2. Operazioni sui limiti – Limiti fondamentali

Tabelle con operazioni

$\boldsymbol{lim f(x)}$	$\boldsymbol{lim g(x)}$	$\boldsymbol{lim[f(x)+g(x)]}$	**Forma indeterminata**
l	l'	$l+l'$	
l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty-\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	

$\boldsymbol{lim f(x)}$	$\boldsymbol{lim g(x)}$	$\boldsymbol{lim[f(x)\cdot g(x)]}$	**Forma indeterminata**
l	l'	$l\cdot l'$	$0\cdot\infty$
$l\neq 0$	∞	∞	
∞	∞	∞	

$\boldsymbol{lim f(x)}$	$\boldsymbol{lim g(x)}$	$\boldsymbol{lim\dfrac{f(x)}{g(x)}}$	**Forme indeterminate**
l	$l'\neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$ e $\dfrac{0}{0}$
l	∞	0	
∞	$l'\neq 0$	∞	

Per **Forma indeterminata** si intende dire che la sola conoscenza dei limiti delle funzioni f e g non consente di determinare il limite della loro somma, prodotto o quoziente.

Tabella limiti fondamentali

Limite infinito all'infinito $(n \in N - \{0\})$	**Limite finito all'infinito** $(n \in N - \{0\})$	**Limite infinito In un punto** $(n \in N - \{0\})$
$\lim_{x \to \mp\infty} x^{2n} = +\infty$	$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} x^{2n+1} = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{x}} = 0$	$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} x^{2n+1} = -\infty$	$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{x}} = 0$	$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}} = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[2n]{x} = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$	$\lim_{x \to 0^+} logx = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[2n+1]{x} = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad (a > 1)$	$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \quad (a > 1)$
$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad (0 < \mathrm{a} < 1)$	$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty \quad (0 < a < 1)$
$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$	$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tgx = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} logx = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$	$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} tgx = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \quad (0 < a < 1)$	$\lim_{x \to +\infty} tghx = 1$	$\lim_{x \to 0^-} ctgx = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \quad (a > 1)$	$\lim_{x \to -\infty} tghx = -1$	$\lim_{x \to 0^+} ctgx = +\infty$
$\lim_{x \to \mp\infty} coshx = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} ctghx = 1$	$\lim_{x \to 0^-} ctghx = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} sinhx = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} ctghx = -1$	$\lim_{x \to 0^+} ctghx = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} sinhx = -\infty$		

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Calcolare i seguenti limiti, tenendo conto delle tabelle sulle operazioni sui limiti e della tabella sui limiti fondamentali:

*1) $\lim_{x\to-\infty}(\,cosx + x)$

*2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{sinx}{x+2}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{senx\cdot cosx}{x^2}$

4) $\lim_{x\to+\infty}(x - sinx)$;

5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sin(x)}{1-x^2}$

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{cos^2x}{\sqrt{x}+2}$

7) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 - 3sin\frac{1}{x}\right)$

*8) $\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x+1}{x}}$

*9) $\lim_{x\to0^+} e^{\frac{x+1}{x}}$

*10) $\lim_{x\to0^-} e^{\frac{x+1}{x}}$

11) $\lim_{x\to-\infty} log\frac{1-x}{x^2}$

12) $\lim_{x\to+\infty} log\sqrt{\frac{1}{x}}$

13) $\lim_{x\to0^+} log\sqrt{\frac{1}{x}}$

14) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x}$

15) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^3} - logx\right)$

16) $\lim_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}}$

17) $\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}$

18) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-e^x}$

19) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-e^x}$

*20) $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-e^x}$

*21) $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1-e^x}$

22) $\lim_{x\to+\infty}(\,x^3 + \log_2 x)$

23) $\lim_{x\to1}(x^2 + \log_2|x-1|)$

24) $\lim_{x\to1^+} -x^3\log(x-1)$

25) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{4+x^3}$

26) $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^3} + \frac{1}{x}\right)$

27) $\lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + x^4\right)$

28) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}sinx$

29) $\lim_{x\to-\infty} 2^{\frac{x}{2}}\cdot cos(2x-1)$

30) $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-3}{2^x+1}$

31) $\lim_{x\to0^+}\frac{3+2^x}{log^2x}$

32) $\lim_{x\to-\infty} e^{x^3-1}$

33) $\lim_{x\to+\infty} e^{arctgx}$

34) $\lim_{x\to-\infty}(x^2 - arctgx)$

35) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{1-x}\right)$

*36) $\lim_{x\to+\infty} arcsin\frac{x+1}{x}$

37) $\lim_{x\to 0^+}\left(arctg\frac{1}{x}-arccosx\right)$

38) $\lim_{x\to +\infty}(logx-e^{-x+1})$

39) $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot log\left(1+\frac{1}{x}\right)$

