3. Limiti di forme indeterminate mediante gli sviluppi di Taylor e Mac-Laurin

Esempi

Calcolare i limiti delle seguenti forme indeterminate per $x \to 0$ servendosi degli sviluppi di Mc Laurin, ritrovando risultati già ottenuti in altro modo nel cap. Limiti e Calcolo differenziale

1. $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x} = 1$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x} = 1$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x} = 1$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x} = 1$

6. $\lim_{x\to -1}\frac{arctg(x+1)}{x+1} = \lim_{x+1\to 0}\frac{x+1+o(x+1)}{x+1} = 1$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x} = 1$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x} = 1$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x+o(x)}{x} = \frac{1}{2}$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x+o(x)}{x} = -\frac{1}{2}$

11. $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-(1+log(1+x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x+o(x)}{x} = -2$

12. $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x+o(x)}{x} = \frac{3}{2}$

13. $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x+o(x)}{x} = -\frac{1}{2}$

14. $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x+o(x)}{x} = \frac{1}{2}$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{arctgx^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1}{x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \frac{1}{2}$

Il polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-i} + \cdots + a_{n-h}x^{n-h}$$

con $a_{n-h} \neq 0$,
è infinitesimo per $x \to 0$ e l'ordine di infinitesimo è la potenza di x di grado minimo , quindi

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-i} + \cdots + a_{n-h}x^{n-h} \sim a_{n-h}x^{n-h} \quad \text{per } x \to 0.$$

Esempio

$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3-5x^2}{2x^2-x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{-5x^2+o(x^2)}{2x^2+o(x^2)} = -\frac{5}{2}$

Per ogni funzione infinitesima che contenga solamente potenze di x a esponente positivo l'ordine di infinitesimo è la potenza di x di grado minimo .
Così, ad esempio,

$$3x^3 - 2x + 4\sqrt{x} \sim 4\sqrt{x} \quad \text{per } x \to 0$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Calcolare i limiti delle seguenti forme indeterminate per $x \to 0$ *servendosi degli sviluppi di Mc Laurin*:

