4. Punti di discontinuità

Sia f una funzione continua in tutti i punti di un intorno I di x_0, privato del punto x_0.Se la funzione f non è definita in x_0 o se, pur essendovi definita non è continua in tale punto, si dice che x_0 è un **punto singolare** per la funzione o che la funzione ha in x_0 una **discontinuità**.

Possiamo distinguere tre tipi di discontinuità:

Discontinuità di prima specie

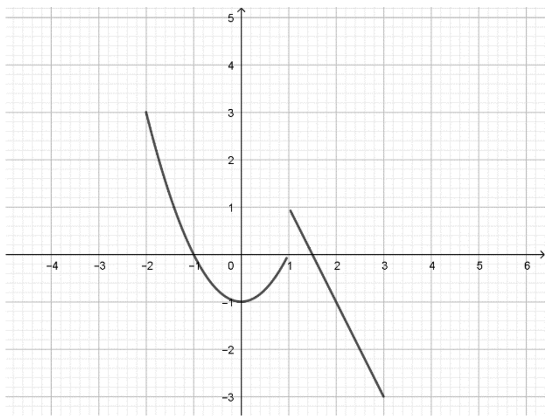
Si dice che nel punto x_0 la funzione f ha una **discontinuità di prima specie** se i limiti destro e sinistro esistono e sono finiti ma diversi :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$

Si dice **salto** della funzione nel punto x_0 la differenza

$$l_2 - l_1$$

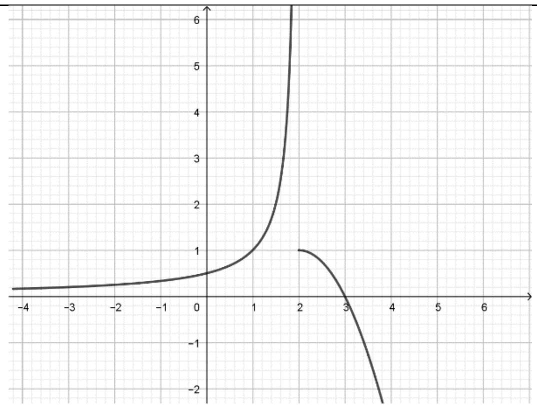


Discontinuità di seconda specie

Si dice che nel punto x_0 la funzione f ha una **discontinuità di seconda specie** se uno almeno dei due limiti

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

non esiste oppure, se esiste, è infinito.



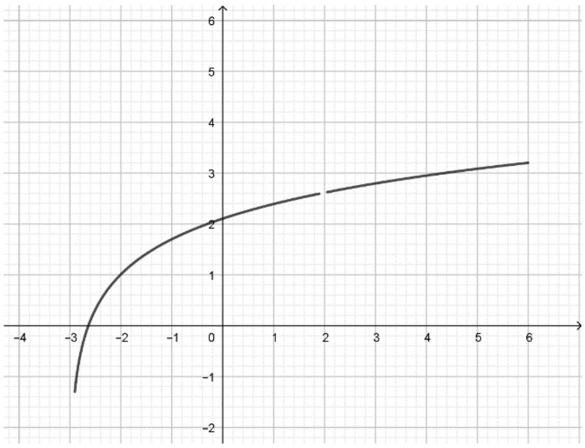
Discontinuità di terza specie (o **eliminabile)**

Si dice che nel punto x_0 la funzione f ha una **discontinuità di terza specie** se esiste ed è finito il

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

ma

- o non esiste il valore $f(x_0)$
- oppure risulta $f(x_0) \neq l$



La discontinuità si dice eliminabile in quanto è possibile rendere continua la funzione nel punto x_0 attribuendo alla funzione in tale punto il valore l del limite:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & per\ x \neq x_0 \\ l & per\ x = x_0 \end{cases}$$

Esempi

Prima specie

1)La funzione $f(x) = \frac{x+2|x|}{x}$, definita e continua in $\mathbb{R}-\{0\}$,ha nel punto $x = 0$ una discontinuità. Poiché risulta:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2x}{x} = -1\ \forall x < 0 \\ \dfrac{x+2x}{x} = 3 \quad \forall x > 0 \end{cases}$$

Si ha quindi:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$

Perciò x=0 è una discontinuità di prima specie con salto 4.

Seconda specie

2) La funzione $f(x) = e^{\frac{x+2}{x-1}}$. definita e continua in $\mathbb{R}-\{1\}$,ha nel punto x=1 una discontinuità.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Si tratta perciò di una discontinuità di seconda specie

Terza specie

3)La funzione $f(x) = e^{\frac{x+3}{x^2+10x+21}}$ è definita e continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{-7; -3\}$.

