3. L'equazione lineare $y' = a(x)y + b(x)$

Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Soluzione :

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} b(s) e^{-A(s)} ds$$

essendo

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s) ds$$

Esempio

Per la determinazione delle soluzioni dell'equazione

$$y' = -3x^2 y + x^2$$

si può preventivamente calcolare una primitiva $A(x)$ di $-a(x)$

$$A(x) = \int -a(x)dx = \int 3x^2 dx = x^3$$

e moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per il cosiddetto fattore integrante $e^{A(x)} = e^{x^3}$:

$$y' e^{x^3} + 3x^2 e^{x^3} y = x^2 e^{x^3}$$

Si osserva che il primo membro è la derivata di $y e^{x^3}$, perciò

$$\left(y e^{x^3}\right)' = x^2 e^{x^3} \rightarrow y e^{x^3} = \int x^2 e^{x^3} dx \rightarrow y e^{x^3} = \frac{1}{3} e^{x^3} + c$$

L'integrale generale è dunque

$$y = \frac{1}{3} + c e^{-x^3}$$

Esercizi

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

1. $y' = e^x - y$ **2.** $y' = 3x + y$ **3.** $y' + 2y = sinx$

4. $y' - y = e^{x+1}$ **5.** $y' - xy = xe^{x^2}$

Esercizi

Determinare l'integrale particolare delle seguenti equazioni differenziali che soddisfa la condizione iniziale:

6. $\begin{cases} y' + \frac{4x^3}{x^4+1} y = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y' + 2xy = e^{-x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} y' + 4xy = x \\ y(0) = \frac{1}{4} \end{cases}$

9. $\begin{cases} y' + 3y + 9x = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} y' + \frac{2xy}{x^2+1} y = x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} y' cosx = sinx \cdot y - \frac{1}{cos^2 x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} y' = 2y - x^2 \\ y(0) = \frac{1}{4} \end{cases}$

Soluzioni

1. S. ce^{-x}+$\frac{1}{2}e^x$; **2. S**. c$e^x - 3x - 3$; **3. S**. $\frac{2}{5}sinx - \frac{1}{5}cosx + ce^{-2x}$;

4. S. c$e^x + xe^{x+1}$; **5.S**. c$e^{\frac{x^2}{2}} + e^{x^2}$;

6. S. $y = (x^4+1)\left(1 + \frac{1}{2}arctgx^2\right)$; **7. S.** $y = (1+x)e^{-x^2}$; **8. S.** $y = \frac{1}{4}$;

9. S. $y = 1 - 3x$; **10. S.** $y = (x^2+1)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}log(x^2+1)\right)$;

11. S. $y = \frac{2cosx - sinx}{cos^2 x}$; **12. S.** $y = \frac{2x^2+2x+1}{4}$.