***1.** $\lim_{x\to 0}\frac{log(1+5x^2)}{sin^2x}$

***2.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+sinx}{x}$

***3.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-4x}{x^2+3x}$

***4.** $\lim_{x\to 0^+}\frac{sin^2x+x^4-\sqrt{x}}{x^3+2\sqrt{x}}$

***5.** $\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx^2+1-cosx}{x^5\sqrt[3]{x}+4x^2}$

***6.** $\lim_{x\to 0}\frac{xlog(1+x)+\frac{x^3}{2}}{(1-cos2x)+x^2}$

***7.** $\lim_{x\to 0}\frac{arctg2x-2x}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2-\frac{x^2}{4}}$

***8.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-sinx}{x}$

***9.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

***10.** $\lim_{x\to 0}\frac{sinx-sinhx}{x^3}$

***11.** $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx-sinx}{x^3}$

***12.** $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{e^{2x}-cosx^2}$

***13.** $\lim_{x\to 0}\frac{3x^3+1+x-e^{x^2}}{x^2-3x}$

***14.** $\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x+cosx-1}{x^2+(e^x-1)^2}$

***15.** $\lim_{x\to 0}\frac{x^3(e^x-cosx)}{sin^2x-x^2}$

***16.** $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{x}$

***17.** $\lim_{x\to 0}\frac{sin^2\mathrm{x}-2(cosx-1)}{x^2-2(e^x-1)^2}$

***18.** $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)-\mathrm{tg}x}{cosx-1}$

***19.** $\lim_{x\to 0}\frac{\log(cosx)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x+x^2}$

***20.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x^2-1}{x^4}$

***21.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-cosx+x}{x+sinx}$

***22.** $\lim_{x\to 0}\frac{2sinx-sin2x}{x^3}$

***23.** $\lim_{x\to 0}\frac{x^3(e^x-cosx)}{x^2-sin^2x}$

***24.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-2x^2-1}{\sqrt{1+x^2}-1}$

***25.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-sinx^3-1}{x^5sinx}$

***26.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-cosx}{\log(1+x)-x}$

***27.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-sinx-1}{\sqrt{1-x^2}-1}$

***28.** $\lim_{x\to 0}\frac{sinx^4}{x^3(e^x-cosx)}$

***29.** $\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{sinx-sinhx}$

***30.** $\lim_{x\to 0}\frac{cosx-\sqrt{1-x^2}}{(1-cosx)^2}$

***31.** $\lim_{x\to 0}\frac{2x-2log(1+x)-x^2}{2x^2arctgx}$

***32.** $\lim_{x\to 0}\frac{2(cosx-1)+xlog(1+x)}{tgx-x}$

***33.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1+(sinx)^2}-e}{sinx^2}$

***34.** $\lim_{x\to 0}\frac{xlog(1+x)-2(1-cosx)+\frac{x^3}{2}}{2x^2-xsin2x}$

***35.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx^2-logcosx}{x^2}$

Soluzioni

***1.S.** 5 ; ($\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=5$) ;

***2.S.** 2 ; ($=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+o(x)+x+o(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+o(x)}{x}=2$) ;

***3.S.** $-\frac{1}{3}$; ($=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+o(x)-4x}{3x+o(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x+o(x)}{3x+o(x)}=-\frac{1}{3}$) ;

***4.S.** $-\frac{1}{2}$; ($=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)+x^4-\sqrt{x}}{x^3+2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sqrt{x}+o(x^2)}{2\sqrt{x}+o(x^3)}=-\frac{1}{2}$) ;

***5.S.** $\frac{3}{8}$; ($=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{4x^2+o(x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{4x^2+o(x^2)}=\frac{3}{8}$) ;

***6.S.** $\frac{1}{3}$; ($=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(.x-\frac{(x)^2}{2}+o(x^2)\right)+\frac{x^3}{2}}{\frac{(2x)^2}{2!}+o(x^2)+x^2}=\frac{1}{3}$) ;

***7. S.** $\frac{64}{3}$; ($=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\frac{8}{3}x^3+o(x^3)-2x}{\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)\right)^2-\frac{x^2}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{8}{3}x^3+o(x^3)}{-\frac{1}{8}x^3+o(x^3)}=\frac{64}{3}$);

***8. S.** 0 ; (proviamo a procedere come nell'esercizio precedente fermandoci nello sviluppo di Mc Laurin al termine di primo grado :

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)-x+o(x)}{x}$$

osserviamo che i termini di primo grado si annullano, pertanto nello sviluppo arriviamo ai termini di 2° grado:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)-x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}+o(x^2)}{x}=0\ );$$

***9. S.** 1 ; (sviluppando è sufficiente fermarsi ai termini di primo grado :

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{2}+o(x)-1+\frac{x}{2}+o(x)}{x}=1\ );$$

***10. S.** $-\frac{1}{3}$; (sviluppando dobbiamo arrivare fino ai termini di terzo grado perché i termini di primo si eliminano:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x-\frac{x^3}{3!}+o((x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3} \quad);$$

***11. S.** $-\frac{1}{6}$; (sviluppando dobbiamo arrivare fino ai termini di terzo grado perché i termini di primo si annullano :

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} \ ) ;$$

***12.S.** $\frac{1}{2}$; (sviluppiamo $\log(1+x)$ e e^{2x} fermandoci al termine di primo grado e $-cosx^2$ fermandoci al termine di grado zero:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{1+2x+o(x)-1+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{2x+o(x)} = \frac{1}{2});$$

***13. S.** $-\frac{1}{3}$ ($= \lim_{x\to 0} \frac{3x^3+1+x-(1+x^2+o(x^2))}{x^2-3x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3+x-x^2+o(x^2)}{x^2-3x} =$

tenendo conto che un polinomio infinitesimo tende a zero con il termine di grado minimo, si ha :

$$= \lim_{x\to 0} \frac{+x+o(x)}{-3x} = -\frac{1}{3} \ ) \ ;$$

***14. S.** $\frac{1}{4}$; (al numeratore sviluppiamo fermandoci ai termini di secondo grado e al denominatore sviluppiamo e^x fermandoci al termine di primo grado :

