6. Risoluzione di un sistema lineare

I due teoremi di Cramer e Rouché-Capelli sono fondamentali per la risoluzione di un sistema lineare. Infatti:

- **se il sistema è "quadrato" , cioè il numero di equazioni è uguale al numero delle incognite, e risulta det(A)≠0, il sistema è determinato** , qualunque siano i termini noti. In particolare se il sistema è omogeneo l'unica soluzione è $x_1 = x_2 =\ldots= x_n = 0$, se non è omogeneo la soluzione si calcola utilizzando il teorema di Cramer.

- Se il sistema non verifica le ipotesi precedenti occorre stabilire se il sistema sia o meno compatibile confrontando r(A) con r(B) .

Se r(A)≠r(B) il sistema è incompatibile, cioè non ha soluzioni.

Se r(A)=r(B) il sistema è compatibile e occorre trovare le soluzioni. In questo caso sia r(A)=r, ciò vuol dire che dalla matrice A è possibile estrarre un minore di ordine r non nullo. Distinguiamo due casi:

a) **Se r(A)=r=numero delle incognite**, consideriamo <u>solo le r equazioni che riguardano le r righe del minore di ordine r non nullo</u>, ottenendo così un sistema di r equazioni in r incognite con determinante ≠0, quindi risolubile con il teorema di Cramer.

Esempio 1.

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

e la matrice incompleta A e la matrice completa B

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Risulta r(A)=3 poiché è non nullo il minore formato dalle prime tre righe e dalle tre colonne

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12$$

e r(B)=3 perché det(B)=0 (in questo caso si può osservare che la 4ª riga è la somma della 1ª e 3ª riga). Perciò risolviamo il sistema formato dalle prime tre equazioni:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Cramer si ottiene la terna soluzione

$$x_1 = 1, \;\; x_2 = 2, \;\; x_3 = -1$$

b) **Se r(A)=r<numero delle incognite**, consideriamo solo le r equazioni che riguardano le r righe e le r colonne del minore di ordine r non nullo, e diamo alle incognite eccedenti valori arbitrari λ, μ ecc. Le soluzioni saranno funzione di tali valori λ, μ ecc.

Esempio 2.

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 5x_1 + x_2 - 6x_3 = -1 \end{cases}$$

e la matrice incompleta A e la matrice completa B

$$A=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & -4 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & -1 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Risulta det(A)=0 e r(A)=2 poiché è non nullo per esempio il minore formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne.

Anche r(B)=2, in quanto sono nulli tutti i minori di ordine 3.

Consideriamo perciò il sistema formato dalle prime due equazioni nelle incognite x_1 e x_2. Posto $x_3 = \lambda$, il sistema diventa

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 + 4\lambda \\ 2x_1 - x_2 = -1 + \lambda \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $x_1 = \lambda - \frac{2}{7}$, $x_2 = \lambda + \frac{3}{7}$.

La terna $x_1 = \lambda - \frac{2}{7}$, $x_2 = \lambda + \frac{3}{7}$, $x_3 = \lambda$ fornisce al variare di λ le ∞^1 soluzioni del sistema dato.

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Dopo aver stabilito la compatibilità del sistema confrontando i ranghi delle matrici incompleta $r(A)$ e completa $r(B)$, calcolare le eventuali soluzioni:

1. $\begin{cases} 2x-4y=1 \\ x-2y=3 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x-y+z=1 \\ 8x-y-3z=5 \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x-4y+2z=1 \\ x-2y+3z=5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-4y+3z=-2 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 3x+y+z=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+2y-z=-1 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 2x-y+3z=4 \\ 3x-3y+4z=3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x-y+z=2 \\ -2x-y+4z=-3 \\ x-2y+5z=-1 \end{cases}$ ***10.** $\begin{cases} 4x+2y=3 \\ x-5y=-1 \\ 2x+12y=5 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 5x-y=0 \\ x+2y=1 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$ ***12.** $\begin{cases} x-5y=1 \\ 2x-y=0 \\ 3x-6y=1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x-5y+3z=0 \\ 5x-10y+5z=1 \\ x-2y-z=0 \\ 2x-y+4z=1 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x-y-3z=4 \\ x-5y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 4x-y-z=0 \end{cases}$

