4. Teorema della media

Una delle proprietà dell'integrale definito va sotto il nome di **proprietà della media .**

Teorema della media

Se $f(x)$ è continua in $[a; b]$ allora esiste almeno un punto $c \in [a; b]$ tale che :

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \qquad (*)$$

Il valore $\mu = f(c)$ si chiama **valor medio** di $f(x)$ nell'intervallo $[a; b]$.

Interpretazione geometrica del teorema della media

Se $f(x) \geq 0$ su $[a; b]$ scriviamo la (*) nella forma

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

osserviamo che

- il primo membro rappresenta l'area del trapezoide T delimitato dal grafico di $f(x)$, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$
- il secondo membro rappresenta l'area del rettangolo R di base $(b - a)$ e altezza $f(c)$

quindi il teorema afferma che esiste almeno un punto $c \in [a; b]$ tale che l'area

del trapezoide T è uguale all'area del rettangolo R.

Esempio

Calcolare il valor medio della funzione $f(x) = -x^2 + 4x$ *nell'intervallo* $[0; 4]$.

Per definizione il valor medio della funzione nell'intervallo dato è

$$f(c) = \frac{1}{4-0}\int_0^4 (-x^2 + 4x)\, dx = \frac{1}{4}\left[-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{8}{3}$$

Analiticamente ciò significa che le funzioni $-x^2 + 4x$ e $\frac{8}{3}$ hanno su $[0; 4]$ lo stesso integrale.

Poiché le funzioni $-x^2 + 4x$ e $\frac{8}{3}$ sono maggiori o uguali a zero su $[0; 4]$ possiamo dare la seguente interpretazione geometrica :

hanno la stessa area le regioni definite da (vedi fig. 1)

$$y \leq -x^2 + 4x \qquad 0 \leq x \leq 4$$

$$y \leq \frac{8}{3} \qquad 0 \leq x \leq 4$$

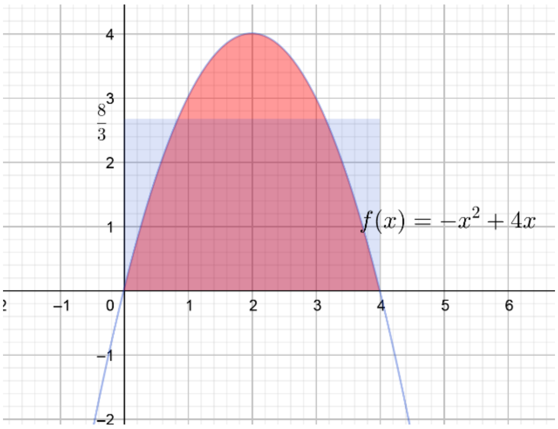

fig.1

Esercizi

Gli esercizi con asterisco sono avviati

Calcolare il valor medio delle seguenti funzioni nell'intervallo a fianco indicato:

*1) $f(x) = sin^2 x \qquad I = [0; \pi]$ 2) $f(x) = x^3 - x^2 \qquad I = [-2; 0]$

3) $f(x) = (x+1)e^{-x} \qquad I = [-1; 0]$ *4) $f(x) = xcosx \qquad I = [-3; 3]$

*5) Calcolare il valor medio μ della funzione $f(x) = \sqrt{4+x}$ nell'intervallo $I = [-3; 5]$. Determinare, poi, il punto $c \in [-3; 5]$ tale che $f(c) = \mu$.

6) Calcolare il valor medio μ della funzione $f(x) = xlog(x+1)$ nell'intervallo $I = [0; 1]$. Possiamo affermare che esiste un punto $c \in [0; 1]$ tale che $f(c) = \mu$?

*7) Determinare t , $t > 0$, affinché risulti uguale a $\frac{2}{3}$ il valor medio della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ sull'intervallo $[0; t]$.

Soluzioni

***1. S.** $\frac{1}{2}$ $;f(c) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sin^2 x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1+cos2x}{2} dx = \frac{1}{2\pi}\left[x + \frac{sin2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$;

2.S. $-\frac{10}{3}$; **3. S.** $e - 2$;

***4. S.** 0 ; (la funzione è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine);

***5.S.** $\frac{13}{6}$; $c = \frac{25}{36}$;($f(c) = \frac{1}{8}\int_{-3}^{5} \sqrt{4+x}\, dx = \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(4+x)^3}\right]_{-3}^{5} = \frac{13}{6}$;

$si\ ha\ \sqrt{4+c} = \frac{13}{6} \Rightarrow c = \frac{25}{36}$;

6.S. $\frac{1}{4}$;(il punto c esiste poiché la funzione è continua in $[0; 1]$ e quindi verifica le ipotesi del teorema della media (vedi fig.2) ;

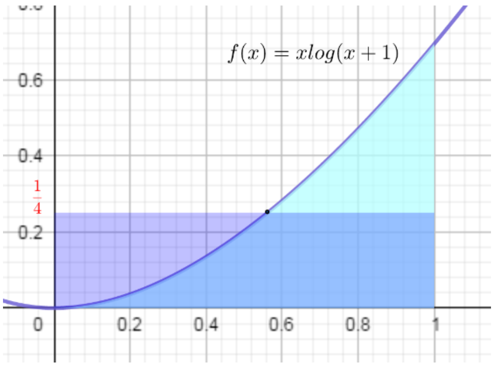

Fig.2

***7.S.** 3 ; (deve essere $\frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \frac{1}{t}\left[2\sqrt{1+x}\right]_0^t = \frac{1}{t}\left(2\sqrt{1+t} - 2\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow ... t^2 - 3t = 0$ cioè $t = 3$, essendo t>0).