3. Derivata della funzione composta $f\big(g(x)\big)$ - Derivata di $[f(x)]^{g(x)}$

Teorema
Se la funzione $f(x) = t$ è derivabile $\forall x \in I$ e la funzione $g(t) = y$ è derivabile in

$$t = f(x) \in f(I)$$

la funzione composta $g(f(x)) = y$ è derivabile in x e risulta

$$Dg(f(x)) = g'(t) \cdot f'(x) \qquad \text{essendo } t = f(x)$$

Esempi

a) *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = e^{sinx}$$

La funzione è composta dalle funzioni

$$e^t \qquad \text{e} \qquad t = sinx$$

le cui derivate sono $\qquad e^t \qquad$ e $\qquad cosx$

pertanto la derivata della funzione è

$$f'(x) = e^{sinx}cosx.$$

b) *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \log(\cos(-2x+1))$$

La funzione è composta dalle funzioni

$$logt \qquad t = cosz \qquad z = -2x + 1$$

le cui derivate sono

$$\frac{1}{t} \qquad -sinz \qquad -2$$

pertanto si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(-2x+1)}(-\sin(-2x+1))(-2) = 2tg(-2x+1)$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

*1) $f(x) = sin(-x^2 + 1)$ *2) $f(x) = tg(\pi x)$

*3) $f(x) = log(x - x^2)$ *4) $f(x) = cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

*5) $f(x) = e^{\sqrt{x}-2}$ *6) $f(x) = \sqrt{tg(3x)}$

7) $f(x) = log(sinx - cos3x)$

*8) $f(x) = log\left(\frac{x+1}{x}\right)$

*9) $f(x) = arctg\left(e^{-x^2}\right)$

10) $f(x) = \arccos(5 - 2x)$

*11) $f(x) = e^{-x^2}cos2x$

*12) $f(x) = e^{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}$

*13) $f(x) = log(e^{3x} + 1)$

*14) $f(x) = \sqrt{x}.sin\sqrt{x}$

*15) $f(x) = \sqrt{log\left(tg\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right)}$

*16) $f(x) = log\sqrt{sin2x}$

*17) $f(x) = log\big(log(x^3 + 1)\big)$

18) $f(x) = x^2sin(x^2 - 1)$

*19) $f(x) = log\sqrt{arctgx^2}$

*20) Date le funzioni

$$f(x) = cosx \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2$$

calcolare le derivate delle funzioni

$$f\big(g(x)\big) \qquad \text{e} \qquad g\big(f(x)\big) .$$

*21) Date le funzioni

$$f(x) = arctgx \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

calcolare le derivate delle funzioni

$$f\big(g(x)\big) \qquad \text{e} \qquad g\big(f(x)\big) .$$

Derivata di $[\boldsymbol{f(x)}]^{g(x)}$

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili nell’intervallo I con $f(x) > 0\ \forall x \in \mathrm{I}$.

Scritta la funzione come

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{log[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)logf(x)}$$

derivando si ha la seguente formula:

$$\mathrm{D}[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x)logf(x) + g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Esempio

$D(logx)^x$ = $De^{log(logx^x)} = D\left(e^{xlog(logx)}\right) = e^{xlog(logx)}\left[\log(logx) + x \cdot \frac{1}{logx} \cdot \frac{1}{x}\right] =$

$= (logx)^x \left[\log(logx) + \frac{1}{logx}\right]$

Esercizi

*22) $f(x) = x^{logx}$

*23) $f(x) = (x+1)^{1-x}$

24) $f(x) = (x)^{\sqrt{x}}$

*25) $f(x) = \left(\frac{2x}{x+1}\right)^{x^2}$

26) $f(x) = x^{sinx}$

27) $f(x) = (x^2 + 2x)^{x+2}$

28) $f(x) = (arctgx)^x$

29) $f(x) = x^{e^x}$

30) $f(x) = x^{x^2-1}$

31) $f(x) = (e^x + 1)^x$

Soluzioni

***1. S.** $-2xcos(-x^2+1)$; ($sint$, $t = -x^2 + 1$, $f'(x) = cos(-x^2 + 1) \cdot (-2x)$ …);
***2. S.** $\pi\left(1 + tg^2(\pi x)\right)$; (tgt , $t = \pi x$, $f'(x) = (1 + tg^2(\pi x)) \cdot \pi$ …) ;
***3. S.** $\frac{1-2x}{x-x^2}$; ($logt$, $t = x - x^2$, $f'(x) = \frac{1}{x-x^2} \cdot (1-2x)$ …) ;
***4. S.** $2cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)(-1) = cos2x$;
(cos^2t , $t = \frac{\pi}{4} - x$, $f'(x) = 2cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \left(-sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) \cdot (-1)$ …);
***5. S.** $\frac{e^{\sqrt{x}-2}}{2\sqrt{x}}$ **;** (e^t , $t = \sqrt{x} - 2$, $f'(x) = e^{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ …);
***6. S.** $\frac{3}{2cos^2(3x)\sqrt{tg(3x)}}$; ($\sqrt{t}$, $t = tgz$, $z = 3x$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{tg(3x)}} \cdot \frac{1}{cos^2(3x)} \cdot 3$ …) ;
7. S. $\frac{cosx+3sin3x}{sinx-cos3x}$; ***8. S.** $-\frac{1}{x^2+x}$; ($logt$, $t = \frac{x+1}{x}$, $f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{x-(x+1)}{x^2}$ …) ;
***9. S.** $-\frac{2xe^{-x^2}}{1+e^{2x^2}}$; ($arctgt$, $t = e^z$, $z = -x^2$, $f'(x) = \frac{1}{1+e^{-2x^2}} \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$…) ;
10 S. $\frac{2}{\sqrt{1-(5-2x)^2}}$ **;**
***11. S.** $-2e^{-x^2}(xcos2x + sin2x)$;

