1. Definizioni-Operazioni con le matrici

Una matrice di ordine $m \times n$ è una tabella di numeri disposti su m righe e n colonne.

Per esempio nella matrice A_{3x2} formata da 3 righe e 2 colonne

$$\boldsymbol{A}_{3x2}= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = -1$ (i due indici indicano che l'elemento appartiene alla prima riga e prima colonna) ,

$a_{12} = 0$ (l'elemento appartiene alla prima riga e seconda colonna),

$a_{21} = 2$ (seconda riga e prima colonna).....

In generale in una matrice $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ l'elemento

$$a_{ij} \qquad\qquad i = 1, \dots., m; j = 1, \dots, n$$

appartiene alla riga $i - esima$ e alla colonna $j - esima$.

Se $m = n$ la matrice si dice **quadrata** di ordine n.

In una matrice quadrata gli elementi $a_{i,i}$ formano **la diagonale principale**

La matrice **trasposta** $\boldsymbol{A}^T_{m\times n}$ della matrice $\boldsymbol{A}_{nxm}$ si ottiene da questa scambiando le righe con le colonne

$$\mathbf{A}= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

La matrice quadrata è **simmetrica** se è uguale alla sua trasposta .

Una matrice quadrata si dice **diagonale** se sono tutti nulli gli elementi che non appartengono alla diagonale principale; in particolare la matrice diagonale **I** è detta **unità** o **identica** se $a_{ii} = 1 \forall i \in \{1; 2; \dots n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathbf{I}= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{I}= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrici diagonali **Matrici unità o identiche**

La **matrice triangolare superiore** (inferiore) è una matrice quadrata che ha nulli tutti gli elementi che **si trovano al di sotto** (al di sopra) della diagonale principale

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathbf{I}= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{I}= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 7 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

Triangolari superiori **Triangolari inferiori**

Si definisce **matrice nulla** quella che ha tutti gli elementi uguali a zero.

Operazioni con le matrici

Somma

Definizione Date due matrici **A** e **B** dello stesso ordine si definisce loro **somma** la matrice **C** i cui elementi sono le somme dei corrispondenti elementi di A e B

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Prodotto per un numero reale

Definizione Data la matrice **A** e il numero reale k si definisce loro **prodotto** la matrice k·**A** la matrice di elementi

$$k \cdot a_{ij} \qquad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

Esempio

Se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{allora} \qquad 4\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 0 & -16 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$$

Prodotto righe per colonne

Definizione Date le matrici $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ e $\boldsymbol{B}_{n\times q}$ (numero colonne n di **A** = numero di righe n di **B**) si definisce loro **prodotto** **A·B** la matrice $\boldsymbol{C}_{mxq}$ i cui elementi c_{ij} si ottengono come somma dei prodotti degli elementi della riga $i-esima$ di **A** per la colonna $j-esima$ di **B**.

Esempio.

Se $\boldsymbol{A}_{3\times 2}$ e $\boldsymbol{B}_{2\times 3}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

allora

$$\boldsymbol{C}_{3\times 3} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot 2 + 2\cdot(-4) & 3\cdot 3 + 2\cdot 7 \\ 0\cdot 1 + (-4)\cdot 0 & 0\cdot 2 + (-4)\cdot(-4) & 0\cdot 3 + (-4)\cdot 7 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 0 & 3\cdot 2 + 0\cdot(-4) & 3\cdot 3 + 0\cdot 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 23 \\ 0 & 16 & -28 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Se sono calcolabili sia A·B sia $\mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$, in genere risulta

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

cioè **non vale la proprietà commutativa**.

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Somma

1. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 21 & 7 \\ -12 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 2 & 1 \\ -24 & 11 \end{pmatrix}$

Moltiplicazione per un numero

3. $-2\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

4. *Date le matrici* **A** = $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ *e* **B** = $\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 5 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ *calcolare* 3**A**−2**B**.

Date le matrici

A= $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ **B**= $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

determinare:

5. a) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ $b)$ $\boldsymbol{2A}$

6. $a) - \boldsymbol{3B}$ $b) - \boldsymbol{2A}+\boldsymbol{B}$

Prodotto tra matrici

Calcolare il prodotto **A· B** :

***7.** **A** = $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **B** = $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

8. **A** = $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -8 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **B** = $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

9. **A** = $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ **B** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

10. **A**= $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ **B** = $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

11. A= $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ **B** = $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

12. A= $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **B** = $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Date le matrici **A** *e* **B** *verificare che* **A· B** $\neq$ **B · A :**

13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ **B** = $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

14. **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **B** = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

15. **A** = $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ **B** = $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

***16**. *Date le matrici*

A = $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ *e* **B** = $\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

calcolare

$$-2\mathbf{A}^2 + 3\,\mathbf{B}\,.$$

17. *Date le matrici*

A = $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ *e* **B** = $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

dimostrare che

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.$$

Soluzioni

1. S. $\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$; **2. S.** $\begin{pmatrix} 29 & -3 \\ -10 & 4 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}$ **;** **3. S.** $\begin{pmatrix} -8 & 10 & -4 \\ 12 & -20 & -16 \end{pmatrix}$;

4. S. $\begin{pmatrix} 18 & -19 \\ -16 & 24 \\ 23 & -5 \end{pmatrix}$; **5.** a) **S.** $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **;** b) **S.** $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -8 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$;

6. a) **S.** $\begin{pmatrix} -9 & -15 \\ 3 & 12 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$; b) **S.** $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ **;**

***7. S. A· B**= $\begin{pmatrix} 22 \\ 13 \end{pmatrix}$; ($\begin{pmatrix} 4*6-1*2+0*5 \\ 2*6+3*2-1*5 \end{pmatrix}$);

8. S. A· B= $\begin{pmatrix} -15 & -4 \\ 19 & 27 \end{pmatrix}$; **9. S. A· B**= $\begin{pmatrix} -12 & 22 \\ -4 & 4 \\ 31 & -32 \end{pmatrix}$; **10. S. A· B**= $\begin{pmatrix} 2 & -8 & -3 \\ 2 & 40 & 9 \\ 4 & -16 & -6 \end{pmatrix}$;

11. S. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -5 \\ 3 & -7 & 6 \\ 7 & -4 & 17 \end{pmatrix}$; **12. S.** $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 32 & 14 & 2 \\ 37 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

13. S. A·B $= \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -21 & 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$;

14. S. A·B= $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 9 & -3 & 8 \\ 11 & -7 & 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 9 & 4 & 4 \\ -8 & -3 & -5 \end{pmatrix}$;

15. S. A· B= $\begin{pmatrix} 25 & -28 & 15 \\ 67 & -59 & 34 \\ 55 & 4 & 15 \end{pmatrix}$; **B · A** = $\begin{pmatrix} -6 & -2 & 10 \\ 38 & -39 & 0 \\ 21 & -35 & 26 \end{pmatrix}$;

***16. S.** $\begin{pmatrix} -66 & 72 \\ -79 & 22 \end{pmatrix}$;

(**A · A** = $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6*6-3*4 & 6*(-3)-3*2 \\ 4*6+2*4 & 4*(-3)+2*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -24 \\ 32 & -8 \end{pmatrix}$ …);

17. S. $\begin{pmatrix} 57 & -15 \\ -46 & 37 \end{pmatrix}$;