3.Integrazione di alcune funzioni razionali fratte

Consideriamo integrali del tipo:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{dx}$$

dove $N(x)$e $D(x)$ sono polinomi in x .

Se il grado del numeratore è maggiore o uguale del grado del denominatore occorre, prima di risolvere l'integrale, fare la divisione, ottenendo per quoziente un polinomio Q(x) e per resto un polinomio $R(x)$ di grado inferiore a quello di D(x), cioè:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Esaminiamo ora separatamente, attraverso esempi, come si procede nei seguenti casi:

1) **denominatore di primo grado** $D(x) = ax + b$

2) **denominatore di secondo grado** $D(x) = ax^2 + bx + c$

3) **denominatore di grado superiore al secondo**

1)Denominatore di 1° grado $\int \frac{N(x)}{ax+b}\,dx$

Esempio

$\int \frac{x^3+x+2}{x+2}\,dx$

Eseguiamo la divisione

$$\begin{array}{l|l} x^3 + \quad\quad x + 2 & x + 2 \\ \hline -x^3 - 2x^2 & x^2 - 2x+5 \\ \quad - 2x^2+ x & \\ \quad 2x^2 +4x & \\ \hline \quad\quad 5x \ + 2 & \\ \quad\quad -5x \ - 10 & \\ \hline \quad\quad\quad -8 & \end{array}$$

Quindi :

$$\int \frac{x^3+x+2}{x+2}\,dx \ = \int \left(x^2 - 2x + 5 - \frac{8}{x+2}\right) dx \ = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x - 8\log|x + 2| + c$$

Teniamo conto che :

$$\boxed{\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\,log|ax+b| + c}$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

*1. $\int \frac{2}{1-x}\,dx$

* 2. $\int \frac{3x+2}{x+1}\,dx$

*3. $\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx$ ($c \neq 0, bc-ad \neq 0$)

*4. $\int \frac{x^2-5x+2}{3x-1}\,dx$

5. $\int \frac{4+3x-x^2}{2-x}\,dx$

*6. $\int \frac{2x^2-x-3}{x^2+2x+1}\,dx$

7. $\int \frac{x^2}{3x+1}\,dx$

*8. $\int \frac{3x^2+4x+1}{x-1}\,dx$

*9. $\int \frac{3x^3-x+1}{x-1}\,dx$

10. $\int \frac{4x^3+3x-2}{2x+1}\,dx$

11. $\int \frac{x^4+2x^2+1}{x+1}\,dx$

2) denominatore di secondo grado $\int \frac{N(x)}{ax^2+bx+c}\,dx$

Se il numeratore è la derivata del denominatore l'integrale è immediato.

Esempio

$\int \frac{4x+2}{x^2+x}\,dx$ poiché D(x^2+x)=$2x+1$, si può scrivere

$\int \frac{4x+2}{x^2+x}\,dx = \int \frac{2(2x+1)}{x^2+x}\,dx = 2\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = 2\log|x^2+x| + c$

Se ciò non si verifica, occorre distinguere tre casi,

a) $\boldsymbol{\Delta = 0}$ **b) $\boldsymbol{\Delta > 0}$** **c) $\boldsymbol{\Delta < 0}$**

essendo $\Delta = b^2 - 4ac$

a) $\Delta = \mathbf{0}$

Nel caso in cui il numeratore sia una costante l'integrale è immediato.

Esempio

$\int \frac{1}{x^2+8x+16}\,dx = \int \frac{1}{(x+4)^2}\,dx = -\frac{1}{x+4} + c$

Negli esempi seguenti si considera il caso in cui il numeratore sia di primo grado.

Esempi

1) $\int \frac{2x+4}{x^2+2x+1}\,dx$

si osserva che D(x^2+2x+1)=$2x+2$, perciò si può scrivere

$$\int \frac{2x+4}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{2x+2+2}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,dx + 2\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx =$$

$= \log(x+1)^2 - \frac{2}{x+1} + c$

2) $\int \frac{x+1}{9x^2+6x+1}\,dx =$ si osserva che D$(9x^2+6x+1)$=$18x+6$, perciò si moltiplica e divide per 18 e si cerca di ottenere al numeratore la derivata del denominatore :

$$= \frac{1}{18}\int \frac{18x+18}{9x^2+6x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{18}\int \frac{18x+6+12}{9x^2+6x+1}\,dx = \frac{1}{18}\left(\int \frac{18x+6}{9x^2+6x+1}\,dx + 4\int \frac{3}{(3x+1)^2}\,dx\right) =$$