Sistemi omogenei

15. $\begin{cases} x-4y+5z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x-y-5z=0 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} -x-2y+z=0 \\ x+y+2z=0 \\ 3x-4y-z=0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+8y+3z=0 \\ x-3y=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 2x+2y-z=0 \\ x-y+4z=0 \\ 5x-y+11z=0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} -x+y+z=0 \\ x+2y+2z=0 \\ 3x-y-z=0 \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y+z=0 \\ x-3y-z=0 \end{cases}$;

21. $\begin{cases} x+8y+3z=0 \\ -x+3y=0 \\ 5x-4y+3z=0 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \\ -x+5y-9z=0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x-8y+z=0 \\ 3x-2y+14z=0 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x-4y+7z+t=0 \\ 2x-y-z=0 \\ 3x+2y-t=0 \\ x+y+z-t=0 \end{cases}$

Sistemi parametrici

***25**. $\begin{cases} x-ky+z=k \\ 3x+y+z=1 \end{cases}$ ***26**. $\begin{cases} x+ky+z=1 \\ (k-1)x-(k-1)y=0 \\ x+y+kz=1 \end{cases}$

***27**. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(k+2)z=1 \\ x+ky+3z=2 \end{cases}$ ***28**. $\begin{cases} 2x+ky-z=1 \\ kx-3y+2z=-2 \\ 5x+13y-10z=1 \end{cases}$

***29**. $\begin{cases} 3x-ky+z=0 \\ 2x-y+kz=1 \\ -2x+4y-(k+1)z=-1 \end{cases}$ ***30**. $\begin{cases} (k-1)x+y-2z=1 \\ kx+3y-z=-1 \\ x-y-z=3 \end{cases}$

***31.** $\begin{cases} x+3y-z=2k \\ x+y-kz=1 \\ 2x-ky+z=7 \end{cases}$ ***32**. $\begin{cases} x+2y-z=k \\ 3x-ky+z=-1 \\ x+ky=-2 \end{cases}$

***33**. $\begin{cases} -x+(k-1)y+z=2 \\ x-y-2kz=-1 \\ x-y+2z=-k \end{cases}$ ***34**. $\begin{cases} 2x+(1-k)y+z=4 \\ x+y+kz=2 \\ x-2y+kz=2 \end{cases}$

***35**. $\begin{cases} kx+y=2 \\ 3x-y-kz=1 \\ x+3y+2kz=0 \end{cases}$ ***36.** $\begin{cases} 2y=-k \\ -2x+3y-z=0 \\ 4x-6y+2z=k^2-1 \end{cases}$

***37**. $\begin{cases} x+y+kz=6 \\ x+ky+z=0 \\ kx+y+z=h \end{cases}$ **38**. $\begin{cases} x-ky+z=1 \\ x+2y+z=k \\ 2x-y+kz=1 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x-ky+z=2+k \\ 2x-(k-1)y=7 \\ kx-2y+z=4k \end{cases}$ **40**. $\begin{cases} kx-2y+z=3 \\ x+y-z=1-k \\ (k+2)x-z=5-2k \end{cases}$

41. $\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ kx-4y+4z=2 \\ 3x-2(k+1)y+3kz=6 \end{cases}$ **42**. $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x-y=3 \\ x-y=k-1 \end{cases}$

43. $\begin{cases} 4x+(k-1)y=3 \\ x+ky=1 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ **44**. $\begin{cases} 3x+3y-2z=4 \\ x-y=0 \\ x+y-kz=3 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x-4y+2z=-8 \\ 3x+y-z \ \ =3 \\ 2x+y+kz=-3 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x-2y+z=3(1-k) \\ x+y+z=3k \\ 4x-7y=k \\ x-2y-z=0 \end{cases}$

47. $\begin{cases} 3x+2y+(1-k)z=7 \\ x+2y+2z=3 \\ 2x+y+z=6 \\ 2x+6y+(1-2k)z=-1 \end{cases}$

Sistemi omogenei parametrici

***48.** $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-y+kz \ \ =0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$

***49.** $\begin{cases} 4x-y+z=0 \\ x-(k-1)y+2z \ \ =0 \\ kx-y-z=0 \end{cases}$

***50.** $\begin{cases} x-2y+kz=0 \\ 3x-ky+z \ \ =0 \\ 3x+y+z=0 \end{cases}$

***51.** $\begin{cases} 5x-2y-kz=0 \\ x-2z \ \ =0 \\ kx-y=0 \end{cases}$

Soluzioni

1. S. $r(A)$ =1, $r(B)$ =2. Il sistema è incompatibile;

2. S. $r(A)= r(B) = 2.$ Il sistema è compatibile: $x=k+1 \wedge y=k \wedge z=k$,cioè $(k+1;k;k)$; (∞^1 soluzioni)

3.S. $r(A)= r(B) = 2.$ Il sistema è compatibile $(k+1;5k+3;k)$; (∞^1 soluzioni);