Per $x = -7$ si ha

$\lim_{x \to -7^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to -7^+} f(x) = +\infty$

Perciò $x = -7$ è una discontinuità di seconda specie

Per $x = -3$ si ha

$$\lim_{x \to -3^{\pm}} e^{\frac{x+3}{x^2+10x+21}} = \lim_{x \to -3^{\pm}} e^{\frac{x+3}{(x+7)(x+3)}} = \lim_{x \to -3^{\pm}} e^{\frac{1}{(x+7)}} = e^{\frac{1}{4}}$$

Perciò $x = -3$ è una discontinuità di terza specie.

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Stabilire se $f(x)$ è continua nel dominio e, eventualmente, studiarne i punti di discontinuità:

1)$f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-6x+8}$

*2) $f(x) = \frac{sinx - cosx}{\left|x - \frac{\pi}{4}\right|}$

*3)$f(x) = \frac{\sqrt{5+x}-3}{x^2-16}$

$*$ 4)$f(x) = (x+2)arctg\,\frac{1}{4-x^2}$

$*$ 5)$f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-2}}}$

$*$ 6)$f(x) = cos\,\frac{1}{x}$

$$* \, 7) f(x) = \begin{cases} arctgx & per\ 0 \leq x \\ \frac{\log(x+1)-2}{x^2+4} & per -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$*8) f(x) = \begin{cases} [x]-1 & per\ x > 1 \\ \sqrt{1-x} & per\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$9) f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x & se\ x \leq -1 \\ 3x+1 & se -1 < x \leq 1 \\ x^2+3 & se\ x > 1 \end{cases}$$

$$10)\ f(x) = \begin{cases} e^{1+\frac{1}{x}} & se\ x < 0 \\ x^2 + x & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$11) f(x) = \begin{cases} log(x^2+1) & se\ x \leq -1 \\ \frac{1}{x+1} & se\ x > -1 \end{cases}$$

$$* \, 12) f(x) = \frac{1}{xe^{\left(\frac{1}{x-4}\right)^2}}$$

$$13) f(x) = \frac{x^2}{log|x-e|}$$

$$14) f(x) = \frac{|2x-1|}{2x-1} + x$$

*15) Determinare *a* affinché sia continua in $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a + 2cosx & per\ x \geq 0 \\ \frac{sin2x}{3x} & per\ x < 0 \end{cases}$$

*16) Determinare per quali valori del parametro reale k la funzione data è continua in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2kx + 3 + 3k & se\ x \leq 0 \\ 5x + 4 & se\ x > 0 \end{cases}$$

$$17) f(x) = \begin{cases} x - e^{x-2k} & se\ x \leq 1 \\ \log(2x-1) & se\ x > 1 \end{cases}$$

$$18) f(x) = \begin{cases} 3 - x - e^{k-x} & se\ x \leq 0 \\ 2 - \mathrm{x} - \frac{\log(x+1)}{x+2} & se\ x > 0 \end{cases}$$

19) $f(x)=\begin{cases} k+\frac{x-3}{3+2x^2} & se\ x\leq 0 \\ 2-\mathrm{k}\frac{|x-2|}{x+2} & se\ x>0 \end{cases}$

20) Determinare i valori di *a* e *b* affinché sia continua in $\mathbb{R}$ la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{ax}{\operatorname{arctg}(2x)} & x<0 \\ 3^x & 0\leq x<1 \\ -(a+b)x & x\geq 1 \end{cases}$$

*21)) Determinare i valori di *a* e *b* affinché sia continua in $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)=\begin{cases} 2^{a+logx} & x>0 \\ \sqrt{x^2+1}-bcosx & x\leq 0 \end{cases}$$

22) Determinare *a* affinché sia continua in $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)=\begin{cases} (1+2x)^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ e^{-x+3a} & x\geq 0 \end{cases}$$

*23) Determinare per quale valore di *a*

$$f(x)=\begin{cases} \frac{a}{arcsinx} & -1\leq x<0 \vee 0<x\leq 1 \\ \frac{tg(\pi x)}{x-1} & x>1, x\neq \frac{1}{2}+k,\ \ k\in\mathbb{N}_0 \end{cases}$$

è continua nel punto $x=1$.

