1.Studio di grafici di funzioni

Per tracciare il grafico di una funzione si studiano, se è possibile, le principali proprietà: dominio, segno, eventuali asintoti, crescenza e decrescenza, eventuali massimi e minimi locali, concavità, convessità ed eventuali flessi.

Esempi

Funzioni razionali

1)$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x}$

Dominio E=$\mathbb{R}$; $f(x) = x(2x^2 - 5x + 4)\begin{cases} > 0\ per\ x > 0 \\ = 0\ per\ x = 0 \\ < 0\ per\ x < 0 \end{cases}$

intersezione con gli assi O(0;0);

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$; non ha asintoti

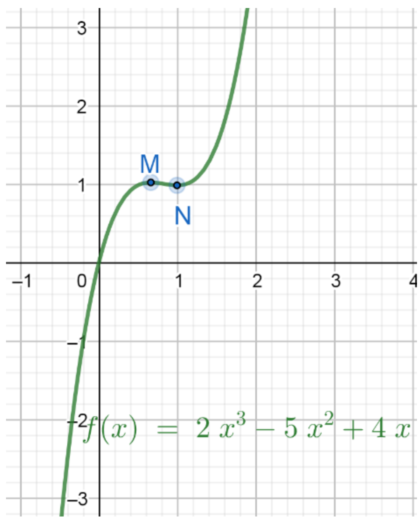


Fig.1

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 4 \begin{cases} > 0\ per\ x < \frac{2}{3} \vee x > 1 \\ = 0\ per\ x = \frac{2}{3} \quad \vee x = 1 \\ < 0\ per\ \frac{2}{3} < x < 1 \end{cases}$$

$x = \frac{2}{3}$ punto di massimo relativo M$\left(\frac{2}{3};\frac{28}{27}\right)$; $x = 1$ punto di minimo relativo N (1;1)

$$f''(x) = 12x - 10 \begin{cases} > 0\ per\ x > \frac{5}{6} \\ = 0\ per\ x = \frac{5}{6} \\ < 0\ per\ x < \frac{5}{6} \end{cases} \qquad flesso\ F\left(\frac{5}{6};\frac{55}{54}\right)$$

2) $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x^2-1}{x}}$

Dominio E=$\mathbb{R} - \{0\}$; $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$; funzione dispari

intersezioni con gli assi $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}};0\right)$;asintoti $x = 0; y = 3x$;

$f'(x) = 3 + \frac{1}{x^2} > 0\ \forall x \in E$ crescente in $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

$f''(x) = -\frac{2}{x^3}\begin{cases} > 0\ per\ \ x < 0 \\ < 0\ \ per\ x > 0 \end{cases}$

convessa in $(-\infty;0)$; $concava\ in\ (0;+\infty)$

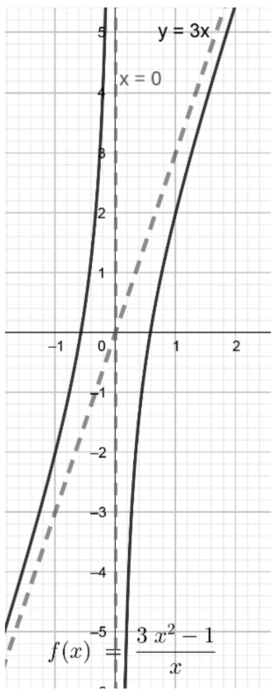


fig.2

Funzioni irrazionali

3) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{4x^2 - x^3}}$

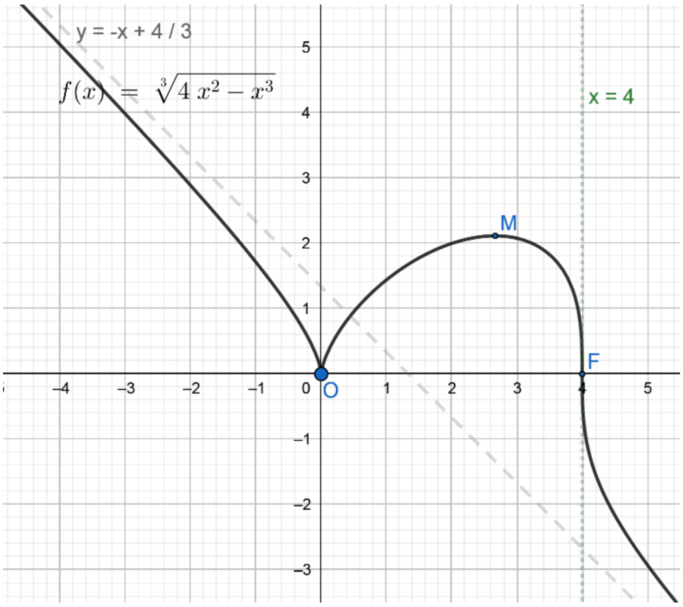
Dominio E=$\mathbb{R}$

intersezioni con gli assi O(0;0) (4;0) ;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$,

$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) + x] = \frac{4}{3}$

asintoto obliquo $y = -x + \frac{4}{3}$; fig.3



$$f'(x) = \frac{8x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(4x^2 - x^3)^2}} \begin{cases} > 0 & per\ 0 < x < \frac{8}{3} \\ = 0 & per\ x = \frac{8}{3} \\ < 0 & per\ x < 0 \lor x > \frac{8}{3} \end{cases}$$

Non derivabile in x=0 e x=4 ; $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \pm\infty$ quindi il punto $(0;0)$ è una cuspide;

$\lim_{x\to 4^\pm} f'(x) = -\infty$ pertanto (4;0) è un punto di flesso con tangente verticale $x = 4$.

Crescente in $\left(0;\frac{8}{3}\right)$; minimo O (0;0); massimo $M\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}\right)$.

4)$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - 2x}$

Dominio $E = (-\infty;0]\cup[2;+\infty)$;

$f(x) \geq 0$ per $x \leq 0$, $f(x) < 0$ per $x \geq 2$; passa per i punti $O(0;0)$ e $A(2;-4)$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, $\lim_{x\to+\infty} [f(x) + x] = -1$, pertanto

$y = -x - 1$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$;

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -3$, $\lim_{x\to-\infty} [f(x) + 3x] = 1$, pertanto

$y = -3x + 1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$;

$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} - 2$, campo di derivabilità $E_{f'} = (-\infty;0)\cup(2;+\infty)$,

$f'(x) \geq 0$ per $x \in (2;\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1]$, il segno è riportato nella tabella :

		0		2		$\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1$	
$f'(x)$	$-$		**non definita**		+	0	$-$
$f(x)$	**decrescente**		**non definita**		**crescente**		**decrescente**

massimo in $M\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+1;\ -\sqrt{3}-2\right)$;

Poiché: $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-\infty$, la curva è tangente in O all'asse y,

$\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=+\infty$, la curva è tangente in A alla retta $x=2$;

$f''(x)=-\frac{1}{(x^2-2x)^{\frac{3}{2}}}<0$ in $E_{f'}$, pertanto la curva è concava nei due intervalli

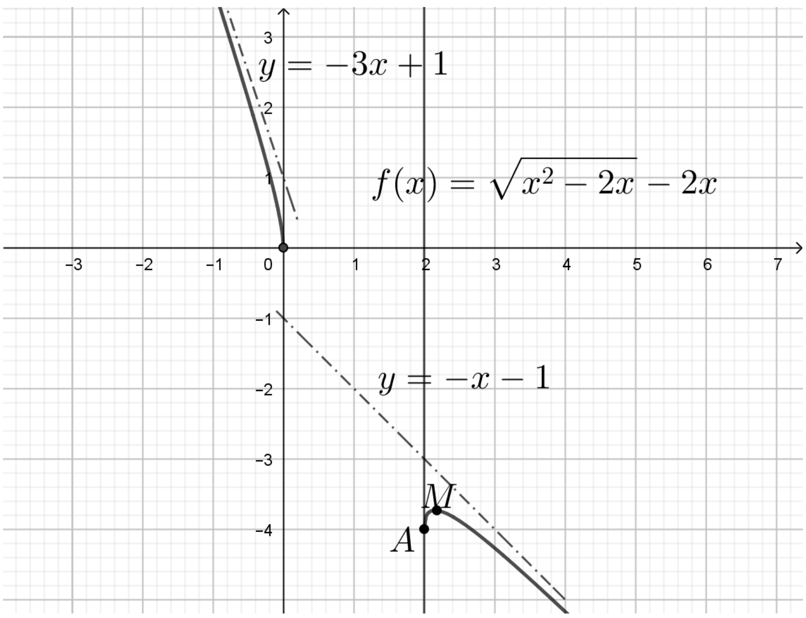


fig.4

5) $\boldsymbol{f(x)=\sqrt[3]{x^2|x+1|}}$

Dominio $E=\mathbb{R}$; $f(x)\geq 0\ \forall x\in\ \mathbb{R}$; passa per $O(0;0)$, $A(-1;0)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\frac{1}{3},$ pertanto

$y=x+\frac{1}{3}$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1,\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=-\frac{1}{3},$ pertanto

$y=-x-\frac{1}{3}$ è asintoto obliquo per $x\to-\infty$;

per $x>-1\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{3x+2}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}}\geq 0$ per $-1<x\leq-\frac{2}{3}\vee x>0$

per $x<-1\ \Rightarrow\ f'(x)=-\frac{3x+2}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}}<0$

		-1		$-\frac{2}{3}$		0	
$f'(x)$	−	**N.D**	+	0	−	**N-D.**	+
$f(x)$	**decrescente**	0	**crescente**		**decrescente**	0	**crescente**

$x=-\frac{2}{3}$ è punto di massimo relativo $\Rightarrow M\left(-\frac{2}{3};\ \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$

Poiché :

$\lim_{x\to -1^{\pm}} f'(x) = \pm\infty \;\Rightarrow\;$ il punto $A(-1;0)$ è una cuspide, tangente : $x=-1$

