# 1. Verifiche di limiti

## Limite finito in un punto

Sia $f$ una funzione definita in un intorno $I$ del punto $x_0$ , escluso al più il punto $x_0$ .
Si dice che $l$ è il **limite** della funzione nel punto $x_0$ e si indica

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

se, fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero $\delta_\varepsilon > 0$ tale che , per ogni $x \in I$ e verificante la condizione

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

risulti

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

cioè

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

La condizione

$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ equivale a $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$ con $x \neq x_0$.

## Esempi

*Verificare i seguenti limiti:*

1) $\lim_{x\to -3}(2x - 1) = -7$

Dobbiamo verificare che $\forall\varepsilon > 0$ la disequazione

$$|2x - 1 - (-7)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |2x + 6| < \varepsilon$$

è soddisfatta in un intorno di $-3$.

Svolgendo i calcoli risulta:

$$|2x + 6| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < 2x + 6 < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -6 - \varepsilon < 2x < -6 + \varepsilon$$

e quindi

$$-3 - \frac{\varepsilon}{2} < x < -3 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Il limite è verificato perché, $\forall\varepsilon > 0$, abbiamo determinato un intorno di $-3$, di raggio $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ dipendente da $\varepsilon$ , per ogni $x$ del quale risulta

$$|2x - 1 - (-7)| < \varepsilon.$$

2) $\lim_{x \to -1} (x^3 + 4) = 3$

Occorre verificare che $\forall \epsilon > 0$ la disequazione

$$|x^3 + 4 - 3| < \varepsilon$$

è verificata in un intorno I di -1. Si ha:

$$-\varepsilon < x^3 + 1 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -1 - \varepsilon < x^3 < -1 + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{-1-\varepsilon} < x < \sqrt[3]{-1+\varepsilon}$$

che costituisce un intorno di - 1

3) $\lim_{x \to 2} (x^2 + x) = 6$

Occorre verificare che $\forall \epsilon > 0$ la disequazione

$$|x^2 + x - 6| < \varepsilon$$

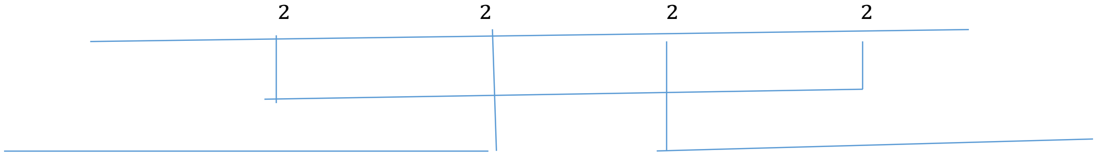
è verificata in un intorno I di 2. Si ha:

$$-\varepsilon < x^2 + x - 6 < \varepsilon$$

Equivalente, per $0 < \varepsilon < \frac{25}{4}$, a

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 < \varepsilon \\ x^2 + x - 6 > -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{25+4\varepsilon}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{25+4\varepsilon}}{2} \\ x < \frac{-1-\sqrt{25-4\varepsilon}}{2} \lor x > \frac{-1+\sqrt{25-4\varepsilon}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\frac{-1-\sqrt{25+4\varepsilon}}{2}$ $\frac{-1-\sqrt{25-4\varepsilon}}{2}$ $\frac{-1+\sqrt{25-4\varepsilon}}{2}$ $\frac{-1+\sqrt{25+4\varepsilon}}{2}$



$$\frac{-1-\sqrt{25+4\varepsilon}}{2} < x < \frac{-1-\sqrt{25-4\varepsilon}}{2} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\frac{-1+\sqrt{25-4\varepsilon}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{25+4\varepsilon}}{2}}$$

Si osserva che l'intervallo $\frac{-1+\sqrt{25-4\varepsilon}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{25+4\varepsilon}}{2}$ individua un intorno di 2, mentre l'altro intervallo $\frac{-1-\sqrt{25+4\varepsilon}}{2} < x < \frac{-1-\sqrt{25-4\varepsilon}}{2}$ è un intorno di $-3$, pertanto risulta anche

$\lim_{x \to -3} (x^2 + x) = 6$

4) $\lim_{x\to 8}\sqrt{x+1}=3$

$\forall\varepsilon>0$ verifichiamo che la disequazione

$$\left|\sqrt{x+1}-3\right|<\varepsilon$$

cioè

$$3-\varepsilon<\sqrt{x+1}<3+\varepsilon.$$

è soddisfatta in un intorno di 8.

