2. La sfera

$$Equazione\ della\ sfera\ di\ centro\ C\ (\alpha;\ \beta;\ \gamma)\ e\ raggio\ r$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$

$$Se\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\ \ e\ \ a^2+b^2+c^2-4d \geq 0,$$

$$l'equazione$$

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

$$rappresenta\ una\ sfera\ di\ centro\ C\ e\ raggio\ r\ uguali\ a:$$

$$C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right) \qquad r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d}$$

Esercizi

Scrivere l'equazione della sfera di centro C e raggio r :

1. $C(0;0;0)$, $r=4$
2. $C(4;-2,1), r=\sqrt{2}$
3. C $(1;-3;4)$, $r=\sqrt{22}$
4. C (0;2; -1) , $r=2$

Stabilire se le seguenti equazioni rappresentano una sfera e, in caso affermativo, determinarne centro C e raggio r:

5. $x^2+y^2+z^2-4x+2y+1=0$
6. $x^2+y^2+z^2-2x-6y-2z+15=0$
7. $x^2+y^2-z^2-4x+3y+5z+3=0$
8. $4x^2+4y^2+4z^2-4x-12y+4z+7=0$

Piano tangente a una sfera data in un suo punto

Esempio

Determinare l'equazione del piano tangente alla sfera

$$x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z-28=0$$

nel suo punto $A(3;1;2)$.

La sfera ha centro $C(-2;1;-1)$, il piano cercato è perpendicolare in A alla retta CA. Il vettore $\overrightarrow{CA}=(5;0;3)$ è il vettore direttore della retta CA , pertanto il fascio di piani perpendicolari a $\overrightarrow{CA}$ ha equazione del tipo

$$5x+3z+t=0$$

Imponendo il passaggio per A si ottiene l'equazione del piano cercato:

$$5x+3z-21=0$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Determinare l'equazione del piano α *tangente a una sfera S in un suo punto*

9. S: $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-8=0$ $\quad A(0;1;-1)$

10. S: $x^2+y^2+z^2-2y+2z-4=0$ $\quad A(-2;2;0)$

11. S: $x^2+y^2+z^2-6x-4y-8z+20=0$ $\quad A(1;1;2)$

12. S: $x^2+y^2+z^2+8y+2=0$ $\quad A(-3;-2;1)$

13. Verificare che la sfera di equazione

$$x^2+y^2+z^2-2y+4z=0$$

è tangente nell'origine al piano $y=2z$.

14. Verificare che la sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z = 0$$

è tangente nell'origine al piano $2x - y + z = 0$.

15. Scrivere l'equazione del piano tangente alla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$$

nel suo punto $(3; -2; 0)$

16. Scrivere l'equazione del piano tangente alla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 2 = 0$$

nel suo punto $(0; -1; 1)$

17. Scritta l'equazione della sfera di centro l'origine , determinare l'equazione del piano tangente nel suo punto $\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$.

*18. Determinare le equazioni delle due sfere di raggio $2\sqrt{3}$ e tangenti al piano $\alpha: x - y + z - 1 = 0$ nel suo punto $A(-2; -2; 1)$.

*19. Considerate le sfere di centri $C_1\left(2; \frac{1}{2}; 3\sqrt{2}\right)$ e $C_2\left(3; \frac{3}{2}; 2\sqrt{2}\right)$ di uguale raggio e tangenti esternamente, determinare l'equazione del piano tangente a entrambe nel punto medio di C_1C_2.

Soluzioni

1. S. $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$; **2. S.** $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 2z + 19 = 0$;

3. S. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z + 4 = 0$; **4. S.** $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 1 = 0$;

5. S. $C(2; -1; 0)$, $r = 2$; **6. S.** no ; **7. S.** no ; **8. S.** $C\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $r = 1$;

Piano tangente a una sfera data in un suo punto

9. S. $\alpha: x - 3y + 2z + 5 = 0$; **10. S.** $\alpha: 2x - y - z + 6 = 0$;

11. S. $\alpha: 2x + y + 2z - 7 = 0$; **12. S.** $\alpha: 3x - 2y - z + 6 = 0$; **15. S.** $2x - 2y - z - 10 = 0$;

16. S. $x + 3y + z + 2 = 0$; **17. S.** $4x + 2y + 4z - 9 = 0$;

***18. S.** i centri delle due sfere appartengono alla retta r perpendicolare al piano α in A:

$$\text{retta } r: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t - 2 \\ z = t + 1 \end{cases};$$

determiniamo i punti di r che hanno distanza $2\sqrt{3}$ da A , cioè $\overline{CA}^2 = 12 \Rightarrow$

$(t - 2 + 2)^2 + (-t - 2 + 2)^2 + (t + 1 - 1)^2 = 12 \;\Rightarrow\; t = \pm 2$; i due centri

sono $C_1(0; -4; 3)$ e $C_2(-4; 0; -1)$ e le rispettive circonferenze :

$x^2 + y^2 + z^2 + 8y - 6z + 13 = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 2z + 5 = 0$;

***19. S.** $2x + 2y - 2\sqrt{2}\,z + 3 = 0$; (il piano cercato passa per il punto medio di C_1C_2 cioè per $M\left(\frac{5}{2}; 1; \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$ ed è perpendicolare al vettore $\overrightarrow{C_1C_2} = \left(1; 1; -\sqrt{2}\right)$ (vedi fig. es.19), quindi ha equazione:

$1 \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) + 1 \cdot (y - 1) - \sqrt{2} \cdot \left(z - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; 2x + 2y - 2\sqrt{2}\,z + 3 = 0$);

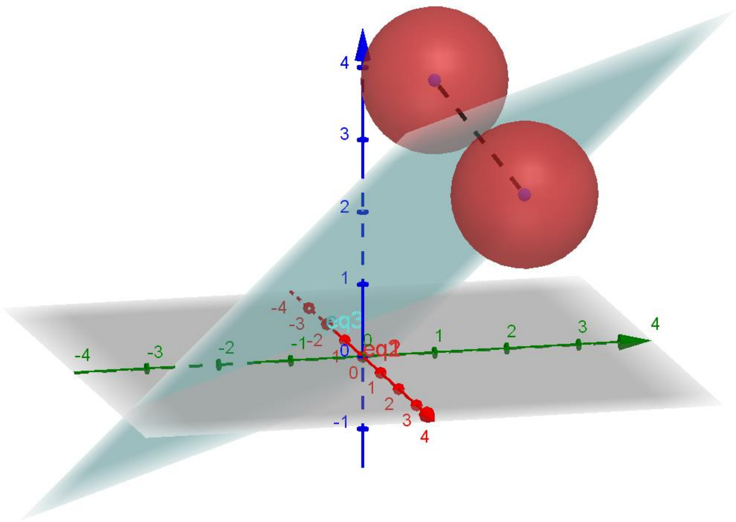

Fig. es. 19