4. Combinazioni lineari di serie

Se **entrambe** le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

convergono e $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$, allora :

1) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ **converge** e ha somma $S = A + B$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **converge** e ha somma $S = cA$ ($c \in \mathbb{R}$)

Se una delle due **non converge** e l'altra **converge** allora

3) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ **non converge.**

Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **diverge** e $c \neq 0$, allora anche

4) $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ **diverge**

Se **entrambe** le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

non convergono, la serie somma $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ **può convergere come può non convergere.**

Esempi

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k+2^k}{7^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^k$

entrambe convergenti, perché serie geometriche di ragione rispettive $\frac{5}{7}$ e $\frac{2}{7}$ e somme rispettive $\frac{5}{2}$ e $\frac{2}{5}$, perciò $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k+2^k}{7^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^k = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = \frac{29}{10}$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{5^k}\right)$

non converge perché somma tra la serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)$ divergente e la serie geometrica $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k}\right)$ convergente.

3) Considerata la somma delle due serie $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{4}{3}\right)^k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{3}{4}\right)^k$ entrambe divergenti essendo $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{4}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k log\left(\frac{4}{3}\right)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{3}{4}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k log\left(\frac{3}{4}\right)$, si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(log\left(\frac{4}{3}\right)^k + \log\left(\frac{3}{4}\right)^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k \log 1$$

evidentemente convergente e con somma 0.