3. Derivate parziali

Definizione
Se nella funzione $f(x;y)$ si fissa una variabile essa diventa funzione di una sola variabile.
Per esempio,
fissato $y = y_0$, la funzione

$$f(x;y_0)$$

è funzione della sola variabile x; se essa è derivabile la sua derivata si chiama **derivata parziale della** $f(x;y)$ rispetto a x e si indica con

$$f_x(x;y) \quad \text{oppure} \quad \frac{\delta f}{\delta x}$$

fissato x= x_0, la funzione

$$f(x_0;y)$$

è funzione della sola variabile y; se essa è derivabile la sua derivata si chiama **derivata parziale della** $f(x;y)$ rispetto a y e si indica con

$$f_y(x;y) \quad \text{oppure} \quad \frac{\delta f}{\delta y}$$

Esempio

Data la funzione $f(x;y) = x^3 - y^2 + 4x^2y - 3x + 2y$.

Per calcolare la derivata parziale rispetto a x consideriamo la y costante, ottenendo:

$$f_x(x;y) = 3x^2 + 8xy - 3.$$

Per calcolare la derivata parziale rispetto a y consideriamo la x costante, ottenendo:

$$f_y(x;y) = -2y + 4x^2 + 2.$$

Esercizi

Calcolare le derivate parziali $f_x(x;y)$ e $f_y(x;y)$ delle seguenti funzioni :

1. $f(x;y) = x^2 - 2x - y + 5$

2. $f(x;y) = x^3 - 2y^2 + x - y$

3. $f(x;y) = 5x^4 - 4y^2 + y$

4. $f(x;y) = 3x^2 - 2y^5 + 4xy$

5. $f(x;y) = (x - 2y^2)^2$

6. $f(x;y) = x^3y - 2xy^5 + y$

7. $f(x;y) = sin(xy)$

8. $f(x;y) = sinx \cdot cosy$

9. $f(x;y) = \sqrt{4x - y}$

10. $f(x;y) = \sqrt[3]{x^2y + y^4}$

11. $f(x;y) = \sqrt{x^4 + y^4 - 2x^2y + 3y}$

12. $f(x;y) = \frac{x-y}{x^2+y}$

13. $f(x;y) = \frac{x^2-y}{xy}$

14. $f(x;y) = e^{-x^2-y^2}$

15. $f(x;y) = 3e^{x+y} - y^5$

16. $f(x;y) = e^{xy} - x^3y$

17. $f(x;y) = \log(2x+y)$ **18.** $f(x;y) = log(x^3+y^3)$

19. $f(x;y) = xlogy$ **20.** $f(x;y) = arctg(3x-2y)$

Soluzioni

1. S. $f_x(x;y) = 2x-2$; $f_y(x;y) = -1$;

2. S. $f_x(x;y) = 3x^2+1$; $f_y(x;y) = -4y-1$;

3. S. $f_x(x;y) = 20x^3$; $f_y(x;y) = -8y+1$;

4. S. $f_x(x;y) = 6x+4y$; $f_y(x;y) = -10y^4+4x$;

5.S. $f_x(x;y) = 2(x-2y^2)$; $f_y(x;y) = -8y(x-2y^2)$;

6. ***S.*** $f_x(x;y) = 3x^2y-2y^5$; $f_y(x;y) = x^3-10xy^4+1$;

7. S. $f_x(x;y) = ycos(xy)$; $f_y(x;y) = xcos(xy)$;

8. S. $f_x(x;y) = cosx \cdot cosy$; $f_y(x;y) = -sinx \cdot siny$;

9. S. $f_x(x;y) = \frac{2}{\sqrt{4x-y}}$; $f_y(x;y) = -\frac{1}{2\sqrt{4x-y}}$;

10. ***S.*** $f_x(x;y) = \frac{2xy}{3\sqrt[3]{(x^2y+y^4)^2}}$; $f_y(x;y) = \frac{x^2+4y^3}{3\sqrt[3]{(x^2y+y^4)^2}}$;

11. S. $f_x(x;y) = \frac{2x^3-2xy}{\sqrt{x^4+y^4-2x^2y+3y}}$; $f_y(x;y) = \frac{4y^3-2x^2+3}{2\sqrt{x^4+y^4-2x^2y+3y}}$;

12. S. $f_x(x;y) = \frac{-x^2+2xy+y}{(x^2+y)^2}$; $f_y(x;y) = \frac{-x(x+1)}{(x^2+y)^2}$;

13. ***S.*** $f_x(x;y) = \frac{x^2+y}{x^2y}$; $f_y(x;y) = \frac{-x}{y^2}$;

14. S. $f_x(x;y) = -2xe^{-x^2-y^2}$; $f_y(x;y) = -2ye^{-x^2-y^2}$;

15. S. $f_x(x;y) = 3e^{x+y}$; $f_y(x;y) = 3e^{x+y}-5y^4$;

16. S. $f_x(x;y) = ye^{xy}-3x^2y$; $f_y(x;y) = xe^{xy}-x^3$;

17. ***S.*** $f_x(x;y) = \frac{2}{2x+y}$; $f_y(x;y) = \frac{1}{2x+y}$;

18. S. $f_x(x;y) = \frac{3x^2}{x^3+y^3}$; $f_y(x;y) = \frac{3y^2}{x^3+y^3}$;

19. S. $f_x(x;y) = logy$; $f_y(x;y) = \frac{x}{y}$;

20.S. $f_x(x;y) = \frac{3}{1+(3x-2y)^2}$; $f_y(x;y) = -\frac{2}{1+(3x-2y)^2}$;