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+\mathrm{o}(x^2)-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)}{x^2+(x+o(x))^2} =$$

tenuto conto che :

$\mathrm{o}(x^2) + \mathrm{o}(x^2) = \mathrm{o}(x^2)$ al numeratore

$2xo(x) + o(x)o(x) = o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$, al denominatore,

risulta :

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)}{x^2+x^2+2xo(x)+o(x)o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)}{2x^2+o(x^2)} = \frac{1}{4} \ ) \ ;$$

***15. S.** -3 (sviluppiamo e^x fino al primo grado e $cosx$ fino al termine al quadrato, al denominatore dobbiamo sviluppare sin^2x fino al termine di terzo grado, perché se ci fermassimo al primo grado, elevando al quadrato, i termini al quadrato si annullerebbero :

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3\left(1+x+o(x)-(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2-x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4+\frac{x^5}{2!}+x^3o(x)+x^3o(x^2)}{x^2+\frac{x^6}{(3!)^2}-\frac{x^4}{3}+2xo(x^3)-\frac{x^3}{3}o(x^4)+o(x^4)o(x^4)-x^2}=$$

tenendo conto che :

$$x^3o(x)+x^3o(x^3)=o(x^4)+o(x^6)=o(x^4)$$

$$2xo(x^4)-\frac{x^3}{3}o(x^4)+o(x^4)o(x^4)=o(x^5)+o(x^7)+o(x^8)=o(x^5)$$

si ha :

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^4+\frac{x^5}{2!}+o(x^4)}{\frac{x^6}{(3!)^2}-\frac{x^4}{3}+o(x^5)}=$$

e poiché l'ordine di infinitesimo di un polinomio è quello del termine di grado inferiore, risulta:

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^4+o(x^4)}{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}=-3\text{);}$$

***16. S.** -1; (sviluppiamo i termini al numeratore fino al secondo grado :

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-x+x^2+o(x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)+o(x^2)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-x+o(x)}{x}=-1\text{);}$$

***17. S.** -2 ; ($=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2-2\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)}{x^2-2\left(x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)^2}=$

svolgiamo i quadrati, tralasciando i termini di grado superiore a 4 sia al numeratore che al denominatore , quindi :

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{x^4}{3}+x^2-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^2-2x^2-2x^3-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2+o(x^2)}{-x^2+o(x^2)}=-2\text{);}$$

***18. S.** 1; (sviluppiamo prima il logaritmo in $sinx$ e poi sviluppiamo $sinx$ in x, ottenendo :

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sinx}-\frac{sin^2x}{2}+\text{o}(sin^2\text{x})-\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2+\text{o}(sin^2\text{x})-x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)} =$$

tenuto conto che $o(sin^2x) = o(x^2)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^4}{3!}+o(x^4)}{-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)} = 1 \quad) ;$$

***19. S.** $-\frac{1}{2}$; (trasformiamo l'argomento del logaritmo per applicare lo sviluppo di Mc Laurin :

$$\log(cosx) = \log\big(1+(cosx-1)\big) = cosx-1+o(cosx-1) = -\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$$

sviluppiamo le radici al denominatore fino ai termini di secondo grado:

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x+x^2 =$$

$$= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)-1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)-x+x^2 = x^2+o(x^2)$$

da cui :

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = -\frac{1}{2} \;) ;$$

***20. S.** $\frac{1}{2}$; (sviluppiamo $e^{x^2}-1$ arrivando fino al termine di quarto grado :

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4)-x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{2!}+o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{2} \;) ;$$

***21.S.** 1; (sviluppiamo e^x , $cosx, sinx$:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x+o(x)-1+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)+x}{x+x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+o(x)}{2x+o(x)} = 1 ,$$ avendo tenuto conto che

