4.Integrazione per sostituzione

Esempi

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$

Posto $\sqrt[6]{x}=t$, si ha $x=t^6$, $dx=6t^5dt$, da cui , sostituendo, l'integrale diventa:

$\int \frac{1}{t^3-t^2}\cdot 6t^5dt = 6\int \frac{t^3}{t-1}dt = 6\int \frac{t^3-1+1}{t-1}dt =$

$=6\int \left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = 2t^3+3t^2+6t+6log|t-1|+c$

Ne segue che

$\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx = 2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6log\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+c.$

2. $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx$

Posto $e^x=t$, si ha $x=logt$, $dx=\frac{1}{t}dt$, da cui , sostituendo, l'integrale diventa:

$\int \frac{t^3}{1+t^2}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt = \int dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt = t - arctgt + c$

Ne segue che

$\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx = e^x + arctge^x + c$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Calcolare i seguenti integrali utilizzando le sostituzioni indicate accanto:

*1. $\int x\sqrt{x+1}dx$	$\sqrt{x+1}=t$	*2. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$	$\sqrt{x+1}=t$
*3. $\int \frac{x}{\sqrt{x}-1}dx$	$\sqrt{x}=t$	4. $\int \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}dx$	$\sqrt{x}=t$
5. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$	$\sqrt{x}=t$	6. $\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}dx$	$\sqrt{x}=t$
7. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx$	$\sqrt[4]{x}=t$	8. $\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}dx$	$\sqrt[3]{x}=t$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$	$\sqrt[4]{x}=t$	*10. $\int \frac{1}{e^x+1}dx$	$e^x=t$
11. $\int \frac{e^{3x}}{1+e^x}dx$	$e^x=t$	12. $\int \frac{e^x}{e^{2x}-6e^x+5}dx$	$e^x=t$
13. $\int \frac{e^x}{e^{2x}-4e^x+3}dx$	$e^x=t$	14. $\int \frac{1}{x(log^2x-1)}dx$	$logx=t$

15. $\int \frac{logx}{x(log^2x+3logx-4)}dx \qquad logx = t$ $\qquad$ * 16. $\int \sqrt{e^x+1}dx \qquad \sqrt{e^x+1} = t$

17. $\int \frac{1}{6\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}-5}\, dx \qquad \sqrt[4]{x} = t$ $\qquad$ 18. $\int \frac{x+4}{\sqrt{x-2}}dx \qquad \sqrt{x-2} = t$

19. $\int \frac{ctg(logx)}{x}dx \qquad logx = t$ $\qquad$ *20. $\int \frac{1}{-x+\sqrt{x^2-4}}dx \qquad \sqrt{x^2-4} = x+t$

*21. $\int \frac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}dx \qquad \sqrt{9x^2+1} = -3x+t$

22. $\int \frac{1}{-2x+\sqrt{4x^2+5}}dx \qquad \sqrt{4x^2+5} = 2x+t$

I seguenti esercizi, contrassegnati con ■, già risolti precedentemente nel par.2, vengono qui riproposti affinché vengano risolti utilizzando la sostituzione a fianco indicata:

■ 23. $\int \sin(4x)\, dx \qquad 4x = t$ $\qquad$ ■24. $\int \cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)dx \qquad 3x-\frac{\pi}{3} = t$

■ 25. $\int \frac{x}{sin^2(2x^2+1)}dx \qquad 2x^2+1 = t$ $\qquad$ ■26. $\int e^{2x}dx \qquad 2x = t$

■27. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{e^x}} \qquad \frac{x}{3} = t$ $\qquad$ ■28. $\int xe^{-x^2}dx \qquad x^2 = t$

■ 29. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx \qquad \frac{1}{x} = t$ $\qquad$ ■ 30. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad \sqrt{x} = t$

■31. $\int cosx \cdot e^{sinx}dx \qquad sinx = t$ $\qquad$ ■ 32. $\int \frac{xe^{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}dx \qquad \sqrt{1+x^2} = t$

■33. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx \qquad e^x = t$ $\qquad$ ■34. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-log^2x}}dx \qquad logx = t$

■35. $\int \frac{sinx\cdot cosx}{\sqrt{2-sin^4x}}dx \qquad sin^2x = t$ $\qquad$ ■ 36. $\int \frac{2e^x}{e^{2x}+1}dx \qquad e^x = t$

■37. $\int cosx \cdot sin^4xdx \qquad sinx = t$ $\qquad$ ■ 38. $\int sinx \cdot \sqrt{cosx}dx \qquad cosx = t$