4.S. $r(A)= r(B) = 2.$ Il sistema è compatibile $\left(-4k+9;2-\frac{k}{2};k\right)$; (∞^1 soluzioni)

5.S. $r(A)= r(B) = 2.$ Il sistema è compatibile $\left(1-\frac{k}{4};\frac{5}{8}k+1;k\right)$; (∞^1 soluzioni);

6. S. $r(A)= r(B) = 2.$ Il sistema è compatibile $\left(-\frac{3t}{5};\frac{4t+5}{5};t\right)$; (∞^1 soluzioni) ;

7.S. $r(A)= r(B) = 2.$ Il sistema è compatibile $\left(\frac{1-3t}{5};\frac{4t-3}{5};t\right)$; (∞^1 soluzioni);

8. S. (det(A) = 0 ; r(A) = r (B) = 2, ∞^1 soluzioni) ; $\left(\frac{9-5t}{3};\frac{6-t}{3};t\right)$;

9. S. (det(A) = 0 ; r(A) = r (B) = 2, ∞^1 soluzioni) ; $\left(\frac{3t+5}{5};\frac{14t+5}{5};t\right)$;

***10.S.** $\left(\frac{13}{22};\frac{7}{22}\right)$; r(A) = r (B) = 2 , è sufficiente osservare che la terza equazione è una combinazione lineare delle prime due (la 3ª si ottiene sottraendo dalla 1ª riga la 2ªriga moltiplicata per 2); il sistema è determinato ;

11. S. nessuna soluzione $r(A) = 2, r(B) = 3$; il sistema è incompatibile;

***12.S.** $r(A) = r(B) = 2.$ (la terza equazione è la somma delle prime due), il sistema è determinato $\left(-\frac{1}{9};-\frac{2}{9}\right)$;

13.S. $r(A) = r(B) = 3.$ Il sistema è compatibile e determinato; risolto il sistema formato da tre delle equazioni date si ottiene $x = \frac{11}{30}; y = \frac{2}{15}; z = \frac{1}{10}$

14.S. $r(A) = 3, r(B) = 4.$ Il sistema è incompatibile.

Sistemi omogenei

15. S. det(A)$\neq 0$, perciò il sistema ha l'unica soluzione (0;0;0)

16.S. det(A)$\neq 0$; (0;0;0) **17. S.** det(A)$\neq 0$); (0;0;0)

18.S. det(A)=0 , r(A)=2, $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni $\left(\alpha; -\frac{9}{7}\alpha\ ; -\frac{4}{7}\alpha\right)$;

19.S. $\det(A) = 0, r(A) = 2$, $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni $(0; -t; t)$;

20.S. $\det(A) = 0, r(A) = 2$, $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzion $(-2t; -t; t)$;

21.S. $\det(A) = 0, r(A) = 2$, $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni $\left(-\frac{9}{11}t; -\frac{3}{11}t; t\right)$;

22.S. $\det(A) = 0, r(A) = 2$, $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni $\left(-\frac{11}{4}t; \frac{5}{4}t; t\right)$;

23. S. det(A)=0 , r(A)=2 ; ∞^1soluzioni.$\left(-\frac{11}{2}\alpha\ ; -\frac{5}{4}\alpha; \alpha\right)$;

24. S. det(A)$\neq 0$; il sistema ha l'unica soluzione (0;0;0);

Sistemi parametrici

***25. S.** Considerato il minore $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ della matrice dei coefficienti, posto $y = \alpha$, il sistema diventa. $\begin{cases} x + z = k + k\alpha \\ 3x + z = 1 - \alpha \end{cases}$, da cui , risolvendo, si hanno ∀k ∞^1soluzioni:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}k(1+\alpha); y = \alpha; z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}k(1+\alpha)$$

***26. S**. det(A)= $-k^3 + 3k - 2 = -(k-1)^2(k+2).$ Se $k \neq -2\ e\ k \neq 1$ il sistema è determinato $x = y = z = \frac{1}{k+2}$; se $k = -2$ è incompatibile; se $k = 1$ ha ∞^2soluzioni $(\alpha; \beta; 1 - \alpha - \beta)$

***27.S**. det(A)= $-k^2-k+6=-(k+3)(k-2)$. Se $k\neq 2$ e $k\neq -3$ il sistema è determinato e ha soluzione: $x=1; y=\frac{1}{k+3}; z=\frac{1}{k+3}$; se $k=2$ il sistema ha ∞^1soluzioni $(5\alpha; 1-4\alpha; \alpha)$;
se $k=-3$ il sistema è incompatibile.

