Теория категорий Пределы и копределы

Валерий Исаев

07 сентября 2015 г.

План лекции

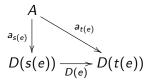
Пределы

Копределы

Булевские объекты

Конусы диграмм

- ▶ Пусть J = (V, E) некоторый граф, и D диграмма формы J в категории C.
- Конус диаграммы D это объект A вместе с коллекцией морфизмов $a_v:A\to D(v)$ для каждой $v\in V$, удовлетворяющие условию, что для любого $e\in E$ следующая диаграмма коммутирует



Определение пределов

▶ Предел диграммы D — это такой конус A, что для любого конуса B существует уникальный морфизм $f: B \to A$, такой что для любой $v \in V$ следующая диаграмма коммутирует



- ightharpoonup Предел D обозначается $\lim D$.
- ▶ Категория называется полной (конечно полной), если в ней существуют все малые (конечные) пределы.

Примеры пределов

- ▶ Произведения это пределы дискретных диаграмм.
- Бинарные произведения это пределы диаграмм вида

• •

Уравнители – это пределы диаграмм вида

$$\bullet \Longrightarrow \bullet$$

▶ Терминальные объекты — это пределы пустой диаграммы.

Уникальность пределов

Proposition

Если A и B – пределы диаграммы D, то существует изоморфизм $f:A\simeq B$, такой что $a_v=b_v\circ f$ для любой $v\in V$.

Доказательство.

Так как B — предел, то существует стрелка $f:A\to B$, удовлетворяющая условию утверждения. Так как A — предел, то существует стрелка $g:B\to A$. По уникальности мы знаем, что $g\circ f=id_A$ и $f\circ g=id_B$, то есть f — изоморфизм.

Пулбэки

► Пулбэки — это пределы диаграмм вида



Пулбэк можно изображать как коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc}
A \times_C B \longrightarrow B \\
\downarrow^{\bot} & \downarrow \\
A \longrightarrow C
\end{array}$$

- Пулбэк иногда называют декартовым квадратом.
- lacktriangle Стрелку $A imes_{\mathcal{C}}B o A$ называют пулбэком стрелки $B o \mathcal{C}$.

Декартово произведение через пулбэки

Proposition

Если 1 – терминальный объект, то пулбэк $A \times_1 B$ является декартовым произведением $A \times B$.

Доказательство.

Действительно, конус диаграммы A B -это тоже самое, что и конус диаграммы



Следовательно пределы этих диграмм также совпадают.



Пулбэки в Set

В **Set** пулбэк диаграммы



можно определить как подмножество декартова произведения $A \times B$. Действительно, если мы положим $A \times_C B = \{(a,b) \mid f(a) = g(b)\}$, то легко видеть, что $A \times_C B$ является пулбэком диграммы выше.

Пулбэки через уравнители и произведения

Proposition

Если в категории существуют конечные произведения и уравнители, то в ней существуют пулбэки.

Доказательство.

Пулбэки можно сконструировать так же, как и в **Set**. Пусть $e:D\to A\times B$ — уравнитель стрелок $f\circ\pi_1:A\times B\to C$ и $g\circ\pi_2:A\times B\to C$. Тогда легко видеть, что квадрат ниже является декартовым.

$$D \xrightarrow{\pi_2 \circ e} B$$

$$\pi_1 \circ e \bigvee_{q} g$$

$$A \xrightarrow{f} C$$

Пределы через уравнители и произведения

Proposition

Если в категории существуют конечные произведения и уравнители, то в ней существуют все конечные пределы.

Доказательство.

Пусть D — диаграмма формы (V, E). Тогда рассмотрим диаграмму, состоящую из пары стрелок

$$\langle \pi_{t(e)} \rangle_{e \in E}, \langle D(e) \circ \pi_{s(e)} \rangle_{e \in E} : \prod_{v \in V} D(v) \Rightarrow \prod_{e \in E} D(t(e))$$

Конус этой диаграммы — это тоже самое, что конус диаграммы D. Следовательно предел этой диаграммы также является пределом D.

Прообраз подобъекта

- ▶ Пусть $f: A \to C$ функция в **Set** и $B \subseteq C$.
- ▶ Тогда мы можем определить прообраз f: $f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\} \subseteq A$.
- Как обобщить эту конструкцию на произвольную категорию?
- lacktriangle Прообраз подобъекта $B\hookrightarrow C$ вдоль морфизма $f:A\to C$ это пулбэк

$$\begin{cases}
f^{-1}(B) \longrightarrow B \\
\downarrow \\
A \longrightarrow C
\end{cases}$$

▶ Упражнение: докажите, что $f^{-1}(B) o A$ является мономорфизмом.

Пересечение подобъектов

- ▶ Пусть A и B подмножества C.
- ▶ Тогда мы можем определить их пересечение $A \cap B$, которое является подмножеством и A, и B.
- Как обобщить эту конструкцию на произвольную категорию?
- lacktriangle Пересечение подобъектов $A\hookrightarrow C$ и $B\hookrightarrow C$ это пулбэк

$$\begin{array}{ccc}
A \cap B & \longrightarrow B \\
\downarrow & & \downarrow \\
A & \longrightarrow C
\end{array}$$

План лекции

Пределы

Копределы

Булевские объекты

Дуальная категория

Пусть ${\bf C}$ — произвольная категория, тогда *дуальная* ей категория ${\bf C}^{op}$ — это категория, определяемая следующим образом:

- ▶ Объекты \mathbf{C}^{op} совпадают с объектами \mathbf{C} .
- ▶ Если X, Y объекты \mathbf{C}^{op} , то $Hom_{\mathbf{C}^{op}}(X,Y)$ определяется как $Hom_{\mathbf{C}}(Y,X)$.
- ► Композиция и тождественные морфизмы определяются так же, как в **С**.

