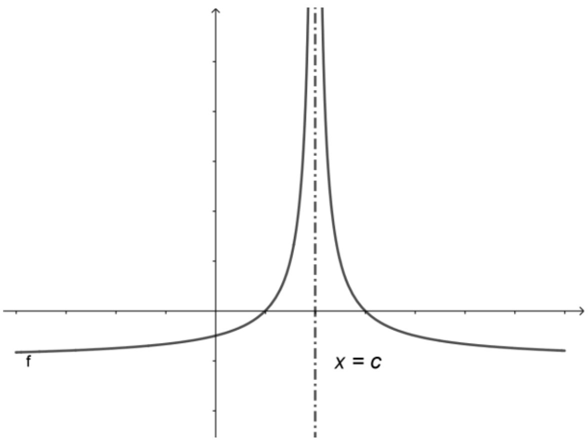
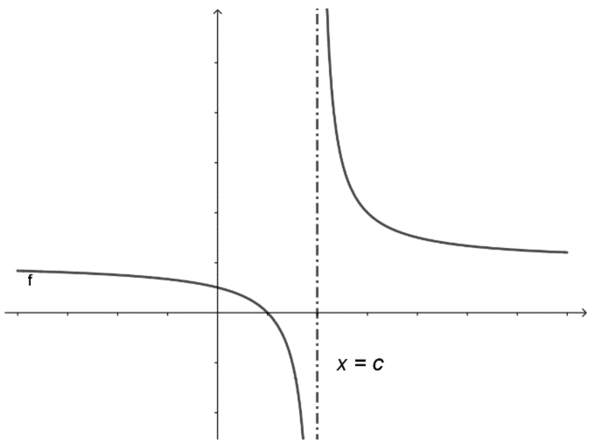
6. Asintoti

Asintoti verticali

Se c è un punto singolare, si dice che la retta $x = c$ è **asintoto verticale** per la funzione f se si ha

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty \ \ (-\infty) \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty \ \ (-\infty)$$





Se una funzione non ha punti singolari non può avere asintoti verticali.

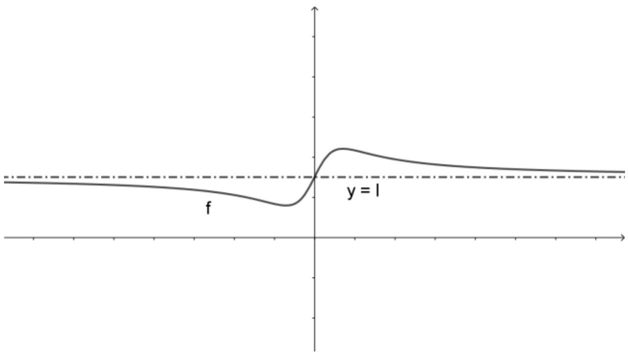
Una funzione può avere infiniti asintoti verticali come per esempio la funzione tgx

che ammette gli asintoti verticali di equazioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Asintoti orizzontali

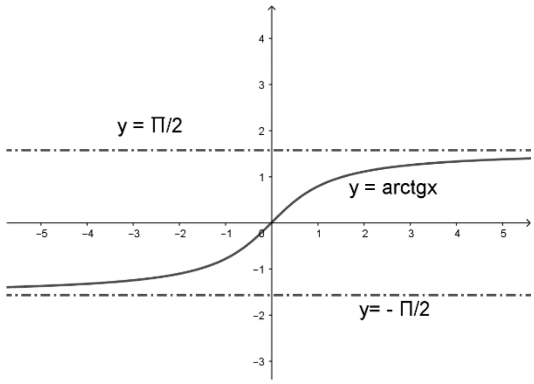
Si dice che la retta $y = l$ è **asintoto orizzontale** per la funzione f se risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$



Una funzione può avere un asintoto orizzontale solo se è definita in un intervallo illimitato, in tal caso la funzione può avere uno o al massimo due asintoti orizzontali : uno per $x \to +\infty$ e uno per $x \to -\infty$,come per esempio per la funzione

$$y = arctgx$$



Asintoti obliqui

Una funzione può avere un asintoto obliquo solo se è definita in un intervallo illimitato .