$\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = \pm\infty \;\Rightarrow\;$ il punto $O(0;0)$ è una cuspide, tangente : $x=0$

$f''(x) = -\frac{2}{9\left|x^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}\right|} \;\Rightarrow\; f(x)$ concava in $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)$

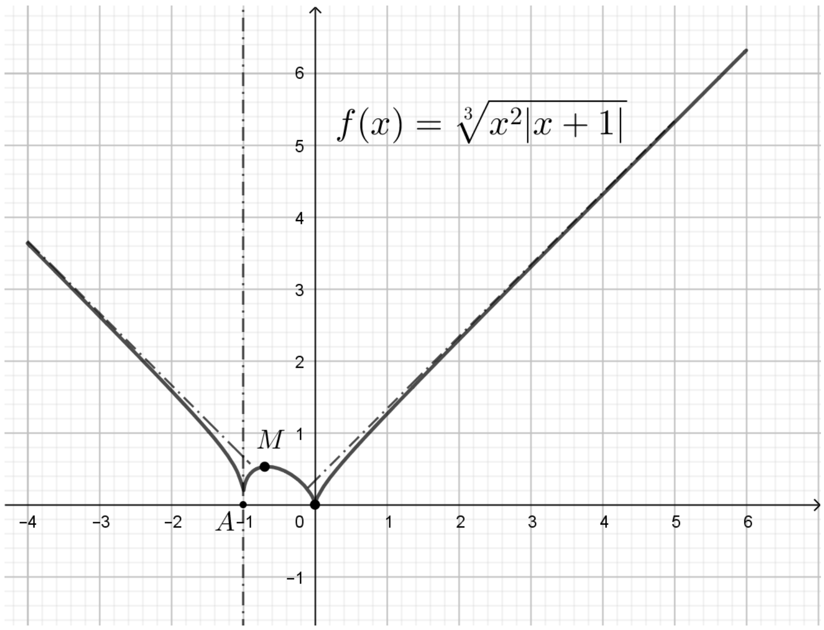


Fig. 5

Funzioni trascendenti

6) $\boldsymbol{f(x) = e^{-x}(1-x^2)}$

Dominio $E=\mathbb{R}$; punti di intersezione con gli assi : $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$,

$f(x)\geq 0$ per $-1\leq x\leq 1$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \;\Rightarrow\; y=0$ è asintoto orizzontale ;

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e poiché $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(1-x^2)}{x} = +\infty$ non ha asintoto obliquo per $x\to-\infty$;

$f'(x) = e^{-x}(x^2-2x-1)$, campo di derivabilità : $E_{f'} = \mathbb{R}$;

$f'(x)=0$ per $x = 1\pm\sqrt{2}$ e per il segno si ha :

		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	**crescente**		**decrescente**		**crescente**

Pertanto:

$x = 1-\sqrt{2}$ è punto di massimo relativo $\Rightarrow M\left(1-\sqrt{2}; 2e^{\sqrt{2}-1}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$

$x = 1+\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo $\Rightarrow N\left(1+\sqrt{2}; -2e^{-\sqrt{2}-1}\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$

$f''(x) = -e^{-x}(x^2-4x+1) \geq 0$ per $2-\sqrt{3} \leq x \leq 2+\sqrt{3}$

		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	+	0	$-$
$f(x)$	**concava**		**convessa**		**concava**

Flessi :

$F_1\left(2-\sqrt{3}; e^{\sqrt{3}-2}\left(4\sqrt{3}-6\right)\right)$; , $F_2\left(2+\sqrt{3}; -e^{-\sqrt{3}-2}\left(4\sqrt{3}+6\right)\right)$

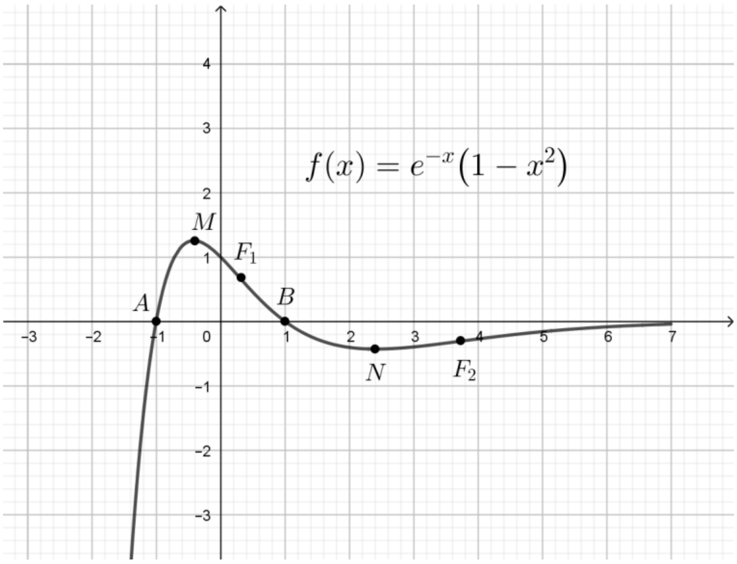


Fig. 6

7) $\boldsymbol{f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}(x^2-3)}$

Dominio $E = \mathbb{R} - \{0\}$; funzione pari ; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

Poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ punto di discontinuità eliminabile, quindi, la funzione così definita

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in \mathbb{R}_0 \\ 0 & per\ x = 0 \end{cases}$$

è definita e continua in $\mathbb{R}$; interseca inoltre l'asse x nei punti A,B $\left(\pm\sqrt{3}; 0\right)$;

per $x > 0$ si ha: $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\frac{2x^3+x^2-3}{x^2}$

	0	1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	**decrescente**	$-2e^{-1}$	**crescente**

per $x < 0$ si ha: $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{2x^3 - x^2 + 3}{x^2}$

		-1	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	**decrescente**	$-2e^{-1}$	**crescente**

$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$;minimi : $M, N(\pm 1; -2e^{-1})$, la funzione f_1 ha massimo relativo in $(0; 0)$

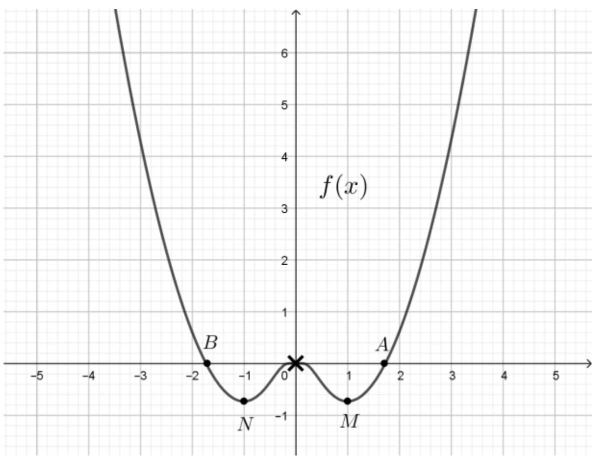


Fig. 7-a

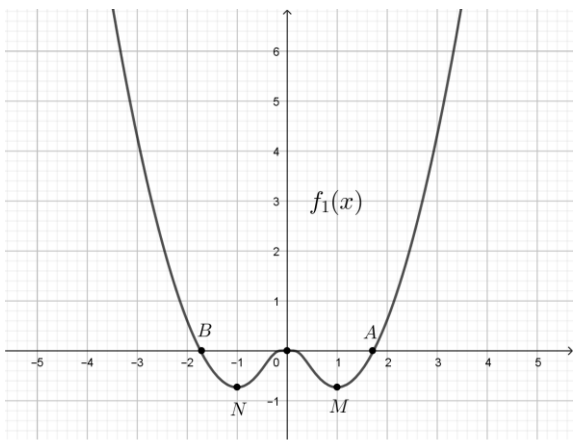


Fig. 7-b

8) $\boldsymbol{f(x) = \frac{logx}{x^2}}$

Dominio $E = (0; +\infty)$; $f(x) \geq 0$ per $x \geq 1$, $A(1; 0)$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{logx}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ è asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{logx}{x^2} = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ è asintoto verticale}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2logx}{x^3} \text{ , campo di derivabilità } E_{f'} = (0; +\infty);$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ se } 1 - 2logx \geq 0 \text{ cioè } logx \leq \frac{1}{2} \text{ per } 0 < x \leq \sqrt{e}$$

	0		$\sqrt{e}$	
$f'(x)$		+	0	$-$
$f(x)$		**crescente**	$\frac{1}{2e}$	**decrescente**

massimo in $M\left(\sqrt{e};\frac{1}{2e}\right)$; $\quad f''(x)=\frac{6logx-5}{x^4}\geq 0$ per $x\geq\sqrt[6]{e^5}$

	0		$\sqrt[6]{e^5}$	
$f''(x)$		$-$	0	+
$f(x)$		**concava**		**convessa**

Punto di flesso $F\left(\sqrt[6]{e^5}\ ;\ \frac{5}{6\sqrt[3]{e^5}}\right)$

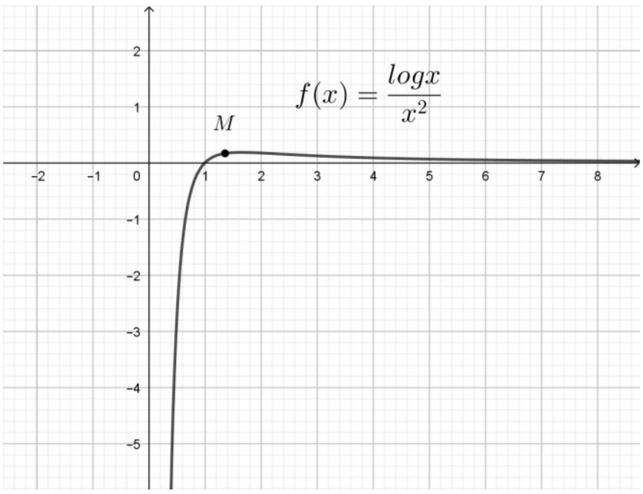


Fig. 8

9) $f(x)=(log^2x-1)^2$

Dominio $E=(0;+\infty)$, $f(x)\geq 0\ \ \forall x>0$,

$f(x)=0$ per $logx=\pm 1\ \Rightarrow\ x=e$ e $x=e^{-1}\Rightarrow A(e^{-1};0), B(e;0)$,