$o(x)+o(x^2) = o(x)$ e che l'ordine di infinitesimo di un polinomio è quello del termine di grado inferiore) ;

***22. S.** 1; $\left(= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\frac{x^3}{3!}+8\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3} = 1 \right)$;

***23. S.** 3; ($= \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(1+x+o(x)-1+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{x^2-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2} =$

poiché al numeratore il termine di grado minimo ha ordine quattro, al denominatore svolgiamo il quadrato trascurando i termini di grado superiore al quarto :

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4+o(x^4)}{2\frac{x^4}{3!}+o(x^4)} = 3$) ;

***24. S.**-2; (sia per lo sviluppo di $e^{x^2}-1$ che per quello di $\sqrt{1+x^2}$ è sufficiente fermarsi al termine di secondo grado :

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+o(x^2)-2x^2}{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = -2$) ;

***25. S.**$\frac{1}{2}$; ($= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^3+\frac{x^6}{2!}+o(x^6)-\left(x^3-\frac{x^9}{3!}+o(x^9)\right)-1}{x^5(x+o(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^6}{2!}+o(x^6)}{x^6+o(x^6)} = \frac{1}{2}$, avendo tenuto conto che $o(x^6)+o(x^9)=o(x^6)$ e che $x^5\cdot o(x)=o(x^6)$) ;

***26. S.**-3; ($= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2+o(x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x} = -3$) ;

***27. S.** -1; (($= \lim_{x\to 0} \frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!}+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = -1$) ;

***28. S.** 1; ($= \lim_{x\to 0} \frac{x^4+o(x^4)}{x^3\left(1+x+o(x)-1+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = 1$) ;

***29. S.** -1; ($= \lim_{x\to 0} \frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-\left(x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{-2\frac{x^3}{3!}+o(x^3)} = -1$) ;

***30. S.** $\frac{2}{3}$**;** ($= \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)}{\left(1-1+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4!}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{\frac{x^4}{4}+o(x^4)} = \frac{2}{3}$) ;

***31. S.** $-\frac{1}{3}$; (al numeratore sviluppiamo $log(1+x)$ fino al termine di terzo grado perché i termini di primo e secondo si annullano, mentre per $arctgx$ è sufficiente fermarsi al termine di primo grado :

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x-2\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-x^2}{2x^2(x+o(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{2x^3+o(x^3)} = -\frac{1}{3}$) ;

***32. S.** $-\frac{3}{2}$; $\left(= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)+x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^4)+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = \right.$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = -\frac{3}{2}$

tenendo conto che al numeratore : $\frac{x^4}{12} + o(x^4) + \frac{x^4}{3} + o(x^4) = o(x^3)$) ;

***33. S.** e; $\left(= \lim_{x\to 0} \frac{e\cdot e^{(sinx)^2}-e}{x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e\left(1+sin^2x+o(x^2)\right)-e}{x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e\left((x+o(x))^2+o(x^2)\right)}{x^2+o(x^2)} = \right.$

nello svolgimento del quadrato al numeratore trascuriamo i termini di grado superiore al secondo:

$= \lim_{x\to 0} \frac{ex^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = e$);

***34. S.** $\frac{5}{16}$; $\left(= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-2\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)+\frac{x^3}{2}}{2x^2-x\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^3)\right)} = \right.$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{3}+o(x^4)+\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{\frac{8x^4}{3!}+o(x^4)} = \frac{5}{16}$) ;

***35. S.** $\frac{3}{2}$; $\left(= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+o(x^2)-log\left(1+(cosx-1)\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+o(x^2)-\left(cosx-1-\frac{(cosx-1)^2}{2}+o(cosx-1)\right)}{x^2} = \right.$

trascuriamo il termine $-\frac{(cosx-1)^2}{2}$ di grado superiore al secondo e teniamo conto che $o(cosx-1) = o(x^2)$, da cui

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+o(x^2)-\left(-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{3}{2}$) ;