■* 39. $\int \frac{cosx}{(2-sinx)^2}dx \qquad sinx = t$ $\qquad$ ■*40. $\int \frac{sinx}{cos^3x}dx \qquad cosx = t$

■41. $\int sinx\sqrt{cosx+1}dx \qquad cosx = t$ $\qquad$ ■ 42. $\int \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad arcsinx = t$

■43. $\int \frac{arcsin^2x}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad arcsinx = t$ $\qquad$ ■ 44. $\int \frac{logx}{x\sqrt{1-log^2x}}dx \qquad logx = t$

■45. $\int tgx\sqrt{log(cosx)}dx \qquad log(cosx) = t$

■ 46. $\int \frac{arccosx+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int -\frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = \cdots$

Nel primo integrale porre $arccosx = t$, nel secondo $1-x^2 = z$

■ 47. $\int \frac{2}{3-5x}dx \qquad 3-5x = t$ $\qquad$ ■48. $\int \frac{x^2}{x^3-1}dx \qquad x^3-1 = t$

■ 49. $\int \frac{sin2x}{4+sin^2x}dx \qquad 4+sin^2x = t$ $\qquad$ ■50. $\int \frac{e^x}{e^x+3}dx \qquad e^x+3 = t$

■51. $\int \frac{tgx}{log(cosx)}dx$ $\quad log(cosx) = t$

■ 52. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx$ $\quad \sqrt{x}+1 = t$

Sostituzioni con funzioni trigonometriche

Calcolare i seguenti integrali utilizzando le sostituzioni indicate accanto :

*53. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ $\quad x = asint$

54. $\int \sqrt{3-4x^2}\,dx$ $\quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}sint$

55. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\quad x = sint$

*56. $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$ $\quad x = tgt$

57. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$ $\quad x = tgt$

Per risolvere i seguenti integrali si possono utilizzare le formule:

posto $tgx = t$ si ha $x = arctgt$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$sinx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} , \qquad cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} ,$$

*58. $\int \frac{1}{1+cos^2x}dx$ $\quad tgx = t$

59. $\int \frac{1-tgx}{1+tgx}dx$ $\quad tgx = t$

*60. $\int \frac{1}{2cos^2x+1}dx$ $\quad tgx = t$

61. $\int \frac{1}{2sin^2x+3cos^2x}dx$ $\quad tgx = t$

62. $\int \frac{1}{sin^2x+3sinx\cdot cosx}dx$ $\quad tgx = t$

*63. $\int \frac{2-3sin^2x}{1+cos^2x}dx$ $\quad tgx = t$

Per risolvere integrali del tipo

$$\int \frac{1}{asinx + bcosx + c}dx$$

porre

$$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

poi sostituire :

$$tg\frac{x}{2} = t \quad \Rightarrow \quad x = 2arctgt , \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Esempi

1. $\int \frac{1}{sinx}dx$. Sostituendo si ottiene $\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = log|t| + c$, quindi

$$\int \frac{1}{sinx}dx = log\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$$

2. $\int \frac{1}{cosx}dx$. Sostituendo si ottiene $\int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1-t^2}dt = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} = log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c,$

quindi $\int \frac{1}{cosx}dx = log\left|\frac{tg\frac{x}{2}-1}{tg\frac{x}{2}+1}\right| + c$

Esercizi

64. $\int \frac{dx}{2+cosx}$ $tg\frac{x}{2}=t$

65. $\int \frac{1}{sinx+cosx}dx$ $tg\frac{x}{2}=t$

*66. $\int \frac{cosx}{1-cosx}dx$ $tg\frac{x}{2}=t$

67. $\int \frac{1}{2sinx+cosx+3}dx$ $tg\frac{x}{2}=t$

68. $\int \frac{1+2cosx}{sinx(1-cosx)}dx$ $tg\frac{x}{2}=t$

Sostituzioni con funzioni iperboliche

69. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$ $x=acosh\,t$ **S.** $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2log\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)\right)+c;$

70. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$ $x=asinh\,t$ **S.** $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2log\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)\right)+c;$

Esempi

1. $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$

1° metodo

Posto $x=2cosht$, si ha $dx=2sinht\;dt$.