Per $x\geq -1$, supposto $0<\varepsilon<3$ , la diseguaglianza precedente equivale a

$$(3-\varepsilon)^2<x+1<(3+\varepsilon)^2$$

Da cui

$$(3-\varepsilon)^2-1<x<(3+\varepsilon)^2-1$$

valori che costituiscono un intorno di 8.

## Limite infinito in un punto

Sia $f$ una funzione definita in un intorno $I$ del punto $x_0$ , escluso al più il punto $x_0$ .
Si dice che:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \quad (-\infty)$$

se, fissato comunque un numero $M>0$, è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero $\delta_M>0$ tale che, per ogni $x\in I$ verificante la condizione

$$0<|x-x_0|<\delta_M$$

risulti:

$$f(x)>M \quad (\ f(x)<-M\ )$$

## Esempi

*Verificare i seguenti limiti:*

1) $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$

Occorre dimostrare che $\forall M>0$ la disequazione

$$\frac{1}{x-2}>M$$

è verificata in un intorno destro di 2, escluso il valore x=2.

Infatti si ha per x>2

$$\frac{1}{x-2} > M \Rightarrow 0 < x-2 < \frac{1}{M} \Rightarrow$$

$$2 < x < 2 + \frac{1}{M}$$

cioè un intorno destro di 2.

2) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{(3-x)^2} = +\infty$

$\forall M > 0$ verifichiamo che la disequazione

$$\frac{1}{(3-x)^2} > M$$

è soddisfatta in un intorno di 3, escluso il punto 3.

Posto $x \neq 3$, si ha

$$(3-x)^2 < \frac{1}{M}$$

e quindi le soluzioni

$$3 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < 3 + \frac{1}{\sqrt{M}}\ , \quad x \neq 3$$

$c$he costituiscono un intorno di 3.

3) $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x+3}{x-4} = -\infty$

Occorre dimostrare che $\forall M > 0$ la disequazione

$$\frac{x+3}{x-4} < -M$$

è verificata in un intorno sinistro di 4, escluso il valore x=4.

Infatti risulta per x < 4

$$\frac{x+3}{x-4} < -M \Rightarrow \frac{4M-3}{M+1} < x < 4 \Rightarrow$$

$$4 - \frac{7}{M+1} < x < 4$$

cioè in un intorno sinistro di 4.

4 ) $\lim\limits_{x\to 2^+} log_2(x-2) = -\infty$

$\forall M > 0$ verifichiamo che la disequazione

$$log_2(x-2) < -M$$

è soddisfatta in un intorno destro di 2.

Si ha:

$$0 < x - 2 < 2^{-M}$$

da cui le soluzioni

$$2 < x < 2 + 2^{-M}$$

che costituiscono un intorno destro di 2.

## Limite finito all'infinito

Sia $f$ una funzione definita in un insieme $E$ illimitato superiormente ( illimitato inferiormente ).
Si dice che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \qquad ( \lim_{x\to-\infty} f(x) = l )$$

se, fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero $k_\varepsilon$ tale che per ogni $x \in E$ e maggiore (minore) di $k_\varepsilon$,
risulti

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

### Esempi

*Verificare i seguenti limiti:*

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{3x} = \frac{1}{3}$

$\forall\varepsilon > 0$ risolviamo la disequazione

$$\left|\frac{x+2}{3x} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

Si ha successivamente

$$\left|\frac{2}{3x}\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{3x}{2}\right| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad |x| > \frac{2}{3\epsilon} \quad \Rightarrow \quad x < -\frac{2}{3\varepsilon} \vee x > \frac{2}{3\varepsilon}$$

Il limite risulta verificato poiché le soluzioni $x < -\frac{2}{3\varepsilon}$ costituiscono un intorno di $-\infty$ .

