1. Prime nozioni

Considerata la successione numerica

$$a_{1,}\, a_{2,}\, \dots, a_{n,}\, \dots$$

si chiama **serie** ad essa associata il simbolo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_{1,}\, a_{2,}\, \dots, a_{n,}\, \dots$$

Gli elementi a_i della successione costituiscono i termini della serie.

Per attribuire un valore numerico al simbolo di serie costruiamo la successione $\{S_n\}$ delle somme parziali i cui elementi sono :

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

….

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

…

Il comportamento della successione delle somme parziali determina il comportamento della serie, cioè la serie è:

- **convergente** se converge la successione $\{S_n\}$, in tal caso alla serie attribuiamo un numero, detto **somma**, uguale al limite
$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$
- **divergente** se diverge la successione $\{S_n\}$
- **indeterminata** o **irregolare** se è indeterminata la successione $\{S_n\}$.

Condizione necessaria per la convergenza

Condizione **necessaria** affinché la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converga è che

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$$

La condizione è solo necessaria per la convergenza ma non è sufficiente, infatti per esempio la **serie armonica** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ è divergente pur essendo

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Stabilire se le seguenti serie soddisfano la condizione necessaria di convergenza :

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$

*3. $\sum_{k=1}^{\infty} cos\left(\frac{1}{k}\right)$

* 4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+2}$

*5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{logk}{k}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^3}\right)$

Soluzioni

1. S. sì ; **2. S.** sì ;

***.3. S.** no; (infatti $\lim_{k \to \infty} cos\left(\frac{1}{k}\right) = 1$);

***.4. S.** no ; (infatti $\lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+2} = 1$);

***.5. S.** sì ; (infatti $\lim_{k \to \infty} \frac{logk}{k} = 0$, ricordando che $logx$ per $x \to +\infty$ è un infinito di ordine inferiore a qualunque potenza con esponente positivo di x);

6. S. sì ;