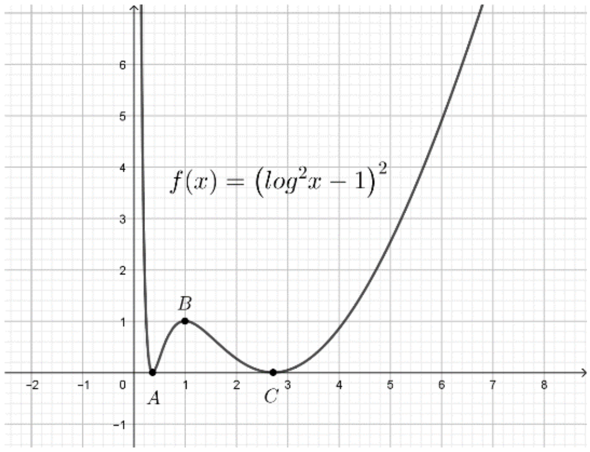
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty\ \Rightarrow\ x=0$ è asintoto verticale

$f'(x)=\frac{4}{x}[log^2x-1]\cdot logx$, campo di derivabilità $E_{f'}=(0;+\infty)$; Nella tabella sono riportati zeri e segno di f' e l'andamento di f

	0		e^{-1}		1		e	
$f'(x)$	∞	$-$	0	+	0	$-$	0	+
$f(x)$	∞	**decrescente**	0	**crescente**	1	**decrescente**	0	**crescente**

minimi in $A(e^{-1}; 0)$ e C$(e; 0)$,
massimo in $B(1; 1)$

Fig. 9



10) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{log(x^2-x+1)}}$

Dominio $E = \mathbb{R} - \{0; 1\}$, $f(x)$ >0 per $x < 0 \vee x > 1$;

$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \mp\infty \;\Rightarrow\; x = 0$ è asintoto verticale ,

$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty \;\Rightarrow\; x = 1$ è asintoto verticale ,

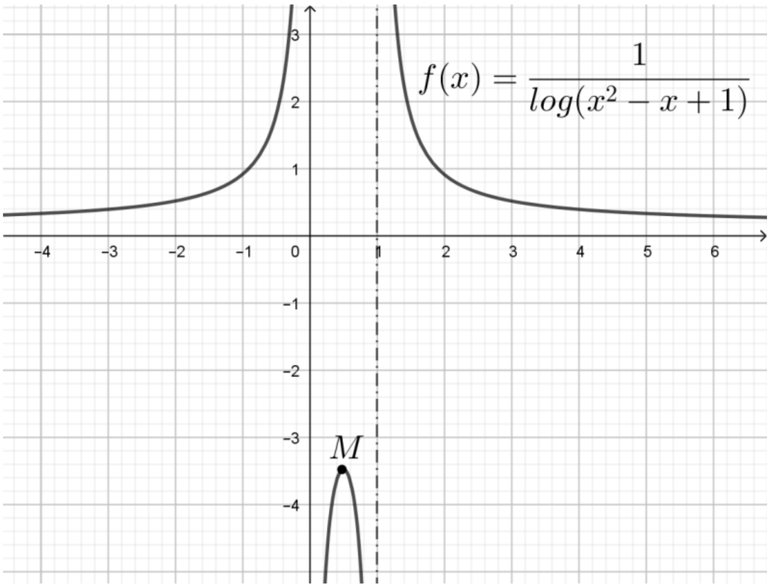
$\lim_{x\to \infty} f(x) = 0 \qquad \Rightarrow\; y = 0$ è asintoto orizzontale;

$f'(x) = \frac{1-2x}{(x^2-x+1)log^2(x^2-x+1)} > 0$ per $x < 0 \vee 0 < x < \frac{1}{2}$

		0		$\frac{1}{2}$		1	
$f'(x)$	+	∞	+	0	$-$	∞	$-$
$f(x)$	**crescente**	∞	**crescente**		**decrescente**	∞	**decrescente**

massimo in $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{log\frac{3}{4}}\right)$

Fig. 10



11) $\boldsymbol{f(x) = \frac{logx}{x-2}}$

Dominio $E = (0; 2) \cup (2; +\infty)$;

$f(x) = 0$ per $x = 1 \Rightarrow A(1; 0)$, $f(x) > 0$ per $x \in (0; 1) \cup (2; +\infty)$;

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale ;

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$ è asintoto verticale;

$\lim_{x \to 2^\pm} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = 2$ è asintoto verticale;

$f'(x) = -\frac{xlogx - x + 2}{x(x-2)^2}$, campo di derivabilità $E_{f'} = E$;

studiamo il segno di f' osservando che il denominatore è positivo $\forall x \in E_{f'}$,

pertanto

$f'(x) > 0$ se $-xlogx + x - 2 > 0 \Rightarrow logx < \frac{x-2}{x}$,

risolviamo graficamente la disequazione tracciando i grafici di $y = logx$

e dell'iperbole $y = \frac{x-2}{x}$, dalla figura risulta che

$logx > \frac{x-2}{x} \quad \forall x \in E_{f'}$

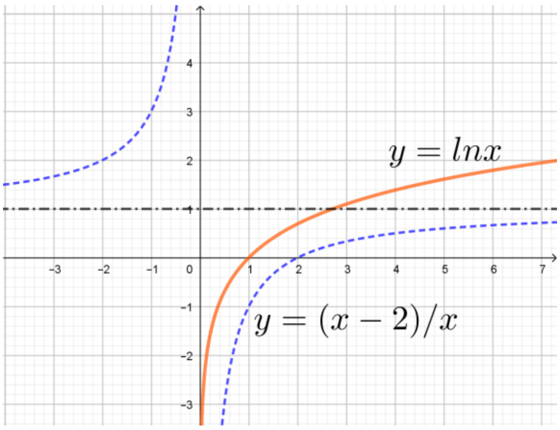
da cui

$f'(x) < 0 \ \forall x \in E_{f'}$,

quindi la funzione è decrescente

in $(0; 1)$ e in $(2; +\infty)$

Fig.11- a



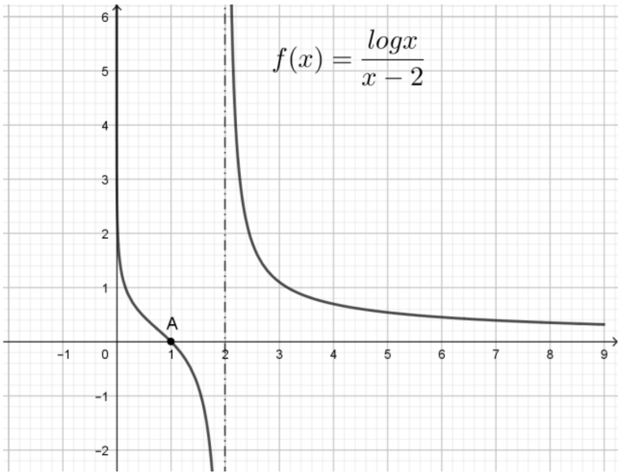


Fig. 11-b

12) $\boldsymbol{f(x) = \arcsin(2x - x^2)}$

Per il dominio si deve imporre che sia $-1 \leq 2x - x^2 \leq 1$ che risolta dà: $E = [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$, $f(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq 2$, la curva interseca gli assi nei punti $O(0;0)$ e $A(2;0)$; la funzione è continua nel dominio ;

$$f'(x) = \frac{2-2x}{\sqrt{1-(2x-x^2)^2}} = \frac{2(1-x)}{|x-1|\sqrt{-x^2+2x+1}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-x^2+2x+1}} & x < 1 \\ \dfrac{-2}{\sqrt{-x^2+2x+1}} & x > 1 \end{cases}$$

Poiché

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = f'_+(1) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2}} = f'_-(1)$$

il punto $M\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ è un punto angoloso, inoltre:

$\lim_{x \to (1+\sqrt{2})^-} f'(x) = -\infty \Rightarrow$ la curva è tangente nel punto $B\left(1+\sqrt{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$ alla retta $x = 1+\sqrt{2}$,

$\lim_{x \to (1-\sqrt{2})^+} f'(x) = +\infty \Rightarrow$ la curva è tangente nel punto $C\left(1-\sqrt{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$ alla retta $x = 1-\sqrt{2}$,

quindi il campo di derivabilità è $E_{f'} = \left(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right) - \{1\}$

	$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	**N.D.**	$-$	$-\infty$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	**crescente**	$\frac{\pi}{2}$	**decrescente**	$-\frac{\pi}{2}$

$x = 1$ punto di massimo: $M\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$

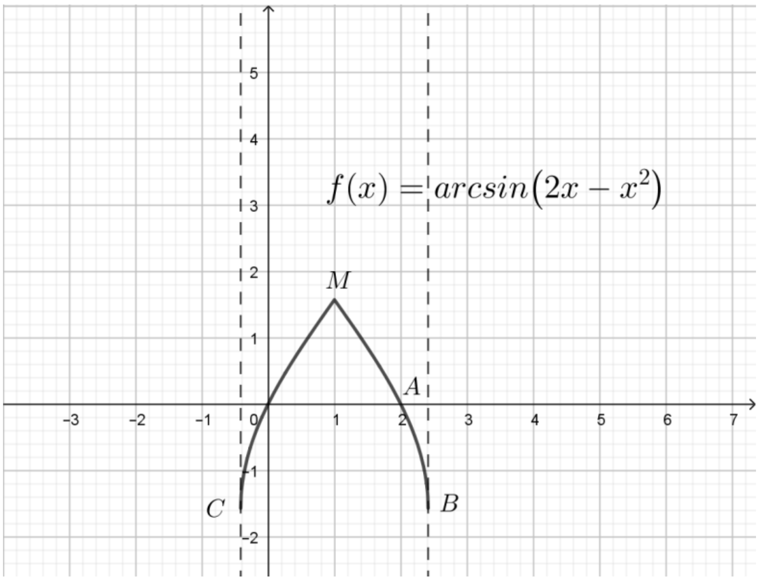


Fig. 12

13) $\boldsymbol{f(x) = arctg^2 x - arctg x}$

Dominio $E = \mathbb{R}$; punti di intersezione con gli assi : $O(0;0)$ e $A(tg1;0)$;

$$\lim_{x\to+\infty}(arctg^2x - arctgx) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow g: y = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}$$ è asintoto orizzontale

$$\lim_{x\to-\infty}(arctg^2x - arctgx) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow h: y = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}$$ è asintoto orizzontale

Si ha :

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}[2arctgx - 1]$, campo di derivabilità : $E_{f'} = \mathbb{R}$;

studiando zeri e segno della derivata prima risulta :

$f'(x) = 0$ per $arctgx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = tg\frac{1}{2}$

$f'(x) \geq 0$ per $x \geq tg\frac{1}{2}$

		$tg\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	**decrescente**		**crescente**

Quindi la funzione ha un minimo in $x = tg\frac{1}{2}$ e risulta $f\left(tg\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, il corrispondente punto sulla curva è $B\left(tg\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right)$.

