1. Integrale definito come limite di una somma

Definizione

Sia $f(x)$ una funzione **continua** in $[a;b]$.

Dividiamo l'intervallo $[a;b]$ in n parti uguali mediante i punti:

$$a = x_0 \ , \quad x_1 = a + h \ , \quad x_2 = a + 2h \, , \quad \dots \quad , \quad x_n = a + nh = b$$

dove $h = \frac{b-a}{n}$ è l'ampiezza di ogni intervallo della suddivisione.

In ciascun intervallo della suddivisione scegliamo un punto arbitrario:

$$\xi_1 \in [a; x_1] \, , \quad \xi_2 \in [x_1; x_2] \, , \quad \dots \quad , \quad \xi_n \in [x_{n-1}; b]$$

e siano

$$f(\xi_1), \quad f(\xi_2), \quad \dots \ , \quad f(\xi_n)$$

i valori che la funzione assume in corrispondenza di tali punti.

Costruiamo la somma:

$$\sigma_n = h\, f(\xi_1) + h\, f(\xi_2) + \cdots + h\, f(\xi_n) = h \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

che viene detta **somma integrale generalizzata**.

Osserviamo che la somma σ_n dipende da n e dalla scelta dei punti ξ_1 , ξ_2, …, ξ_n.

Geometricamente σ_n rappresenta la *somma algebrica* delle aree dei rettangoli R_i di base h e altezza $f(\xi_i)$, cioè se $f(x) \geq 0$ in $[a;b]$ σ_n è la somma delle aree dei rettangoli R_i , mentre se $f(x) \leq 0$ σ_n è l'opposto della somma delle aree dei rettangoli R_i (vedi fig. 1 e 2).

Fig.1

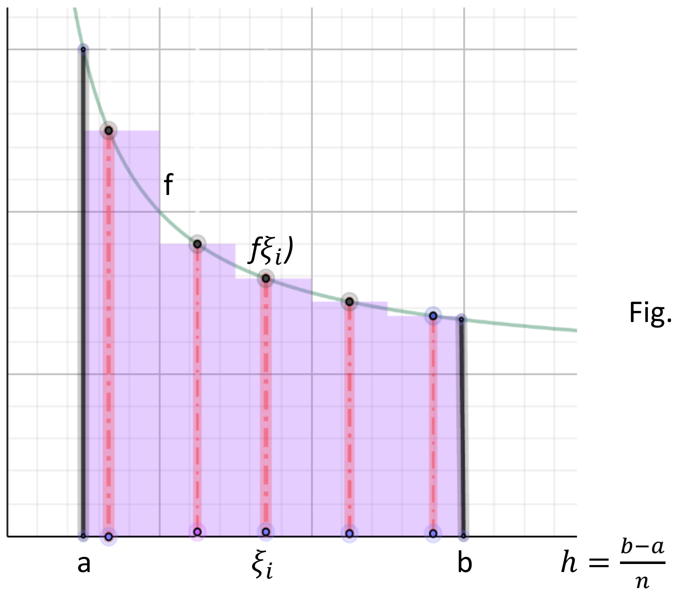
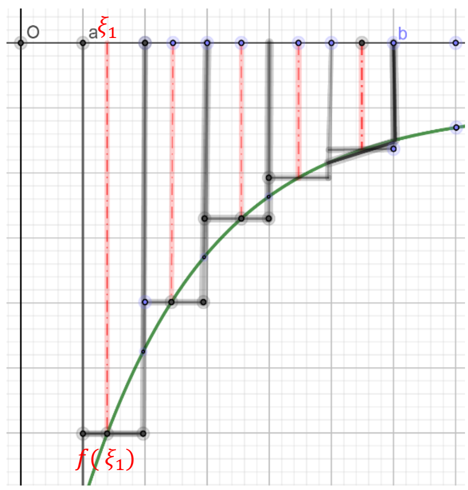


Fig.2



Passando al limite quando il numero n delle divisioni tende all'infinito si ha il seguente :

Teorema

*Se la funzione $f(x)$ è **continua** in $[a;b]$ esiste finito il $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n$ e si chiama* **integrale definito della funzione $\mathbf{f(x)}$ su $[\mathbf{a};\mathbf{b}]$** *e si indica:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n \,.$$

Tale limite non dipende da come è stato diviso l'intervallo $[a;b]$ in segmenti parziali né dalla scelta dei punti ξ_i in ogni segmento.