$= \frac{1}{18}\log(3x+1)^2 - \frac{2}{9(3x+1)} + c$

Esercizi

12. $\int \frac{1}{1-2x+x^2}\,dx$

*13. $\int \frac{x}{1-2x+x^2}\,dx$

*14. $\int \frac{2x+3}{9x^2+6x+1}\,dx$

*15. $\int \frac{x^2-3x}{x^2+6x+9}\,dx$

16. $\int \frac{2x-1}{x^2-2x+1}\,dx$

17. $\int \frac{x+1}{x^2-6x+9}\,dx$

18. $\int \frac{x^2+1}{x^2-8x+16}\,dx$

19. $\int \frac{x^2+x+3}{x^2-2x+1}\,dx$

*20. $\int \frac{x^3+x}{4x^2-4x+1}\,dx$

b) $\Delta > 0$

Esempi

1) $\int \frac{1}{3x^2-8x-3}\,dx$

Poiché $\frac{\Delta}{4} = 16+9 = 25 > 0$ l'equazione $3x^2-8x-3=0$ ammette due radici reali e distinte : $x_1 = -\frac{1}{3}$ e $x_2 = 3$, quindi il denominatore della funzione integranda si scompone in $3x^2-8x-3 = 3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)$.

L'integrale risulta perciò uguale a

$$\int \frac{1}{3x^2-8x-3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)}\,dx.$$

Cerchiamo, ora, due coefficienti A e B in modo da scomporre la funzione integranda nella somma di due frazioni con denominatore di primo grado al modo seguente:

$$\frac{1}{\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)} = \frac{A}{x+\frac{1}{3}} + \frac{B}{x-3}$$

Riduciamo a denominatore comune il secondo membro

$$\frac{1}{\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A+\frac{1}{3}B}{\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)}$$

Dovendo essere uguali i numeratori, per il principio di identità dei polinomi deve risultare

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A+\frac{1}{3}B=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{3}{10}\ ,\ B=\frac{3}{10}$$

Ritornando all'integrale di partenza si ha successivamente :

$$\int \frac{1}{3x^2-8x-3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{10}\int \frac{dx}{x+\frac{1}{3}} + \frac{3}{10}\int \frac{dx}{x-3}\right) = -\frac{1}{10}\,log\left|x+\frac{1}{3}\right| + \frac{1}{10}\,log|x-3| + c =$$

applicando le proprietà dei logaritmi possiamo anche scrivere :

$$= \frac{1}{10}\left[log|x-3| - log\left|x+\frac{1}{3}\right|\right] + c = \frac{1}{10}\,log\left|\frac{3(x-3)}{3x+1}\right| + c = log\sqrt[10]{\left|\frac{3(x-3)}{3x+1}\right|} + c$$

2) $\int \frac{3x-2}{x^2-6x+8}dx$

Il denominatore si scompone in: $x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$; anche in questo caso si procede come nell'esempio precedente

$$\frac{3x-2}{x^2-6x+8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x-2}=\frac{(A+B)x-2A-4B}{(x-4)(x-2)}$$

per il principio d'identità dei polinomi dovrà risultare:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A-4B=-2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=5 \ , \quad B=-2$$

Risulta pertanto:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-6x+8}dx=5\int\frac{dx}{x-4}-2\int\frac{dx}{x-2}=5log|x-4|-2log|x-2|+c.$$

3) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+8}dx$

In questo caso osserviamo che il numeratore è, a meno della costante 2, la derivata del denominatore, pertanto, dopo aver moltiplicato e diviso per 2, l'integrale è immediato:

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+8}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+8}dx=\frac{1}{2}log|x^2-6x+8|+c=$$
$$=log\sqrt{|x^2-6x+8|}+c$$