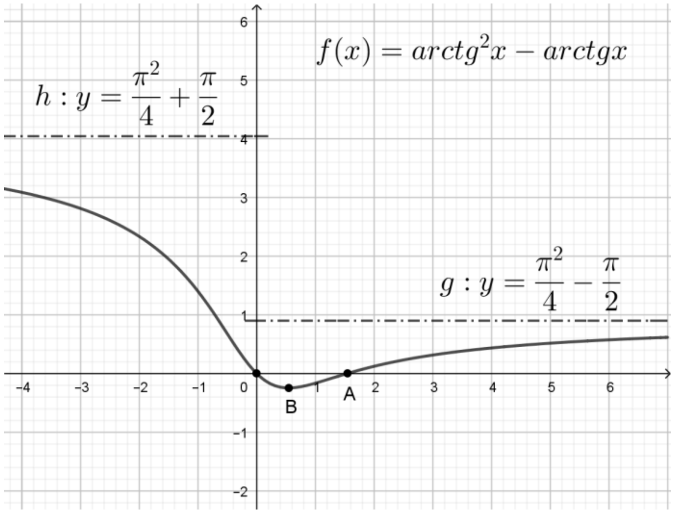


Fig.13

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Funzioni razionali

*1) $f(x) = (2x-1)^2(x+1)$

*2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

*3) $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x-4} - 10$

Funzioni irrazionali

*4) $f(x) = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

*5) $f(x) = x - 2 - \sqrt[3]{x^3-1}$

*6) $f(x) = \sqrt{x}(x-1)^2$

*7) $f(x) = 1 + \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x}$

*8) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

*9) $f(x) = x - \sqrt{4-x^2}$

*10) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$

*11) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

Funzioni trascendenti

*12) $f(x) = e^{x^2-1}$

*13) $f(x) = 1 + x^2 e^x$

*14) $f(x) = (2x+3)e^{-x}$

*15) $f(x) = 4x^3 e^{-2x}$

*16) $f(x) = e^{-\frac{1}{x-2}}$

*17) $f(x) = e^{-\frac{x}{1-x^2}}$

*18)$f(x) = (4 - x^2)e^{-x-1}$

*19)$f(x) = e^{-x}|x + 2|$

*20)$f(x) = e^x|x^2 - x|$

*21)$f(x) = 1 + e^{\frac{1}{|x|}}$

*22)$f(x) = e^{x+\frac{1}{|x|}}$

*23)$f(x) = (x + 1)log(x + 1)$

*24)$f(x) = log\frac{x+4}{x+1}$

*25)$f(x) = \frac{log^2(x+1)}{x+1}$

*26)$f(x) = log\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$

*27)$f(x) = log\frac{x^2-2x-3}{x^2-2x+5}$

*28)$f(x) = log|x^3 - x|$

*29)$f(x) = \frac{x^2}{1+log|x|}$

*30)$f(x) = \frac{1}{2}x - sinx$ I= $[-\pi; \pi]$

*31)$f(x) = sin^3x$ I= $[0; 2\pi]$

*32)$f(x) = arcsinx - 2x$ I= $[-1; 1]$

Soluzioni

Funzioni razionali

***1.S.** Dominio E=$\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ non ha asintoti

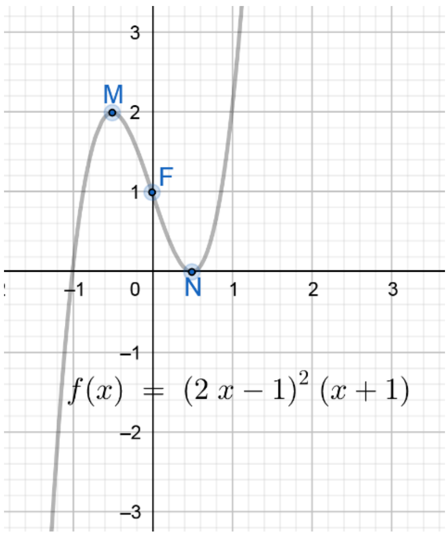
intersezioni con gli assi (-1;0), $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, (0;1);

$f'(x) = 3(2x - 1)(2x + 1)$

Massimo M $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$, minimo$N\left(\frac{1}{2}; 0\right)$;

$f''(x) = 24x$; concava per $x < 0$; convessa per $x > 0$;

flesso $F(0; 1)$



***2.S.**Dominio E=$\mathbb{R}$; $f(x) = (x-1)^2(2x+1)$

intersezioni con gli assi (1;0) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ $(0; 1)$

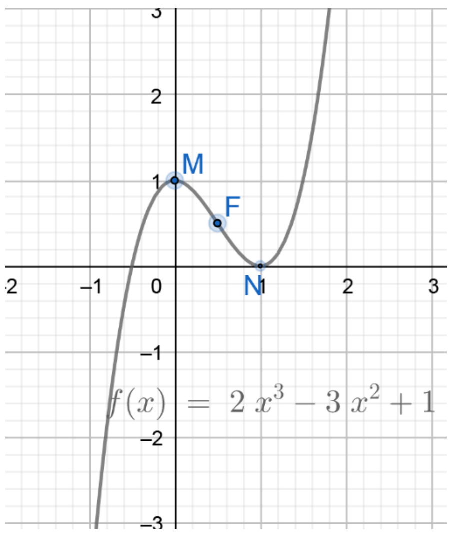
$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{f(x)} = \pm\infty$ non ha asintoti

$f'(x) = 6x^2 - 6x$

Massimo$M$ $(0; 1)$, minimo$N(1; 0)$;

$f''(x) = 12x - 6$; concava per $x < \frac{1}{2}$; convessa per $x > \frac{1}{2}$

flesso$F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$



***3.S.**Dominio E: $\mathbb{R} - \{2\}$; $f(x) = 2x - 6 + \frac{15}{2x-4}$

intersezioni con asse y $\left(0; -\frac{39}{4}\right)$

asintoti $x = 2; y = 2x - 6$;

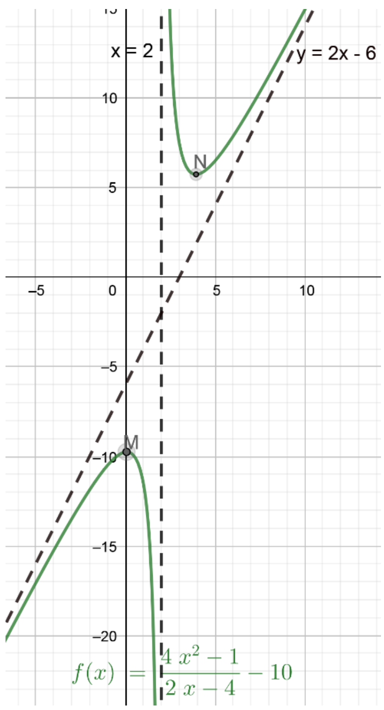
$f'(x) = 2 - \frac{30}{(2x-4)^2}$

crescente in $\left(-\infty; 2 - \frac{\sqrt{15}}{2}\right) \cup \left(2 + \frac{\sqrt{15}}{2}; +\infty\right)$

massimo $M\left(2 - \frac{\sqrt{15}}{2}; -2 - 2\sqrt{15}\right)$,

minimo $N\left(2 + \frac{\sqrt{15}}{2}; -2 + 2\sqrt{15}\right)$; $f''(x) = \frac{15}{(x-2)^3}$;

concava in $(-\infty; 2)$; $convessa\ in\ (2; +\infty)$



Funzioni irrazionali

***4.S.** Dominio E=$\mathbb{R}$;

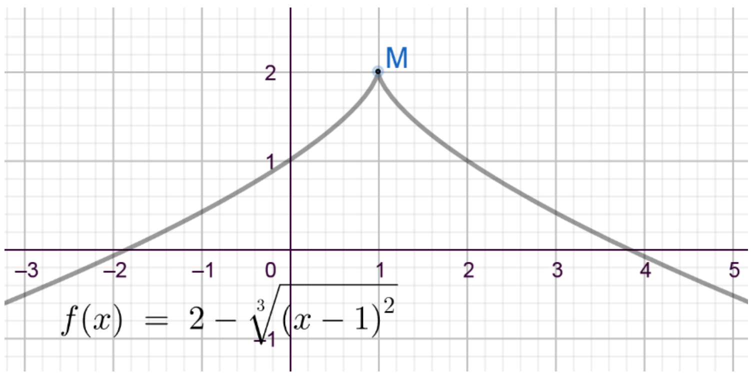
intersezioni con gli assi (1-2$\sqrt{2}$; 0)

$(1 + 2\sqrt{2}; 0)$; $(0; 1)$;

non ha asintoti; $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$,

non è derivabile in $x = 1$;

Cuspide M(1;2) massimo ;



$f''(x) = \frac{2}{9(x-1)\sqrt[3]{x-1}}$

Convessa in $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

***5.S.** Dominio E=$\mathbb{R}$ i intersezione asse y (0;-1) ;

asintoto orizzontale $y = -2$;

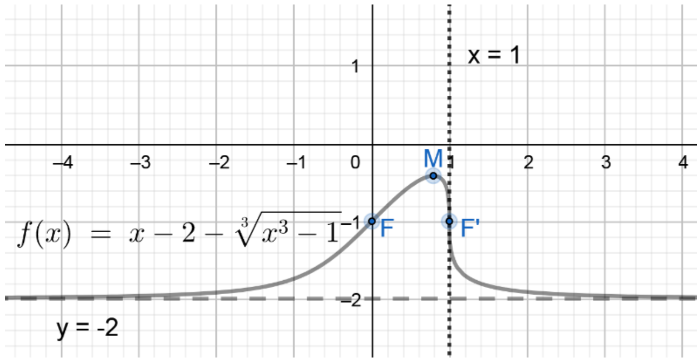
$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$ Non derivabile in x=1 ;

flesso con tangente verticale $(1; -1)$

Crescente in$\left(-\infty; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$, decrescente $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\right)$;

massimo M $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \sqrt[3]{4} - 2\right)$;

$f''(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^3-1)^5}}$; flessi F(0;-1),F'(1;-1).