Ricordando che $cosh^2t-sinh^2t=1$, $sinht=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$sostituendo si ha:

$\int \sqrt{4cosh^2t-4}\cdot 2sinht\;dt$ $=4\int sinh^2t\;dt$ $=4\int\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2dt=\int(e^{2t}+e^{-2t}-2)dt=$

$=\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}-2t+c$

Poiché $sinht=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ e $cosht=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ si ha

$\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}=2\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}=2\;cosht\cdot sinht=2\frac{x}{2}\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}$

Da $x=2cosht$ si ha $cosht=\frac{x}{2}$. Il coseno iperbolico non è monotono in $\mathbb{R}$, occorre restringere il suo dominio all'insieme dei reali ≥0, perciò risulta

$\frac{x}{2}=cosht=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\rightarrow x=e^t+e^{-t}\rightarrow e^{2t}-xe^t+1=0\rightarrow e^t=\frac{x\pm\sqrt{x^2-4}}{2}\rightarrow t=\log\left(\frac{x\pm\sqrt{x^2-4}}{2}\right),$

Quindi, dovendo essere $t\geq 0$, è accettabile solo $t=\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)$, pertanto si ha :

$$\int \sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right) + c = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\log\left(x+\sqrt{x^2-4}\right) + c'$$

2° metodo

Posto $\sqrt{x^2-4} = x+t$ si ha $x^2-4 = x^2+2xt+t^2 \rightarrow x = \frac{-4-t^2}{2t}$, $dx = \frac{4-t^2}{2t^2}dt$, sostituendo si ottiene:

$\int\left(\frac{-4-t^2}{2t}+t\right)\frac{4-t^2}{2t^2}dt = -\frac{1}{4}\int\frac{t^4+16-8t^2}{t^3}dt = -\frac{1}{8}t^2 + 2\frac{1}{t^2} + 2log|t|$+c

Quindi

$\int \sqrt{x^2-4}\,dx = -\frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)^2 + 2\frac{1}{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)^2} + 2log\left|\sqrt{x^2-4}-x\right|$+c

Che coincide con il risultato precedente se si tiene conto che $\sqrt{x^2-4}-x = \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}$ e si fanno le opportune semplificazioni.

2. $\int \sqrt{x^2+5}\,dx$

Posto $x = asinh\,t$, con un procedimento analogo al 1° metodo dell'esempio 1 si previene alla soluzione

$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+5} + 5log\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)\right) + c$

Analogamente, seguendo il 2° metodo, posto $\sqrt{x^2+5} = x+t$, si perviene alla stessa soluzione.

Esercizi

69. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx \quad x = sinh\,t$

70. $\int \sqrt{x^2-3}\,dx \quad x = \sqrt{3}cosht$

<u>Soluzioni</u>

***1. S.** Posto $\sqrt{x+1} = t$, si ha $x = t^2-1, dx = 2tdt$ da cui, sostituendo:

$\int (t^2-1)\cdot t\cdot 2tdt = \cdots. = \frac{2}{15}(3t^5-5t^3)+c, \int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{15}(x+1)(3x-2)\sqrt{x+1}$+c;

***2. S.** Posto $\sqrt{x+1} = t$, si ha $x = t^2-1, dx = 2tdt$ da cui, sostituendo:

$\int\frac{t^2-1}{t}2tdt$……..$\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2)+c;$

***3. S.** Posto $\sqrt{x} = t$, si ha $x = t^2, dx = 2tdt$, da cui, sostituendo:$\int\frac{t^2}{t-1}2tdt = 2\int\frac{t^3}{t-1}dt =$

$=2\int\left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=\cdots\int\frac{x}{\sqrt{x}-1}dx=2log\left(\sqrt{x}-1\right)+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+2\sqrt{x}+c;$

4. S. $-4log\left(\sqrt{x}-1\right)-\frac{\sqrt{x}}{3}\left(2x+3\sqrt{x}+12\right)+c;$ **5. S.** $2\sqrt{x}-2\log\left(\sqrt{x}+1\right)+c$;

6. S. $x-4\sqrt{x}+8\log\left(2+\sqrt{x}\right)+c$;

7. S. $-4\log\left|\sqrt[4]{x}-1\right|-\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-x-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+c$;

8. S. $\frac{3}{2}\log\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)+c$; **9. S.** $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4log\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+c;$

***10. S.** Posto $e^x=t$, si ha $x=logt$, $dx=\frac{1}{t}dt$, da cui , sostituendo,

$\int\frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\cdots\int\frac{1}{e^x+1}dx=x-log(e^x+1)+c;$

11. S. $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+log(1+e^x)+c;$ **12. S.** $\frac{1}{4}log\left|\frac{e^x-5}{e^x-1}\right|+c;$

