Естественный вывод для partial Horn logic

27 апреля 2016 г.

Как обычно, $t\downarrow$ означает $t = t$.

1 Правила вывода с лямбда термами

$$\frac{}{\Gamma \vdash refl(x) : x\downarrow} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : a = b}{\Gamma \vdash sym(p) : b = a}$$

$$\frac{}{x_1 : \varphi_1, \ldots x_n : \varphi_n \vdash x_i : \varphi_i} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : a = b \qquad \Gamma \vdash q : \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash leib(x, \varphi, p, q) : \varphi[b/x]}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : R(t_1, \ldots t_n)}{\Gamma \vdash sp_{R,i}(p) : t_i\downarrow} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \sigma(t_1, \ldots t_n)\downarrow}{\Gamma \vdash sf_{\sigma,i}(p) : t_i\downarrow}$$

где R и σ – это произвольные предикатные и функциональные символы соответственно.

$$\frac{\Gamma \vdash p_1 : \varphi_1[t_1/x_1, \ldots t_k/x_k] \qquad \ldots \qquad \Gamma \vdash p_n : \varphi_n[t_1/x_1, \ldots t_k/x_k]}{\Gamma \vdash f(t_1, \ldots t_k, p_1, \ldots p_n) : \varphi[t_1/x_1, \ldots t_k/x_k]}$$

где f – это аксиома $\varphi_1, \ldots \varphi_n \vdash^{x_1 : s_1, \ldots x_k : s_k} \varphi$, а t_i – это терм сорта s_i.

2 Правила вывода без лямбда термов

$$\frac{}{\Gamma \vdash x\downarrow} \qquad \frac{\Gamma \vdash a = b}{\Gamma \vdash b = a}$$

$$\frac{}{\varphi_1, \ldots \varphi_n \vdash \varphi_i} \qquad \frac{\Gamma \vdash a = b \qquad \Gamma \vdash \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \varphi[b/x]}$$

$$\frac{\Gamma \vdash R(t_1, \ldots t_n)}{\Gamma \vdash t_i\downarrow} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma(t_1, \ldots t_n)\downarrow}{\Gamma \vdash t_i\downarrow}$$

где R и σ – это произвольные предикатные и функциональные символы соответственно.

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1[t_1/x_1, \ldots t_k/x_k] \qquad \ldots \qquad \Gamma \vdash \varphi_n[t_1/x_1, \ldots t_k/x_k]}{\Gamma \vdash \varphi[t_1/x_1, \ldots t_k/x_k]}$$

для всех аксиом $\varphi_1, \ldots \varphi_n \vdash^{x_1 : s_1, \ldots x_k : s_k} \varphi$ и термов t_i сорта s_i.

3 Замечания

- Следующее правило подстановки доказательств допустимо, так как все правила вывода замкнуты относительно него.

$$\frac{\Gamma, x : \varphi \vdash p : \psi \qquad \Gamma \vdash q : \varphi}{\Gamma \vdash (\lambda x.p)\, q : \psi}$$

- Из правила $leib$ следуют транзитивность и строгость по первому аргументу:

$$\frac{\Gamma \vdash p : a = b}{\Gamma \vdash se_1(p) : a{\downarrow}}$$

- Вместо правила sym можно добавить правило строгости равенства по второму аргументу:

$$\frac{\Gamma \vdash p : a = b}{\Gamma \vdash se_2(p) : b{\downarrow}}$$

  Предполагая $leib$, правила sym и se_2 эквивалентны.

- Нам пришлось вернуть правила sp и sf (strictness of predicates и strictness of functions), так как у нас нет теперь правила подстановки термов

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma[t/x] \vdash \varphi[t/x]}\ , \ x \in FV(\Gamma),$$

  а $refl$ не замкнут отностиельно этого правила сам по себе, но вместе с sp, sf, se_1 и se_2 правило подстановки термов становится допустимым.