3. Serie di Mengoli – Serie telescopiche

La **serie di Mengoli** è la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Poiché si può scrivere

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots$$

elidendosi i termini intermedi, è **convergente** e ha somma

$$S = 1$$

Una **serie telescopica** (generalizzazione della serie di Mengoli) è una serie del tipo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

dove a_k è del tipo

$$a_k = b_k - b_{k+1}$$

e, annullandosi i termini intermedi, la somma parziale è

$$S_k = b_1 - b_{k+1}$$

Perciò

$$\lim_{k\to\infty} S_k = b_1 - \lim_{k\to\infty} b_{k+1}$$

Risulta :

a) se la successione $\{b_k\}$ è **convergente** e ha limite b anche la serie è **convergente** e ha somma
$$S = b_1 - b \;;$$
b) se la la successione $\{b_k\}$ è divergente o irregolare anche la serie è divergente o irregolare.

Esempio

a) Studiare il carattere della seguente serie :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 7k + 12}$$

Osservato che

$$k^2 + 7k + 12 = (k+3)(k+4)$$

si può scrivere

$$\frac{1}{k^2 + 7k + 12} = \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}$$

Pertanto possiamo scrivere:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 7k + 12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Semplificando i termini adiacenti, osserviamo che la serie telescopica è convergente con somma

$$S = \frac{1}{4}$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

*1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2}$

*2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2+15k+4}$

*3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{4k^2+8k+3}$

* 4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{16k^2+24k+5}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4+k)(5+k)}$

*6. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$

7. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$

8. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3}\right)$

*11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$

*13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(k+1)}{k^2(k+2)^2}$

Soluzioni

***1.S.** converge con somma $S = \frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$;

***2. S.** converge con somma $S = \frac{1}{12}$; $\left(\frac{1}{9k^2+15k+4} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4}\right]\right)$;

***3. S.** converge con somma $S = 2$; $\left(\frac{4}{4k^2+8k+3} = \frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+\frac{3}{2}}\right)$;

***4. S.** converge con somma $S = 4$; $\left(\frac{16}{16k^2+24k+5} = \frac{4}{4k+1} - \frac{4}{4k+5}\right)$;

5. S. converge con somma S= $\frac{1}{5}$;

***6. S.** converge con somma S= $\frac{3}{4}$; ($\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$, si scrivano alcuni termini di S_k…);

7. S. converge con somma S= $\frac{1}{3}$; **8. S.** converge S= $\frac{1}{6}$;

9. S. converge con somma $S = \frac{11}{18}$; **10. S.** converge S=1 ;

***11. S.** converge con somma S= 1; ($\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$ …) ;

12. S. converge con somma S= 1 ;

***13. S.** converge con somma $S = \frac{5}{4}$;

($\frac{4(k+1)}{k^2(k+2)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+2)^2}$, scrivere alcuni termini di S_k);