5. Funzioni invertibili

Sia f una funzione definita in E e avente codominio C_f.

Definizione
Una funzione $f: E \to C_f$ si dice **biunivoca** o **biiettiva** se ogni elemento di C_f è l'immagine di un solo elemento di E.

Una funzione è biunivoca, quindi, se stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli elementi del dominio E e del codominio C_f.

Se $f: E \to C_f$ è biunivoca ogni retta parallela all'asse x o non interseca il grafico o lo interseca in un solo punto.

Esempi

a) Sono biunivoche le funzioni

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/x \to x^3 \,, \qquad g: [0; +\infty) \to [0; +\infty)/x \to x^2$$

b) Non sono biunivoche le funzioni

$$h: \mathbb{R} \to [0; +\infty)/x \to x^2 \,, \qquad t: \mathbb{R} \to [-1; 1]/x \to sinx$$

Definizione
Data la funzione **biunivoca**

$$f: E \to C_f/x \to f(x) = y$$

si dice **funzione inversa** della funzione f la funzione

$$f^{-1}: C_f \to E/y \to f^{-1}(y) = x$$

che fa corrispondere a ogni $y \in C_f$ l'elemento $x \in E$ tale che $f(x) = y$.

La funzione $f(x)$ e la sua inversa $f^{-1}(y)$ hanno lo stesso grafico.

Se ora scambiamo x con y la funzione

$$f^{-1}: C_f \to E/x \to f^{-1}(x) = y$$

prende ancora il nome di **funzione inversa** della funzione f e il suo grafico è

simmetrico di quello della f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Se la funzione f è invertibile, la sua inversa $x = f^{-1}(y)$ si ottiene, se possibile, risolvendo l'equazione

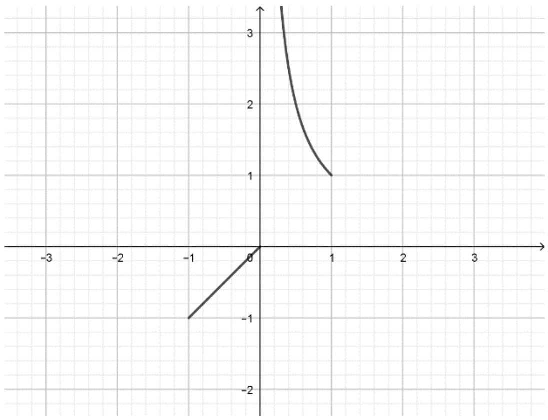
$$y = f(x)$$

rispetto alla variabile x.

Ogni funzione **crescente** o **decrescente** nel dominio è **invertibile**.

Si tenga conto che una funzione può essere invertibile senza essere crescente o decrescente, come ad esempio la funzione definita in E=$[-1; 1]$

$$f(x) = \begin{cases} x & per -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & per\ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$



In tal caso la funzione inversa è:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & per -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & per\ x \geq 1 \end{cases}$$

Esempio

La funzione

$$f(x) = -x^3$$

ha dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$ ed è decrescente, quindi invertibile. La sua inversa $f^{-1}(y)$ ha anch'essa dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$ e si ottiene risolvendo l'equazione

$$y = -x^3$$

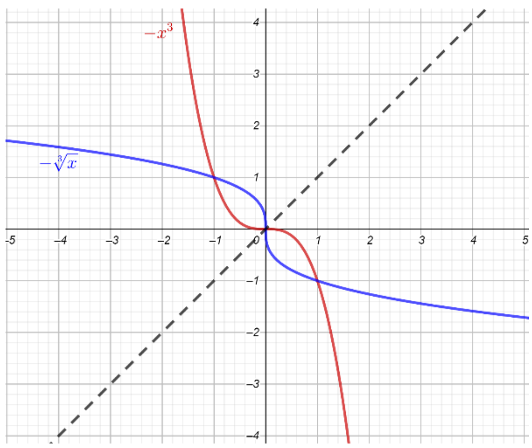
rispetto alla variabile x , pertanto

$$f^{-1}(y) = -\sqrt[3]{y} = x$$

La $f(x)$ e la $f^{-1}(y)$ hanno lo stesso grafico. Scambiando x con y si ottiene la inversa

$$y == -\sqrt[3]{x} = f^{-1}(x)$$

che ha grafico simmetrico di quello della $f(x)$ rispetto alla bisettrice $y = x$.



Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Dopo aver stabilito se le seguenti funzioni sono invertibili, determinare la funzione inversa

1) $f(x) = 2 - 4x$

2) $f(x) = 1 - x^3$

3) $f(x) = x^3 - 3$

4) $f(x) = x^4 - x^2$

5) $f: [0; +\infty) \to \mathbb{R} \,/\, x \to 4 - x^2$

6) $f: (-\infty; 0] \to \mathbb{R} \,/\, x \to 4 - x^2$

7) $f(x) = \frac{1}{2+x}$

*8) $f(x) = \frac{1-4x}{2x+1}$

9) $f(x) = \sqrt[3]{4 - x}$

10) $f(x) = \sqrt{3 + x}$

11) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x^3, & x \geq 0 \end{cases}$

12) $f(x) = e^x - 1$

*13) $f(x) = e^{2x+3}$

14) $f(x) = \log_2(3 - x)$

15) $f(x) = log(2 - x)$

16) $f(x) = \log_2|x|$

*17) $f(x) = \sqrt{1 + logx}$

18) $f(x) = arctg(x - 1)$

Soluzioni

1.S: $E_f = \mathbb{R}$; $C_f = E_{f^{-1}} = \mathbb{R} : f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$;

2. S. $E_f = \mathbb{R}$; $C_f = E_{f^{-1}} = \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1 - x}$;

3.S: $E = \mathbb{R}$; $C_f = E_{f^{-1}} = \mathbb{R} : f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 3}$;

4. S: $E = \mathbb{R}$ non invertibile in $\mathbb{R}$;

5. S. $C_f = E_{f^{-1}} = (-\infty; 4]$; $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}$;

6. S. $C_f = E_{f^{-1}} = (-\infty; 4]$; $f^{-1}(x) = -\sqrt{4 - x}$;

7. S. $E_f = \mathbb{R} - (-2)$; $C_f = E_{f^{-1}} = \mathbb{R} - (0)$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2$;

***8. S**: $E = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; $C_f = E_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{-2\}$: $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x+4}$;(la funzione è decrescente sia in $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ sia in $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ pertanto è invertibile, per ottenere l'inversa risolviamo in x l'equazione $y = \frac{1-4x}{2x+1}$ ottenendo la funzione $x = f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2y+4}$; scambiando x con y si ottiene l'inversa $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x+4}$);

9. S: $E = \mathbb{R}$; $C_f = E_{f^{-1}} = \mathbb{R}$: $f^{-1}(x)=4 - x^3$;

10. S: $E = [-3; +\infty)$; $C_f = E_{f^{-1}} = [0\,; +\infty)$: $f^{-1}(x)=x^2 - 3$;

11. S. $E_f = \mathbb{R}$; $C_f = E_{f^{-1}} = \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x}, & x < 0 \\ -\sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$;

12. S. $E_f = \mathbb{R}$; $C_f = E_{f^{-1}} = (-1; +\infty)$; $f^{-1}(x) = log(x + 1)$;

***13. S**: $E = \mathbb{R}$; $C_f = E_{f^{-1}} = (0; +\infty)$: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(logx - 3)$; (la funzione è crescente quindi invertibile ; risolviamo in x l'equazione $y = e^{2x+3}$ ottenendo $2x + 3 = logy \Rightarrow x = \frac{1}{2}(logy - 3)$ con $y > 0$ e scambiando x con y si ottiene l'inversa $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(logx - 3)$);

14. S: $E = (-\infty; 3)$; $C_f = E_{f^{-1}} = \mathbb{R}$: $f^{-1}(x)=3 - 2^x$

15. S. $E_f = (-\infty; 2)$; $C_f = E_{f^{-1}} = \mathbb{R}$; $f^{-1} = 2 - e^x$;

16. S: $E = \mathbb{R} - \{0\}$ non invertibile in $E = \mathbb{R} - \{0\}$;

***17. S**: $E_f = [e^{-1}; +\infty)$; $C_f = E_{f^{-1}} = [0; +\infty)$: $f^{-1}(x) = e^{x^2-1}$; (la funzione è crescente perchè composta di funzioni crescenti, quindi invertibile; risolvendo l'equazione $y = \sqrt{1 + logx}$ rispetto alla variabile x si ottiene $y^2 = 1 + logx \Rightarrow logx = y^2 - 1 \Rightarrow x = f^{-1}(y) = e^{y^2-1}$, scambiando x con y….);

18. S. $E_f = \mathbb{R}$; $C_f = E_{f^{-1}} = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $f^{-1}(x) = tgx + 1$.