***28.S.** $\det(A)=10k^2-3k-7$;

se $k\neq -\frac{7}{10}\wedge k\neq 1$ si ha una soluzione : $\left(\frac{9(3-2k)}{10k^2-3k-7}; \frac{9(k+4)}{10k^2-3k-7}; -\frac{k^2-3k-61}{10k^2-3k-7}\right)$;

se $k=-\frac{7}{10}\vee k=1 \Rightarrow r(A)=2, r(B)=3 \Rightarrow$ nessuna soluzione ;

***29. S.** $\det(A)=9-11k$; se $k\neq \frac{9}{11}\Rightarrow$ una soluzione : $\left(\frac{k-3}{11k-9}; \frac{3}{11k-9}; \frac{9}{11k-9}\right)$;

se $k=\frac{9}{11}\Rightarrow r(A)=2, r(B)=3 \Rightarrow$ nessuna soluzione ;

***30.S.** $\det(A)=9-k$; $k\neq 9\Rightarrow$una soluzione :$\left(\frac{8}{9-k}; \frac{k+7}{k-9}; \frac{4(3-k)}{k-9}\right)$;

se $k=9 \Rightarrow r(A)=2, r(B)=3 \Rightarrow$ nessuna soluzione ;

***31. S.** $\det(A)=-k(k+5)$; $k\neq -5\wedge k\neq 0\Rightarrow$una soluzione :
$\left(\frac{2(k^3+9k-2)}{k(k+5)}; \frac{4k^2-5k+4}{k(k+5)}; \frac{2k^2+3k+8}{k(k+5)}\right)$;

se $k=-5\vee k=0 \Rightarrow r(A)=2, r(B)=3 \Rightarrow$ nessuna soluzione ;

***32. S.** $\det(A)=2-5k$; se $k\neq \frac{2}{5}\Rightarrow$ una soluzione : $\left(\frac{k^2-3k+4}{5k-2}; \frac{k+7}{2-5k}; \frac{4k^2+3k+10}{2-5k}\right)$

se $k=\frac{2}{5} \Rightarrow r(A)=2, r(B)=3 \Rightarrow$ nessuna soluzione ;

***33. S.** $\det(A)=2(k+1)(2-k)$; se $k\neq -1\wedge k\neq 2 \Rightarrow$ una soluzione :

$\left(\frac{k-5}{2(k+1)(2-k)}-k; \frac{2k^2-5k-1}{2(k+1)(2-k)}; \frac{1-k}{2(k+1)}\right)$;

se $k=-1\vee k=2 \Rightarrow r(A)=2, r(B)=3 \Rightarrow$ nessuna soluzione ;

***34. S.** $\det(A)=6k-3$; per $k\neq \frac{1}{2}$ una soluzione : $x=2\wedge y=0\wedge z=0$ cioè $(2;0;0)$;

se $k=\frac{1}{2}$ allora $r(A)=r(B)=2\Rightarrow$ ∞^1 soluzioni : $x=\frac{4-z}{2}\wedge y=0$ cioè $\left(\frac{4-t}{2}; 0; t\right)$;

***35. S.** $\det(A)=k^2-7k$; se $k\neq 0\wedge k\neq 7$ una soluzione : $\left(0; 2; -\frac{3}{k}\right)$;

se $k=0 \Rightarrow r(A)=2,\ r(B)=3\Rightarrow$ nessuna soluzione ;

se $k=7 \Rightarrow r(A)=2,\ r(B)=2\Rightarrow \infty^1$ soluzioni : $\left(\frac{7t+3}{10}; \frac{-49t-1}{10}; t\right)$;

***36.S.** $\det(A) = 0, r(A) = 2; \quad \forall\, k \neq \mp 1 \Rightarrow r(B) = 3 \Rightarrow$ nessuna soluzione ;

$k = 1 \Rightarrow r(B) = 2 \Rightarrow \infty^1$ soluzioni: $x = \frac{-2z-3}{4} \wedge y = -\frac{1}{2}$ cioè $\left(\frac{-2t-3}{4}; -\frac{1}{2}; t\right)$

