7. Applicazioni

Dinamica delle popolazioni

Sia $N(t)$ il numero di individui di una popolazione viventi al tempo t e consideriamone la variazione tenendo conto della

- percentuale n di nascite per anno
- percentuale m delle morti per anno
- del numero $b = i - e$ che rappresenta il saldo tra gli immigrati i e gli emigrati e

La variazione di $N(t)$ tra l'anno t e il successivo $t + 1$ è :

$$N(t+1) - N(t) = (n - m)N - b$$

Nel caso si consideri un periodo uguale a una frazione h di anno, la variazione di $N(t)$ nell'intervallo $(t\ ;\ \ t + h)$ è, ponendo $a = n - m$:

$$N(t+h) - N(t) = (aN + b)h$$

e la variazione media è:

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = aN + b$$

Perciò la variazione istantanea è rappresentata dalla equazione differenziale lineare del primo ordine

$$N'(t) = aN(t) + b$$

già studiata nei paragrafi precedenti.

Nel caso particolare $b = 0$ (assenza di migrazioni) si ottiene l'equazione

$$N'(t) = aN(t) \quad (*)$$

Si osserva che il modello presenta delle criticità, infatti se $a > 0$, cioè se $n > m$, la popolazione cresce rapidamente in modo esponenziale con evidenti conseguenze di sovraffollamento, viceversa se $a < 0$ si ha come conseguenza uno spopolamento.

Poiché è logico pensare che natalità e mortalità dipendano dal numero N di abitanti e dalla capacità dell'ambiente che li ospita , l'equazione (*) va corretta nel modo seguente:

$$N'(t) = r\left(1 - \frac{N}{k}\right)N$$

detta **equazione logistica**, dove la costante r definisce il tasso di crescita e k il termine asintotico della popolazione ovvero la popolazione limite (definito dalle risorse disponibili per la popolazione, noto in ecologia come *carrying capacity*, o "capacità portante").

La soluzione dell'equazione è

$$N(t) = k\frac{N_0 e^{rt}}{k + N_0(e^{rt} - 1)}$$

dove $N_0 = N(0)$.

Rendita di capitali

Siano $C_0 = C(0)$ il capitale depositato inizialmente in banca con interesse annuo i costante e $C(t)$ il capitale maturato al tempo t. La variazione ΔC del capitale relativa all'intervallo di tempo $(t; t + h)$ con $h > 0$ è data da :

$$\Delta C = C(t + h) - C(t) = C(t) \cdot i \cdot h$$

Dunque

$$\frac{C(t + h) - C(t)}{h} = i \cdot C(t)$$

da cui, passando al limite per $h \to 0$, cioè considerando intervalli di tempo via via più piccoli, si ha

$$C'(t) = i \cdot C(t)$$

Se ne deduce che la funzione $C(t)$ è soluzione della equazione differenziale a variabili separabili:

$$\frac{dC(t)}{dt} = i \cdot C(t)$$

Risolvendo si ha:

$$\frac{dC(t)}{C(t)} = i \cdot dt \to \int \frac{dC(t)}{C(t)} = i \int dt \to logC(t) = it + c \to C(t) = e^{it+c}$$

Tenendo conto che $C_0 = C(0)$ si ha

$$C_0 = e^c$$

Perciò la soluzione

$$C(t) = C_0 e^{it}$$

fornisce la legge secondo la quale varia il capitale al variare del tempo t.