3. Successioni monotone

Una successione $\{a_n\}$ si dice

- *crescente* se $\forall\, n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n < a_{n+1}$
- *decrescente* se $\forall\, n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n > a_{n+1}$
- *non decrescente* se $\forall\, n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n \leq a_{n+1}$
- *non crescente* se $\forall\, n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n \geq a_{n+1}$

In ciascuno di questi casi la successione si dice **monotona**.

Le successioni monotone sono sempre *regolari* cioè sono *convergenti* se sono limitate, *divergenti* se sono illimitate.

Vale il seguente

Teorema
Una successione crescente o non decrescente [decrescente o non crescente] ha come limite l'estremo superiore [inferiore] dell'insieme numerico costituito dai suoi termini.

Esempio

Stabilire per la seguente successione se è :

a. Monotona

b. Calcolare il limite per n→∞, se esiste

Sia

$$a_n = \frac{3n+2}{n+1}$$

Per ogni coppia $n_1\,, n_2 \in N$ con $n_1 < n_2$ risulta

$$a_{n_1} = \frac{3n_1+2}{n_1+1} = \frac{3(n_1+1)-1}{n_1+1} = 3 - \frac{1}{n_1+1}$$

Si ha inoltre:

$$n_1 < n_2 \Rightarrow \frac{1}{n_1+1} > \frac{1}{n_2+1} \Longrightarrow -\frac{1}{n_1+1} < -\frac{1}{n_2+1} \Longrightarrow 3 - \frac{1}{n_1+1} < 3 - \frac{1}{n_2+1}$$

cioè $n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} < a_{n_2}$ perciò la funzione è monotona crescente e risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$$

Esercizi

Stabilire per ciascuna delle seguenti successioni se è :

a. Monotona

b. Calcolare il limite per n→∞, se esiste

1) $a_n = \frac{n+1}{n^2}$

2) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

*3) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

4) $a_n = log\,\frac{1}{n+3}$

5) $a_n = e^{-n+1}$

*6) $a_n = (-2)^{n+1}$

7) $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{-n}$

*8) $a_n = (-1)^n \left(\frac{7}{8}\right)^n$

*9) $a_n = (-1)^n \left(tg\,\frac{\pi}{3}\right)^n$

*10) $a_n = e^{\cos(n+1)\pi}$

Soluzioni

1. S. a) decrescente; b) 0 ; **2.S.** a) decrescente; b) 0 ;

***3.S.** a) decrescente;(il termine a_n , razionalizzando, si può scrivere :

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},$$

ora, per ogni coppia $n_1, n_2 \in N$ con $n_1 < n_2$ risulta

$$\sqrt{n_1+2} + \sqrt{n_1+1} < \sqrt{n_2+2} + \sqrt{n_2+1}$$

pertanto, passando ai reciproci, si ha $a_{n_1} > a_{n_2}$; b) 0 ;

4.S. a) decrescente; b) -∞ ; **5.S.** a) decrescente; b) 0 ;

***6.S.** scritti alcuni termini della successione : $4, -8, 16, -32, \dots$ osserviamo che essi sono alternativamente positivi e negativi e crescenti in valore assoluto, pertanto la successione non ammette limite essendo indeterminata;

7.S. a) crescente; b) $+\infty$;

***8.S.** a) non monotona poiché i termini sono alternativamente negativi e positivi ;

b) poiché $0 < \frac{7}{8} < 1$, risulta $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$;

***9.S.** $tg\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 1$, i termini della successione cambiano segno alternativamente e crescono in valore assoluto, pertanto la successione non ammette limite essendo indeterminata;

***10.S.** a) non monotona, infatti $cos(n+1)\pi$ è uguale a 1 se n è dispari a -1 se n è pari, i termini della serie sono alternativamente uguali a e o a e^{-1}; b) non esiste poiché la successione è indeterminata;