Se si ha :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad [-\infty]$$

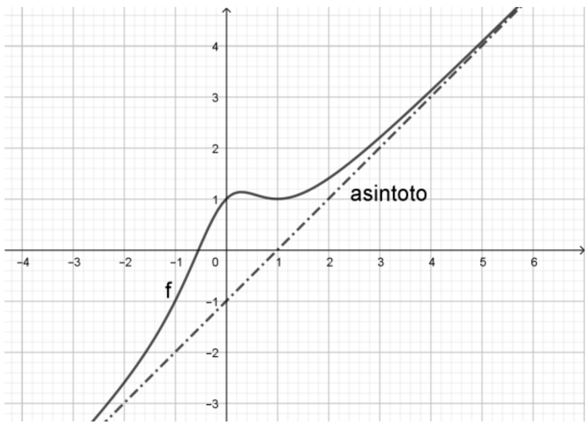
e risultano finiti entrambi i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = q$$

allora la retta

$$y = mx + q$$

è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.



Analogamente se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad [-\infty].$$

Una funzione non può avere più di due asintoti obliqui, uno per $x \to +\infty$ e uno per

$x \to -\infty$) .

Esempi

Determinare il dominio E e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$

La funzione è definita $\forall x \in E = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$.

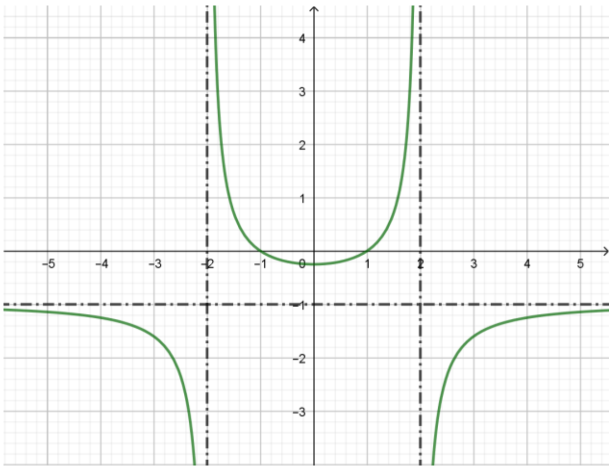
Studiamo il comportamento della funzione nei due punti singolari -2 e 2:

$\lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \pm\infty \;\Rightarrow\;$ la retta $x = -2$ è asintoto verticale

$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \mp\infty \;\Rightarrow\;$ la retta $x = -2$ è asintoto verticale

La funzione è definita in un insieme illimitato, studiamone il comportamento all'infinito :

$\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1 \;\Rightarrow\;$ la retta $y = -1$ è asintoto orizzontale



2) $f(x) = \frac{x|x|-1}{x}$

La funzione è definita $\forall x \in E = \mathbb{R}_0$.

Studiamone il comportamento nel punto singolare $x = 0$. Poiché :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x|x|-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{x|x|-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2-1}{x} = +\infty$$

la retta $x = 0$ è asintoto verticale .

Studiamo il comportamento della funzione all'infinito distinguendo i due casi :

a) per $x \to +\infty$ si ha

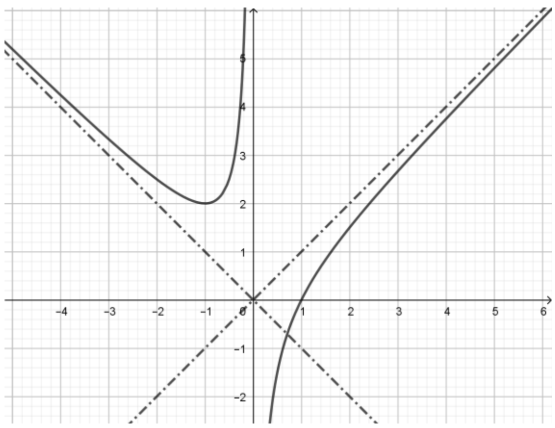
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x|x|-1}{x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1 = m \;, \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - x\right) = q = 0$$

la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$

b) per $x \to -\infty$ si ha

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x|x|-1}{x}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^2-1}{x^2} = -1 = m' \,, \qquad \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{-x^2-1}{x} + x\right) = q' = 0$$

la retta $y = -x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$



Funzioni razionali fratte

Esempio

Consideriamo la seguente funzione razionale fratta

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{1 - x}$$

in cui *il grado del numeratore supera di una unità il grado del denominatore*.

