2. Determinante di una matrice quadrata

a) Ordine 1

Definizione. Data la matrice quadrata **A**= (a_{11}) di ordine 1 si definisce determinante di A il numero reale

$$\det(A)= a_{11}$$

b) Ordine 2

Definizione. Data la matrice quadrata **A** di ordine 2

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si definisce **determinante** di A e si indica con

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

il numero reale

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Per una matrice diagonale

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

si ha det(A) =$a_{11} \cdot a_{22}$, cioè il prodotto degli elementi della diagonale principale.

c) Ordine 3

Data la matrice quadrata **A** di ordine 3

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

consideriamo la tabella che si ottiene aggiungendo alle tre colonne le prime due

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Definizione Si definisce **determinante** la somma dei prodotti relativi alle diagonali discendenti diminuita della somma dei prodotti relativi alle diagonali ascendenti (regola di Sarrus), cioè

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} +$$

$$-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} + -a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}$$

d) Ordine n

Premettiamo le definizioni di **minore complementare** e di **complemento algebrico**

Consideriamo una matrice quadrata A di ordine n e fissiamo un qualsiasi elemento a_{ij}.

Definizione Si definisce **minore complementare** M_{ij} di a_{ij} il determinante di ordine n-1 che si ottiene dalla matrice A sopprimendo la i-esima riga e la j-esima colonna .

Esempio. Data la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

il minore complementare M_{22} di $a_{22} = 1$ è il determinante

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 9$$

il minore complementare M_{32} di $a_{32} = 4$ è il determinante

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -17$$

Definizione Si definisce **complemento algebrico** A_{ij} di a_{ij} il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

cioè

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{se } i+j = numero\ pari \\ -M_{ij} & \text{se } i+j = numero\ dispari \end{cases}$$

Esempio Considerata la matrice A dell'esempio precedente, risulta

$A_{22} = M_{22} = 9$ essendo 2+2 =4 pari

e

$A_{32} = -M_{32} = 17$ essendo 3+2 =5 dispari

Per il calcolo dei determinanti di ordine *n* vale la seguente

Regola di Laplace: Il determinante di una matrice quadrata di ordine *n* è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) qualsiasi per i rispettivi complementi algebrici.

Esempio Calcoliamo il determinante della matrice A

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Sviluppando secondo gli elementi della prima riga, si ha

$$\det(A) = -2 \cdot A_{11} + 4 \cdot A_{13} - A_{14}$$

Essendo

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} \quad A_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

si ha

$$A_{11} = -7 \qquad A_{13} = 7 \qquad A_{14} = 8$$

Quindi det(A)= 34

E' immediato verificare che i casi n=2 e n=3 sviluppati in precedenza rientrano nel caso generale.

Proprietà dei determinanti

Indicando genericamente con linea o una riga o una colonna, valgono le seguenti proprietà:

1. se sono nulli tutti gli elementi di una stessa linea il determinante è nullo
2. se gli elementi di due linee parallele sono uguali o proporzionali il determinante è nullo
3. se si scambiano tra loro due linee parallele il determinante cambia segno
4. se si moltiplicano tutti gli elementi di una stessa linea per un numero il determinante risulta moltiplicato per quel numero
5. se una linea è combinazione lineare di altre linee parallele il determinante è nullo
6. il determinante non cambia se ad una linea si aggiunge una combinazione lineare di elementi di linee parallele
7. se gli elementi di una linea si decompongono in due addendi il determinante è la somma dei due determinanti delle due matrici che hanno nella linea corrispondente i rispettivi addendi
8. il determinante di una matrice e quello della sua trasposta sono uguali

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Calcolare il determinante delle matrici **A** *e* **B** :

***1.** **A** = $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, **B** = $\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Con la regola di Sarrus calcolare i determinanti delle seguenti matrici 3×3 :

2. **A** = $\begin{pmatrix} 8 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 10 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, **B** = $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Calcolare i seguenti determinanti:

3. $a)$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$

4. a) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & -8 \end{vmatrix}$

5. a) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

***6**. *a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ *b) $\begin{vmatrix} -1 & -5 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \\ -4 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

7. a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Soluzioni

***1. S.** det (**A**) = 4 · 6 - (-2) · 1= 26 ; det (**B**) = -5 · 3 – 8 · 2 = - 31;

2. S. det(**A**) = -139 ; det ($\mathbf{B}$)= -109; **3. S.** a)-4; b) - 18 c)14 ;

4. S. a) -10; b) 0 ; c) 14 ; **5. S.** a) 6; b) -5 c) - 61 ;

*__6. S.__ *a) -6; * b) 193 , c) -4 ; (*a) sviluppiamo secondo gli elementi della prima riga e successivamente il determinante del terzo ordine ottenuto secondo gli elementi dell'ultima riga:

$$\det(A) = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \big(-2 \cdot 1 - 0 \cdot (-2)\big) = -6$$

*b) sviluppiamo secondo gli elementi dell'ultima riga tenendo conto che -1 appartiene alla 4^a riga e alla 1^a colonna e 5 appartiene alla 4^a riga e alla 4^a colonna :

$$\det(A) = -1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -5 & -4 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -1 & -5 & -4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

i determinanti del terzo ordine ottenuti possono essere calcolati con la regola di Sarrus … ;

7. S. a) 0; b) 13 ; c) 100 ;