Interpretazione geometrica

Se $f(x) \geq 0$ in $[a;b]$ (vedi fig. 3) l'integrale definito rappresenta l'area della regione finita T (*trapezoide*) di piano delimitata dall'asse x, dal grafico della funzione f e dalle rette $x = a$ e $x = b$. Se $f(x)$ non ha segno costante in $[a;b]$ (vedi fig. 4) si ha:

$$Area(T) = \int_a^b |f(x)|dx$$

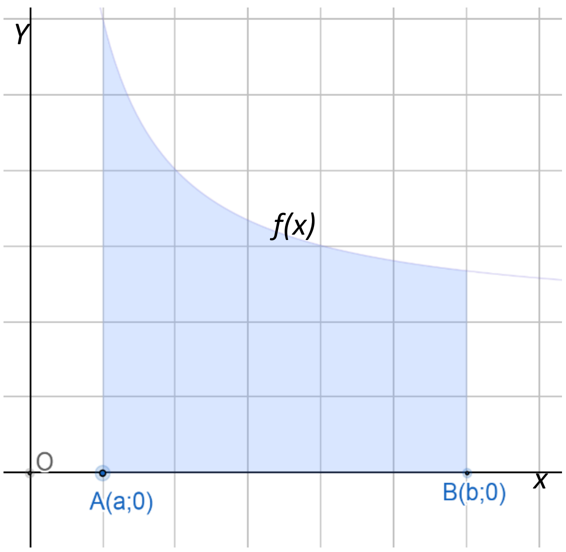


Fig. 3

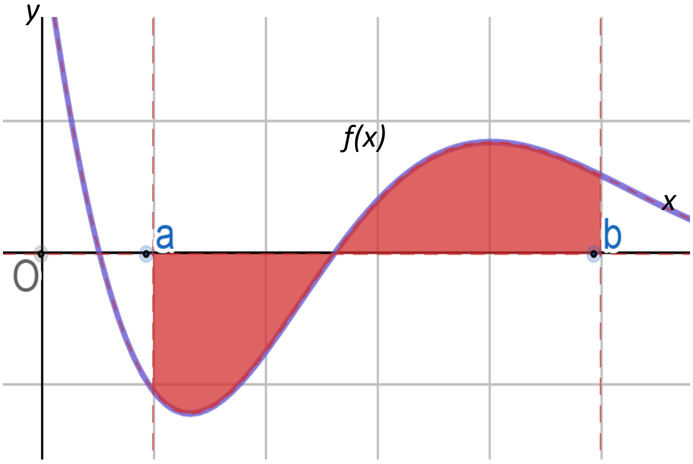


Fig.4

Proprietà dell'integrale definito

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue in $[a;b]$.

Si pone **per definizione**:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \text{se } a > b$$

Si possono dimostrare le seguenti **proprietà**:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (k \in \mathbb{R})$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Se $f(x)$ è continua in ogni intervallo $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$ allora :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Se :

$a < b$ e $f(x) \geq 0$ in $[a;b]$ allora $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

$a < b$ e $f(x) \geq g(x)$ in $[a;b]$ allora $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Inoltre

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Determinare il segno dei seguenti integrali senza calcolarli:

*1) $\int_{-1}^{2} \frac{x^2+1}{3-x}\,dx$ *2) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} xlogx\,dx$

3) $\int_{-\pi}^{\pi}(1-cosx)\,dx$ *4) $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{x}\,dx$

*5) $\int_{-2}^{2} x^3 e^{x^2} dx$

Determinare la relazione di uguaglianza o disuguaglianza tra le seguenti coppie di integrali senza calcolarli esplicitamente :

*6) a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ b) $\int_0^1 e^{-x} dx$

7) a) $\int_0^2 \frac{x|x|+2x}{x^2+5x+6}\,dx$ b) $\int_0^2 \frac{x}{x+3}\,dx$

8) a) $\int_2^3 \sqrt{x}e^x dx$ b) $\int_2^3 e^x dx$

*9) a) $\int_{-3}^{-2} \frac{log(4+x^2)}{cosx+4}\, dx$ b) $\int_2^3 \frac{log(4+x^2)}{cosx+4}\, dx$

Soluzioni

***1.S.** positivo ; (la $\frac{x^2+1}{3-x} > 0$ in $[-1; 3]$);

***2.S.** negativo ; ($logx < 0$ in $(0; 1)$) ; **3. S.** positivo;

***4S.** negativo ; ($\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{x}\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{sinx}{x}\, dx,$ $\frac{sinx}{x} > 0$ in $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$) ;

***5.S.** nullo ; (la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine);

***6 S.** a > b ; ($e^{-x^2} \geq e^{-x}$ per $x \in [0; 1]$); **7. S.** a = b ; **8. S.** a > b ;

***9. S.** a = b; (la funzione integranda è pari e gli intervalli di integrazione sono simmetrici rispetto all'origine .