La funzione è definita in E = $\mathbb{R} - \{1\}$ e poiché

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \mp\infty$$

la retta $x = 1$ è asintoto verticale.

Poiché

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$$

per determinare l'asintoto obliquo $y = mx + q$ si può procedere in due modi:

1) si determinano m e q calcolando i limiti come è stato precedentemente indicato;
2) si esegue la divisione tra numeratore e denominatore

$$\begin{array}{rrr|l}
2x^2 & -3x & +4 & -x+1 \\ \cline{4-4}
-2x^2 & +2x & & -2x+1 \\
0 & -x & +4 & \\
 & +x & -1 & \\
 & & 3 &
\end{array}$$

La funzione , pertanto, può essere scritta nella forma

$$f(x) = -2x + 1 + \frac{3}{1-x}$$

Poiché risulta

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(-2x+1)]=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1-x}=0$$

si deduce che la retta

$$y=-2x+1$$

è asintoto obliquo della funzione.

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Determinare il dominio E e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni razionali fratte:

1) $f(x)=\frac{2-x-x^2}{2x+3}$

2) $f(x)=\frac{3x^3+x^2-x+1}{x^2+2}$

3) $f(x)=\frac{x^4-2x}{2-x-x^3}$

4) $f(x)=\frac{1-x^4}{x^2+2}$

5) $f(x)=\frac{x}{x^2+2x+8}$

6) $f(x)=\frac{3+x}{12-x-x^2}$

7) $f(x)=\frac{3x^2-1}{9x^2-4}$

8) $f(x)=\frac{3x^4+5}{x^4-1}$

9)$f(x)=x-1+\frac{4}{x^4+1}$

10) $f(x)=1-3x-\frac{1}{x}$

11) $f(x)=\frac{x^2-4x+5}{x-1}$

12) $f(x)=\frac{x^4-5x^2}{x^2-9}$

13)) $f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{2-x^2}$

Determinare le equazioni degli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:

14) $f(x)=\frac{1-x|x|-2x}{3-x^2}$

15) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

*16) $f(x)=\frac{4-2x}{\sqrt{x^2+4}}$

17) $f(x)=\frac{x}{x-\sqrt{2-x}}$

*18) $f(x)=3-\sqrt{x^2+1}$

19) $f(x)=3x+5-\sqrt{x^2-1}$

20) $f(x)=x-1+\sqrt{x^2-2x}$

21) $f(x)=|x|\sqrt{\frac{4+x}{x-1}}$

22) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$

23) $f(x)=log(x^2+1)-log(4x^2+2)$

24) $f(x)=\frac{\log(1+x)-1}{x}$

25) $f(x)=log\frac{|x+1|}{|x|-2}$

26) $f(x)=e^{\frac{1}{1-x}}$

27) $f(x)=\frac{e^x+1}{e^{2x}-3}$

28) $f(x) = e^{-x^2} \cdot sinx$

29) $f(x) = \frac{cosx+1}{sin2x+cosx}$

*30) $f(x) = arctg\frac{e^x+1}{e^x-1}$

31) $f(x) = arctg\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$

32) $f(x) = \frac{1}{4arcsinx-\pi}$

33) $f(x) = log\left(\frac{5}{3^{\frac{1}{x}}+2}\right)$

Soluzioni

1. S. E= $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$; A.V. $x = -\frac{3}{2}$; A.Obl. $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$; **2. S.** E= $\mathbb{R}$; A.Obl. $y = 3x + 1$;

