4. Successioni geometriche

Si dice **successione** (o **progressione**) **geometrica** di **ragione** q la successione

$$a_1 \ , \quad a_2 = a_1 q \ , \quad a_3 = a_2 q \ , \quad \dots \quad , \quad a_n = a_{n-1} q, \dots$$

Essendo

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

si ha :

a) se $a_1 = 0$ allora $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, pertanto $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
b) se $a_1 \neq 0$ allora
   - se $q \leq -1$ la successione è indeterminata
   - se $|q| < 1$ la successione converge a zero
   - se $q = 1$ la successione converge ad a_1
   - se $q > 1$ la successione diverge positivamente

La somma dei primi n termini di una successione geometrica

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

è uguale a :

$$S_n = \begin{cases} a_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q} & se \quad q \neq 1 \\ n a_1 & se \quad q = 1 \end{cases}$$

Esempi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Per ciascuna delle seguenti successioni geometriche

a) stabilire se sono convergenti, divergenti oppure indeterminate

b) calcolare la somma dei primi n termini, per il valore di n indicato a fianco

*1) $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \ , \quad n \in \mathbb{N}, \quad n = 10$

*2) $a_n = \left(\frac{7}{2}\right)^n \ , \quad n \in \mathbb{N}, \quad n = 5$

*3) $a_n = \left(-\frac{7}{2}\right)^n \ , \quad n \in \mathbb{N}, \quad n = 10$

Soluzioni

***1.S.** converge a zero; (ragione $q = \frac{4}{5}$; $S_{10} = \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{10}}{1-\frac{4}{5}} \cong 4{,}46$);

***2.S.** diverge positivamente; (ragione $q = \frac{7}{2} > 1$; $S_5 = \frac{1-\left(\frac{7}{2}\right)^{5}}{1-\frac{7}{2}} \cong 209{,}69$);

***3.S.** indeterminata ; (ragione $q = -\frac{7}{2} < -1$; $S_{10} = \frac{1-\left(-\frac{7}{2}\right)^{10}}{1+\frac{7}{2}} \cong -6{,}13 \cdot 10^4$) ;