2. La funzione integrale – Il teorema di Torricelli-Barrow

Definizione di funzione integrale

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; b]$. Per ogni $x \in [a; b]$ poniamo

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

La funzione $F(x)$ prende il nome di **funzione integrale** della $f(x)$, mentre la funzione $f(x)$ si chiama **funzione integranda**.

Teorema fondamentale del calcolo integrale (Teorema di Torricelli-Barrow)

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a; b]$, la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è derivabile $\forall x \in [a; b]$ e risulta

$$F'(x) = f(x) \qquad F(a) = 0.$$

Quindi il teorema afferma che :

- una funzione $f(x)$ continua in $[a; b]$ ammette primitive
- la funzione integrale $F(x)$ è **una primitiva** della funzione integranda $f(x)$
- $F(x)$ è quella **particolare primitiva che si annulla per** $x = a$.

Regola di calcolo dell'integrale definito

Se $f(x)$ è continua in $[a; b]$ e $\varphi(x)$ è una sua primitiva su $[a; b]$ allora per il calcolo dell'integrale definito vale la seguente formula fondamentale:

$$\int_a^b f(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$$

formula che si scrive anche nella forma

$$\int_a^b f(t)dt = [\varphi(x)]_a^b$$

La primitiva $\varphi(x)$ si determina calcolando l'integrale indefinito:

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + c$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Calcolare i seguenti integrali definiti:

*1) $\int_{-1}^{2} \frac{x}{x^2+1} dx$; *2) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2+3x-1}{1-x} dx$;

*3) $\int_{0}^{\pi} sin^3 x\, dx$ 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) dx$

* 5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) dx$ *6) $\int_{0}^{2\pi} e^{-x} cosx\, dx$

*7) $\int_{0}^{4} |2-x|x^2\, dx$ *8) $\int_{1}^{e^{\frac{\pi}{4}}} \frac{cos(logx)}{x}\, dx$

*9) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2+6x+9}}\, dx$ *10) $\int_{-1}^{1} x \cdot arcsinx\, dx$

*11) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ *12) $\int_{1}^{e} log^2 x\, dx$

*13) $\int_{0}^{1} xlog(2x+1)dx$ 14) $\int_{0}^{1} x^2 log(x+1)dx$

15) $\int_{0}^{1} x^2 arctgx\, dx$ *16) $\int_{0}^{\pi} \frac{sin^3 x}{1+cosx} dx$

*17) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} cosx \cdot cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) dx$ 18) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (sin^3 x + cos^2 x)dx$

19) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (sin^2 x \cdot cos^2 x)dx$ *20) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (sin3x \cdot cosx)dx$

*21) $\int_{-\pi}^{\pi} (sin4x \cdot sen2x)dx$ 22) $\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[5]{(x+2)^3}}\, dx$

23) $\int_{0}^{\pi} \frac{sinx}{2+cosx}\, dx$ 24) $\int_{-1}^{0} \frac{5-x}{1+x^2} dx$

*25) $\int_{1}^{2} \frac{3+x}{x^3-2x^2-3x} dx$ *26) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \cdot cosx + sinx)\, dx$

*27) $\int_{-1}^{1} x \cdot arctgx\, dx$ *28) $\int_{1}^{e^2} logx(logx+1)\, dx$

*29) $\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\, dx$ 30) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^3-3x^2+x-1}{x^2+3x}\, dx$

31) $\int_{0}^{\pi} sinx(sinx+cosx)\, dx$ *32) $\int_{1}^{2} \frac{3-2x}{x^2-4x} dx$

*33) $\int_{0}^{1} x^5 e^{x^3} dx$ *34) $\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2-4x+5}\, dx$

*35) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctg^2 x\, dx$ *36) $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{x^4-1}\, dx$

Soluzioni

***1.S.** $log\sqrt{\frac{5}{2}}$; ($\int_{-1}^{2}\frac{x}{x^2+1}dx = \left[\frac{1}{2}\,log(x^2+1)\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(log5 - log2) = \cdots$) ;

***2. S.** $3log\frac{3}{2} - \frac{5}{2}$; ($\frac{x^2+3x-1}{1-x} = -x - 4 - \frac{3}{x-1}$) ;

***3. S.** $\frac{4}{3}$; ($sin^3x = sinx \cdot sin^2x = sinx(1 - cos^2x)$;

4.S. $\frac{1+\sqrt{3}}{6}$ **;**

***5. S.** $\frac{\pi}{4}$; $cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = cos^2\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right] = \frac{1+cos4\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)\right]dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ldots = \frac{\pi}{4};$$

***6. S.** $\frac{e^{2\pi}-1}{2e^{2\pi}}$; (integrando per parti ($f'(x) = e^{-x}, g(x) = cosx$, $f(x) = -e^{-x}, g'(x) = -sinx$

$\int e^{-x}cosx\,dx = -e^{-x}cosx - \int e^{-x}sinxdx =$

integrando ancora per parti l'ultimo integrale , ponendo $f'(x) = e^{-x}$ e $g(x) = sinx$, si ha

$\int e^{-x}cosxdx = -e^{-x}cosx + e^{-x}sinx - \int e^{-x}cosxdx$

portando l'integrale a primo membro e sommando :