3. S. E= $\mathbb{R} - \{1\}$; A.V. $x = 1$; A.Obl. $y = -x$; **4. S.** E= $\mathbb{R}$; nessun asintoto;

5. S. E=$\mathbb{R}$; A.O. y=0 ; **6. S.** E=$\mathbb{R} - \{-4; 3\}$; A.V. $x = 3$, $x = -4$; A.O. $y = 0$;

7. S. E=$\mathbb{R}$-$\left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$; A.V $x = -\frac{2}{3}; x = \frac{2}{3}$. A.O. y=$\frac{1}{3}$;

8. S. E=$\mathbb{R}$-$\{-1; 1\}$; A.V $x = -1; x = 1$. A.O. y= 3 ; **9. S.** E=$\mathbb{R}$; A.Obl. $y = x - 1$;

10. S. E=$\mathbb{R}$-$\{0\}$; A.V . $x = 0$; A.Obl. $y = -3x + 1$; **11. S**. E=$\mathbb{R}$-$\{1\}$; A.V. $x = 1$. A.Obl. y=$x - 3$;

12. S. E=$\mathbb{R}$-$\{-3; 3\}$; A.V. $x = -3; x = 3$.

13. S. E=$\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; A.V. $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$; A. Obl. $y = -x - 1$;

11. S. E=$\mathbb{R}$-$\{1\}$; A.V. $x = 1$. A.Obl. y=$x - 3$;

12. S. E=$\mathbb{R}$-$\{-3; 3\}$; A.V. $x = -3; x = 3$.

13. S. E=$\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; A.V. $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$; A. Obl. $y = -x - 1$;

14. S. E=$\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$; A.V.$x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$;

A.O. $y = -1$ per $x \to -\infty$; A.O. $y = +1$ per $x \to +\infty$;

15. S. E=$[-1; 0) \cup (0; 1]$; *nessun asintoto* ;

***16. S.** E=$\mathbb{R}$; A.O. $y = 2$ per $x \to -\infty$; A.O. $y = -2$ per $x \to +\infty$;

(per determinare gli asintoti poiché $f(x) = \frac{4-2x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x\left(\frac{4}{x}-2\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}} = \frac{x\left(\frac{4}{x}-2\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}$ allora

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{4}{x}-2\right)}{x\sqrt{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}} = -2 \ , \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{4}{x}-2\right)}{-x\sqrt{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}} = +2 \ ) ;$$

17. S. E=$(-\infty; 2] - \{1\}$; A.V $x = 1$; A.O. y= 1;

***18. S.** E=$\mathbb{R}$; A.Obl. $y = \begin{cases} -x+3\ per\ x \to +\infty \\ x+3\ per\ x \to -\infty \end{cases}$;

(poiché $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ cerchiamo eventuali asintoti obliqui;

tenendo conto che $f(x) = 3 - |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$, si ha :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1 = m\,,\ \lim_{x\to+\infty}\left(3-\sqrt{x^2+1}+x\right) = 3 = q \Rightarrow y = -x+3$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = +1 = m\,,\ \lim_{x\to-\infty}\left(3-\sqrt{x^2+1}-x\right) = 3 = q \Rightarrow y = x+3\,);$$

19. S. E $= (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$;

A.Obl. $y = 2x+5$ per $x \to +\infty$; A.Obl. $y = 4x+5$ per $x \to -\infty$;

20. S. E= $(-\infty;0] \cup [2;+\infty);\ per\ x \to -\infty\ A.O.\,y = 0;\ per\ x \to +\infty\ A.Obl.\,y = 2x-2;$

21. S. E=$(-\infty;-4] \cup (1;+\infty)$; A.V. destro $x = 1$

A.Obl. $y = x+\frac{5}{2}$ per $x \to +\infty$; A.Obl. $y = -x-\frac{5}{2}$ per $x \to -\infty$;

22. S. E = $\mathbb{R}$; A.O. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ per $x \to -\infty$; A.O. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ per $x \to +\infty$;

23. S. E = $\mathbb{R}$; A.O. $y = -2log2$ per $x \to \pm\infty$;

24. S. $E = (-1;+\infty) - \{0\};\ A.V.\,x = -1; x = 0;\ A.O.\,y = 0;$

25. S. E = $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$; A.V. destro $x = 2$, sinistro $x = -2$;

A.O. $y = 0$ per $x \to \pm\infty$;

