8. Serie a termini di segno alternato - Criterio di Leibniz

Se la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

con $a_k > 0$, è a termini di segno alterno e se la successione

$$\{|a_k|\}$$

- è **decrescente** , cioè $a_k > a_{k+1}$
- è **infinitesima**, cioè $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

allora la serie data è **convergente**.

Esempi

a) La serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{3+k^3}$ a termini di segno alterno converge, infatti la successione $\left\{\frac{1}{3+k^3}\right\}$ è decrescente e $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{3+k^3} = 0$. Si osserva che la serie data converge anche assolutamente, infatti la serie dei valori assoluti $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3+k^3}$ converge per il criterio del confronto con la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3}$.

b) Sia data la serie a termini di segno alterno $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k}$. Poiché la successione

$$\{|a_k|\} = \left\{\frac{1}{4^k}\right\}$$

- è decrescente , infatti $\frac{1}{4^{k+1}} < \frac{1}{4^k}$ $\forall k > 1$
- è infinitesima , infatti $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{4^k} = 0$

la serie data è convergente. Si osserva che la serie data converge anche assolutamente, infatti la serie dei valori assoluti $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}$ converge, in quanto è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$

c) Alla serie a termini di segno alterno

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-k}|sink|$$

non è possibile applicare il criterio di Leibniz poiché i termini tendono a zero oscillando ; la serie è però assolutamente convergente, in quanto, risultando

$$e^{-k}|sink| \leq e^{-k}$$

i suoi termini in valore assoluto sono maggiorati dai termini della serie geometrica

$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ convergente.

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Stabilire se le seguenti serie convergono semplicemente

*1. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k^3}$

*2. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k+1}{k}$

*3. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(logk)^2}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+k}$

5. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt[4]{k+1}}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{2^k}$

7. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{1+2^k}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{logk}{e^k}$

9. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 3^k$

10. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{k^2+1}$

11. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(e+2)^k}$

*12. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$

13. $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{(k+2)^2}$

Soluzioni

***1. S.** sì, infatti $\frac{1}{k^3} > \frac{1}{(k+1)^3}$ e $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^3} = 0$;

***2. S.** no, irregolare, infatti $\lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k} = 1$;

***3. S.** sì, infatti , $\forall k \geq 2$, $\{(logk)^2\}$ è monotona crescente, quindi$\left\{\frac{1}{(logk)^2}\right\}$ è monotona decrescente , inoltre $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(logk)^2} = 0$;

4. S. sì ; **5. S.** sì ; **6. S**. sì ; **7. S.** sì ;

8. S. sì ; **9. S.** no, irregolare **10. S.** sì **11. S.** sì

***12. S.** no, irregolare, poiché il $\lim_{k\to+\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$

13. S si