$2\int e^{-x}cosxdx = -e^{-x}cosx + e^{-x}sinx + c' \;\Rightarrow\; \int e^{-x}cosxdx = \frac{1}{2}e^{-x}(sinx - cosx) + c$;

$\int_0^{2\pi} e^{-x}cosx\,dx = \frac{1}{2}[e^{-x}(sinx - cosx)]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi}) = \frac{e^{2\pi}-1}{2e^{2\pi}}$);

***7. S.** 24 ; ($\int_0^2(2-x)x^2\,dx + \int_2^4(x-2)x^2\,dx = \cdots$);

***8.S.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ($\int\frac{cos(logx)}{x}dx = sin(logx) + c$);

***9.S.** $log\sqrt[3]{\frac{8}{5}}$; ($\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{x^2+6x+9}}\,dx\;\int_1^2\frac{1}{x(x+3)}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \cdots..$) ;

***10. S.** $\frac{\pi}{4}$; (per parti($f'(x) = x,\;\; g(x) = arcsinx\,,\;\; f(x) = \frac{1}{2}x^2\;,\;\; g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$\int x \cdot arcsinxdx = \frac{1}{2}x^2arcsinx - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}x^2arcsinx + \frac{1}{2}\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$= \frac{1}{2}x^2arcsinx - \frac{1}{2}arcsinx + \frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}dx$, quindi

$\int_{-1}^{1}x \cdot arcsinx\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2arcsinx - \frac{1}{2}arcsinx\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$

Per calcolare l'ultimo integrale si può osservare che rappresenta l'area $\frac{\pi}{2}$ del semicerchio di centro O(0;0) e raggio 1 posto nel semipiano $y \geq 0$, oppure rivedere esercizio 53 del par,4 o l'esempio 4 del par.5 del capitolo Integrali indefiniti

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}arcsinx + c$);

***11. S.** $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$; ($\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$) ;

***12. S.** $e-2$; (per parti $\int_1^e log^2x\,dx = [xlog^2x - 2xlogx + 2x]_1^e$ …) ;

***13. S.** $\frac{3}{8}log3$; (per parti $\int_0^1 xlog(2x+1)\,dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}\right)\log(2x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_0^1$ …… …) ;

14. S. $-\frac{5}{18} + \frac{2}{3}log2$; **15. S.** $\frac{\pi-2}{12} + \frac{1}{6}log2$;

***16. S.** 2 ; ($\int_0^\pi \frac{sin^3x}{1+cosx}dx = \int_0^\pi \frac{(1+cosx)(1-cosx)sinx}{1+cosx}dx = \int_0^\pi (1-cosx)sinxdx = \left[\frac{(1-cosx)^2}{2}\right]_0^\pi = 2$);

***17. S.** $\frac{\pi}{24}$; ($cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)]$);

18. S. $\boldsymbol{\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}}$; **19. S.** $\frac{\pi}{8}$;

***20. S.** $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **;** ($sin\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)]$ **)** ;

***21. S.** 0; ($sin\alpha \cdot sin\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)]$)

22. S. $\frac{5}{2}\left(\sqrt[5]{16} - \sqrt[5]{9}\right)$; **23.S.** $log3$; **24.S.** $\log\sqrt{2} + \frac{5\pi}{4}$;

***25. S.** $\frac{1}{2}log\frac{3}{16}$; ($\frac{3+x}{x^3-2x^2-3x} = \frac{1}{2(x-3)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x}$);

***26. S.** 0; (basta osservare che la funzione è dispari) ;

***27. S.** $\frac{\pi-2}{2}$; (si osserva che la funzione integranda è pari , quindi $\int_{-1}^1 x \cdot arctgx\,dx =$
$= 2\int_0^1 x \cdot arctgx\,dx$, quindi si integra per parti

$\int x \cdot arctgx\,dx = \frac{1}{2}(x^2+1)arctgx - \frac{x}{2} + c$) ;

***28. S.** $3e^2 - 1$; ($\int_1^{e^2} logx(logx+1)\,dx = [xlog^2x - xlogx - x]_1^{e^2} = \cdots$) ;

***29 .S.** $2log\frac{3}{2}$; ($\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\,dx = \left[2log\left(\sqrt{x}+1\right)\right]_1^4 = \cdots$) ;

30.S. $\frac{59}{3}log2 - \frac{15}{2}$; **31.S.** $\frac{\pi}{2}$;

***32.S.** $log\frac{3}{4}\sqrt[4]{3}$ **;**($\frac{3-2x}{x^2-4x} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-4}$);

***33.S.** $\frac{1}{3}$; ($\int x^5 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int x^3(3x^2 e^{x^3})dx = \frac{1}{3}\left[x^3e^{x^3} - \int 3x^2 e^{x^3}dx\right] + c = \cdots$) ;

***34. S.** $\frac{\pi}{2}$; ($\int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx = arctg(x-2) + c$) ;

***35. S.** $1 - \frac{\pi}{4}$; ($\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctg^2x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-1-ctg^2x+1)\,dx = -[ctgx + x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}$);

***36. S.** $-\frac{\pi}{12}+log\sqrt[4]{2-\sqrt{3}}$; ($\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x^2+1)}$ …).