26. S. E=$\mathbb{R}$-$\{1\}$; $x = 1\ A.V.\,sinistro; A.O.\,y = 1;$

27.S. E = $\mathbb{R} - \left\{log\sqrt{3}\right\}$; A.V. $x = log\sqrt{3}$;

A.O. $y = -\frac{1}{3}$ per $x \to -\infty$; A.O. $y = 0$ per $x \to +\infty$;

28. S. E = $\mathbb{R}$; A.O. $y = 0$ per $x \to \pm\infty$;

29. S. $E = \left\{x \in \mathbb{R}\,/x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, x \neq \frac{7}{6}\pi+2k\pi, x \neq \frac{11}{6}\pi+2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

A.V. $= \frac{\pi}{2}+k\pi$; $x = \frac{7}{6}\pi+2k\pi$; $x = \frac{11}{6}\pi+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

***30. S.** E= $\mathbb{R}-\{0\}$; A.O. $y = -\frac{\pi}{4}$ per $x \to -\infty$; A.O. $y = \frac{\pi}{4}$ per $x \to +\infty$;

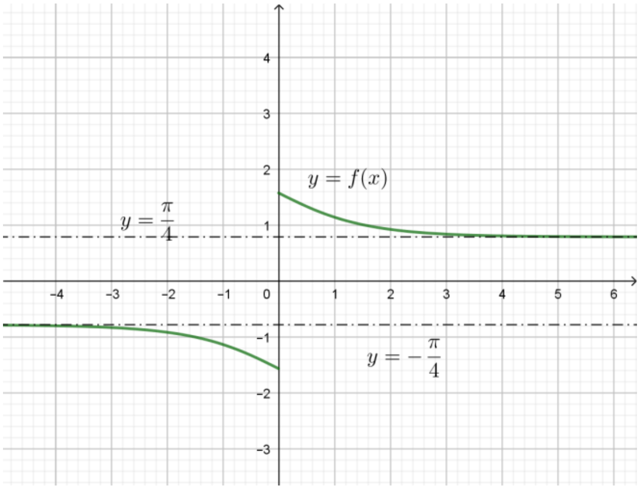
(in $x = 0$ risulta : $\lim_{x\to0^\pm} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to0^\pm} arctg\frac{e^x+1}{e^x-1} = \pm\frac{\pi}{2}$, pertanto in $x = 0$

la funzione ha una discontinuità di 1^a specie con salto uguale a $\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$;

tenendo conto che $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e che $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, si ha

$\lim_{x\to+\infty} arctg\frac{e^x+1}{e^x-1} = arctg1 = \frac{\pi}{4}$ e $\lim_{x\to-\infty} arctg\frac{e^x+1}{e^x-1} = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$,

grafico in figura



31. S. E= $\mathbb{R} - \{0\}$; $per\ x \to -\infty\ A.O.\ y = -\frac{\pi}{2};\ per\ x \to +\infty\ A.O.\ y = \frac{\pi}{2}$

32. S. E= $\mathbb{R} - \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; AV. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

***33. S.** E= $\mathbb{R} - \{0\}$; A.O. $y = log\frac{5}{3}$ per $x \to \pm\infty$; A.V. destro $x = 0$ (per $x \to 0^+$);

(si ha $\lim_{x\to0^+} 3^{\frac{1}{x}} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to0^+} log\left(\frac{5}{3^{\frac{1}{x}}+2}\right) = -\infty$ mentre $\lim_{x\to0^-} 3^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow$

$\lim_{x\to0^-} log\left(\frac{5}{3^{\frac{1}{x}}+2}\right) = log\frac{5}{2}$, quindi la retta $x = 0$ è asintoto verticale destro ;

inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} 3^{\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} log\left(\frac{5}{3^{\frac{1}{x}}+2}\right) = log\frac{5}{3}$ quindi la retta $y = log\frac{5}{3}$ è A. O.).