Numeri complessi

1. Prime definizioni. Operazioni

Forma algebrica

Il numero complesso z si può rappresentare nella **forma algebrica**

$$z = a + ib$$

dove a e b sono **numeri reali** e i è detta **unità immaginaria**,

$a = Re(z)$ è detta **parte reale**

$b = Im(z)$ è detto **coefficiente della parte immaginaria**.

La rappresentazione di z nel piano cartesiano è il punto $P(a; b)$, il piano viene detto *piano complesso* o *di Gauss,* vedi fig. 1.

I numeri reali $a = a + i0$ sono rappresentati da punti $(a; 0\ )$ dell'asse delle ascisse che viene detto **asse reale**.

I numeri $ib = 0 + ib$ sono detti **immaginari puri** e sono rappresentati da punti $(0; b)$ dell'asse delle ordinate che viene detto **asse immaginario.**

In particolare

$$0 = 0 + 0i \qquad 1 = 1 + 0i \qquad i = 0 + 1i \qquad -i = 0 - 1i$$

La distanza $\overline{OP} = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ è detta **modulo** di z e viene indicata con $|z|$.

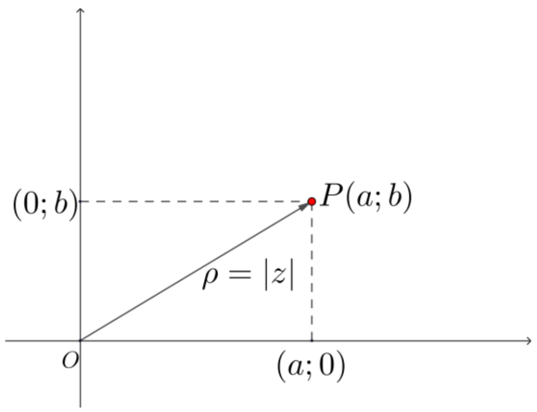

Fig. 1

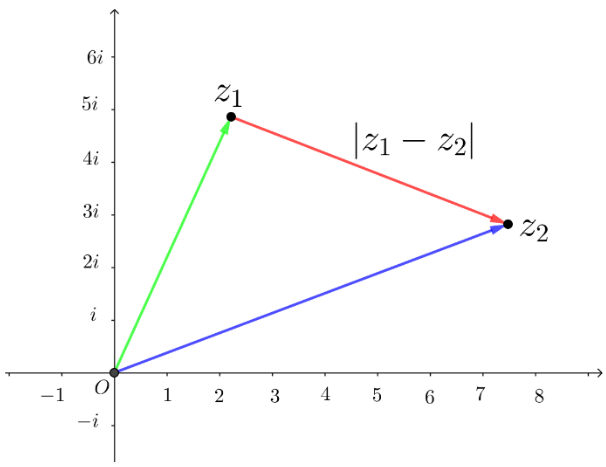

Fig. 2

Il numero complesso

$$\bar{z}=a-ib$$

è detto **coniugato** di z e ha come rappresentante il punto $P'(a;-b)$ simmetrico di $P(a;b)$ rispetto all'asse x.

Il numero reale $|z_1-z_2|$ rappresenta la distanza tra z_1 e z_2 , vedi fig. 2.

Somma , prodotto, quoziente

Se $z_1=a+ib$ e $z_2=c+id$ si definisce loro

- **somma** il numero complesso

$$z_1+z_2=a+c+i(b+d)$$

- **differenza** il numero complesso

$$z_1-z_2=a-c+i(b-d)$$

- **prodotto** il numero complesso

$$z_1\cdot z_2=ac-bd+i(bc+ad)$$

Dalla definizione di prodotto si ha :

a. $i^2=-1$

infatti $i^2=(0+i)(0+i)=0\cdot 0-1\cdot 1+i(1\cdot 0+0\cdot 1)=-1$

b. $z_1\cdot\overline{z_1}=a^2+b^2$

- **quoziente** il numero complesso

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Forma trigonometrica

Indicata con ϑ la misura in radianti dell'angolo che il semiasse positivo delle ascisse forma con $\overrightarrow{OP}$, vedi fig. 3, si ha

$$a=\rho cos\vartheta \qquad b=\rho sin\vartheta$$

il numero complesso z si scrive in **forma polare o trigonometrica**

$$z=\rho(cos\vartheta+isin\vartheta)$$

ϑ è detto **anomalia** o **argomento** di z , indicato con $arg(z)$, ed è definito a meno di multipli di 2π.