Дуальность

- В теории категорий зачастую определения и утверждения можно дуализировать, применив их в дуальной категории.
- Например, понятие эпиморфизма является дуальным к понятию мономорфизма.

$$f$$
 - MOHO: $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y \implies g = h$

$$f$$
 - эпи: $Z \underset{h}{\overset{g}{\underset{f}{\rightleftharpoons}}} X \underset{f}{\longleftarrow} Y \implies g = h$

 Часто к дуальным понятиям прибавляют приставку ко.
 Например, эпиморфизмы можно называть комономорфизмами (или мономорфизмы можно называть коэпиморфизмами).

Копределы

- ▶ Копределы это дуальное понятие к понятию пределов.
- Коконус диаграммы D это объект A вместе с коллекцией морфизмов $a_v:D(v)\to A$ для каждой $v\in V$, удовлетворяющие условию, что для любого $e\in E$ следующая диаграмма коммутирует

$$D(s(e)) \xrightarrow{D(e)} D(t(e))$$

$$\downarrow a_{t(e)}$$

$$\downarrow A$$

Определение копределов

▶ Копредел диграммы D – это такой коконус A, что для любого коконуса B существует уникальный морфизм $f:A\to B$, такой что для любой $v\in V$ следующая диаграмма коммутирует



- ightharpoonup Копредел D обозначается $colim\ D$.
- ► Категория называется *кополной* (*конечно кополной*), если в ней существуют все малые (конечные) копределы.

Уникальность копределов

Дуализировать можно не только определения, но и утверждения.

Proposition

Если A и B – копределы диаграммы D, то существует изоморфизм $f:A\simeq B$, такой что $f\circ a_v=b_v$ для любой $v\in V$.

Доказательство.

Так как копредел в C – это предел в C^{op} , то это утверждение эквивалентно аналогичному утверждению для пределов.

Начальный объект

- Объект называется начальным, если он является копределом пустой диаграммы.
- ▶ В Set существует единственный начальный объект пустое множество.
- ▶ В **Hask** начальный объект пустой тип.
- ▶ В Grp начальный объект тривиальная группа.

Копроизведения объектов

- ▶ Копроизведение (сумма) объектов A_1 и A_2 это копредел диаграммы A_1 A_2 . Копроизведение обозначается $A_1 \coprod A_2$ либо $A_1 + A_2$.
- ▶ В Set копроизведение это размеченное объединение множеств.
- ▶ В **Hask** копроизведение это *Either*.
- ▶ В Grp копроизведение свободное произведение.

Фактор-множества

- ightharpoonup Пусть \sim отношение эквивалентности на множестве B.
- ightharpoonup Тогда можно определить множество B/\sim классов эквивалентности элементов B по этому отношению.
- Существует каноническая функция $c: B o B/\sim$, отправляющая каждый $b \in B$ в его класс эквивалентности.
- ▶ Если рассматривать отношение \sim как подмножество $B \times B$, то существуют проекции $f,g:\sim \to B$.
- Стрелка с уравнивает f и g и является универсальной с таким свойством.
- ▶ Другими словами, *с* является коуравнителем *f* и *g*.

Коуравнители

- ▶ В произвольной категории коуравнители можно рассматривать как обобщение этой конструкции.
- ▶ Пусть B абелева группа, A подгруппа B, $f:A\hookrightarrow B$ вложенние A в B. Тогда коядро B/A это коуравнитель стрелок $f,0:A\to B$.
- ightharpoonup И наоборот, коуравнитель стрелок f,g:A o B это коядро B/Im(f-g).
- Пушауты дуальное понятие к понятию пулбэков.

План лекции

Пределы

Копределы

Булевские объекты

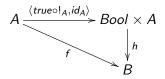
Копроизведение $1 \amalg 1$

- ▶ В **Set** множество *Bool* можно определить как копроизведение множеств {*true*} и {*false*}, каждое из которых является терминальным.
- ightharpoonup Копроизведение $1 \amalg 1$ обычно обозначается как 2.
- Можно было бы в произвольной категории определить объект Bool как копроизведение 1

 1 1.
- ► Но это недостаточно сильное определение. Мы не сможем никаких функций над ним определить.

Булевский объект

- ▶ Пусть в C существуют все конечные произведения.
- ▶ Тогда *булевский объект* в ${\bf C}$ это объект *Bool* вместе с парой морфизмов *true*, *false* : $1 \to Bool$, удовлетворяющий следующему условию.
- ightharpoonup Для любых f,g:A o B существует уникальная стрелка h:Bool imes A o B, такая что



$$A \xrightarrow{\langle falseo!_A, id_A \rangle} Bool \times A$$

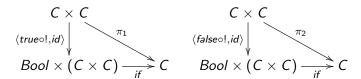
$$\downarrow h$$

Булевский объект и 2

- Любой булевский объект является 2.
- Действительно, если в определении булевского объекта в качестве A взять 1, то мы получим в точности универсальное свойство $1 \amalg 1$.
- Следовательно булевский объект уникален с точностью до изоморфизма.
- ▶ Но не любой объект, являющийся 2, является булевским.
- Действительно, в категории групп 2 изоморфен 1.
- Но булевский объект изоморфен 1 только в категориях предпорядка.

if

ightharpoonup Мы можем сконструировать морфизм if : Bool imes (C imes C) o C, удовлетворяющий



- ightharpoonup Действительно, в определении Bool возьмем $A=C\times C$, B=C, $f=\pi_1$ и $g=\pi_2$.
- ▶ Тогда существует уникальная стрелка $Bool \times (C \times C) \rightarrow C$, удовлетворяющая условиям выше.