(prodotto di due funzioni entrambe composte : $De^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$,
$Dcos2x = -2sin2x$, $f'(x) = De^{-x^2} \cdot cos2x + e^{-x^2} \cdot Dcos2x$…);

***12. S.** $\frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}e^{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}}{2x(1-x)}$; ($e^t, t=\sqrt{z}\,, z=\frac{x}{x-1}$, ...) ; ***13. S.** $\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}$; (tenere conto che $De^{3x}=3e^{3x}$) ;

***14. S.** $\frac{sin\sqrt{x}+\sqrt{x}.cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; ($D\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $Dsin\sqrt{x}=cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ...) ;

***15. S.** $\frac{-3}{cos6x\sqrt{log\left(tg\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right)}}$; ($\sqrt{t}$, $t=logz$, $z=tgh$, $h=\frac{\pi}{4}-3x$,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{log\left(tg\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right)}}\cdot\frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)}\cdot\frac{1}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)}\cdot(-3)\ ...);$$

***16. S.** $ctg2x$; ($logt$, $t=\sqrt{z}$, $z=sinh$, $h=2x$ ...) ;

***17. S.** $\frac{3x^2}{(x^3+1)log(x^3+1)}$; ($logt$, $t=logz$, $z=x^3+1$, $f'(x)=\frac{1}{log(x^3+1)}\cdot\frac{1}{x^3+1}\cdot(3x^2)$ ...) ;

18. S. $2xsin(x^2-1)+2x^3cos(x^2-1)$;

***19. S.** $\frac{x}{(1+x^4)arctgx^2}$; ($logt, t=\sqrt{z}$, $z=arctgh$, $h=x^2$ ...) ;

***20. S.** $f(g(x))=cosx^2$, $\mathrm{D}f(g(x))=-2xsinx^2$; $g(f(x))=cos^2x$, $\mathrm{D}g(f(x))=-sin2x$;

***21. S.** $f(g(x))=arctg\sqrt{x}$, $\mathrm{D}f(g(x))=\frac{\sqrt{x}}{2x(1+x)}$;

$g(f(x))=\sqrt{arctgx}$, $\mathrm{D}g(f(x))=\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$;

***22. S.** $x^{logx}\left[\frac{2}{x}logx\right]$;

$$\Big(Dx^{logx}=De^{logx^{logx}}=De^{(logx)\cdot(logx)}=e^{(logx)\cdot(logx)}\cdot D\big((logx)\cdot(logx)\big)=$$
$$=x^{logx}\left(\frac{1}{x}logx+\frac{1}{x}logx\right)\Big);$$

***23. S.** $(x+1)^{1-x}\left[-log(x+1)+\frac{1-x}{x+1}\right]$;

$\left(D\left(x+1\right)^{1-x}=De^{\log(x+1)^{1-x}}=De^{(1-x)\cdot\log(x+1)}=e^{(1-x)\cdot\log(x+1)}\cdot D\big((1-x)\cdot\log(x+1)\big)=\right.$
$\left...\right)$;

24. S. $(x)^{\sqrt{x}}\left[\frac{logx+2}{2\sqrt{x}}\right]$;

***25. S.** $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{x^2}\left[2xlog\left(\frac{2x}{x+1}\right)+\frac{x}{x+1}\right]$;

$$\left(D\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{x^2}=De^{\log\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{x^2}}=De^{x^2log\frac{2x}{x+1}}=e^{x^2log\frac{2x}{x+1}}\cdot D\left(x^2log\frac{2x}{x+1}\right)=\cdots.\right);$$

26. S. $x^{sinx}\left[cosx\cdot logx+\frac{sinx}{x}\right]$; **27. S.** $(x^2+2x)^{x+2}\left[log(x^2+2x)+\frac{2(x+1)}{x}\right]$;

28. S. $(arctgx)^x\left[log(arctgx)+\frac{x}{(1+x^2)arctgx}\right]$; **29. S.** $e^x\cdot x^{e^x}\cdot\frac{xlogx+1}{x}$;

30. S. $x^{x^2-2}(2x^2logx+x^2-1)$; **31. S.** $(e^x+1)^{x-1}[(e^x+1)log(e^x+1)+xe^x]$;