Soluzioni

1.S. definita e continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{2; 4\}$; $x = 2\ 3^a specie$; $x = 4\ 2^a specie$;

***2. S.** definita e continua in $E = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$;(scritta la f nella forma

$f(x) = \frac{\sqrt{2}sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left|x-\frac{\pi}{4}\right|}$ si ha $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \sqrt{2}$ e $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = -\sqrt{2}$

quindi $x = \frac{\pi}{4}$ è un punto di discontinuità di 1^a specie, con salto = $2\sqrt{2}$);

***3. S.** definita e continua in $E = [-5; +\infty) - \{-4; +4\}$;

(Poichè $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{5+x}-3}{x^2-16} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x^2-16(\quad)\sqrt{5+x}+3)} = \frac{1}{48}$ $\Rightarrow x = 4$ punto di discontinuità di 3^a specie; inoltre risulta:

$\lim_{x\to -4^\pm} f(x) = \lim_{x\to -4^\pm} \frac{\sqrt{5+x}-3}{x^2-16} \pm\infty \Rightarrow x = -4$ punto di discontinuità di 2^a specie;

***4. S.** definita e continua in $E = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$;

(risulta**:** $\lim_{x\to -2} f(x) = 0 \Rightarrow x = -2$ punto di discontinuità di 3^a specie,

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -2\pi$ **,** $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2\pi \Rightarrow x = 2$ punto di discontinuità di 1^a specie, con salto uguale a -4π **);**

***5. S.** definita e continua in $E = \mathbb{R} - \{0; 2\}$;

(Si ha: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$ **,** $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \Rightarrow x = 2$ punto di discontinuità di 1^a specie, con salto uguale a -1 **;**

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ **,** $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ punto di discontinuità di 2^a specie);

***6.S.** definita e continua in $E = \mathbb{R} - \{0\}$;

(Si ha $\lim_{x\to 0^\pm} f(x)$ non esiste $\Rightarrow x = 0$ punto di discontinuità di 2^a specie);

***7.S.** la f è definita e continu $\forall x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$;

(esaminiamo il punto $x = 0$: si ha

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} arctgx = f(0) = 0$ **,** $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\log(x+1)-2}{x^2+4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 0$ punto di discontinuità di 1^a specie, con salto uguale a $\frac{1}{2}$; quindi la f è continua $\forall x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$);

***8. S.** definita $\forall x \in \mathbb{R}$;

(poiché:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} = f(1) = 0,$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} [x] - 1 = 0$

la f è continua in $x = 1$; i punti $x \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ sono punti di discontinuità di 1^a specie);

9. S. definita e continua $\forall x \neq -1; x = -1\ 1^a specie$;

10. S. definita e continua $\forall \in \mathbb{R}$;

11. S. definita e continua $\forall x \neq -1; x = -1\ 2^a specie$;

***12. S.** definita e continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0; 4\}$;

$$\left(\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{xe^{\left(\frac{1}{x-4}\right)^2}} = -\infty \ , \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{xe^{\left(\frac{1}{x-4}\right)^2}} = +\infty \ , \ x = 0\ 2^a\ specie \right.$$
$$\left. \lim_{x\to 4} \frac{1}{xe^{\left(\frac{1}{x-4}\right)^2}} = 0 \ , x = 4\ 3^a specie \right);$$

13. S. definita e continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{e \pm 1; e\}; x = e\ 3^a specie;\ x = e \pm 1\ 2^a specie$;

14. S. definita e continua $\forall x \neq \frac{1}{2}; x = \frac{1}{2}\ 1^a specie$;

***15. S.** (Si deve imporre: $\lim_{x\to 0^-} \frac{sin2x}{3x} = \frac{2}{3} = f(0) = a + 2 \ \Rightarrow \ a = -\frac{4}{3}$);

***16 S.** $k = \frac{1}{3}$ (Poiché $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 - 2kx + 3 + 3k = f(0) = 3 + 3k$ e

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 5x + 4 = 4$, deve essere $3 + 3k = 4$, cioè $k = \frac{1}{3}$);

17.S. $k = \frac{1}{2}$; **18. S.** $k = 0$; **19. S.** $k = \frac{3}{2}$; **20. S.** $a = 2\ ; b = -5$;

***21. S.** $b = 1$ e $\forall a \in \mathbb{R}$ (infatti $\lim_{x\to 0^+} 2^{a+logx} = 0$) ;

22.S. $a = \frac{2}{3}$;

***23. S.** $a = \frac{\pi^2}{2}$ ($f(1) = \frac{2a}{\pi}$, $\lim_{x\to 1^+} \frac{tg(\pi x)}{x-1} = \pi \ \Rightarrow \ \frac{2a}{\pi} = \pi \ \Rightarrow a = \frac{\pi^2}{2}$);