Esercizi

21. $\int \frac{1}{(x-2)(x+4)}dx$

22. $\int \frac{1}{(x-3)(x+5)}dx$

23. $\int \frac{1}{x^2+3x}dx$

24. $\int \frac{1}{x^2-4}dx$

56. $\int \frac{1}{2x^2-5x+2}dx$

26. $\int \frac{1}{4x^2-3x}dx$

27. $\int \frac{1}{5x^2-7x-6}dx$

*28. $\int \frac{x-1}{x^2+3x}dx$

29. $\int \frac{1+2x}{x^2-x-2}dx$

30. $\int \frac{1+x}{x^2-9}dx$

31. $\int \frac{2x-1}{x^2-7x+6}dx$

*32. $\int \frac{2x^3-3x}{x^2-x-2}dx$

*33. $\int \frac{x^3+x^2-7x+7}{x^2+x-6}dx$

c) $\Delta < 0$

Se il numeratore è una costante il procedimento consiste nel trasformare la funzione integranda in una funzione del tipo

$$\frac{f'(t)}{1+[f(t)]^2}$$

il cui integrale è immediato

$$\int \frac{f'(t)}{1+[f(t)]^2}dt = arctgf(t) + c$$

Esempi

1) $\int \frac{1}{9x^2+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{(3x)^2+1}dx = \frac{1}{3}arctg(3x) + c$

2) $\int \frac{1}{4x^2+7}dx = \int \frac{1}{7\left[\left(\frac{2x}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]}dx = \frac{\sqrt{7}}{14}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\left(\frac{2x}{\sqrt{7}}\right)^2+1}dx = \frac{\sqrt{7}}{14}arctg\left(\frac{2x}{\sqrt{7}}\right) + c$

3) $\int \frac{1}{x^2+6x+10}dx = \int \frac{1}{(x+3)^2+1}dx = arctg(x+3) + c$

Consideriamo ora il caso in cui il numeratore sia di primo grado

Esempi

1) $\int \frac{4x+5}{x^2+4}dx =$ (teniamo conto che D$(x^2+4) = 2x$)

$= 2\int \frac{2x}{x^2+4}dx + 5\int \frac{1}{x^2+4}dx = 2\log(x^2+4) + \frac{5}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx =$

$= 2\log(x^2+4) + \frac{5}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = 2\log(x^2+4) + \frac{5}{2}arctg\frac{x}{2} + c$

2) $\int \frac{7x-3}{x^2+6x+10}dx =$ (teniamo conto che D$(x^2+6x+10) = 2x+6$)

moltiplichiamo e dividiamo per $\frac{2}{7}$ il numeratore , poi aggiungiamo e sottraiamo 6 :

$= \frac{7}{2}\int \frac{2x-\frac{6}{7}}{x^2+6x+10}dx = \frac{7}{2}\int \frac{2x+6-6-\frac{6}{7}}{x^2+6x+10}dx = \frac{7}{2}\log(x^2+6x+10) - \frac{7}{2}\cdot\frac{48}{7}\int \frac{1}{(x+3)^2+1}dx =$

$= \frac{7}{2}\log(x^2+6x+10) \;-24arctg(x+3) + c$

Osservazione

Se il denominatore è un polinomio con $\Delta < 0$ e se

- Il numeratore è una costante il risultato dell'integrale è un arcotangente
- Il numeratore è un polinomio di primo grado allora:
  - se il numeratore è la derivata del denominatore il risultato dell'integrale è un logaritmo
  - in generale il risultato dell'integrale è la somma di un logaritmo e di un arcotangente .

Esercizi

34. $\int \frac{3}{x^2+1}dx$

*35. $\int \frac{1}{x^2+3}dx$

*36. $\int \frac{1}{3x^2+1}dx$

*37. $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

*38. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$

*39. $\int \frac{1}{x^2-2x+3}dx$

*40. $\int \frac{1}{2x^2-x+1}dx$

41. $\int \frac{1}{3x^2+x+1}dx$

42. $\int \frac{1}{4x^2+4x+5}dx$

*43. $\int \frac{1-2x}{x^2+9}dx$

*44. $\int \frac{2-x}{x^2+2}dx$

45. $\int \frac{x}{x^2+x+2}dx$

*46. $\int \frac{4-x^2}{4x^2+1}dx$

*47. $\int \frac{2x^3-x^2+2}{x^2+1}dx$

*48. $\int \frac{4x^2-20x+28}{4x^2-20x+26}dx$

*49. $\int \frac{2x^3+6x^2+8x+5}{x^2+2x+2}dx$

3) **denominatore di grado superiore al secondo**

I seguenti esempi riguardano integrali di alcune funzioni razionali fratte il cui denominatore è un polinomio di grado superiore al secondo .