$k = -1 \Rightarrow r(B) = 2 \Rightarrow \infty^1$ soluzioni: : $x = \frac{-2z+3}{4} \wedge y = \frac{1}{2}$ cioè $\left(\frac{-2t+3}{4}; \frac{1}{2}; t\right)$;

***37. S.** det(A)= $-k^3 + 3k - 2 = -(k+2)(k-1)^2$, se $k \neq -2 \; e \; k \neq 1$ il sistema è

determinato e ha soluzione: $\left(\frac{h(k+1)-6}{(k-1)(k+2)}; \frac{6-h}{(k-1)(k+2)}; \frac{6(k+1)-h}{(k-1)(k+2)}\right)$;

se $k = -2$ e $h = -6$ il sistema ha ∞^1soluzioni $(\alpha + 4; \alpha + 2; \alpha)$;

se $k = -2$ e $h \neq -6$ il sistema è incompatibile;

se $k = 1$ il sistema è incompatibile $\forall h$.

38.S. Se $k \neq \pm 2$ il sistema ha una sola soluzione $\left(k + \frac{4k-1}{k^2-4}; \frac{k-1}{k+2}; \frac{2k^2-2k+3}{4-k^2}\right)$;

Se $k = -2 \vee k = 2$ il sistema è incompatibile.

39.S. Se $k \neq \pm\sqrt{3}$ il sistema ha una sola soluzione $x = 3 + \frac{2k-3}{k^2-3}; y = \frac{3-k}{k^2-3}; z = \frac{k^3-2k^2-2k+6}{k^2-3}$

Se $k = -\sqrt{3} \vee k = \sqrt{3}$ il sistema è incompatibile.

40.S. det(A)=0 , r(A)=r(B)=2 Il sistema ha ∀k ∞^1soluzioni :

$(\alpha; \alpha(1+k) + k - 4; \alpha(k+2) + 2k - 5)$

41.S Se $k \neq 2$ il sistema ha una sola soluzione $x = 0; y = \frac{3(k-4)}{2(2-k)}; z = \frac{k-5}{2-k}$;

Se $k = 2$ il sistema è incompatibile.

42. S. Se $k \neq 2$ $r(A) = 2$, $r(B) = 3$, quindi il sistema è incompatibile; se $k = 2$ ha la soluzione (1;0)

43.S. Se $k \neq 2$ il sistema è incompatibile; se $k = 2$ ha la soluzione $(\frac{5}{7};\frac{1}{7})$.

44. S. Se $k \neq \frac{2}{3}$ il sistema è determinato e ha soluzione: $x = y = \frac{3-2k}{2-3k}; z = \frac{5}{2-3k}$

Se $k = \frac{2}{3}$ il sistema è incompatibile

45.S. Se $k \neq -\frac{11}{13}$ il sistema è determinato; se $k = -\frac{11}{13}$ il sistema è incompatibile.

46.S. Se $k = 1$ il sistema è determinato, la soluzione è (2;1;0); se $k \neq 1$ è incompatibile

47.S. Se $k = 1$ il sistema è determinato, la soluzione è (3;- 1;1); se $k \neq 1$ è incompatibile

Sistemi omogenei parametrici

***48.S.** det(A)= $-4k-4$. Se $k \neq -1$ il sistema è determinato con l'unica soluzione:

$x = y = z = 0$; se $k = -1$ il sistema ha ∞^1soluzioni $(\alpha; \alpha; \alpha)$

***49.S.** det (A)= $k^2 + k + 2 \neq 0 \forall \mathrm{k}$, il sistema è determinato con l'unica soluzione $x = y = z = 0$.

***50.S.** det(A)= $3k^2 + 2k - 1$. Se $k \neq -1$ e $k \neq \frac{1}{3}$ il sistema è determinato con l'unica soluzione

$x = y = z = 0$; se $k = -1$ il sistema ha ∞^1soluzioni $(\alpha; 4\alpha; -7\alpha)$;

$k = \frac{1}{3}$ il sistema ha ∞^1soluzioni $(\alpha; 0; -3\alpha)$

***51.S.** det(A)=$5k - 10$. Se $k \neq 2$ il sistema è determinato con l'unica soluzione $x = y = z = 0$; se $k = 2$ il sistema ha ∞^1soluzioni $(2\alpha; 4\alpha; \alpha)$.