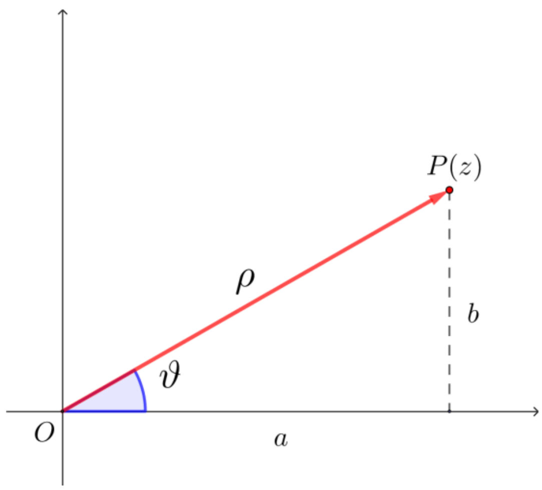

Fig. 3

Infatti

Se ρ_1, ϑ_1 e ρ_2, ϑ_2 sono rispettivamente modulo e anomalia di z_1 e z_2 si ha

Prodotto $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + isin(\vartheta_1 + \vartheta_2)]$

Quoziente $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + isin(\vartheta_1 - \vartheta_2)]$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Somme e prodotti

1. $2 + 3i - (1 + i)(3 - i)$

2. $3 - 4i + i(2 - i) + (7 - 2i)(1 + i)$

3. $(16 + i)(i - 4) - 2i(4 + i) - (2 - i)(2 + i)$

4. $(1 - 2i)^2 - 4i(2 + i)^2$

5. $2(i + 1)^2 - 4i(i - 3)$

6. $(3 - i)^2 + (2 - 4i)(i - 2)$

7. $2i(-1 + i)^3$

8. $i + i^2 + i^3 + i^4$

9. $i^8 - i^7 + i^4$

10. $i^3(1 - i) + i^{27}$

***11.** $|3 + 4i|(1 - i)^2 - |i|(3 + i)(4 - i)$

Quozienti

***12.** $\frac{4-2i}{-i+1}$

***13.** $\frac{3-2i}{5+i}$

14. $\frac{i+4}{2-3i}$

15. $\frac{12i+5}{3+i}$

16. $\frac{5}{1+i}$

17. $\frac{1}{i}-\frac{2+i}{i+1}$

***18.** $\overline{3-2i}(2i-1)+\frac{7-2i}{3-i}$

19. $\frac{4-i}{2+i}-\frac{7i^3}{i^4+1}$

***20.** $\frac{(1+2i)^4}{i^5+1}$

21. $\frac{12i-5}{(2+3i)^3}$

Dati i numeri complessi z_1 e z_2 *determinare i risultati delle seguenti operazioni* :

a) $z_1 + z_2$; b) $\overline{z_1} - 2z_2$; c) $z_1 \cdot z_2$; d) $\frac{z_2}{z_1}$

22. $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$

23. $z_1 = 1 - \sqrt{2}i$, $z_2 = 2\sqrt{2} + i$

Forma trigonometrica dei numeri complessi

Trasformare i seguenti numeri complessi dalla forma algebrica alla forma trigonometrica

24. $z = -2i$

25. $z = 5$

***26.** $z = 3 + 3i$

***27.** $z = -\sqrt{3} + i$

28. $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

***29.** $z = 2 - 2i$

30. $z = \sqrt{3}i - 1$

31. $z = -4 - 4i$

***32.** $z = \frac{1}{3+3i}$

33. $z = \frac{i}{\sqrt{3}+i}$

34. $z = \frac{4}{\sqrt{3}+i}$

35. $z = \frac{\sqrt{3}-i}{i}$

Dati i numeri z_1 *e* z_2 *calcolare* $z_1 \cdot z_2$ *e* $\frac{z_1}{z_2}$*, fornire il risultato anche in forma algebrica* :

36. $z_1 = 3\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = \frac{1}{2}\left(cos\frac{2}{3}\pi + isin\frac{2}{3}\pi\right)$

37. $z_1 = -4\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = 2\left(cos\frac{3}{4}\pi + isin\frac{3}{4}\pi\right)$

***38.** $z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{8} + isin\frac{\pi}{8}\right)$, $z_2 = 2\left(cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + isin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right)$