40) $\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot log|x|$

41) $\lim_{x\to -\infty} 4^{\sqrt[3]{x^3+1}}$

42) $\lim_{x\to 0^+}\frac{cos\sqrt{x}}{3\sqrt{x^2+x}}$

*43) $\lim_{x\to 0^\pm}\frac{|x-1|}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$

44) $\lim_{x\to +\infty}\frac{logx}{e^{-x}}$

45) $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{-2x}-1}{x}$

*46) $\lim_{x\to \infty} x^2 sinx$

*47) $\lim_{x\to \infty} e^{x^2} sinx$

48) $\lim_{x\to -\infty}(2^{arctgx}+\frac{1}{x^2})$

49) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} e^{tgx-1}$

50) $\lim_{x\to 4^-} 2^{\frac{1}{x-4}}$

51) $\lim_{x\to +\infty}\frac{arctgx}{e^{-x}}$

52) $\lim_{x\to -\infty}\frac{arctgx}{e^{\frac{1}{x}}}$

Limiti del tipo $[f(x)]^{g(x)}$

Limiti del tipo

$$\lim_{x\to x_0}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]^{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}$$

possono essere calcolati tenendo conto che si può scrivere

$$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]^{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{log}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]^{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}}=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{log}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]}$$

quindi risulta

$$\lim_{x\to x_0}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]^{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}=\boldsymbol{e}^{\lim_{x\to x_0}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{log}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]}$$

Le situazioni che si possono presentare sono indicate nella seguente tabella:

$f(x)>0$ $\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x)^{g(x)}$	**Forme indeterminate**
$l>0$	l'	$l^{l'}$	0^0
$+\infty$	$l'>0$	$+\infty$	∞^0
$+\infty$	$l'<0$	0	1^∞
$0<l<1$	$+\infty$	0	
$l>1$	$+\infty$	$+\infty$	
$0<l<1$	$-\infty$	$+\infty$	
$l>1$	$-\infty$	0	
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	0	
0	$+\infty$	0	
0	$-\infty$	$+\infty$	

Esercizi

*53) $\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ *54) $\lim_{x\to 0^-}\left(x+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

*55) $\lim_{x\to +\infty}(x^4-2x)^{\sqrt{x}}$ *56) $\lim_{x\to 0^+} sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)^{\frac{1}{2^x-1}}$

*57) $\lim_{x\to 0^-} sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)^{\frac{1}{2^x-1}}$ *58) $\lim_{x\to +\infty}(x^2+cosx)^{logx}$

*59) $\lim_{x\to 0^+}(arctgx)^{\frac{1}{x^2}}$ *60) $\lim_{x\to 0^+}(arctgx)^{-\frac{1}{x^2}}$

*61) $\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{2-x}$ *62) $\lim_{x\to \frac{1}{2}^-}(arccosx)^{e^{\frac{1}{2x-1}}}$

*63) $\lim_{x\to \frac{\sqrt{2}}{2}^+}(arcsinx)^{log\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ *64) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}\right)^{(x^3+sinx)}$

65) $\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}\right)^{(x^3+sinx)}$ *66) $\lim_{x\to 0^+}(sinx)^{logx}$

Soluzioni

*__1. S.__ $-\infty$; (la funzione $cosx$ è limitata in $\mathbb{R}$ essendo $|cosx| \leq 1$, mentre l'addendo x tende a$-\infty$, perciò la somma $(cosx + x)$ tende a $-\infty$);

***2. S.** 0; (la funzione $sinx$ a numeratore è limitata in $\mathbb{R}$ essendo $|sinx| \leq 1$,mentre il denominatore $x + 2$ tende a$+\infty$, perciò Il rapporto tende a 0);

3. S. 0 ; **4.S.** $+\infty$; **5.S.** 0 ; **6. S.** 0 ; **7.S.** $+\infty$;

***8 S.** e **(**Si ha $\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x+1}{x}} = e^{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e$) ;

***9. S.** $+\infty$ (Si ha $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{x+1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty$);

*__10 . S.__ 0 (Si ha $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{x+1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0$) ;

11. S. $-\infty$; **12.S.** $-\infty$; **13. S.** $+\infty$; **14. S.** 0 ; **15. S.** $+\infty$;

16. S. 0 ; **17. S.** 1; **18. S.** 0 ; **19. S.** 1 ;

***20 S.** $-\infty$ (per $x \to 0^+$, $1 - e^x$ è negativo e infinitesimo, perciò $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-e^x} = -\infty$);

***21 S.** $+\infty$ (per $x \to 0^-$, $1 - e^x$ è positivo e infinitesimo, perciò $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-e^x} = +\infty$);

22. S. $+\infty$; **23.S.** $-\infty$; **24. S.** $+\infty$; **25. S.** 0 ; **26.S.** $+\infty$;

27.S. $+\infty$; **28. S.** 0 ; **29.S.** 0 ; **30. S.** -3 ; **31. S.** 0 ;

