6. Confronto di successioni infinite

Le successioni di termini generali

$$\log_a n \qquad n^\alpha \qquad a^n \qquad n! \qquad n^n \qquad (a>1\,,\alpha>0\,)$$

sono ordinate in ordine di infinito crescente, ciò significa che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

Quindi nei limiti che seguono occorre osservare qual è l'infinito di ordine superiore.

Esempi

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4}{5^n}=0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=+\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_3 n}{4^n}=0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!-4^n}{2^n-n^n}$

mettendo in evidenza a numeratore e denominatore gli infiniti di ordine più elevato, si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!-4^n}{2^n-n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\left(1-\frac{4^n}{n!}\right)}{n^n\left(\frac{2^n}{n^n}-1\right)}=-\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n+n}{5^n}$

*2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}+3^n}{n!}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{log_3 n+sinn}{\sqrt[3]{n}}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n-sinn}{n^2}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_2 n}{n^3}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n!}{2^n(n+1)!}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^3}+n^4}{7^n}$

*8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{log\frac{1}{n}}{n}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+n^3}{5^n+n^n}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{n^2}+n}{ne^n+n^2}$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n+logn}{2^n}$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_2 n-2^n}{n^4+n^n}$

*13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-5^n}{4^n+6^n}$

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-5^n}{n^4+5^n}$

*15) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+5^n}{(-4)^{n+1}+5^{n+1}}$

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+n!}{(n+1)!}$

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n^2}+n!}{3^n+n^3}$

18) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n(n^2+logn)}{2n!n^2}$

*19) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n-2}+(n-3)^n}{n^n-n!}$

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n-4}+(n-1)^n}{5n^n-2n!}$

$*$ 21) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n+3^n}{6^{n\log_6 n}-n!}$

$*$ 22) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$;

$*$ 23) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{n^2}{n^n}\right)^{n!}$

24) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n!}\right)^{n^n}$

*25) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

26) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}$

Soluzioni

1. S. $+\infty$;

$*$ **2. S.** $+\infty$;($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}+3^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{n!} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = +\infty + 0 = +\infty$) ;

3. S. 0 ; **4. S.** $+\infty$; **5. S.** 0 ; **6. S.** 0 ; **7. S.** 0 ;

***8. S.** 0; ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{log\frac{1}{n}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-logn}{n} = 0$) ;

9. S. 0 ; **10. S.** $+\infty$; **11. S.** $+\infty$; **12. S.** 0;

***13. S.** 0 ; ($\frac{2^n-5^n}{4^n+6^n} = \frac{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n-1\right)}{6^n\left(\left(\frac{4}{6}\right)^n+1\right)}$ ...) ;

14. S. -1 ;

***15. S.** $\frac{1}{5}$; ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-3)^n+5^n}{(-4)^{n+1}+5^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n\left(\left(-\frac{3}{5}\right)^n+1\right)}{5^{n+1}\left(\left(-\frac{4}{5}\right)^{n+1}+1\right)} = \frac{1}{5}$) ;

16. S. 0; **17. S.** $+\infty$; **18. S.** $+\infty$;

19. S. $\frac{1}{e^3}$;

($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{n-2}+(n-3)^n}{n^n-n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n\left(\frac{1}{n^2}+\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)}{n^n\left(1-\frac{n!}{n^n}\right)} = e^{-3}$, poiché $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{3}}\right)^{-\frac{n}{3}}\right]^{-3} = e^{-3}$);

20. S. $\frac{1}{5e}$;

***21. S.** 1; ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n+3^n}{6^{n\log_6 n}-n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n+3^n}{n^n-n!} = 1$);

***22. S.** $+\infty$; ($\frac{(2n)!}{n^n} = \frac{2n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} \cdot \ldots \frac{n+1}{n} \cdot n! > n!$) ;

***23 S.** 1 ; ($\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2}{n^n}\right)^{n!} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^{n-2}}\right)^{n^{n-2}\cdot}\right]^{\frac{n!}{n^{n-2}}} = e^0 = 1$ poiché $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n-2}} = 0$);

24. S. $+\infty$;

***25. S.** 1 ; ($\sqrt[n]{n} = e^{\log\sqrt[n]{n}} = e^{\frac{\log n}{n}}$ ...) ;

***26 S.** 1 ; ($\sqrt[n]{n^2+1} = e^{\frac{1}{n}\log(n^2+1)}$ ...) ;