Soluzioni

1. S. $-2+i$; **2. S**. $13+3i$; **3. S**. $-68+4i$; **4. S**. $13-16i$;

5. S. $4+16i$; **6. S.** $8+4i$; **7. S**. $-4+4i$; **8. S.** 0 ;

9. S. $2+i$; **10. S**. $-2i-1$;

***11. S**. $-13-11i$; ($|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5, |i| = 1$) ;

***12. S**. $3+i$; ($\frac{4-2i}{-i+1} = \frac{(4-2i)(1+i)}{(-i+1)(1+i)} = \frac{6+2i}{2} = 3+i$) ;

***13. S.** $\frac{1}{2}(1-i)$; ($\frac{3-2i}{5+i} = \frac{(3-2i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{15-3i-10i+2i^2}{25-i^2} = \cdots$) ;

14. S. $\frac{1}{13}(5+14i)$; **15. S.** $\frac{1}{10}(27+31i)$; **16. S.** $\frac{5}{2}(1-i)$; **17. S**. $-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

***18. S**. $-\frac{47}{10}+\frac{41}{10}i$; ($\overline{3-2i} = 3+2i$ pertanto : $(3+2i)(2i-1)+\frac{7-2i}{3-i} =$

$= 6i-3+2i^2-2i+\frac{(7-2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \cdots$) ;

19. S. $\frac{7}{5}+\frac{23}{10}i$;

***20. S**. $-\frac{31}{2}-\frac{17}{2}i$; ($(1+2i)^4 = [(1+2i)^2]^2 = (-3+4i)^2 = 9-24i-16 \ldots$) ;

21. S. $\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$;

22. S. a) $2-2i$; b) $-7+6i$; c) $5+10i$; d) $\frac{-11-2i}{5}$;

23. S. a) $1+2\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})i$; b) $1-4\sqrt{2}+(\sqrt{2}-2)i$; c) $3(\sqrt{2}-i)$; d) $\frac{1}{3}(\sqrt{2}+5i)$;

24. S. $2\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; **25. S.** $5(cos0+isin0)$;

***26. S.** $3\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)$; ($3+3i=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$, se $\begin{cases} cos\vartheta=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ sin\vartheta=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ allora $\vartheta=\frac{\pi}{4}$) ;

***27. S.** $2\left(cos\frac{5}{6}\pi+isin\frac{5}{6}\pi\right)$; ($-\sqrt{3}+i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$, se $\begin{cases} cos\vartheta=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\vartheta=\frac{1}{2} \end{cases}$ allora $\vartheta=\frac{5}{6}\pi$);

28. S. $cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

***29. S.** $2\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

($2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$, se $\begin{cases} cos\vartheta=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\vartheta=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ allora $\vartheta=-\frac{\pi}{4}$) ;

30. S. $2\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$; **31. S.**$4\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$;

***32. S.** $\frac{\sqrt{2}}{\mathbf{6}}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; ($\frac{1}{3+3i}=\frac{3-3i}{(3+3i)(3-3i)}=\frac{3-3i}{18}=\frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\cdots$vedi es. 29);

33. S. $\frac{1}{\mathbf{2}}\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$; **34. S. 2** $\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

35. S. 2 $\left(cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$;

36. S. $z_1\cdot z_2=\frac{3}{2}(cos\pi+isin\pi)=-\frac{3}{2}$; $\frac{z_1}{z_2}=6\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=3\left(1-\sqrt{3}i\right)$;

37. S. $z_1\cdot z_2=-8(cos\pi+isin\pi)=8$; $\frac{z_1}{z_2}=-2\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2i$;

***38. S.** $z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}\left(cos\frac{11}{8}\pi+isin\frac{11}{8}\pi\right)=-\sqrt{4-2\sqrt{2}}-i\sqrt{4+2\sqrt{2}}$;

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)+isin\left(\frac{7}{8}\pi\right)\right)=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{8}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{8}}$;

(ricordiamo che $cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$) e

$cos\frac{3}{8}\pi=cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\sin\frac{3}{8}\pi=sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

il numero $z_1\cdot z_2$ ha modulo $2\sqrt{2}$ e argomento $\vartheta=\frac{\pi}{8}+\frac{5}{4}\pi=\frac{11}{8}\pi=\pi+\frac{3}{8}\pi$...

il numero $\frac{z_1}{z_2}$ ha modulo $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e argomento $\vartheta=\frac{\pi}{8}-\frac{5}{4}\pi=-\frac{9}{8}\pi=-\pi-\frac{\pi}{8}$ ...);