8. Massimi e minimi vincolati – Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Per determinare il minimo o il massimo di una funzione

$$z = f(x; y)$$

nell'insieme dei punti $(x; y)$ sottoposti a un **vincolo**, consistente nel verificare la condizione

$$g(x; y) = 0$$

si applica il seguente **metodo dei moltiplicatori di Lagrange:**

- si considera la funzione

$$F(x; y) = f(x; y) + \lambda g(x; y)$$

- si risolve il sistema

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ g(x; y) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0 \\ f_y + \lambda g_y = 0 \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$$

i punti $(x; y)$ di minimo o massimo della funzione $z = f(x; y)$, vincolati dalla condizione $g(x; y) = 0$ sono tra le soluzioni del sistema.

Se la condizione $g(x; y) = 0$ è esplicitabile rispetto a una delle due variabili , ad esempio la y, si può sostituire la funzione di x ottenuta nella funzione $f(x; y)$, ottenendo così una funzione della sola variabile x e si procede come già studiato per trovare i massimi e minimi per le funzioni in una variabile.

Esempi

1. Per determinare il minimo o il massimo della funzione $z = f(x; y) = 2x + 2y - 1$ sulla circonferenza

$x^2 + y^2 = 1$ consideriamo la funzione

$$F(x; y) = 2x + 2y - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

E risolviamo il sistema

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ g(x; y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \pm\sqrt{2} \\ x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Poiché $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2} - 1$ e $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} - 1$, la funzione $f(x; y)$ assume valore minimo $-2\sqrt{2} - 1$ in $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e valore massimo $2\sqrt{2} - 1$ in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. Per determinare il minimo o il massimo della funzione

$$z = f(x; y) = x^3 - y^2 \qquad \text{con il vincolo} \qquad 2x + y - 1 = 0$$

ricaviamo $y = 1 - 2x$ e sostituiamo nella $f(x; y)$. Si ottiene:

$$z(x) = x^3 - (1 - 2x)^2$$

funzione della sola x. Si ha:

$$z'(x) = 3x^2 + 4(1 - 2x) = 3x^2 - 8x + 4$$

Da cui

$$z'(x) = \begin{cases} < 0 \ \ per\ \frac{2}{3} < x < 2 \\ = 0 \ \ per\ x = \frac{2}{3}\ oppure\ x = 2 \\ > 0 \ \ per\ x < \frac{2}{3} \ \ oppure\ x > 2 \end{cases}$$

Se ne deduce che

- $x = \frac{2}{3}$ è un punto di massimo relativo per $z(x)$ e $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$ è il punto di massimo relativo per $z = f(x; y)$ e il massimo vale $M = f\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}$;
- $x = 2$ è un punto di minimo relativo per $z(x)$ e $x = 2$, $y = -3$ è il punto di minimo relativo per $z = f(x; y)$ e il minimo vale $m = f(2; -3) = -1$.

Esercizi

Gli esercizi con asterisco sono avviati

Determinare gli eventuali massimi e minimi delle seguenti funzioni sul vincolo a fianco indicato:

1. $\boldsymbol{f(x; y)} = x^2 + 2y^2 - 4$ con la condizione $x + y - 2 = 0$

2. $f(x; y) = x^3 y$ con la condizione $y = x^2 - 2x + 1$

3. $f(x; y) = x^2 + xy + x - 2y$ con la condizione $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$

4. $\boldsymbol{f(x; y)} = \frac{x-y}{x+y}$ con la condizione $xy + x - 4 = 0$

5. $\boldsymbol{f(x; y)} = log(2x - 3y^2)$ con la condizione $x - 2y - 4 = 0$

6. $\boldsymbol{f(x; y)} = e^{4x^2 - y}$ con la condizione $x + xy - 1 = 0$

7. $\boldsymbol{f(x; y)} = 4x + 8y - 1$ con la condizione $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$

8. $f(x; y) = x - y + 5$ con la condizione $x^2 + y^2 = 2$

***9.** $f(x; y) = x^2 + y^2 - 1$ con la condizione $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$

Soluzioni

1. S. minimo = $-\frac{4}{3}$ per $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{2}{3}$;

2.S. massimo $= \frac{108}{3125}$ in $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{25}\right)$; minimo $= 0$ in $(0; 1)$ e $(1; 0)$;

3. S. massimo $= 2$ in $(0; -1)$; minimo $= \frac{50}{27}$ in $\left(\frac{2}{3}; -\frac{5}{9}\right)$;

4. S. massimo = $\frac{17}{15}$ per $x = 8$, $y = -\frac{1}{2}$;

5. S. massimo = $\log\frac{28}{3}$ per $x = \frac{16}{3}$, $y = \frac{2}{3}$;

6. S. minimo = e^4 per $x = -\frac{1}{2}$, $y = -3$;

7. S. minimo = $-4\sqrt{3} - 1$ per $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; massimo = $4\sqrt{3} - 1$ per $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

8. S. massimo $= 7$ in $(1; -1)$, minimo $= 3$ in $(-1; 1)$

*9.**S.** massimo $= 0$ in $(1; 0) \vee (-1; 0)$; minimo $= -\frac{3}{4}$ in $\left(0; \frac{1}{2}\right) \vee \left(0; -\frac{1}{2}\right)$;

(si ha $x^2 = -4y^2 + 1 \rightarrow y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, sostituendo nella f si ottiene : $h(y) = -3y^2$ con $y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Si ricava che il massimo si ottiene per $y = 0$, da cui $x = \pm 1$, il minimo agli estremi dell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, cioè nei punti $\left(0; \frac{1}{2}\right) \vee \left(0; -\frac{1}{2}\right)$)