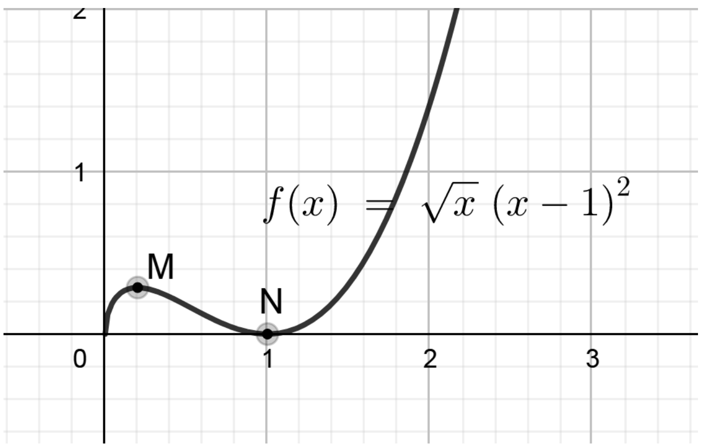


***6.S.**Dominio E= $[0; +\infty)$; intersezioni con gli assi (0;0) (1;0); $f'(x) = \frac{5x^2-6x+1}{2\sqrt{x}}$; in x=0 la funzione non è derivabile, (0;0) punto a tangente verticale, crescente in $\left[0; \frac{1}{5}\right) \cup (1; +\infty)$,decrescente in $\left(\frac{1}{5}; 1\right)$ Massimo$M$ $\left(\frac{1}{5}; \frac{16\sqrt{5}}{125}\right)$;

minimo (0;0), N (1;0);

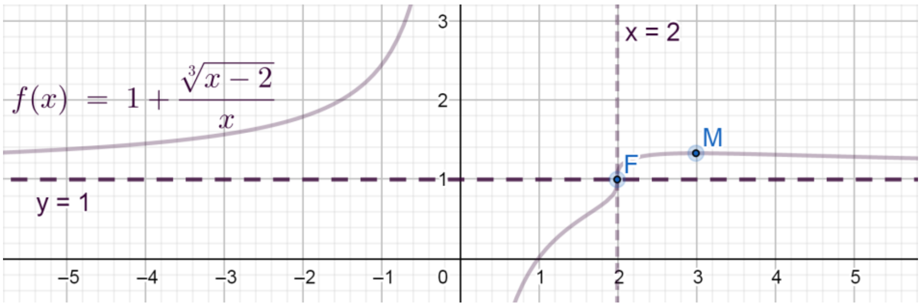
$f''(x) = \frac{15x^2-6x-1}{4x\sqrt{x}}$;

concava in $\left(0; \frac{3+\sqrt{24}}{15}\right)$, convessa in$\left(\frac{3+\sqrt{24}}{15}; +\infty\right)$.



***7.S.**Dominio E=$\mathbb{R} - \{0\}$; asintoti $x = 0; y = 1$; intersezione asse x $(1; 0)$;

$f'(x) = \frac{2(3-x)}{3x^2\sqrt[3]{(x-2)^2}}$; in x=2 non è derivabile, x=2 punto di flesso con tangente verticale $x = 2$, Massimo $M\left(3; \frac{4}{3}\right)$. $f''(x) = \frac{2(5x^2-30x+36)}{9x^3\sqrt[3]{(x-2)^5}}$, Flessi per x=3 $\pm \frac{3\sqrt{5}}{5}$,F(2;1)



***8.S.**Dominio E:$\mathbb{R} - \{0\}$;

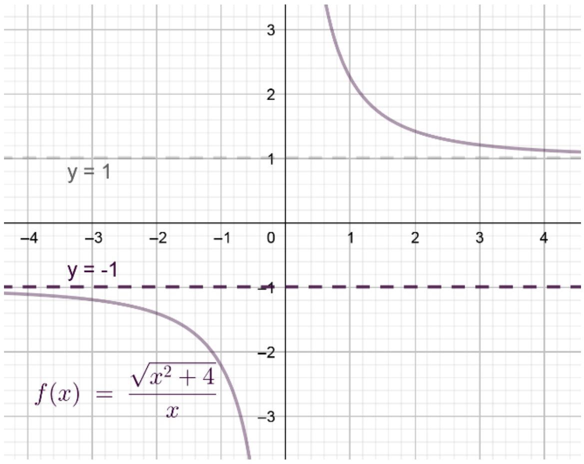
funzione dispari,

grafico simmetrico rispetto all'origine ;

asintoti $x = 0; y = 1 \; per \; x \to +\infty;\; y = -1 per\; x \to -\infty$;

$f'(x) = -\frac{4}{x^2\sqrt{x^2+4}}$, decrescente in $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

$f''(x) = \frac{4(3x^2+8)}{x^3(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$; concava in$(-\infty; 0)$, convessa in $(0; +\infty)$.



***9.S.**Dominio E=$[-2; 2]$;

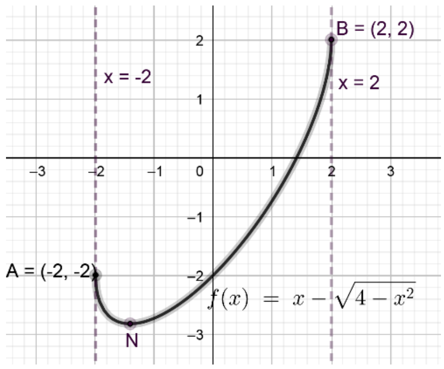
intersezioni con gli assi $(\sqrt{2}; 0)$; $(0; -2)$;

$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, derivabile in $(-2; 2)$;

in A(-2;-2) , B(2;2) tangenti verticali;

Minimo N$(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2}$)

$f''(x) = \frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$;convessa in E



***10.S.**Dominio E:$\mathbb{R}$; intersezioni con gli assi (1;0), (2;0), C(0;$-\sqrt[3]{4}$); asintoti $y = x - \frac{5}{3}$;

$f'(x) = \frac{(x-2)(3x-4)}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4}}$ non derivabile in x=1 e x=2 ,

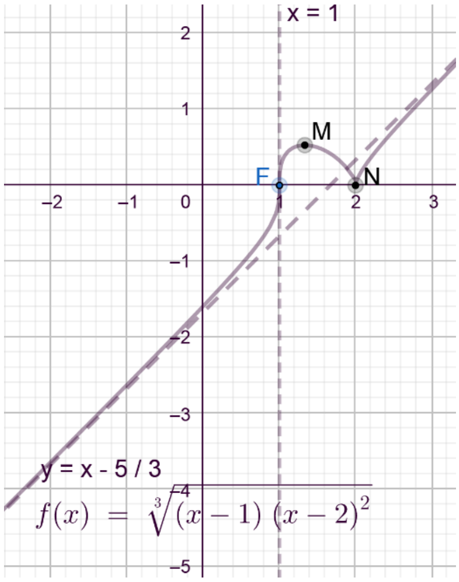
F (1;0) flesso con tangente verticale,

minimo N(2;0) cuspide ;

massimo $M\left(\frac{4}{3};\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$, minimo N(2;0);

$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5(x-2)^4}}$;

convessa in$(-\infty;1)$, concava in $(1;+\infty)$



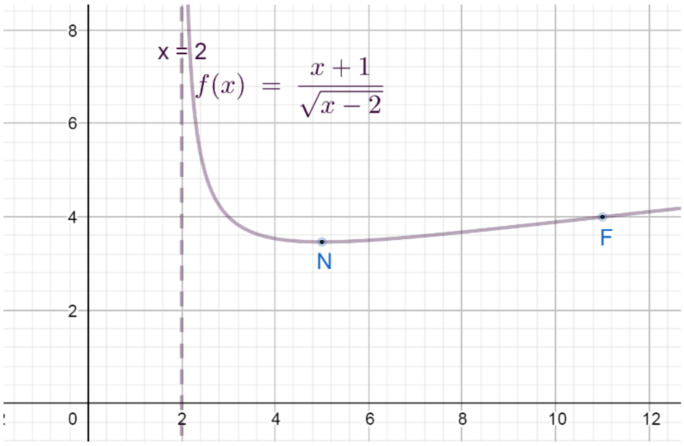
***11.S.**Dominio E=$(2;+\infty)$,

$f(x) > 0 \forall x \in E$;

$x = 2$ asintoto verticale destro;

$f'(x) = \frac{x-5}{2(x-2)\sqrt{x-2}}$; Minimo N (5;2$\sqrt{3}$);