13. S. $\frac{1}{2}log\left|\frac{e^x-3}{e^x-1}\right|+c;$ **14. S.** $\frac{1}{2}log\left[\frac{logx-1}{logx+1}\right]+c;$

15. S. $\frac{1}{5}[4log|logx+4|+log|logx-1|]+c;$

***16. S.** $\int\sqrt{e^x+1}dx$, posto $\sqrt{e^x+1}=t$ si ha $e^x=t^2-1\rightarrow x=log(t^2-1)\rightarrow dx=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{dt}$

Da cui, sostituendo, si ha $2\int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{dt}=2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\mathrm{dt}=2\mathrm{t}+2\int\frac{1}{t^2-1}\mathrm{dt}=\cdots=2\mathrm{t}+\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\mathrm{c}$

pertanto. $\int\sqrt{e^x+1}dx=2\sqrt{e^x+1}+\log\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+\mathrm{c}=2\sqrt{e^x+1}+\log\left|\frac{\left(\sqrt{e^x+1}-1\right)^2}{e^x}\right|+c=$

$=2\sqrt{e^x+1}+2log\left(\sqrt{e^x+1}-1\right)-x+c;$

17. S. $-125log\left|\sqrt[4]{x}-5\right|+log\left|\sqrt[4]{x}-1\right|-2\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}+12\right)+c;$

18. S. $\frac{2}{3}(x+16)\sqrt{x-2}+c$; **19. S.** $log|\sin(logx)|+\mathrm{c};$

***20. S.** Posto $\sqrt{x^2-4}=x+t\ \Rightarrow\ x^2-4=x^2+2xt+t^2\Longrightarrow x=\frac{-4-t^2}{2t}$

$dx=\frac{4-t^2}{2t^2}dt\ldots\ \int\frac{1}{t}\cdot\frac{4-t^2}{2t^2}dt\ =\ldots\ \int\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-4}}dx=-\frac{1}{2}\log\left|\sqrt{x^2-4}-x\right|-\frac{1}{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)^2}+\mathrm{c};$

***21. S.** Posto $\sqrt{9x^2+1}=-3x+t\Rightarrow 9x^2+1=9x^2-6xt+t^2\Longrightarrow x=\frac{t^2-1}{6t}$

$dx=\frac{t^2+1}{6t^2}dt\ldots\int\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2+1}{6t^2}dt=\cdots\int\frac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}dx=\frac{1}{6}\log\left|\sqrt{9x^2+1}+3x\right|-\frac{1}{12}\frac{1}{\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)^2}+\mathrm{c};$

22. S. $-\frac{1}{4}\log\left|\sqrt{4x^2+5}-2x\right|+\frac{5}{8}\frac{1}{\left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right)^2}+\mathrm{c};$

23.S. $-\frac{1}{4}\cos(4x)+c;$ **24. S.** $\frac{1}{3}sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+c;$ **25. S.** $-\frac{1}{4}ctg(2x^2+1)+c;$

26. S. $\frac{1}{2}e^{2x}+c$; **27. S.** $-3e^{-\frac{x}{3}}+c;$ **28. S.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c;$

29. S. $-e^{\frac{1}{x}}+c;$ **30. S.** $2e^{\sqrt{x}}+c;$ **31. S.** $e^{sinx}+c;$

32.S. $e^{\sqrt{1+x^2}}+c;$ **33. S.** $arcsin(e^x)+c;$ **34. S.** $arcsin(logx)+c;$

35. S. $\frac{1}{2}arcsin\left(\frac{\sqrt{2}sin^2x}{2}\right)+c;$ **36. S.** $2arctg(e^x)+c;$ **37. S.** $\frac{1}{5}sin^5x+c;$

38. S. $-\frac{2}{3}cosx\cdot\sqrt{cosx}+c;$

***39 S.** $\int\frac{cosx}{(2-sinx)^2}dx$ posto $sinx=t$ si ha $cosxdx=dt$ da cui , sostituendo, si ha

$\int\frac{1}{(2-t)^2}dt=\frac{1}{2-t}+c$, quindi $\int\frac{cosx}{(2-sinx)^2}dx=\frac{1}{2-sinx}+c;$

***40.S.** $\int\frac{sinx}{cos^3x}dx=-\int -sinx\cdot cos^{-3}xdx=\cdots$ posto $cosx=t$ si ha $-sinxdx=dt$, da cui sostituendo si ha $-\int\frac{dt}{t^3}=\frac{1}{2t^2}+c$, quindi

