2. Formula di Taylor e di Mac-Laurin con resto secondo Peano

Formula di Taylor – con resto secondo Peano
Se $f(x)$ è una funzione definita nell'intervallo $(a;b)$ di $\mathbb{R}$, derivabile n volte nel punto $x_0 \in (a;b)$, l'uguaglianza

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

valida $\forall x \in (a;b)$, si chiama
formula di Taylor di ordine n della funzione f relativa al punto $\mathbf{x_0}$.

Il polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

si chiama

polinomio di Taylor della funzione f di ordine n di punto iniziale x_0

mentre il termine $o((x - x_0)^n)$ è detto

resto della formula secondo Peano

Il resto è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$ e rappresenta l'errore che si commette quando nell'intorno di x_0 al valore $f(x)$ della funzione si sostituisce il valore del polinomio $P_n(x)$.

Formula di Mac-Laurin – con resto secondo Peano
Se $f(x)$ è una funzione definita nell'intervallo $(a;b)$ di $\mathbb{R}$, derivabile n volte nel punto $0 \in (a;b)$, la uguaglianza

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!}x^2f''(0) + \frac{1}{3!}x^3f'''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}x^nf^{(n)}(0) + o(x^n)$$

valida $\forall x \in (a;b)$, si chiama
formula di Mac-Laurin di ordine n della funzione f relativa al punto $\mathbf{x_0 = 0}$.

In modo analogo il polinomio

$$P_n(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!}x^2f''(0) + \frac{1}{3!}x^3f'''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}x^nf^{(n)}(0)$$

si chiama

polinomio di Mac-Laurin della funzione f di ordine n di punto iniziale $x_0 = 0$

mentre il termine $o(x^n)$ è detto

resto della formula secondo Peano

Il resto è un infinitesimo di ordine superiore a x^n per $x \to 0$ e rappresenta l'errore che si commette quando nell'intorno di $x_0 = 0$ al valore $f(x)$ della funzione si sostituisce il valore del polinomio $P_n(x)$.

Tabella degli sviluppi di Mc Laurin di alcune funzioni elementari

validi in un opportuno intorno di $x_0 = 0$
con il resto di Peano

1. $sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
2. $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
4. $log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
5. $tgx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$, per $|x| < \frac{\pi}{2}$
6. $arcsinx = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
7. $arccosx = \frac{\pi}{2} - arcsinx$
8. $arctgx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n-1})$
9. $arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - arctgx$
10. $sinhx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
11. $coshx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
12. $(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

    essendo $\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & se\ n = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} & se\ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$
13. $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$
14. $\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$
15. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = Dlog(1+x)$,
16. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
17. $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2(n-1)} + o\left(x^{2(n-1)}\right) = Darctgx$
18. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$
19. $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3)$
20. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + o(x^3)$

N.B. $n!! = \begin{cases} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Esempio

Calcoliamo lo sviluppo di Mac Laurin del 6° ordine della funzione $f(x) = log(1 + x^2)$.

Posto $x^2 = t$, la funzione assume la forma $log(1 + t)$. Si osserva che, poiché il risultato finale deve essere di ordine 6, occorre calcolare lo sviluppo di $log(1 + t)$ fino all'ordine 3; si ha :

$$log(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

da cui, sostituendo $t = x^2$, si ha lo sviluppo richiesto:

$$log(1 + x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$$

Esercizi

(gli esercizi con * sono avviati)

Basandosi sulla tabella degli sviluppi fondamentali, calcolare gli sviluppi in serie di

Mc Laurin (centro $x_0 = 0$) , con resto di Peano, delle seguenti funzioni fino all'ordine n indicato :