Esempi

1. $\int \frac{1+2x}{(x^2+1)(x-2)}dx$

Determiniamo i coefficienti A, B, C affinché la funzione integranda si possa scomporre in :

$$\frac{1+2x}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2}$$

Si ha :

$$\frac{1+2x}{(x^2+1)(x-2)}=\frac{Ax^2-2Ax+Bx-2B+Cx^2+C}{(x^2+1)(x-2)}=\frac{(A+C)x^2+(-2A+B)x-2B+C}{(x^2+1)(x-2)}$$

Per il principio di identità dei polinomi deve risultare :

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B=2 \\ -2B+C=1 \end{cases} \qquad A=-1\,, \quad B=0 \quad , \quad C=1$$

Pertanto risulta:

$$\int \frac{1+2x}{(x^2+1)(x-2)}dx=\int \frac{-x}{x^2+1}dx+\int \frac{1}{x-2}dx= -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx+log|x-2|=$$

$$=-\frac{1}{2}log(x^2+1)+log|x-2|+c=\log\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}}+c$$

2 . $\int \frac{2x-1}{(x^2-4x+4)(x+1)}dx$

Tenendo conto che $x^2-4x+4=(x-2)^2$, determiniamo i coefficienti A,B,C affinché la funzione integranda si possa scrivere nella somma delle tre frazioni :

$$\frac{2x-1}{(x^2-4x+4)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

Riducendo il secondo membro a denominatore comune si ha :

$$\frac{2x-1}{(x^2-4x+4)(x+1)}=\frac{A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)}{(x-2)^2(x+1)}=$$
$$=\frac{(A+B)x^2+(-4A-B+C)x+4A-2B+C}{(x-2)^2(x+1)}$$

Per il principio di identità dei polinomi deve risultare :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A-B+C=2 \\ 4A-2B+C=-1 \end{cases} \qquad \text{da cui : } \quad A=-\frac{1}{3}\,, \quad B=\frac{1}{3}\,, \quad C=1$$

Risulta quindi :

$$\int \frac{2x-1}{(x^2-4x+4)(x+1)}dx=-\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}dx+\int \frac{1}{(x-2)^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{3}log|x+1|+\frac{1}{3}log|x-2|-\frac{1}{x-2}+c=\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-2}{x+1}\right|-\frac{1}{x-2}+c$$

3. $\int \frac{1}{x^3-1} dx$

Poiché $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, determiniamo A, C, D affinché la funzione integranda si possa scrivere come somma di due frazioni :

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Risulta :

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(A+C)x^2 * (A-C+D)x + A - D}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Per il principio di identità dei polinomi deve essere:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A-C+D=0 \\ A-D=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{3} \ , \ C=-\frac{1}{3} \ , \ D=-\frac{2}{3}$$

Pertanto risulta :

$$\int \frac{1}{x^3-1} dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{3} log|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1+3}{x^2+x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{3} log|x-1| - \frac{1}{6} log(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

4. $\int \frac{1}{x^4+1} dx$

Cerchiamo i coefficienti a, b, c, d per scomporre il denominatore nel prodotto di due polinomi di secondo grado :

$x^4 + 1 = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d) =$ (sviluppando si ha)

$= x^4 + (a+c)x^3 + (d+ac+b)x^2 + (ad+bc)x + bd$

Per il principio d'identità dei polinomi deve risultare :

$$\begin{cases} a+c=0 \\ d+ac+b=0 \\ ad+bc=0 \\ bd=1 \end{cases}$$ si hanno le due soluzioni equivalenti : $$\begin{cases} a=\sqrt{2}, \ \ b=1, \ \ c=-\sqrt{2}\,, \ \ \ d=1 \\ a=-\sqrt{2}, \ \ b=1, \ \ c=\sqrt{2}\,, \ \ \ d=1 \end{cases}$$

Pertanto :

$$x^4+1 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

Determiniamo i coefficienti A, B, C, D affinché la funzione integranda si possa scomporre al modo seguente :

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Riducendo a denominatore comune il secondo membro si ha :

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{(A+C)x^3 + \left(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D\right)x^2 + \left(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D\right)x + D + B}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}$$

Per il principio d'identità dei polinomi deve essere :

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0 \\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \\ D+B=1 \end{cases}$$

la cui soluzione è : $A=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $D=\frac{1}{2}$

Pertanto risulta:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

poiché $D\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) = 2x+\sqrt{2}$ e $D\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) = 2x-\sqrt{2}$ si ha :