$f''(x) = \frac{11-x}{4(x-2)^2\sqrt{x-2}}$; flesso F (11;4)



Funzioni trascendenti

*12)$f(x) = e^{x^2-1}$

***12. S.**Dominio E=$\mathbb{R}$; $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$;

funzione pari

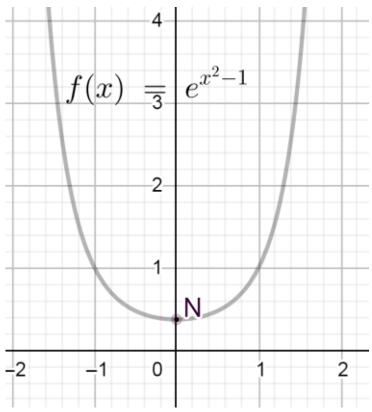
intersezione asse y (0; e^{-1});

$f'(x) = 2xe^{x^2-1}$

$x = 0$ punto di minimo N (0; e^{-1});

$f''(x) = 2e^{x^2-1}(1+2x^2)$

convessa $\forall x \in \mathbb{R}$



***13. S.** Dominio E=ℝ; $f(x) \geq 1 \forall x \in \mathbb{R}$; intersezione asse y A (0;1);

asintoto orizzontale per x→$-\infty$ $y = 1$

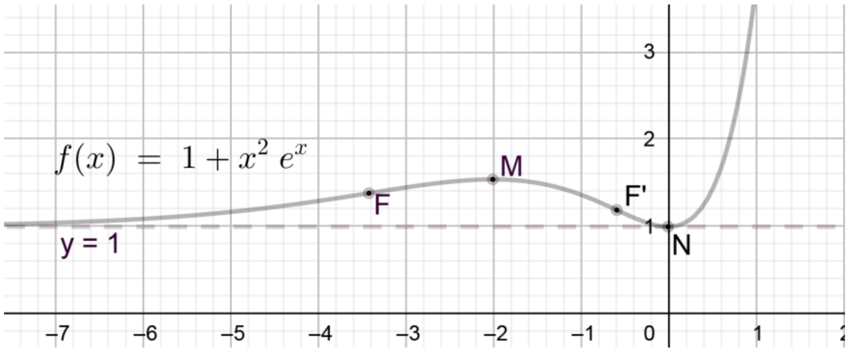
$f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$

Massimo $M(-2; 1 + 4e^{-2})$;

minimo N $(0; 1)$

$f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$

Flessi (-2$\pm\sqrt{2}$;1+$(-2 \pm \sqrt{2})^2 e^{(-2\pm\sqrt{2})}$)



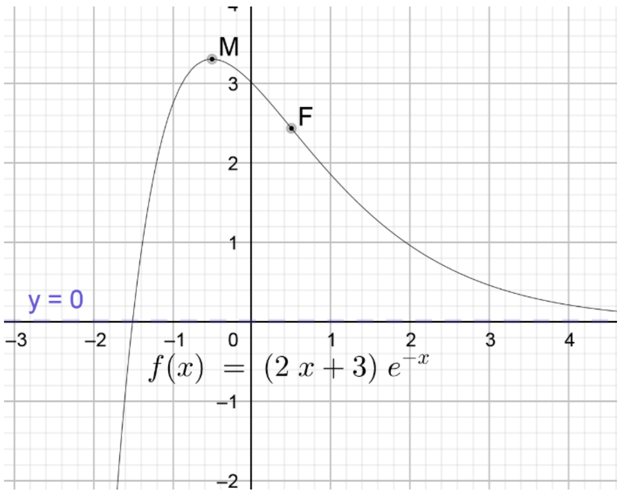
***14. S.**Dominio E=ℝ; f(x)≥0∀x≥$-\frac{3}{2}$;

intersezioni con gli assi $(-\frac{3}{2}; 0)(0; 3)$

asintoto orizzontale y=0 per x→+∞;

$f'(x) = (-2x - 1)e^{-x}$Massimo M($-\frac{1}{2}$; $2\sqrt{e}$);

$f''(x) = (2x - 1)e^{-x}$;Flesso F($\frac{1}{2}$; $\frac{4}{\sqrt{e}}$)



***15. S.**Dominio E=ℝ; f(x)≥0∀x≥0 ;

intersezioni con gli assi $(0; 0)$

asintoto orizzontale y=0 per x→+∞;

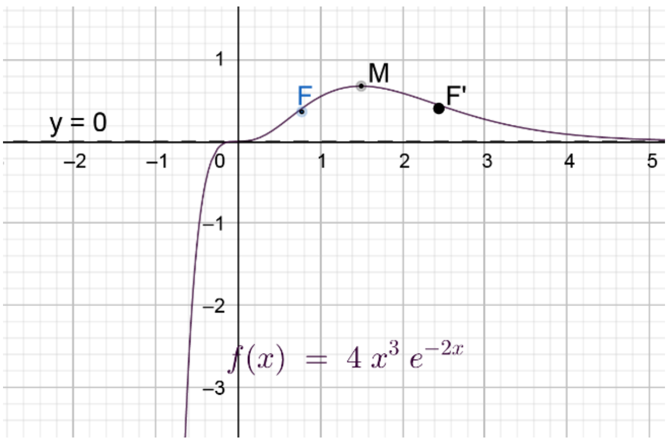
$f'(x) = 4(3 - 2x)x^2 e^{-2x}$;

Massimo M $\left(\frac{3}{2}; \frac{27}{2} e^{-3}\right)$;

flesso a tangente orizzontale O (0;0)

$f''(x) = 8x(2x^2 - 6x + 3)e^{-2x}$;

Flessi a tangente obliqua x=$\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$.



***16. S.**Dominio E=$\mathbb{R}-\{2\}$;

$f(x)>0\ \ \forall x\neq 2$;

Intersezione asse y (0;$\sqrt{e}$)

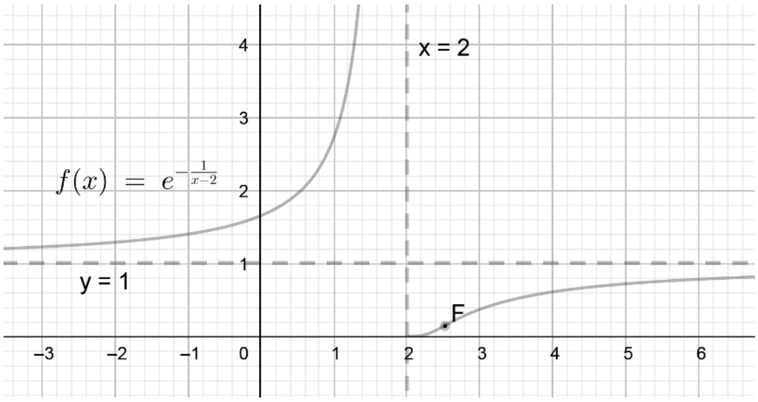
asintoto verticale sinistro $x=2\ \ \lim_{x\to 2^+} f(x)=0$;

asintoto orizzontale $y=1$;

$f'(x)=\frac{1}{(x-2)^2}e^{-\frac{1}{x-2}}$, $\lim_{x\to 2^+} f'(x)=0$;

crescente in $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$;

$f''(x)=\frac{5-2x}{(x-2)^4}e^{-\frac{1}{x-2}}$; flesso $F\left(\frac{5}{2};e^{-2}\right)$



***17. S.**Dominio E=$\mathbb{R}-\{-1;1\}$;f(x)> 0 $\forall x\in E$;

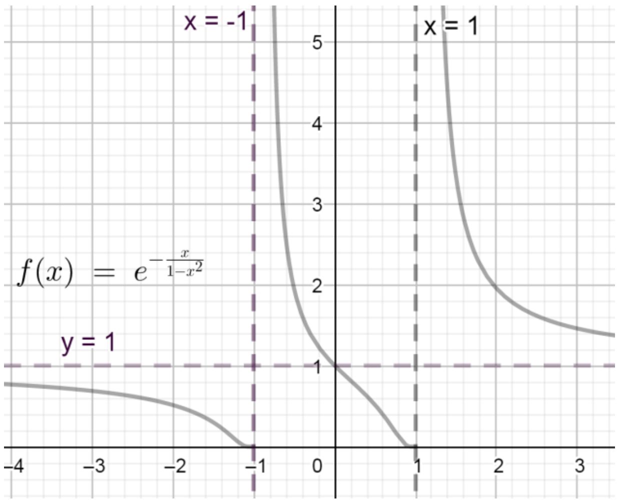
asintoto destro $x=-1$, $\lim_{x\to -1^-} f(x)=0$;

asintoto destro $x=1\ \ \lim_{x\to 1^-} f(x)=0$;

asintoto orizzontale $y=1$;

$f'(x)=-\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}e^{-\frac{x}{1-x^2}}$;

decrescente in $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$



***18. S.** Dominio E=$\mathbb{R}$; f(x)≥0∀x∈[−2; 2],

intersezioni con gli assi (2;0), (2;0), (0;4e^{-1});

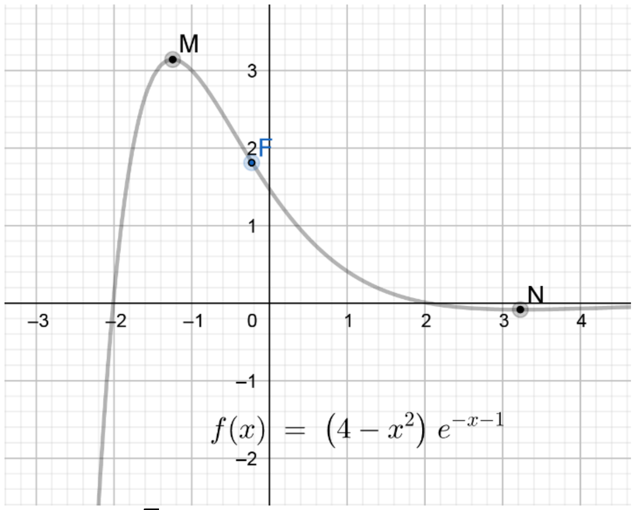
asintoto orizzontale y=0 per x→+∞ ;