***1.** $f(x) = sin(3x)$, $n = 5$

2. $f(\boldsymbol{x}) = sin(x^2)$, $n = 6$

3. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \cos(2x)$, $n = 4$

***4.** $f(x) = cos(x^3)$, $n = 6$

***5.** $f(x) = e^{-x^3}$, $n = 9$

6. $f(x) = e^{3x} - 1$, $n = 4$

7. $f(x) = log(1 + 2x)$, $n = 3$

***8.** $f(x) = \log(1 - 2x)$, $n = 4$

9. $f(x) = tg(4x)$, $n = 3$

10. $f(x) = \arcsin(x^2)$, $n = 6$

***11.** $f(x) = arctg(-2x)$, $n = 3$

12. $f(x) = arctg\, x^2$, $n = 6$

13. $f(x) = sinh(2x)$, $n = 3$

14. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $n = 6$

15. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $n = 6$

16. $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$, $n = 6$

***17.** $f(x) = \frac{2}{2-x}$, $n = 4$

18. $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, $n = 8$

19. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}$, $n = 4$

20. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+2x}}$, $n = 2$

***21.** $f(x) = \sqrt[6]{1 + 3x^2}$, $n = 2$

***22.** $f(x) = \sqrt[5]{1 + 2x}$, $n = 2$

Esempio

Sia

$$f(x) = \log(1 + sinx) \qquad n = 3$$

Poiché

$\log(1 + sinx) = sinx - \frac{sin^2 x}{2} + \frac{sin^3 x}{3} + o(sin^3 x)$

$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, e $o(sin^3 x) = o(x^3)$,

si ha, sostituendo:

$$\log(1 + sinx) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)$$

Trascurando i termini infinitesimi di grado superiore a 3 rispetto a x , risulta perciò:

$$\log(1 + sinx) = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Esercizi

23. $f(x) = x - sinx$, $n = 5$

24. $f(x) = e^x - 1 - sinx$, $n = 3$

25. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - cosx$, $n = 4$

***26.** $f(x) = 1 - \frac{x^2}{16} - \sqrt{1 - x^2}$ $n = 4$

27. $f(x) = x^3 - \log(1 + x^3)$, $n = 6$

28. $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}$ $n = 6$

29. $f(x) = (e^{3x} - 1)sinx$, $n = 4$

***30.** $f(x) = x^2 - \log(cosx)$ $n = 4$

31. $f(x) = sin(e^x - 1) - x$, $n = 3$

Sviluppi di Taylor nel punto indicato

Esempi

1. $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$, $n = 4$

operiamo la traslazione $x' = x - 2$ e sviluppiamo con centro in $x'_0 = 0$.

Lo sviluppo di Mc Laurin con resto di Peano è :

$$e^{x'} = 1 + x' + \frac{x'^2}{2!} + \frac{x'^3}{3!} + \frac{x'^4}{4!} + o(x'^4)$$

ritornando in x si ha :

$$e^{x-2} = 1 + (x - 2) + \frac{(x - 2)^2}{2!} + \frac{(x - 2)^3}{3!} + \frac{(x - 2)^4}{4!} + o((x - 2)^4)$$

da cui :

$$e^x = e^2\left(1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \frac{(x-2)^4}{4!} + o((x-2)^4)\right);$$

2. $f(x) = logx, \qquad x_0 = 3\,, \quad n = 4$

poniamo $x' = x - 3$ da cui $x = x' + 3$, sostituendo si ha:

$$log(x' + 3\,) = log\left[3\left(1 + \frac{x'}{3}\right)\right] = log3 + log\left(1 + \frac{x'}{3}\right) =$$

sviluppiamo con Mc Laurin:

$$= log3 + \frac{x'}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{x'}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x'}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x'}{3}\right)^4 + o(x'^4)$$

sostituendo di nuovo al posto di x' risulta:

$$logx = log3 + \frac{x-3}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-3}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x-3}{3}\right)^4 + o(x^4)\,;$$

