4. Derivata della funzione inversa

Sia $f(x)$ definita e continua in $I = (a; b)$ e crescente oppure decrescente in I ; sappiamo che in queste ipotesi $f(x)$ è invertibile in I. Sussiste il seguente:

Teorema
Se la funzione $f(x)$ è derivabile nel punto $x_0 \in I$ ed è $f'(x_0) \neq 0$, allora anche la funzione inversa $x = f^{-1}(y)$ è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e risulta

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Esempio

Dopo aver verificato che la funzione

$$f(x) = (x-1)^3 = y$$

è invertibile, calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y_0 = f(x_0)$

essendo $x_0 = 3$.

La funzione, traslata della funzione x^3 , è definita in $\mathbb{R}$ e crescente, pertanto è invertibile; si ha :

$$f(3) = 8 = y_0\,, \qquad f'(x) = 3(x-1)^2\,, \qquad f'(x_0) = 12 \neq 0$$

Pertanto :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

quindi:

$$(f^{-1})'(8) = \frac{1}{12}\,.$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Dopo aver verificato, eventualmente servendosi del grafico, che le seguenti funzioni sono invertibili, calcolare, se esiste, la derivata della funzione inversa $(f^{-1})'(y_0)$ *,*

essendo $y_0 = f(x_0)$ *:*

*1) $f(x) = 5 - \frac{x}{2}$, $\quad x_0 = -2$ *2) $f(x) = \sqrt{1-2x}$ $\quad x_0 = 0$

* 3) $f(x) = \frac{1}{2+x}$ $\quad x_0 = 3$ * 4) $f(x) = log(x+1)$ $\quad x_0 = 1$

*5) $f(x) = \sqrt[3]{5+x}$ $\quad x_0 = 3$ *6) $f(x) = e^{3-x}$ $\quad x_0 = -1$

*7) $f(x) = arcsinx$ $\quad x_0 = \frac{1}{2}$ *8) $f(x) = -x^3 + 1$ $\quad x_0 = 0$

*9) $f(x) = 1 - logx$ $\quad x_0 = e$ *10) $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ $\quad x_0 = -2$

11) Dopo aver verificato che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x < 0 \\ \\ -x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

è invertibile, calcolare la derivata dell'inversa nei punti $y_0 = f(-1)$ e $y_1 = f(2)$.

12) Dopo aver verificato che la funzione

$$f: [-1; +\infty) \to \mathbb{R} \,/ x \to -x^2 - 2x + 3 = y$$

è invertibile, rispondere alle seguenti domande:

a) calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y_0 = f(0)$;
b) esiste la derivata dell'inversa nel punto $y_1 = f(-1)$?
c) determinare il codominio della f e poi la funzione inversa $f^{-1}(y)$.

13) Dopo aver verificato che la funzione

$$f: (-\infty; 0) \to \mathbb{R} \,/ x \to \frac{1}{\log(1-x)} = y$$

è invertibile, rispondere alle seguenti domande:

a) calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y_0 = f(-e+1)$;
b) tracciare il grafico della funzione $g(x) = \log(1-x)$ e da esso dedurre quello della funzione $f(x)$;
c) determinare il codominio della f e poi la funzione inversa $f^{-1}(y)$.

Esercizi di riepilogo

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = (1-4x)^3$ 2) $f(x) = \frac{x^3}{3x-2}$

3) $f(x) = \frac{x^6-4}{x^2}$ 4) $f(x) = (x^2+1)^4 arctgx$

5) $f(x) = \sin(1+2x^2)^4$

6) $f(x) = \frac{x^2}{1+logx}$

7) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2\sqrt{1+x}$

8) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{e^x}$

9) $f(x) = (x^4+1)e^x$

10) $f(x) = \frac{1}{2}(e^{4+x} + xe^x)$

11) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}$

12) $f(x) = (4-x)e^{-x} + e^{2+2x}$

13) $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$

*14) $f(x) = x^5 logx^3$

*15) $f(x) = x^2 log\frac{1}{x^3}$

16) $f(x) = log(x^2+3x+1)$

17) $f(x) = \sqrt[3]{log(3x+1)}$

18) $f(x) = \sqrt[4]{xlog(2x-4)}$

19) $f(x) = 3x^2 logx - \sqrt{2x+3}$

20) $f(x) = xsin(2x) - arctgx^2$

21) $f(x) = e^{x^2} log(x^2+1)$

22) $f(x) = \frac{2^{4x^2-2x}}{2x}$

23) $f(x) = x^x + \sqrt{e^{2x+1}}$

24) $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot (logx+1)$

Soluzioni

***1. S.** $(f^{-1})'(6) = -2$; (decrescente in $\mathbb{R}$; $f(-2) = 6 = y_0, f'(x) = -\frac{1}{2}$, ...);

***2. S.** $(f^{-1})'(1) = -1$; (decrescente in $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$; $f(0) = 1 = y_0$,