32. S. 0 ; **33. S.** $e^{\frac{\pi}{2}}$; **34. S.** $+\infty$; **35. S.** $-\infty$;

***36. S.** $\frac{\pi}{2}$; (si può scrivere $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1\ldots$);

37.S. 0; **38.S.** $+\infty$; **39.S.** 0 ; **40.S.** $+\infty$; **41.S.** 0 ; **42.S.** $+\infty$;

* **43.S.** $\pm\infty$;(razionalizzando risulta $\frac{|x-1|}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}} = \frac{[x-1](\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} =$

$= \frac{[x-1](\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{2x}$ =...);

44.S. $+\infty$; **45. S.** 0 ;

* **46.S.** non esiste; (infatti $\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$, mentre $-1 \leq sinx \leq 1$, pertanto la funzione $x^2 sinx$ oscilla tra valori positivi sempre più grandi e valori negativi in valore assoluto sempre più grandi , quindi il limite non esiste);

* **47.S.** non esiste ; (vedi es. 46);

48. S. $2^{-\frac{\pi}{2}}$; **49. S.** 0; **50. S.** 0 ; **51.S.** $+\infty$; **52. S.** $-\frac{\pi}{2}$.

Limiti del tipo $[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]^{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}$

* **53. S.** 0 ; (si può anche scrivere $\left(x+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{log\left(x+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}log\left(x+\frac{1}{3}\right)}$, poiché

$\lim_{x\to 0} log\left(x+\frac{1}{3}\right) = log\frac{1}{3} < 0 \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}log\left(x+\frac{1}{3}\right) = -\infty$, quindi

$\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}log\left(x+\frac{1}{3}\right)} = 0$; si può anche notare che il limite si presenta nella forma $\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}$ e dalla tabella …);

***54. S.** $+\infty$;(dall'esercizio 53 , $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}log\left(x+\frac{1}{3}\right) = +\infty$ …; si può anche notare che il limite si presenta nella forma $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty}$ quindi dalla tabella si deduce…);

***55**. **S.** $+\infty$; (si ha $\lim_{x\to+\infty}(x^4-2x) = \lim_{x\to+\infty} x^4\left(1-\frac{2}{x^3}\right) = +\infty$ …);

* **56.S.** 0 ; (si ha $\lim_{x\to 0} sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, se $x > 0 \Rightarrow 2^x - 1 > 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2^x-1} = +\infty$ …);

***57.S.** $+\infty$; (tenendo conto dell'esercizio precedente se $x < 0 \Rightarrow 2^x - 1 < 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2^x-1} = -\infty$ …);

***58. S.** $+\infty$; (si può scrivere $\lim_{x\to+\infty}(x^2+cosx)^{logx} = e^{\lim_{x\to+\infty}(x^2+cosx)^{logx}} =$
$= e^{\lim_{x\to+\infty} logx(x^2+cosx)}$ tenendo conto che $-1 \le cosx \le 1$, $\lim_{x\to+\infty}(x^2+cosx) = +\infty$…;

notiamo che il limite è della forma $+\infty^{+\infty}$ pertanto dalla tabella risulta…);

* **59.S.** 0 ; ($\lim_{x\to 0^+} arctgx = 0^+$, $\lim_{x\to 0^+} log(\,arctgx) = -\infty$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$, pertanto
$\lim_{x\to 0^+}(arctgx)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0^+} log(arctgx)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\log(arctgx)}$ … ; osserviamo

anche che il limite è della forma $0^{+\infty}$ quindi dala tabella risulta…);

***60. S.** $+\infty$; (tenendo conto dell'esercizio 59 ,da $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ ….);

* **61. S.** 0; ($\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{3-x} = +\infty$, $\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{2-x} = e^{\lim_{x\to 3^-}(2-x)log\left(\frac{1}{3-x}\right)}$ …) ;

***62. S.** 1 ; ($\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}(arccosx)^{e^{\frac{1}{2x-1}}} = e^{\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} e^{\frac{1}{2x-1}}\log(arccosx)}$ 1, si ha

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} arccosx = \frac{\pi}{3}$, $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} e^{\frac{1}{2x-1}} = 0$ ...);

* **63.S.** $+\infty$; ($\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^+} (arcsinx)^{log\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = e^{\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^+} log\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)*log(arcsinx)}$, si ha

$\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^+} log\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\infty$, $\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}} arcsinx = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}} log(arcsinx) = log\frac{\pi}{4} < 0$...);

***64.S.** $+\infty$; (si può scrivere $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$ $\Rightarrow$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{3}{x-1}} = \sqrt{2}$ ...);

65.S. 0 ;

***66. S.** $+\infty$; ($\lim_{x\to 0^+} sinx = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \log(sinx) = -\infty$,

$\lim_{x\to 0^+} (sinx)^{logx} = e^{\lim_{x\to 0^+} logx*\log(sinx)} = \cdots$ .. ...; si può anche osservare che il limite è

della forma $0^{-\infty}$ ...);