3. $f(x) = sinx \;\;,\;\; x_0 = -\frac{3}{2}\pi \;\;,\;\; n = 4$

poniamo $x' = x + \frac{3}{2}\pi$, da cui $x = x' - \frac{3}{2}\pi$, quindi si ha :

$$sinx = sin\left(x' - \frac{3}{2}\pi\right) = cosx' = 1 - \frac{x'^2}{2!} + \frac{x'^4}{4!} + o(x'^4) =$$

$$= 1 - \frac{\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)^2}{2!} + \frac{\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)^4}{4!} + o\left(\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)^4\right)$$

Soluzioni

***1**. **S.** $3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + o(x^5) = 3x - \frac{9x^3}{2} + \frac{81x^5}{40} + o(x^5)\,;$

2. S. $x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + o(x^6);$

3.S. $1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4);$

***4.S.** $1 - \frac{(x^3)^2}{2!} + o(x^6) = 1 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)\,;$

***5.S.** $1 + (-x^3) + \frac{(-x^3)^2}{2!} + \frac{(-x^3)^3}{3!} + o(x^9) = 1 - x^3 + \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{6} + o(x^9)\;;$

6. S. $3x+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^4}{4!}+o(x^4)$; **7. S**. $2x\ -\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}+o(x^3)$;

***8. S.** $(-2x)-\frac{(-2x)^2}{2}+\frac{(-2x)^3}{3}-\frac{(-2x)^4}{4}+o(x^4)=-2x-2x^2-\frac{8}{3}x^3-4x^4+o(x^4)$;

9. S. $4x+\frac{(4x)^3}{3}+o(x^3)$; **10. S.** $x^2+\frac{x^6}{6}+o(x^6)$;

***11. S.** $(-2x)-\frac{(-2x)^3}{3}+o(x^3)\ =-2x+\frac{8}{3}x^3+o(x^3)$;

12. S. $x^2-\frac{(x^2)^3}{3}+o(x^6)$; **13. S**. $2x\ +\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^3)$; **14. S.** $1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}+o(x^6)$;

15. S. $1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{16}+o(x^6)$; **16. S.** $1-x^3+x^6+o(x^6)$;

***17. S.** $(\frac{2}{2-x}=\frac{1}{1-\frac{x}{2}})$; $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}+o(x^4)$;

18. S. $1-x^4+x^8+o(x^8)$; **19. S.** $1+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o(x^4)$; **20. S.** $1-\frac{2}{3}x+\frac{8}{9}x^2+o(x^2)$;

***21. S.** $(1+3x^2)^{\frac{1}{6}}=1+\binom{\frac{1}{6}}{1}3x^2+o(x^2)=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$;

***22. S.** $(1+2x)^{\frac{1}{5}}=1+\binom{\frac{1}{5}}{1}2x+\binom{\frac{1}{5}}{2}4x^2+o(x^2)=1+\frac{1}{5}\cdot 2x+\frac{\frac{1}{5}\cdot(\frac{1}{5}-1)}{2}4x^2+o(x^2)=$

$=1+\frac{2}{5}x-\frac{8}{25}x^2+o(x^2)$;

23. S. $\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5+\ o(x^5)$; **24. S.** $\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$; **25. S.** $\frac{x^4}{12}+o(x^4)$;

***26. S.** $1-\frac{x^2}{16}-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\ 1-\frac{x^2}{16}\ -\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)=\frac{7x^2}{16}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$;

27. S. $\frac{x^6}{2}+o(x^6)$; **28. S.** $x^2+\frac{x^6}{8}+o(x^6)$; **29. S.** $3x^2+\frac{9x^3}{2}+4x^4+o(x^4)$;

***30. S.** $\frac{3x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+o(x^4)$; (Poiché $\log(cosx)=log[1+(cosx-1)]$, tenendo conto che $cosx-1=o(x^2)$, si ha, trascurando i termini di grado superiore a 4

$log[1+(cosx-1)]=(cosx-1)-\frac{(cosx-1)^2}{2}+o(x^4)=$

$=\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)^2\ =\cdots$)

31. S. $\frac{x^2}{2}+o(x^2)$;