2. L'equazione lineare del primo ordine $y' = ay + b$

Problema di Cauchy

$a = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y' = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad$ soluzione: $y(x) = y_0 + b(x - x_0)$

Esercizi

1. $\begin{cases} y' = -2 \\ y(-1) = 3 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} y' = 5 \\ y(1) = 9 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} y' = \frac{1}{2} \\ y(0) = -4 \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} y' = \sqrt{3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Problema di Cauchy

$a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad$ soluzione: $y(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x - x_0)} - \frac{b}{a}$

Esempio

Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$2y' - 3y = 1$$

L'equazione si può scrivere nella forma (poiché $y = -\frac{1}{3}$ non è soluzione)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 3y}{2} \rightarrow \frac{dy}{1 + 3y} = \frac{dx}{2}$$

da cui, integrando entrambi i termini

$$\int \frac{dy}{1 + 3y} = \int \frac{dx}{2} \rightarrow \frac{1}{3} \int \frac{d(1 + 3y)}{1 + 3y} = \int \frac{dx}{2} \rightarrow log|1 + 3y| = \frac{3}{2}x + c$$

soluzione che si può scrivere:

$$|1 + 3y| = e^{\frac{3x}{2}} \cdot e^c \quad \text{ossia } |1 + 3y| = Ce^{\frac{3x}{2}}$$

avendo posto $e^c = C$

Considerata poi la stessa equazione sottoposta a una condizione, per esempio

$$\begin{cases} 2y' - 3y = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

la soluzione si ottiene dall'integrale generale $|1 + 3y| = Ce^{\frac{3x}{2}}$ imponendo che $y(0) = 1$, perciò si ha $4 = C$, quindi la soluzione è

$$1+3y=4e^{\frac{3x}{2}} \quad \text{ossia } y=\frac{4}{3}e^{\frac{3x}{2}}-\frac{1}{3}$$

Si osserva che il risultato si può ottenere applicando direttamente la formula risolutiva per

$a=\frac{3}{2}, b=\frac{1}{2},\ x_0=0, y_0=1$

Esercizi

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

5. $y'+3y=1$ **6.** $y'=2-y$ **7.** $y'=4+2y$ **8.** $3y'-y=5$

Esercizi

Determinare l'integrale particolare delle seguenti equazioni differenziali che soddisfa la condizione iniziale :

9. $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=1 \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} y'=2y-1 \\ y(1)=0 \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} y'=-y+2 \\ y(-1)=1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} y'=-y-4 \\ y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2} \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} y'=3y-3 \\ y(0)=-3 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} y'=-4y+1 \\ y(2)=4 \end{cases}$

Soluzioni

1. S. $y=-2x+1$; **2.S.** $y=5x+4$; **3. S.** $y=\frac{x}{2}-4$; **4. S.** $y=\sqrt{3}x$;

5. S. c$e^{-3x}+\frac{1}{3}$ **6. S** c$e^{-x}+2$ **7.S**. c$e^{2x}-2$ **8.S**. c$e^{\frac{x}{3}}-5$

9. S. $y=e^{x}$; **10.S.** $y=-\frac{1}{2}e^{2(x-1)}+\frac{1}{2}$; **11.S.** $y=-e^{-x-1}+2$;

12. S. $y=\frac{5}{2}e^{-x+\frac{1}{2}}-4$; **13.S.** $y=-4e^{3x}+1$; **14. S.** $y=\frac{15}{4}e^{-4x+8}+\frac{1}{4}$;