$f'(x)=(x^2-2x-4)e^{-x-1}$;

Massimo $M(1-\sqrt{5};(-2+2\sqrt{5})e^{\sqrt{5}-2})$;

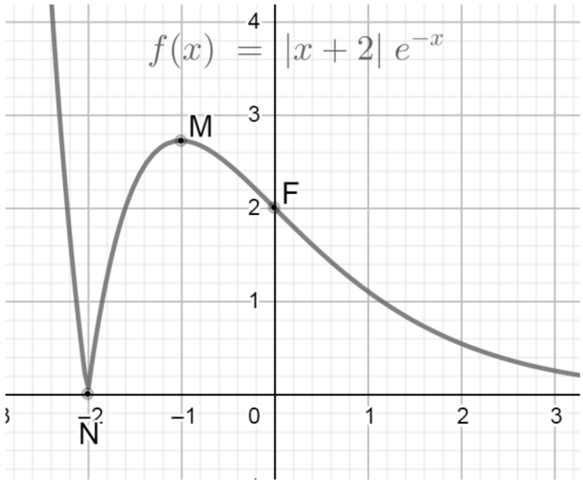
Minimo $N(1+\sqrt{5};(-2-2\sqrt{5})e^{-\sqrt{5}-2})$

$f''(x)=-(x^2-4x-2)e^{-x-1}$;



Flessi F$(2-\sqrt{6};(-6+4\sqrt{6})e^{\sqrt{6}-3})$, $(2+\sqrt{6};(-6-4\sqrt{6})e^{-\sqrt{6}-3})$.

***19. S.** Dominio E=ℝ ;



$e^{-x}|x+2| = \begin{cases} e^{-x}(-x-2) & per\ x \le -2 \\ e^{-x}(x+2) & per\ x > -2 \end{cases}$;

$f(x) \ge 0 \forall x \in \mathbb{R}$;

intersezioni con gli assi (-2;0), (0;2);

$y = 0$ asintoto orizzontale per x→+∞;

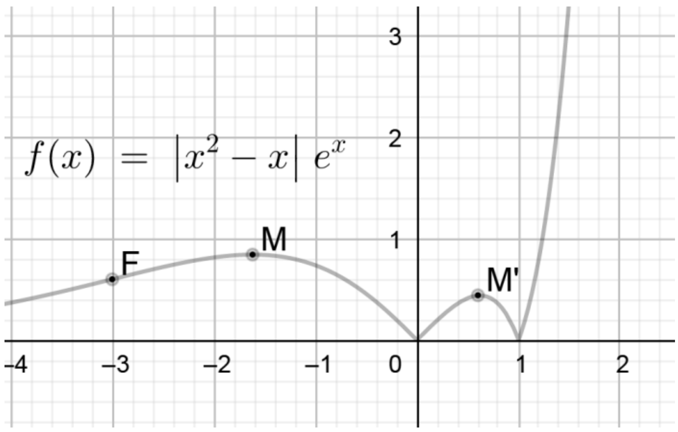
$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(x+1) & per\ x < -2 \\ e^{-x}(-x-1) & per\ x > -2 \end{cases}$,

$x = -2$ punto angoloso;

minimo N (-2;0); massimo M(-1;e) ; $f''(x) = \begin{cases} -xe^{-x} & per\ x < -2 \\ xe^{-x} & per\ x > -2 \end{cases}$;Flesso F(0;2)

***20. S.** Dominio E=ℝ ;

$e^{x}|x^2-x| = \begin{cases} e^{x}(x^2-x) & per\ x \le 0 \vee x \ge 1 \\ -e^{x}(x^2-x) & per\ 0 < x < 1 \end{cases}$;



$f(x) \ge 0 \forall x \in \mathbb{R}$;

intersezioni con gli assi (0;0); (1;0)

$y = 0$ asintoto orizzontale per x→-∞;

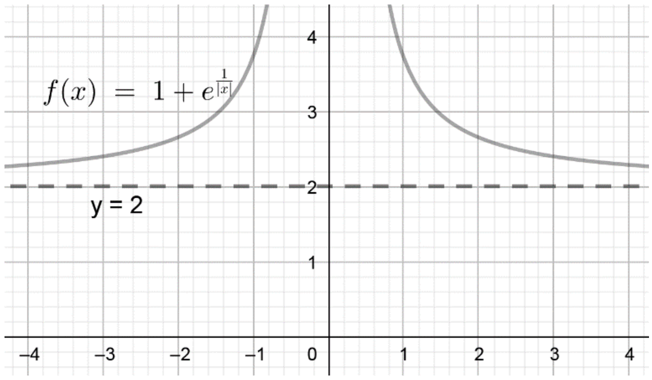
$f'(x) = \begin{cases} e^{x}(x^2+x-1) & per\ x < 0 \vee x > 1 \\ -e^{x}(x^2+x-1) & per\ 0 < x < 1 \end{cases}$

$x = 0$ e $x = 1$ punti angolosi;

Massimi $\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}; (\sqrt{5} \mp 2)e^{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}\right)$; minimi (0;0), (1,0);

$f'(x) = \begin{cases} e^{x}(x^2+3x) & per\ x < 0 \vee x > 1 \\ -e^{x}(x^2+3x) & per\ 0 < x < 1 \end{cases}$; Flesso $F(-3; 12e^{-3})$.

***21. S.**Dominio E=$\mathbb{R}-\{0\}$; $1+e^{\frac{1}{|x|}}=\begin{cases}1+\ e^{-\frac{1}{x}} & per\ x<0\\ 1+\ e^{\frac{1}{x}} & per\ x>0\end{cases}$;



funzione pari, grafico simmetrico rispetto all'asse y ;

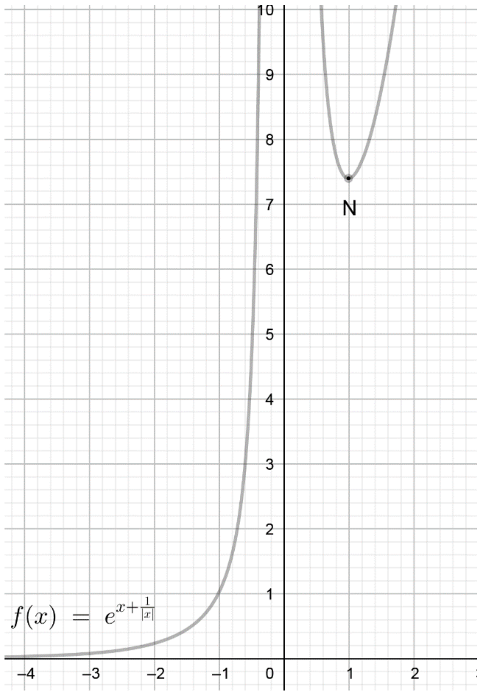
$f(x)>1\in\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$;

asintoto verticale $x=0$, asintoto orizzontale $y=2$;

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\ \ per\ x<0\\ -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\ \ per\ x>0\end{cases}$$

crescente in$(-\infty;0)$, decrescente in$(0;+\infty)$; convessa $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

***22. S.**Dominio E=$\mathbb{R}-\{0\}$; $e^{x+\frac{1}{|x|}}=\begin{cases}e^{x-\frac{1}{x}} & per\ x<0\\ e^{x+\frac{1}{x}} & per\ x>0\end{cases}$



$f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$; asintoto verticale $x=0$;

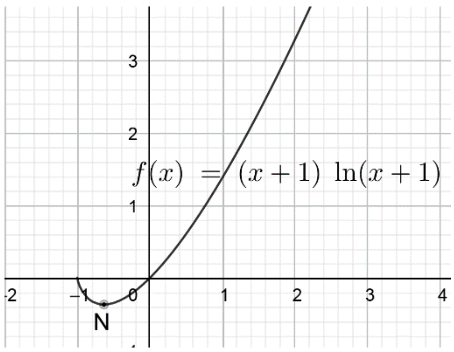
$y=0$ asintoto orizzontale per $x\to-\infty$;

$$f'(x)=\begin{cases}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^{x-\frac{1}{x}}\ per\ x<0\\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\ per\ x>0\end{cases}$$

crescente in $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; decrescente in $(0;1)$;

Minimo $N(1;e^2)$; convessa in E

***23. S.**Dominio E= $(-1;+\infty)$; $f(x)\geq 0\forall x\in[0;+\infty)$;



intersezione con gli assi O (0;0);

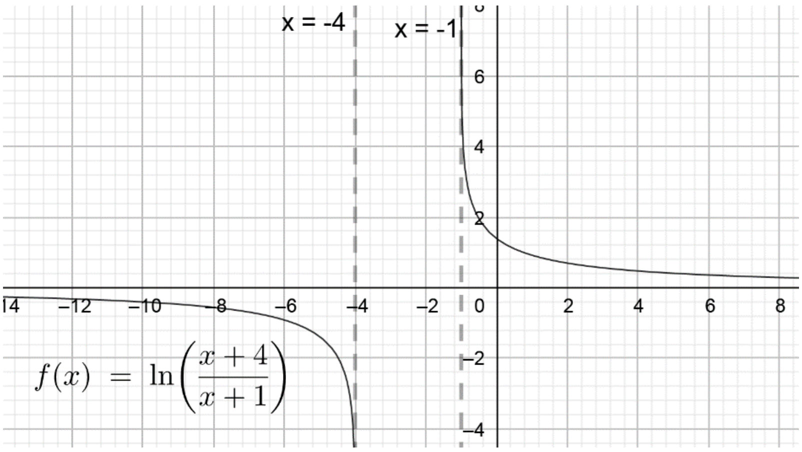
$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-1^+}f'(x)=-\infty$;

$f'(x)=log(x+1)+1$;

minimo $N(e^{-1}-1;-e^{-1})$;

$f''(x)=\frac{1}{x+1}$;convessa in$(-1;+\infty)$.

