изоморфизма.

### Произведение множества объектов

- ▶ Если  $\{A_i\}_{i\in I}$  колекция объектов некоторой категории, то объект B вместе с морфизмами  $\pi_i: B \to A_i$  называется декартовым произведением объектов  $A_i$ , если для любой коллекции морфизмов  $\{f_i: C \to A_i\}_{i\in I}$  существует уникальная стрелка  $h: C \to B$  такая, что  $\pi_i \circ h = f_i$ .
- ▶ Декартово произведение объектов  $\{A_i\}_{i\in I}$  уникально с точностью до изоморфизма.
- ▶ Оно обозначается  $\prod_{i \in i} A_i$ . Если  $I = \{1, \dots n\}$ , то оно обозначается  $A_1 \times \dots \times A_n$ . Уникальный морфизм  $C \to A_1 \times \dots \times A_n$  обозначается  $\langle f_1, \dots f_n \rangle$ .

#### Декартовы категория

Категория, в которой существует терминальный объект и бинарные произведения, называется *декартовой*.

#### Декартовы категория

Категория, в которой существует терминальный объект и бинарные произведения, называется *декартовой*.

#### Proposition

Категория декартова тогда и только тогда, когда в ней существуют все конечные произведения.

#### Доказательство.

Терминальный объект — произведение пустого множества объектов, бинарные произведения — произведение двух объектов. И наоборот, произведение  $A_i$  можно сконструировать как

$$A_1 \times (A_2 \times \ldots (A_{n-1} \times A_n) \ldots)$$

Это можно доказать по индукции.

#### План лекции

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Произведения

Уравнители

 Часто новые множества конструируются из уже существующих как подмножества элементов, удовлетворяющих некоторому уравнению.

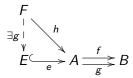
- Часто новые множества конструируются из уже существующих как подмножества элементов, удовлетворяющих некоторому уравнению.
- ightharpoonup Например, множество неотрицательных вещественных чисел  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  является подмножеством  $\mathbb{R}$  таких x, что |x|=x.

- Часто новые множества конструируются из уже существующих как подмножества элементов, удовлетворяющих некоторому уравнению.
- ightharpoonup Например, множество неотрицательных вещественных чисел  $\mathbb{R}_{>0}$  является подмножеством  $\mathbb{R}$  таких x, что |x|=x.
- ▶ Другой пример: множество корней полинома p является подмножеством  $\mathbb R$  таких x, что p(x) = 0.

- Часто новые множества конструируются из уже существующих как подмножества элементов, удовлетворяющих некоторому уравнению.
- lacktriangle Например, множество неотрицательных вещественных чисел  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  является подмножеством  $\mathbb{R}$  таких x, что |x|=x.
- ▶ Другой пример: множество корней полинома p является подмножеством  $\mathbb R$  таких x, что p(x)=0.
- ▶ В общем случае, если  $f,g:A\to B$  пара функций, то уравнитель этих функций это подмножество A таких x, что f(x)=g(x).

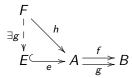
#### Уравнители в произвольной категории

Vравнитель пары морфизмов  $f,g:A\to B$  — это мономорфизм  $e:E\to A$  такой, что  $f\circ e=g\circ e$  и для любого  $h:F\to A$  такого, что  $f\circ h=g\circ h$ , существует стрелка  $g:F\to E$  такая, что  $e\circ g=h$ .



### Уравнители в произвольной категории

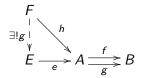
Уравнитель пары морфизмов  $f,g:A\to B$  — это мономорфизм  $e:E\to A$  такой, что  $f\circ e=g\circ e$  и для любого  $h:F\to A$  такого, что  $f\circ h=g\circ h$ , существует стрелка  $g:F\to E$  такая, что  $e\circ g=h$ .



Мономорфизм называется *регулярным*, если он является уравнителем некоторой пары стрелок.

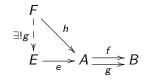
## Другое определение уравнителей

Vравнитель пары морфизмов  $f,g:A\to B$  – это морфизм  $e:E\to A$  такой, что  $f\circ e=g\circ e$  и для любого  $h:F\to A$  такого, что  $f\circ h=g\circ h$ , существует уникальная стрелка  $g:F\to E$  такая, что  $e\circ g=h$ .



### Другое определение уравнителей

 $\mathcal{V}$ равнитель пары морфизмов  $f,g:A\to B$  – это морфизм e:E o A такой, что  $f\circ e=g\circ e$  и для любого h:F o Aтакого, что  $f\circ h=g\circ h$ , существует уникальная стрелка  $g: F \to E$  такая, что  $e \circ g = h$ .



Упражнение: докажите, что эти определения эквивалентны.

▶ В категории **Ab** абелевых групп уравнители тесно связаны с понятием ядра морфизма.

- ▶ В категории **Ab** абелевых групп уравнители тесно связаны с понятием ядра морфизма.
- ▶ Если  $f: A \to B$  морфизм абелевых групп, то ядро f это уравнитель пары стрелок  $f, 0: A \to B$ .

- ▶ В категории **Ab** абелевых групп уравнители тесно связаны с понятием ядра морфизма.
- ▶ Если  $f: A \to B$  морфизм абелевых групп, то ядро f это уравнитель пары стрелок  $f, 0: A \to B$ .
- ▶ И наоборот, если  $f, g: A \to B$  пара морфизмов, то их уравнитель это ядро морфизма  $f g: A \to B$ .

- ▶ В категории **Ab** абелевых групп уравнители тесно связаны с понятием ядра морфизма.
- $\blacktriangleright$  Если f:A o B морфизм абелевых групп, то ядро f это уравнитель пары стрелок f,0:A o B.
- ▶ И наоборот, если  $f, g: A \to B$  пара морфизмов, то их уравнитель это ядро морфизма  $f g: A \to B$ .
- Таким образом, в категории **Ab** существуют все уравнители.