$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}, f'(0) = -1$ ...);

***3. S.** $(f^{-1})'\left(\frac{1}{5}\right) = -25$;

(decrescente in $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; $f(3) = \frac{1}{5} = y_0$, $f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}, f'(3) = -\frac{1}{25}$ ...);

***4. S.** $(f^{-1})'(log2) = 2$;

(crescente in $(-1; +\infty)$; $f(1) = log2 = y_0$, $f'(x) = \frac{1}{x+1}, f'(1) = \frac{1}{2}$ ...);

***5. S.** $(f^{-1})'(2) = 12$; (crescente in $\mathbb{R}$; $f(3) = 2 = y_0$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(5+x)^2}}, f'(3) = \frac{1}{12}$) ;

***6. S.** $(f^{-1})'(e^4) = -e^{-4}$;

(decrescente in $\mathbb{R}$; $f(-1) = e^4 = y_0$, $f'(x) = -e^{3-x}$, $f'(-1) = -e^4$ ...);

***7. S.** $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; (crescente in $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}=y_0$, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ...);

***8. S.** non esiste; (decrescente in $\mathbb{R}$; non esiste $(f^{-1})'(1)$ perché $f'(0)=0$);

***9. S.** $(f^{-1})'(0)=-e$; (decrescente in $(0;+\infty)$; $f(e)=0=y_0$, $f'(x)=-\frac{1}{x}$, $f'(e)=-\frac{1}{e}$ ...);

***10. S.** $(f^{-1})'(1)=-4$;

(decrescente in $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; $f(-2)=1=y_0$, $f'(x)=-\frac{4}{(x-2)^2}$, $f'(-2)=-\frac{1}{4}$ ...) ;

11. S. $(f^{-1})'(e)=-e^{-1}$; $(f^{-1})'(-1)=-1$;

12. S. a) $(f^{-1})'(3)=-\frac{1}{2}$; b) no perché $f'(-1)=0$;
c) $f^{-1}:(-\infty;4]\to[-1;+\infty)/y\to -1+\sqrt{4-y}$;

13. S. a) $(f^{-1})'(1)=e$; c) $f^{-1}:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^-/y\to 1-e^{\frac{1}{y}}$;

Esercizi di riepilogo

1. S. $12-12(1-4x)^2$; **2. S.** $\frac{6(x-1)x^2}{(3x-2)^2}$; **3. S.** $4x^3+\frac{8}{x^3}$; **4. S.** $(x^2+1)^3(8x\,arctgx+1)$;

5. S. $16x(1+2x^2)^3cos(1+2x^2)^4$; **6. S.** $\frac{x(1+2logx)}{(1+logx)^2}$; **7. S.** $x^2+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$; **8. S.** $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}+\sqrt{e^x}$;

9.S. $(x^4+4x^3+1)e^x$; **10. S.** $\frac{1}{2}e^x(e^4+x+1)$; **11. S.** $\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{x}-e^{\frac{1}{x}}\right)$;

12. S. $e^{-x}(x-5)+2e^{2+2x}$; **13. S.** $\frac{e^{3x}(e^{2x}+3)}{(e^{2x}+1)^2}$;

***14. S.** $3x^4(5logx+1)$; $(f(x)=x^5logx^3=3x^5logx; f'(x)=15x^4logx+3x^5\cdot\frac{1}{x}=$...);

***15. S.** $-3x(2logx+1)$;

$\left(f(x)=x^2log\frac{1}{x^3}=x^2logx^{-3}=-3x^2logx; f'(x)=-6xlogx-3x^2\cdot\frac{1}{x}=\cdots\right)$;

16. S. $\frac{2x+3}{x^2+3x+1}$; **17. S.** $\frac{1}{(3x+1)\sqrt[3]{log^2(3x+1)}}$; **18. S.** $\frac{(x-2)\log(2x-4)+x}{4(x-2)\sqrt[4]{x^3\cdot log^3(2x-4)}}$;

19. S. $6xlogx+3x-\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$; **20. S.** $sin(2x)+2xcos(2x)-\frac{2x}{1+x^4}$;

21. S. $e^{x^2}\left[2xlog(x^2+1)+\frac{2x}{x^2+1}\right]$; **22. S.** $\frac{2^{4x^2-2x-1}}{x^2}[2x(4x-1)log2-1]$;

23. S. $x^x(logx+1)+e^{x+\frac{1}{2}}$; **24. S.** $-x^{\frac{1-2x}{x}}\cdot(log^2x-x-1)$;