***24. S.**



Dominio E= $(-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$;

$f(x) > 0 \ \ \forall x \in (-1; +\infty)$;

asintoto sinistro $x = -4$;

asintoto destro $x = -1$;

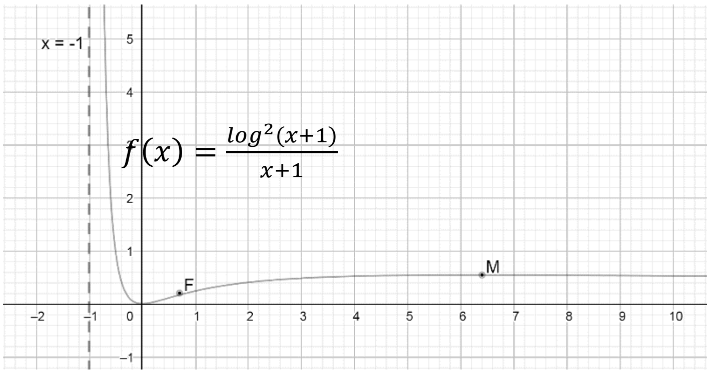
asintoto orizzontale $y = 0$;

$f'(x) = -\frac{3}{(x+1)(x+4)}$;

decrescente in $(-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$;

$f''(x) = \frac{3(2x+5)}{[(x+1)(x+4)]^2}$; concava in$(-\infty; -4)$; convessa in $(-1; +\infty)$

***25. S.**Dominio E= $(-1; +\infty)$;



intersezione con gli assi (0;0);

asintoti $x = -1; y = 0$;

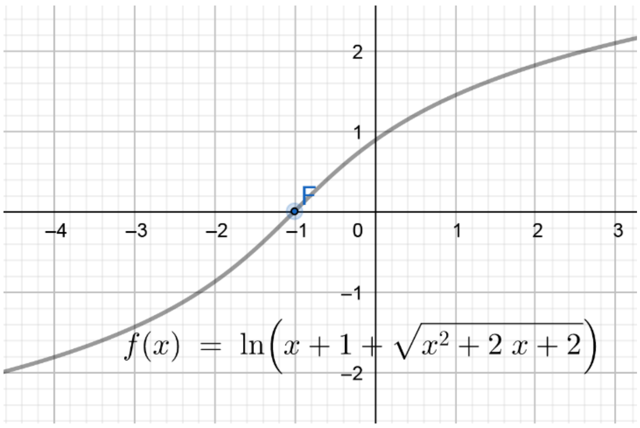
$f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in E$;

$f'(x) = \frac{2log(x+1) - log^2(x+1)}{(x+1)^2}$;

minimo O (0;0); massimo$M\left(e^2 - 1; \frac{4}{e^2}\right)$;

$f''(x) = 2\frac{log^2(x+1) - 3\log(x+1) + 1}{(x+1)^3}$; flessi$\left(-1 + e^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}; \left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 e^{-\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}\right)$

***26. S.**Dominio E=$\mathbb{R}$; f(x)>0$\forall x \in (-1; +\infty)$;



intersezioni con gli assi (-1;0); (0 ; log(1+$\sqrt{2}$),

crescente in $\mathbb{R}$; flesso F (-1;0).

Il grafico è simmetrico rispetto al punto (-1;0).

Infatti, operata la traslazione che porta (-1;0) nell'origine, la funzione diventa

$g(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ simmetrica rispetto all'origine,

poiché $g(-x) = \log\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) = log\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = -g(x)$.

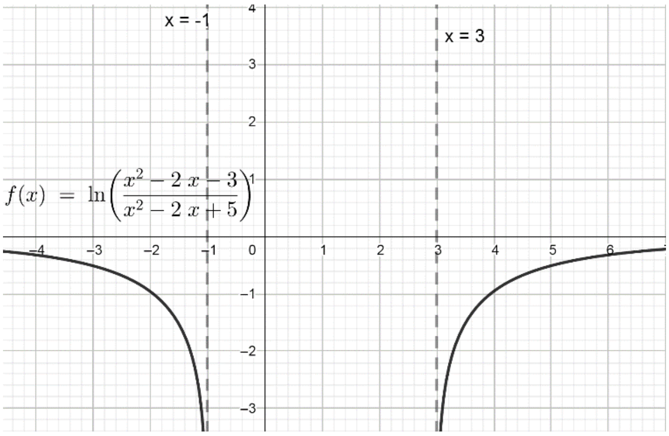
***27. S.** Dominio E= $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$;

$f(x) < 0\ \forall x \in E$; asintoto sinistro $x = -1$;

asintoto destro $x = 3$;asintoto orizzontale $y = 0$;

$f'(x) = \frac{16(x-1)}{(x^2-2x-3)(x^2-2x+5)}$;

decrescente in$(-\infty; -1)$; crescente in$(3; +\infty)$.



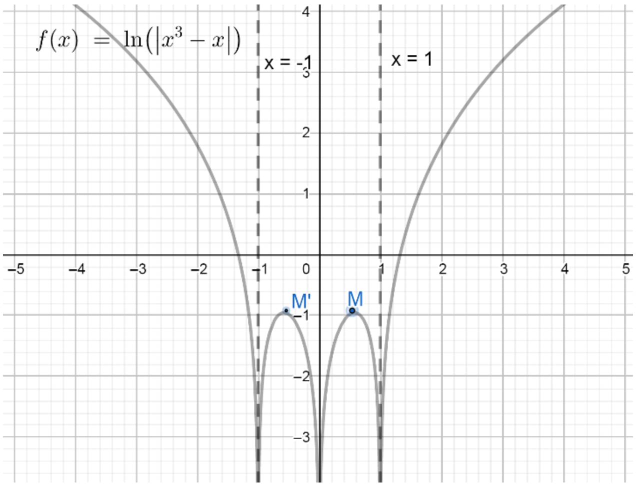
***28. S.**Dominio E=$\mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$; funzione pari ,

grafico simmetrico rispetto all'asse y;

asintoti verticali $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$;

$f'(x) = \frac{3x^2-1}{x^3-x}\quad \forall x \in$ E ;

Massimi $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}; log\,\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$; concava $\forall x \in$ E



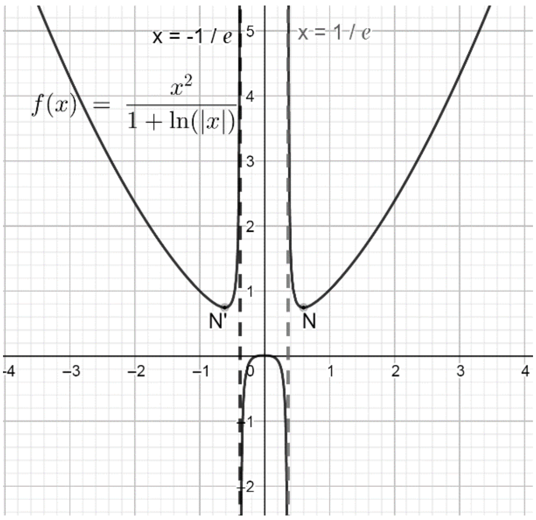
***29. S.**Dominio E=$\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{e}; 0; \frac{1}{e}\right\}$; funzione pari ;

grafico simmetrico rispetto all'assey

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$; asintoti verticali $x = -\frac{1}{e},\ x = \frac{1}{e}$;

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(2log(-x)+1)}{\left(1+log(-x)\right)^2} & per\ x < 0 \\ \dfrac{x(2log(x)+1)}{\left(1+log(x)\right)^2} & per\ x > 0 \end{cases}$$

minimi $N'\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}; \frac{2}{e}\right)$, $N\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; \frac{2}{e}\right)$.



***30. S.**Definita, continua, derivabile in I

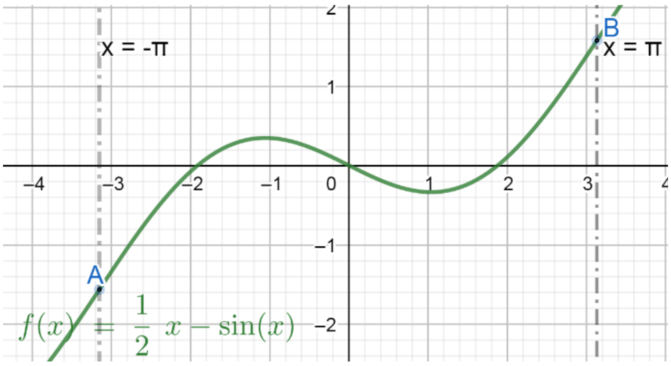
Funzione dispari,

$f'(x) = \frac{1}{2} - cosx$;

Punto di massimo $x = -\frac{\pi}{3}$, M$\left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Punto di minimo $x = \frac{\pi}{3}$, N$\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$f''(x) = sinx$; Flesso O(0;0)

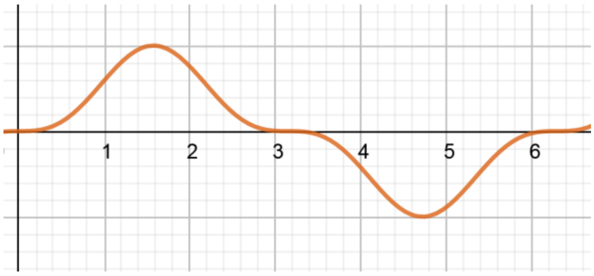


***31. S.** Definita, continua ,

$f'(x) = 3sin^2x \cdot cosx$;

derivabile in I ;

Punto di massimo $x = \frac{\pi}{2}$, M$\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$



Punto di minimo $x = \frac{3\pi}{2}$, N$\left(\frac{3\pi}{2}; -1\right)$, Flesso con tangente orizzontale (π;0)

***32. S.**Definita, continua in I ,

funzione dispari;

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2$, derivabile in I ;

Punto di massimo $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, M$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right)$

Punto di minimo $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, N$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$

$f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; flesso O(0;0)