4. Matrice inversa

Definizione Se **A** è una matrice quadrata di ordine n, si definisce **matrice inversa** di **A** e si indica con $\boldsymbol{A^{-1}}$la matrice dello stesso ordine tale che

$$\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$$

essendo $\boldsymbol{I}$ la matrice identica di ordine n.

La matrice inversa di A esiste ed è unica se det(A)≠0 e risulta

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Per determinare la matrice inversa di A si procede nel modo seguente:

- si calcola det(A)
- si costruisce la matrice $\boldsymbol{A_C}$ che ha per elementi i complementi algebrici dei singoli elementi di A
- si scrive la matrice trasposta $\boldsymbol{A_C^T}$ di $\boldsymbol{A_C}$
- gli elementi della matrice inversa A^{-1} si ottengono dividendo per det(A) gli elementi di A_C^T

Esempio. Sia

$$\mathbf{A}= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- applicando la regola di Sarrus o la formula di Lagrange si ha det(A)=6, pertanto esiste $\boldsymbol{A^{-1}}$
- calcoliamo i complementi algebrici degli elementi di **A**

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$ $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$ $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -9$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3$

Scriviamo la matrice A_C formata con i complementi algebrici e la sua trasposta A_C^T

$$\boldsymbol{A_C} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ -4 & 8 & -2 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A_C^T} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -5 & 8 & -9 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- la matrice inversa ha per elementi quelli della matrice A_C^T divisi ciascuno per det(A), cioè

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e risulta det $(A^{-1}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{\det(A)}$

Proprietà

-Se **A** è dotata di inversa A^{-1}, allora anche la sua trasposta $\boldsymbol{A}^T$ è dotata di inversa$(\boldsymbol{A^T})^{-1}$ e risulta

$$(\boldsymbol{A^T})^{-1} = (\boldsymbol{A^{-1}})^T$$

— Se A è una matrice diagonale che ha tutti gli elementi a_{ii} **diversi da zero**, allora esiste l'inversa i cui elementi sono $\frac{1}{a_{ii}}$

- se **A** e **B** sono due matrici dello stesso ordine entrambe dotate di inversa, risulta

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$$

Esercizi

Determinare la matrice A^{-1} *inversa della matrice* A:

1. **A**=$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **2**. **A** = $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ **3.** **A** = $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

4. **A**=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **5.** **A** = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

6. **A** = $\begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **7.** **A**=$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

8. **A**=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **9**. **A**=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soluzioni

1. S. $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}$; **2. S.** $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{14} & -\frac{5}{14}\\ \frac{1}{7} & -\frac{4}{7}\end{pmatrix}$; **3. S**. $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{11} & -\frac{3}{11}\\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11}\end{pmatrix}$;

4. S. $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; **5. S.** $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{21} & \frac{20}{63} & -\frac{1}{63}\\ \frac{1}{21} & \frac{11}{63} & -\frac{10}{63}\\ -\frac{8}{21} & \frac{17}{63} & -\frac{4}{63}\end{pmatrix}$; **6. S.** $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{29} & \frac{2}{29} & \frac{11}{29}\\ -\frac{28}{29} & -\frac{9}{29} & -\frac{35}{29}\\ \frac{12}{29} & \frac{8}{29} & \frac{15}{29}\end{pmatrix}$;

7. S. $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7}\\ -\frac{1}{7} & 0 & \frac{4}{7}\\ -\frac{3}{7} & 1 & -\frac{2}{7}\end{pmatrix}$; **8. S**. $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0\\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; **9. S.** $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;