4. Radici n-me di un numero complesso

Le radici n-sime del numero complesso

$$z = \rho(cos\vartheta + isin\vartheta)$$

sono n e si ottengono dalla formula

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\frac{\vartheta+2k\pi}{n} + isin\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)$$

con $k = 0,1,2, \dots, n-1$.

Se z è dato in forma esponenziale

$$z = \rho e^{i\vartheta}$$

allora

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}}$$

con $k = 0,1,2, \dots, n-1$.

Rappresentazione geometrica

Si osserva che le radici n-esime del numero complesso z di modulo ρ e argomento ϑ hanno tutte lo stesso modulo $\sqrt[n]{\rho}$, quindi si rappresentano sulla stessa circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\rho}$, Di queste radici una ha argomento $\frac{\vartheta}{n}$ e le altre sono distribuite lungo la circonferenza in modo che i loro argomenti differiscano dal precedente di $\frac{2\pi}{n}$. Quindi le radici n-sime del numero complesso si dispongono sulla circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\rho}$ come i vertici del poligono regolare inscritto di n lati in cui il primo vertice corrisponde all'argomento $\frac{\vartheta}{n}$.

Per esempio se $z = -8$, cioè $\rho = 8$, $\vartheta = \pi$, le radici cubiche sono date da

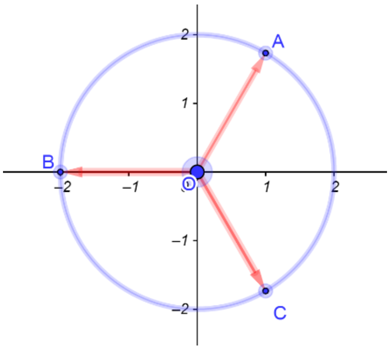
$$\omega_k = \sqrt[3]{-8} = 2\left(cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + isin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) \qquad k = 0,1,2$$

di cui

$\omega_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$ ⇢ A $(1; \sqrt{3})$

$\omega_1 = 2(cos\pi + isin\pi) = -2$ ⇢ B $(-2; 0)$

$\omega_2 = 2\left(cos\frac{5\pi}{3} + isin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$ ⇢ C $(1; -\sqrt{3})$



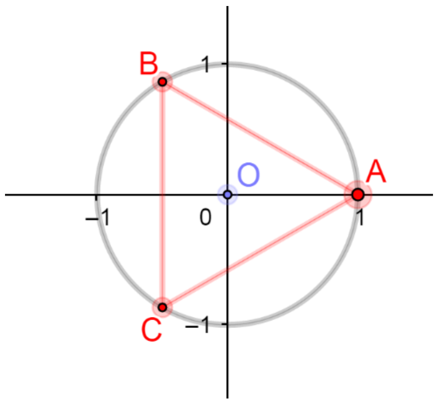
Si osserva che A, B, C sono vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio 2.

Radici n-me dell'unità

Nel caso particolare $z=1$, per il quale si ha modulo $\rho=1$ e anomalia $\vartheta=0$, le radici n-sime si dispongono sulla circonferenza di raggio 1 come i vertici del poligono regolare inscritto di n lati in cui il primo vertice è il punto A(1;0) corrispondente all'argomento $\vartheta=0$.

Per esempio, le radici cubiche dell'unità date da

$$\omega_k=\sqrt[3]{1}=2\left(cos\frac{2k\pi}{3}+isin\frac{2k\pi}{3}\right)\qquad k=0,1,2$$



si rappresentano come i vertici del triangolo equilatero ABC, essendo:

$\omega_0=(cos0+isin0)=1$ ⇢ A (1; 0)

$\omega_1=\left(cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⇢ B $(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\omega_2=\left(cos\frac{4\pi}{3}+isin\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⇢ C $(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2})$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Scrivere in forma trigonometrica e in forma esponenziale

***1.** $\sqrt[4]{3i}$ **2.** $\sqrt[4]{1-i}$

***3.** $\sqrt[5]{i+\sqrt{3}}$ ***4.** $\sqrt[4]{\frac{1-i\sqrt{3}}{i}}$

***5.** *Dato* $z=8+8i$ *, determinare le radici cubiche di* $\frac{1}{z}$ *.*

***6.** *Determinare le radici cubiche di* $z=\frac{(1+\sqrt{3}i)^4}{2i}$.

***7.** *Calcolare le radici cubiche di* $z=\frac{3+i}{-i+2}$.

8*. *Determinare le radici quarte di* $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