La disequazione è verificata anche per i valori $x > \frac{2}{3\varepsilon}$ che costituiscono un intorno di $+\infty$ , infatti risulta anche $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{3x} = \frac{1}{3}$ , in definitiva risulta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{3x} = \frac{1}{3} .$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x+1}{x} = 4$

Risolviamo $\forall\varepsilon > 0$ la disequazione

$$\left|\frac{4x+1}{x} - 4\right| < \varepsilon$$

Risulta

$$\frac{1}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Da cui

$$x < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x > \frac{1}{\varepsilon}$$

dove le soluzioni $x < -\frac{1}{\varepsilon}$ costituiscono un intorno di $-\infty$ e le soluzioni $> \frac{1}{\varepsilon}$ un intorno di $+\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x^2+1} = 0$

$\forall\varepsilon > 0$ risolviamo la disequazione

$$\left|2^{-x^2+1}\right| < \varepsilon$$

che , essendo 0$< 2^{-x^2+1}$ $\forall x$ , equivale a

$$2^{-x^2+1} < \varepsilon \quad\Rightarrow\quad -x^2+1 < log_2\varepsilon \quad\Rightarrow\quad x^2 > 1 - log_2\varepsilon$$

Posto $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow log_2\varepsilon < 0 \Rightarrow 1 - log_2\varepsilon > 0$ , quindi la disequazione è verificata per

$$x < -\sqrt{1 - log_2\varepsilon} \ \vee\ x > \sqrt{1 - log_2\varepsilon}$$

Le seconde soluzioni costituiscono un intorno di $+\infty$, le prime un intorno di $-\infty$, infatti risulta anche $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-x^2+1} = 0$, cioè

$$\lim_{x\to\infty} 2^{-x^2+1} = 0 .$$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (1 - e^{x+2}) = 1$

Per $\forall\varepsilon > 0$

$$|1 - e^{x+2} - 1| < \varepsilon \Rightarrow e^{x+2} < \varepsilon \Rightarrow x + 2 < \log\varepsilon$$

da cui

$$x < -2 + \log \varepsilon$$

Si osserva che $\forall \varepsilon > 0$ la diseguaglianza $x < -2 + \log \varepsilon$ definisce un intorno di $-\infty$.

## Limite infinito all'infinito

Sia $f$ una funzione definita in un insieme $E$ illimitato superiormente (illimitato inferiormente). Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \left( \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \right)$$

se, fissato comunque un numero $M > 0$, è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero $k_M > 0$ tale che, per ogni $x \in I$ verificante la condizione $x > k_M$ ($x < k_M$ ), risulti

$$f(x) > M$$

Sia $f$ una funzione definita in un insieme $E$ illimitato superiormente (illimitato inferiormente). Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \left( \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \right)$$

se, fissato comunque un numero $M > 0$, è possibile determinare in corrispon-denza di esso un numero $k_M > 0$ tale che, per ogni $x \in I$ verificante la condizione $x > k_M$ ($x < k_M$ ), risulti

$$f(x) < M$$

## Esempi

*Verificare i seguenti limiti:*

1) $\lim_{x \to +\infty} \log(2x - 5) = +\infty$

$\forall M > 0$ risolviamo la disequazione

$$\log(2x - 5) > M$$

Si ha

$$2x - 5 > e^M$$

soddisfatta per

$$x > \frac{5}{2} + \frac{1}{2} e^M$$

Si osserva che questi valori di $x$ costituiscono un intorno di $+\infty$.

2) $\lim_{x \to +\infty} log(2x+3) = +\infty$

Si ha che $\forall M > 0$

$$\log(2x+3) > M \Rightarrow 2x+3 > e^M \Rightarrow x > \frac{e^M - 3}{2}$$

Si osserva che questi valori di $x$ costituiscono un intorno di $+\infty$.

3) $\lim_{x \to -\infty} e^{-x+4} = +\infty$

$\forall M > 0$ risolviamo la disequazione

$$e^{-x+4} > M$$

da cui

$$-x + 4 > logM$$

le cui soluzioni sono

$$x < 4 - logM$$

che costituiscono un intorno di $-\infty$.

4) $\lim_{x \to -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$

Si ha che $\forall M > 0$

$$(1 - e^{-x}) < -M \Rightarrow e^{-x} > M + 1 \Rightarrow -x > \log(M+1)$$

Da cui

$$x < -\log(M+1)$$

Si osserva che questi valori di $x$ costituiscono un intorno di $-\infty$.

## Esercizi

*Verificare i seguenti limiti:*

1) $\lim_{x \to 1} (3x - 4) = -1$ 2) $\lim_{x \to -2} (-x^3 - 5) = 3$ 3) $\lim_{x \to 0} (x^2 + 4x + 2) = 2$

4) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ 5) $\lim_{x \to -1^+} \frac{3x}{x+1} = -\infty$ 6) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{3x} = \frac{2}{3}$

7) $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 0$ 8) $\lim_{x \to -\infty} log(2-x) = +\infty$ 9) $\lim_{x \to +\infty} (4 - e^{3x}) = -\infty$