6. Derivate del secondo ordine

Se le derivate parziali $f_x(x;y)$ e $f_y(x;y)$ sono a loro volta derivabili le loro derivate fatte rispetto a x e a y si dicono derivate parziali seconde e si indicano con

$$f_{xx} \qquad f_{xy} \qquad f_{yy} \qquad f_{yx}$$

Esercizi

Per ognuna delle seguenti funzioni calcolare le derivate parziali seconde verificando che in questi casi risulta $f_{xy} = f_{yx}$:

1. $f(x;y) = x^3 - 3xy + y^2$

2. $f(x;y) = 3x^4 - 4x^3y^2$

3. $f(x;y) = 5x - 4x^2y^2 - 7y^3$

4. $f(x;y) = x^3y - 4x^2y^4$

5. $f(x;y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

6. $f(x;y) = \sqrt{x + 2y}$

7. $f(x;y) = \sqrt{3x^2 + y}$

8. $f(x;y) = 2^{x-4y}$

9. $f(x;y) = e^{3x^2+y}$

10. $f(x;y) = log(5x - 4y)$

11. $f(x;y) = log(x^2 + y^2 - 7)$

Soluzioni

1. S. $f_{xx} = 6x$; $f_{xy} = -3$; $f_{yy} = 2$; $f_{yx} = -3$;

2. $\boldsymbol{S}.\, f_{xx}(x;y) = 36x^2 - 24xy^2$; $f_{yy}(x;y) = -8x^3$; $f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y) = -24x^2y$;

3. S. $f_{xx} = -8y^2; f_{xy} = -16xy$; $f_{yy} = -8x^2 - 42y; f_{yx} = -16xy$;

4. $\boldsymbol{S}.\, f_{xx}(x;y) = 6xy - 8y^4$; $f_{yy}(x;y) = -48x^2y^2$; $f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y) = 3x^2 - 32xy^3$;

5. $\boldsymbol{S}.\, f_{xx}(x;y) = \frac{2}{x^3}$; $f_{yy}(x;y) = \frac{2}{y^3}$; $f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y) = 0$;

6. $\boldsymbol{S}.\, f_{xx}(x;y) = -\frac{1}{4(x+2y)\sqrt{(x+2y)}}$; $f_{yy}(x;y) = -\frac{1}{(x+2y)\sqrt{(x+2y)}}$;

$f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y) = -\frac{1}{2(x+2y)\sqrt{(x+2y)}}$;

7. S. $f_{xx} = \frac{3y}{\sqrt{(3x^2+y)^3}}$; $f_{xy} = -\frac{3x}{2\sqrt{(3x^2+y)^3}}$; $f_{yy} = -\frac{1}{4\sqrt{(3x^2+y)^3}}$; $f_{yx} = -\frac{3x}{2\sqrt{(3x^2+y)^3}}$;

8. S. $f_{xx}(x;y) = 2^{x-4y} \cdot log^2 2$; $f_{yy}(x;y) = 16 \cdot 2^{x-4y} \cdot log^2 2$;
$f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y) = -4 \cdot 2^{x-4y} \cdot log^2 2$;

9. S. $f_{xx} = e^{3x^2+y}(36x^2+6)$; $f_{yy} = e^{3x^2+y}$; $f_{xy} = f_{yx} = 6xe^{3x^2+y}$;

10. S. $f_{xx} = -\frac{25}{(5x-4y)^2}$; $f_{xy} = \frac{20}{(5x-4y)^2}$; $f_{yx} = \frac{20}{(5x-4y)^2}$; $f_{yy} = -\frac{16}{(5x-4y)^2}$;;

11. *S*. $f_{xx}(x;y) = \frac{-2x^2+2y^2-14}{(x^2+y^2-7)^2}$; $f_{yy}(x;y) = \frac{2x^2-2y^2-14}{(x^2+y^2-7)^2}$; $f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2-7)^2}$.