

#### 4. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee

$$y'' + 2by' + cy = 0$$

Si considera l'equazione

$$\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$$

detta **equazione caratteristica**.

A seconda del valore del discriminante

$$\Delta = b^2 - c$$

l'equazione caratteristica ha due radici reali (distinte o coincidenti) o due radici complesse coniugate alle quali resta associato l'**integrale generale dell'equazione differenziale**.

Nella tabella seguente sono riassunti i tre casi possibili:

$\Delta = b^2 - c$	radici dell'equazione caratteristica	Integrale generale
$\Delta > 0$	$\alpha = -b + \sqrt{\Delta} \quad \beta = -b - \sqrt{\Delta}$	$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$
$\Delta = 0$	$\mu = -b$	$y = (A + Bx)e^{\mu x}$
$\Delta < 0$	$\alpha = \gamma - i\omega \quad \beta = \gamma + i\omega$ ( $\gamma = -b \quad \omega = \sqrt{-\Delta}$ )	$y = Ae^{\gamma x} \sin(\omega x + \varphi)$ Oppure $y = c_1 e^{\gamma x} \cos(\omega x) + c_2 e^{\gamma x} \sin(\omega x)$

#### Esercizi

*Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:*

a)  $\Delta > 0$

1.  $y'' + 4y' + 3y = 0$

2.  $y'' - 16y = 0$

3.  $y'' - 14y' + 33y = 0$

4.  $y'' + 3y' - 28y = 0$

5.  $y'' - y' - 2y = 0$

6.  $y'' - 4y' + 3y = 0$

7.  $4y'' - 8y' + 3y = 0$

8.  $y'' - y' - 12y = 0$

b)  $\Delta = 0$ 

9.  $y'' + 8y' + 16y = 0$

10.  $9y'' - 6y' + y = 0$

11.  $4y'' - 12y' + 9y = 0$

12.  $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$

13.  $y'' - 12y' + 36y = 0$

14.  $y'' + 4\sqrt{3}y' + 12y = 0$

15.  $36y'' - 12y' + y = 0$

16.  $y'' + 2\sqrt{5}y' + 5y = 0$

c)  $\Delta < 0$ 

17.  $y'' + y = 0$

18.  $y'' - 2y' + 2y = 0$

19.  $y'' - 4y' + 7y = 0$

20.  $y'' + 4y = 0$

21.  $16y'' - 8y' + 10y = 0$

22.  $y'' + 16y = 0$

23.  $y'' + 2y' + 10y = 0$

24.  $y'' + 4y' + 29y = 0$

25.  $y'' + 2y' + 2y = 0$

**Problemi di Cauchy-misti**

26.  $\begin{cases} y'' + 6y' - 7y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$

27.  $\begin{cases} y'' + y' = 0 \\ y(0) = -2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

28.  $\begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

29.  $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$

**Soluzioni**a)  $\Delta > 0$ 

1. S.  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$

2. S.  $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{4x}$

3. S.  $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{11x}$

4. S.  $y = c_1 e^{-7x} + c_2 e^{4x}$

5. S.  $y = Ae^{-x} + Be^{2x}$  ;

6. S.  $y = Ae^x + Be^{3x}$  ;

7. S.  $y = Ae^{\frac{x}{2}} + Be^{\frac{3x}{2}}$  ;

8. S.  $y = Ae^{-3x} + Be^{4x}$  ;

b)  $\Delta = 0$ 

$$9. \text{ S. } y = (A + Bx)e^{-4x}; \quad 10. \text{ S. } y = (A + Bx)e^{\frac{x}{3}}; \quad 11. \text{ S. } y = (A + Bx)e^{\frac{3x}{2}};$$

$$12. \text{ S. } y = (A + Bx)e^{\sqrt{2}x}; \quad 13. \text{ S. } y = c_1e^{6x} + c_2xe^{6x} \quad 14. \text{ S. } y = c_1e^{-2\sqrt{3}x} + c_2xe^{-2\sqrt{3}x}$$

$$15. \text{ S. } y = c_1e^{\frac{1}{6}x} + c_2xe^{\frac{1}{6}x}; \quad 16. \text{ S. } y = c_1e^{-\sqrt{5}x} + c_2xe^{-\sqrt{5}x}$$

c)  $\Delta < 0$ 

$$17. \text{ S. } y = A\sin(x + \varphi); \quad 18. \text{ S. } y = Ae^x\sin(x + \varphi); \quad 19. \text{ S. } y = Ae^{2x}\sin(3x + \varphi);$$

$$20. \text{ S. } y = A\sin(2x + \varphi); \quad 21. \text{ S. } y = Ae^{\frac{x}{4}}\sin\left(\frac{3}{4}x + \varphi\right); \quad 22. \text{ S. } y = c_1\cos(4x) + c_2\sin(4x)$$

$$23. \text{ S. } y = c_1e^{-x}\cos(3x) + c_2e^{-x}\sin(3x) \quad 24. \text{ S. } y = c_1e^{-2x}\cos(5x) + c_2e^{-2x}\sin(5x)$$

$$25. \text{ S. } y = c_1e^{-x}\cos(x) + c_2e^{-x}\sin(x)$$

**Problemi di Cauchy-misti**

$$26. \text{ S. } y(x) = \frac{1}{4}(3e^x + e^{-7}); \quad 27. \text{ S. } y(x) = -1 - e^{-x};$$

$$28. \text{ S. } y(x) = 2e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{6}\right); \quad 29. \text{ S. } y(x) = (1 + 7x)e^{-3x}$$