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$\int\frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx - \frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx +$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx + \frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}arctg\left(\sqrt{2}x+1\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}arctg\left(\sqrt{2}x-1\right) + c$$

Esercizi

*50. $\int \frac{1}{x^3-7x-6}dx$ *51. $\int \frac{1}{x^3+x^2-x+2}dx$

*52. $\int \frac{3x+1}{x^3-4x}dx$ 53. $\int \frac{2-x^3}{x^4-1}dx$

Soluzioni

1)Denominatore di 1° grado $\int \frac{N(x)}{ax+b}dx$

***1. S.** $-2log|1-x|+c$; (cambiamo segno ottenendo $\int \frac{2}{1-x}dx = -\int \frac{2}{x-1}dx$da cui …) ;

***2. S.** $3x - log|x+1| + c$; (eseguiamo prima la divisione : $\frac{3x+2}{x+1} = \frac{3x+3-1}{x+1} = 3 - \frac{1}{x+1}$ …) ;

***3. S.** $\frac{(bc-ad)log|cx+d|+acx}{c^2} + k$ **;** (eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore si ha:

$\frac{ax+b}{cx+d} = \left(-\frac{ad}{c}+b\right)\frac{1}{cx+d} + \frac{a}{c} = \frac{-ad+bc}{c^2}\cdot\frac{c}{cx+d} + \frac{a}{c}$ …) ;

***4. S.** $\int \frac{x^2-5x+2}{3x-1}dx = \frac{x^2}{6} - \frac{14}{9}x + \frac{4}{27}log|3x-1| + c$; (eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore risulta :

$\frac{x^2-5x+2}{3x-1} = \frac{x}{3} - \frac{14}{9} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3x-1} =$ moltiplicando e dividendo l'ultima frazione per 3, derivata del denominatore, e integrando …);

5. S. $\int \frac{4+3x-x^2}{2-x}dx = -6log|x-2| + \frac{x^2}{2} - x + c$;

***6. S.** $\int \frac{2x^2-x-3}{x^2+2x+1}dx = 2x - 5log|x+1| + c$; (scomponiamo il numeratore ottenendo :

$\frac{2x^2-x-3}{x^2+2x+1} = \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{2x-3}{x+1} =$ e dividendo si ha $= 2 - \frac{5}{x+1}$ …) ;

7. S. $\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9} + \frac{1}{27}\log|3x+1| + c$;

***8. S.** $\int \frac{3x^2+4x+1}{x-1}dx = \frac{3x^2}{2} + 7x + 8\log|x-1| + c$; (dividendo il numeratore per il denominatore si ottiene :

$\frac{3x^2+4x+1}{x-1} = 3x + 7 + \frac{8}{x-1}$, integrando …) ;

***9. S.** $\int \frac{3x^3-x+1}{x-1}dx = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 3\log|x-1| + c$; (dividiamo il numeratore per il denominatore :

$\frac{3x^3-x+1}{x-1}=3x^2+3x+2+\frac{3}{x-1}$ quindi integrando …);

10. S. $\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-2\log|2x+1|+c$; **11.S.** $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-3x+4\log|x+1|+c$;

2) denominatore di secondo grado $\int\frac{N(x)}{ax^2+bx+c}dx$

$$\Delta=b^2-4ac=0$$

12. S. $\frac{1}{1-x}+c$;

***13. S.** $log|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$; (= $\int\frac{x-1+1}{(x-1)^2}dx=\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{(x-1)^2}dx$ …) ;

***14. S.** $-\frac{7}{9(3x+1)}+\frac{2}{9}log|3x+1|+c$; (poiché $D(9x^2+6x+1)=18x+6$, moltiplichiamo numeratore e denominatore per 9 : $\frac{1}{9}\int\frac{18x+27}{9x^2+6x+1}dx=\frac{1}{9}\int\frac{18x+6+21}{9x^2+6x+1}dx=$ $\frac{1}{9}(\int\frac{18x+6}{9x^2+6x+1}dx+21\int\frac{1}{(3x+1)^2}dx)=\frac{1}{9}log(3x+1)^2+\frac{7}{9}\int\frac{3}{(3x+1)^2}dx=\cdots$) ;