9. *Sia* $z=2e^{-\frac{\pi}{3}i}+2e^{\frac{\pi}{6}i}$

a) determinare modulo e anomalia

b) esprimere le radici quadrate di z *in forma esponenziale*

***10.** *Scrivere in forma trigonometrica e in forma esponenziale* $\sqrt[3]{-i\sqrt{i}}$

Soluzioni

***1. S.** $\sqrt[4]{3}\left(cos\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)$ = $\sqrt[4]{3}\ e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)}$ k=0,1,2,3 ;

$(z=3i,\ \rho=3\ ,\vartheta=\frac{\pi}{2};\ \sqrt[4]{3i}=\sqrt[4]{3}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}+isin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)$, k=0,1,2,3);

2. S. $\sqrt[8]{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)$ = $\sqrt[8]{2}\ e^{i\left(-\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2}\right)}$ k=0,1,2,3 ;

***3.S.** $\sqrt[5]{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{30}+k\frac{2\pi}{5}\right)+isin\left(\frac{\pi}{30}+k\frac{2\pi}{5}\right)\right)$ = $\sqrt[5]{2}\ e^{i\left(\frac{\pi}{30}+k\frac{2\pi}{5}\right)}$ k=0,1,2,3,4 ;

$(z=\sqrt{3}+i,\ \rho=2\ ,\vartheta=\frac{\pi}{6};\ \sqrt[5]{i+\sqrt{3}}=\sqrt[5]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}+isin\ \frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}\right)$ k=0,1,2,3,4…);

***4.S.** $\sqrt[4]{2}\left(cos\left(\frac{7\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{7\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)$ = $\sqrt[4]{2}\ e^{i\left(\frac{7\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right)}$ k=0,1,2,3 ;

($z=\frac{1-i\sqrt{3}}{i}=-\sqrt{3}-i\ ,\rho=2\ ,\vartheta=\frac{7\pi}{6}\ ;\ \sqrt[4]{-\sqrt{3}-i}=\sqrt[4]{2}\left(cos\frac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{4}+isin\frac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)\ldots$);

***5.S** $\sqrt[3]{\frac{1}{z}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+isin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),k=0,1,2;$

$\left(\frac{1}{z}=\frac{1-i}{16}=\frac{\sqrt{2}}{16}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\ldots\right)$

***6.S**. $2\left(cos\left(\frac{5}{18}\pi+\frac{2}{3}k\pi\right)+isin\left(\frac{5}{18}\pi+\frac{2}{3}k\pi\right)\right),k=0,1,2\ ;\left(z=\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^4}{2i}=\frac{2^4e^{\frac{4\pi}{3}i}}{2e^{\frac{\pi i}{2}}}=2^3e^{\frac{5\pi i}{6}}\ldots.\right)$

***7 S**. $\sqrt[3]{z}=\sqrt[6]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+isin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}e^{\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}\ ,k=0,1,2\ ;$

$\left(z=1+i=\sqrt{2}\ \left(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)\ldots\right)$

***8.S.** $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ ;\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;\quad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$(\ z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\rho=1,\vartheta=\frac{2}{3}\pi,\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=cos\frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{4}+isin\frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{4}\quad ,k=0,1,2,3)$

9.S.a) $\rho=2\sqrt{2}\ ;\vartheta=-\frac{\pi}{12}$ **b)** $\sqrt[4]{8}e^{i\left(-\frac{\pi}{24}+k\pi\right)}\ k=0,1;$

***10. S** Calcoliamo

$$\sqrt{i}=\begin{cases} cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\omega_1 \\ cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=\omega_2 \end{cases}$$

Risulta

$-i\omega_1 = -i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2},$

$-i\omega_2 = -i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

da cui

$\sqrt[3]{-i\omega_1} = cos\left(-\frac{\pi}{12} + k\,\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{12} + k\,\frac{2\pi}{3}\right) = e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}\right)}$ k= 0, 1, 2

$\sqrt[3]{-i\omega_2} = cos\left(\frac{\pi}{4} + k\,\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4} + k\,\frac{2\pi}{3}\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}\right)}$ k= 0, 1, 2.