1. Definizione di derivata

Sia f una funzione definita in $(a;b)$ e siano x_0, $x_0+h \in (a;b)$. Si dicono:

$\Delta x = x - x_0 = (x_0+h) - x_0 = h$ **incremento** di x

$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$ **incremento** della funzione f relativo a x_0 e all'incremento h

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ **rapporto incrementale** della funzione f relativo a x_0 e all'incremento h

Derivata in un punto

Una funzione si dice derivabile nel punto x_0 se **esiste** ed è **finito** il limite del rapporto incrementale nel punto x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Il valore di tale limite si chiama **derivata** della funzione f nel punto x_0 e si indica con

$$f'(x_0)$$

Derivata destra

Se **esiste finito** il limite da destra

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

esso si chiama **derivata destra** della funzione f nel punto x_0 e si indica con

$$f'_+(x_0)$$

Derivata sinistra

Se **esiste finito** il limite da sinistra

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

esso si chiama **derivata sinistra** della funzione f nel punto x_0 e si indica con

$$f'_-(x_0)$$

Una funzione è derivabile in x_0 se e solo se

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Esempio

$f(x) = 1 + x - x^2$ $\qquad x_0 = -2$

La derivata $f'(-2)$ è il limite, se esiste ed è finito , del rapporto incrementale

relativo al punto $x_0 = -2$, pertanto risulta:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \frac{1+(-2+h)-(-2+h)^2-(-5)}{h} = \frac{-h^2+5h}{h} = -h + 5$$

avendo semplificato per $h \neq 0$.

Poiché

$$\lim_{h \to 0}(-h + 5) = 5$$

Si ha

$$f'(-2) = 5$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni nel punto x_0 a fianco indicato:

*1) $f(x) = x^2 - 3x$ $\qquad x_0 = 1$

2) $f(x) = (x + 3)^3$ $\qquad x_0 = -2$

*3) $f(x) = \frac{x}{3-x}$ $\qquad x_0 = 1$

*4) $f(x) = \frac{x-4}{x+1}$ $\qquad x_0 = 0$

5) $f(x) = \frac{x^2-1}{2x}$ $\qquad x_0 = 2$

*6) $f(x) = \sqrt{5 + x}$ $\qquad x_0 = -1$

* 7) $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ $\qquad x_0 = 7$

* 8) $f(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ $\qquad x_0 = \frac{\pi}{6}$

*9) $f(x) = x + sinx$ $\qquad x_0 = 0$

*10) $f(x) = e^{2x+1}$ $\qquad x_0 = 0$

*11) $f(x) = e^{x^2-4}$ $\qquad x_0 = 2$

*12) $f(x) = \frac{1}{logx}$ $\qquad x_0 = 2$

13) $f(x) = \log(4 + 2x)$ $\qquad x_0 = -1$

Soluzioni

1.S. $f'(1) = -1$ **;** $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(1+h)^2-3(1+h)-(-2)}{h} = \frac{h^2-h}{h}; \right.$

$\left. \lim_{h\to 0} \frac{h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0}(h-1) = -1 \right)$; **2. S.** $f'(-2) = 3$; **2. S.** $f'(-2) = 3$;

***3.** S. $f'(1) = \frac{3}{4}$; $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1+h}{3-(1+h)}-\frac{1}{2}}{h} = \frac{3}{2(2-h)} \right.$ con $h \neq 0$,....) ; *** 4. S.** $f'(0) = 5$;

5. S. $f'(2) = \frac{5}{8}$; $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{5+(-1+h)}-2}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \right.$ (razionalizzando con $h \neq 0$) $=$
$= \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \ldots\ldots$); ***6. S.** $f'(1) = \frac{1}{4}$;

$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{5+(-1+h)}-2}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \right.$ (razionalizzando con $h \neq 0$) $= \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \ldots\ldots$);

***7. S.** $f'(7) = \frac{1}{12}$; $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h} = \frac{8+h-8}{h\cdot\left[\sqrt[3]{(8+h)^2}+2\sqrt[3]{8+h}+4\right]} \ldots \right)$;

***8. S.** $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$;

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f\left(\frac{\pi}{6}+h+\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h} = \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-1}{h} = \frac{cos(h)-1}{h} = \frac{(cos(h)-1)(\cos(h)+1)}{h(\cos\ (h)+1)} = -\frac{sin^2 h}{h}, \ldots \right);$$

***9. S.** $f'(0)=2$; $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{h+sinh}{h} \quad \lim_{h\to 0} \frac{h+sinh}{h} = 2 \right)$;

***10. S.** $f'(0) = 2e$; $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{e^{2h+1}-e}{h} = \frac{e\left(e^{2h}-1\right)}{h} = \frac{2e\left(e^{2h}-1\right)}{2h}, \ldots \right)$;

***11. S.** $f'(2) = 4$;

$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{e^{(2+h)^2-4}-1}{h} = \frac{e^{h^2+4h}-1}{h} = \ldots \right.$; ricordare che $e^{h^2+4h}-1 \cong h^2+4h$ per $h \to 0$) ;

***12.S.** $f'(2) = -\frac{1}{2log^2 2}$;

$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{\log(2+h)}-\frac{1}{log2}}{h} = \frac{log2-\log(2+h)}{h\cdot log2\cdot\log(2+h)} = \frac{\frac{1}{h}log\frac{2}{2+h}}{log2\cdot\log(2+h)} \right.$;

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h}log\frac{2}{2+h}}{log2\cdot\log(2+h)} = \frac{1}{log^2 2}\lim_{h\to 0} log\left(\frac{1}{1+\frac{h}{2}}\right)^{\frac{1}{h}} = \left(poich\grave{e}\ log\left(\frac{1}{1+\frac{h}{2}}\right) = -\log\left(1+\frac{h}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{log^2 2}\lim_{h\to 0} log\left(1+\frac{1}{\frac{2}{h}}\right)^{\frac{1}{h}} = \cdots\ldots = -\frac{1}{2log^2 2});$$

13. S. $f'(-1) = 1$;