***15. S.** $-\frac{18}{x+3}-9log|x+3|+x+c$; (dividiamo il numeratore per il denominatore ottenendo : $\int\frac{x^2-3x}{x^2+6x+9}dx=\int(\frac{18}{(x+3)^2}-\frac{9}{x+3}+1)dx$ …);

16. S. $-\frac{1}{x-1}+2\log|x-1|+c$; **17. S.** $-\frac{4}{x-3}+\log|x-3|+c$;

18. S. $x-\frac{17}{x-4}+8\log|x-4|+c$; **19. S.** $x-\frac{5}{x-1}+3\log|x-1|+c$;

***20. S.** $\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{16(2x-1)}+\frac{7}{16}\log|2x-1|+c$; (dividiamo il numeratore per il denominatore: $\int\frac{x^3+x}{4x^2-4x+1}dx=\int\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\frac{1}{(2x-1)^2}+\frac{7}{8}\frac{1}{2x-1}\right)dx=\int(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}+\frac{5}{16}\frac{2}{(2x-1)^2}+\frac{7}{16}\frac{2}{2x-1})dx=\cdots$);

$$\Delta=b^2-4ac>0$$

21. S. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-2}{x+4}\right|+c$; **22. S.** $\frac{1}{8}\log\left|\frac{x-3}{x+5}\right|+c$;

23.S. $\frac{1}{3}log|x|-\frac{1}{3}log|x+3|+c=\frac{1}{3}log\left|\frac{x}{x+3}\right|+c$; **24. S.** $log\sqrt[4]{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}+c$;

25. S. $\frac{1}{3}[log|x-2|-log|2x-1|]+c=\frac{1}{3}log\left|\frac{x-2}{2x-1}\right|+c$; **26. S.** $\frac{1}{3}log\left|\frac{4x-3}{x}\right|+c$;

27. S. $\frac{1}{13}log\left|\frac{x-2}{5x+3}\right|+c$;

***28. S.** $\int\frac{x-1}{x^2+3x}dx=\frac{1}{3}[4log|x+3|-log|x|]+c$; (determiniamo A e B affinché risulti : $\frac{x-1}{x^2+3x}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x}=\frac{(A+B)x+3B}{x(x+3)}$, per il principio di identità dei polinomi , deve risultare

$\begin{cases}A+B=1\\3B=-1\end{cases}\Rightarrow B=-\frac{1}{3}$ e $A=\frac{4}{3}$, quindi :

$\int \frac{x-1}{x^2+3x}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{x+3}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx = \cdots$);

29. S. $\frac{5}{3}\log|x-2| + \frac{1}{3}\log|x+1| + c$;

30. S. $\frac{1}{3}\log|x+3| + \frac{2}{3}\log|x-3| + c$; **31. S.** $\frac{11}{5}\log|x-6| - \frac{1}{5}\log|x-1| + c$;

***32. S.** $\int \frac{2x^3-3x}{x^2-x-2}dx = x^2 + 2x + \frac{10}{3}\log|x-2| - \frac{1}{3}\log|x+1| + c$; (dividendo il numeratore per il denominatore si ha :

$\frac{2x^3-3x}{x^2-x-2} = 2x + 2 + \frac{3x+4}{x^2-x-2} =$, poiché $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$,

si ha $\frac{3x+4}{x^2-x-2} = \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$, quindi risulta :

$\int \frac{2x^3-3x}{x^2-x-2}dx = \int (2x + 2 + \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1})dx = \cdots$);

***33. S.** $\int \frac{x^3+x^2-7x+7}{x^2+x-6}dx = \frac{1}{2}x^2 - \log\frac{(x+3)^2}{|x-2|} + c$; (dividiamo il numeratore per il denominatore ottenendo:

$\frac{x^3+x^2-7x+7}{x^2+x-6} = x - \frac{x-7}{x^2+x-6}$ e poiché $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ si ha :

$\frac{x-7}{x^2+x-6} = -\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+3}$, quindi risulta :

$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}dx = \int (x + \frac{1}{x-2} - 2\frac{1}{x+3})dx = \frac{1}{2}x^2 + log|x-2| - 2log|x+3| + c =$

applicando le proprietà dei logaritmi:

$= \frac{1}{2}x^2 + log|x-2| - log(x+3)^2 + c = \frac{1}{2}x^2 - \log\frac{(x+3)^2}{|x-2|} + c$) ;

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

34. S. $3arctgx + c$;

***35. S.** $\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) + c$; ($\frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$..) ;