$\int\frac{sinx}{cos^3x}dx=\frac{1}{2cos^2x}+c=\frac{sin^2x+cos^2x}{2cos^2x}+c=\frac{1}{2}tg^2x+\frac{1}{2}+c=\frac{1}{2}tg^2x+c';$

41. S. $-\frac{2}{3}(cosx+1)\sqrt{cosx+1}+c;$ **42. S.** $\frac{1}{2}arcsin^2x+c;$

43. S. $\frac{1}{3}arcsin^3x+c;$ **44. S.** $-\sqrt{1-log^2x}+c;$

45. S. $-\frac{2}{3}log(cosx)\sqrt{log(cosx)}+c;$ **46. S.** $-\frac{1}{2}arccos^2x-\sqrt{1-x^2}+c;$

47. S. $-\frac{2}{5}log|3-5x|+c;$ **48. S.** $\frac{1}{3}log|x^3-1|+c;$ **49. S.** $log(4+sin^2x)+c;$

50. S. $log(e^x+3)+c;$ **51. S.** $-log|log(cosx)|+c;$ **52. S.** $2log(\sqrt{x}+1)+c;$

Sostituzioni con funzioni trigonometriche

***53. S.** $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ posto $x=asint$ si ha $dx=acost\,dt$ da cui sostituendo

$\int\sqrt{a^2-(asint)^2}\,acost\,dt=a^2\int cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos(2t))dt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}sin2t+c=$

$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}sintcost+c$, quindi $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(a^2arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+c$;

54. S. $\frac{1}{4}\left(3arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)+2x\sqrt{3-4x^2}\right)+c;$ **55. S.** $\frac{1}{2}\left(arcsinx-x\sqrt{1-x^2}\right)+c;$

***56. S.** $\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$, posto $x=tgt$, $dx=(1+tg^2t)dt$ da cui sostituendo ,si ottiene

$\int\frac{1}{\sqrt{(tg^2t+1)^3}}(1+tg^2t)dt=\int cost\,dt=\sin t+c=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}+c$,quindi $\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c;$

57. S. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c;$

***58.S** Sostituendo si ottiene $\int\frac{1}{1+\frac{1}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{2+t^2}=\cdots$, $\int\frac{1}{1+cos^2x}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot tgx\right)+c;$

59. S. $\frac{1}{2}log\frac{(tgx+1)^2}{tg^2x+1}+c=log|sinx+cosx|+c;$

***60. S.** Sostituendo si ottiene $\int\frac{1}{\frac{2}{1+t^2}+1}\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{3+t^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)+c$, quindi

$\int\frac{1}{2cos^2x+1}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}tgx\right)+c;$

61. S. $\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\left(\frac{\sqrt{6}}{3}tgx\right)+c$; **62. S.** $\frac{1}{3}log\left|\frac{tgx}{tgx+3}\right|+c;$

***63. S.** Sostituendo si ottiene $\int\frac{2-t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}dt$ =(scomponendo $\frac{2-t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}=\frac{A}{1+t^2}+\frac{B}{2+t^2}$

si ha $\mathrm{A}=3$, $\mathrm{B}=-4$) $=3\int\frac{dt}{1+t^2}-4\int\frac{dt}{2+t^2}=3\,arctgt-2\sqrt{2}arctg(\frac{1}{\sqrt{2}}t)+\mathrm{c}$ da cui

$\int\frac{2-3sin^2x}{1+cos^2x}dx=3x-2\sqrt{2}arctg(\frac{1}{\sqrt{2}}tgx)+c$

64. S. $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}tg\frac{x}{2}\right)+c;$ **65. S.** $\frac{\sqrt{2}}{2}log\left|\frac{tg\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1}{tg\frac{x}{2}-\sqrt{2}-1}\right|+c;$

***66. S.** Sostituendo si ha $\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1-t^2}{t^2(1+t^2)}dt=\Big($scrivere la frazione $\frac{A}{t^2}+\frac{B}{1+t^2}\Big)=$

$=\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{2}{1+t^2}\right)=-\frac{1}{t}-2arctgt+c$ da cui $\int\frac{cosx}{1-cosx}dx=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}}-2arctg\left(tg\frac{x}{2}\right)+c=$

$=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}}-x+c;$

67. S. $arctg\left(tg\frac{x}{2}+1\right)+c;$ **68 S.** $-\frac{3}{4}ctg^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}log\left|tg\frac{x}{2}\right|+c.$

69. $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+5log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\right)+c$ **70.** $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-3}-3log\left(\sqrt{x^2-3}+x\right)\right)+c;$