***36. S.** $\frac{\sqrt{3}}{3}arctg(\sqrt{3}x) + c$; ($\frac{1}{3x^2+1} = \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}x)^2+1}$ ...) ;

***37. S.** $arctg(x+1) + c$; $\left(\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x+1)^2+1} = \cdots\right)$;

***38. S.** $\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2} + c$; $\left(\frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = \cdots\right)$;

***39. S.** $\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + c$; ($\frac{1}{x^2-2x+3} = \frac{1}{x^2-2x+1+2} = \frac{1}{(x-1)^2+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$ ...);

***40. S.** $\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)+c$; (si ha successivamente: $\frac{1}{2x^2-x+1}=\frac{1}{2\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\right)}=$

$=\frac{1}{2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right]}=\frac{1}{2\cdot\frac{7}{16}\cdot\left[\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]}=\frac{8}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\left[\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]}=$...) ;

41. S. $\frac{2}{\sqrt{11}}arctg\left(\frac{6x+1}{\sqrt{11}}\right)+c$;   **42. S.** $\frac{1}{4}arctg\left(x+\frac{1}{2}\right)+c$;

***43. S.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-\log(x^2+9)+c$; ($\frac{1-2x}{x^2+9}=-\frac{2x}{x^2+9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}=-\frac{2x}{x^2+9}+\frac{1}{9}\cdot 3\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}$ ...);

***44. S.** $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\log(x^2+2)+c$; ($\frac{2-x}{x^2+2}=\frac{2}{x^2+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+2}=\sqrt{2}\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+2}$ ...) ;

45. S. $-\frac{\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{2}\log(x^2+x+2)+c$;

***46. S.** $\int\frac{4-x^2}{4x^2+1}dx=\frac{17}{8}\operatorname{arctg}(2x)-\frac{1}{4}x+c$; (dividendo in numeratore per il denominatore si ottiene :

$\frac{4-x^2}{4x^2+1}=-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}\frac{1}{4x^2+1}=-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(2x)^2+1}$ ...) ;

***47. S.** $\int\frac{2x^3-x^2+2}{x^2+1}dx=\ x^2-x+3\operatorname{arctg}(x)-\log(x^2+1)+c$; (dividendo in numeratore per il denominatore si ottiene :

$\frac{2x^3-x^2+2}{x^2+1}=2x-1+3\cdot\frac{1}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2+1}$ ...) ;

***48. S.** $\int\frac{4x^2-20x+28}{4x^2-20x+26}dx=x+\operatorname{arctg}(2x-5)+c$; (dividendo in numeratore per il denominatore si ottiene :

$\frac{4x^2-20x+28}{4x^2-20x+26}=x+\frac{2}{(2x-5)^2+1}$ ...);

***49. S.** $\int\frac{2x^3+6x^2+8x+5}{x^2+2x+2}dx=x^2+2x+\operatorname{arctg}(x+1)+c$; (dividendo in numeratore per il denominatore si ottiene :

$\frac{2x^3+6x^2+8x+5}{x^2+2x+2}=2x+2+\frac{1}{(x+1)^2+1}$ ...) ;

***50. S.** $\int\frac{1}{x^3-7x-6}dx=\frac{1}{20}log|x-3|+\frac{1}{5}log|x+2|-\frac{1}{4}log|x+1|+c$;

($\frac{1}{x^3-7x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+1}$ ...) ;

***51. S**. $\int\frac{1}{x^3+x^2-x+2}dx=\frac{1}{7}log|x+2|-\frac{1}{14}log(x^2-x+1)+\frac{5\sqrt{3}}{21}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$;

($\frac{1}{x^3+x^2-x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}\ \ \Rightarrow\ A=\frac{1}{7}\ ,\ B=-\frac{1}{7}\ ,\ C=\frac{3}{7}$ ...) ;

***52. S.** $\int \frac{3x+1}{x^3-4x}dx = \frac{7}{8}log|x-2| - \frac{1}{4}log|x| - \frac{5}{8}log|x+2| + c$;

($\frac{3x+1}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} \;\Rightarrow\; A = -\frac{1}{4},\; B = \frac{7}{8},\; C = -\frac{5}{8}$ …) ;

53. S. $\int \frac{2-x^3}{x^4-1}dx = -\frac{1}{4}log(x^4-1) + log\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} - arctgx + c$;