5. Grafico della funzione integrale

Definizione

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; b]$. La funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

prende il nome di **funzione integrale** della f , mentre la funzione f prende il nome di **funzione integranda**.

Il teorema di Torricelli-Barrow afferma che la funzione integrale $F(x)$ è derivabile $\forall x \in [a; b]$ e risulta

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{e} \qquad F(a) = 0$$

Cioè la funzione integrale $F(x)$ è **una primitiva** della funzione integranda $f(x)$ ed è quella **particolare primitiva che si annulla per** $x = a$.

Pertanto dalle proprietà e dal grafico della $f(x)$ è possibile dedurre andamento e proprietà della $F(x)$ basandosi sulle seguenti considerazioni:

- negli intervalli in cui la $f(x) = F'(x)$ è positiva (negativa) la $F(x)$ è crescente (decrescente);
- gli zeri della $f(x) = F'(x)$ sono punti a tangente orizzontale per la $F(x)$;
- se la $f(x) = F'(x)$ è dispari allora la $F(x)$ è pari;
- se $a = 0$ e la $f(x) = F'(x)$ è pari allora la $F(x)$ è dispari.

Esempio

Dopo aver studiato la funzione $f(x) = log(x^2 - x + 1)$ *studiare e dedurre il grafico della funzione*

$$F(x) = \int_0^x log(t^2 - t + 1)\, dt.$$

Poiché $x^2 - x + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, la funzione $f(x)$ è definita e continua in $\mathbb{R}$, inoltre risulta

$$log(x^2 - x + 1) \geq 0 \qquad \text{se } x^2 - x + 1 \geq 1 \qquad \text{cioè se } x \leq 0 \vee x \geq 1,$$

quindi il suo grafico interseca l'asse x nei punti $O(0; 0)$ e $A(1; 0)$;

risulta inoltre

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1},$$

la $f(x)$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ e dal segno di $f'(x)$ si ha

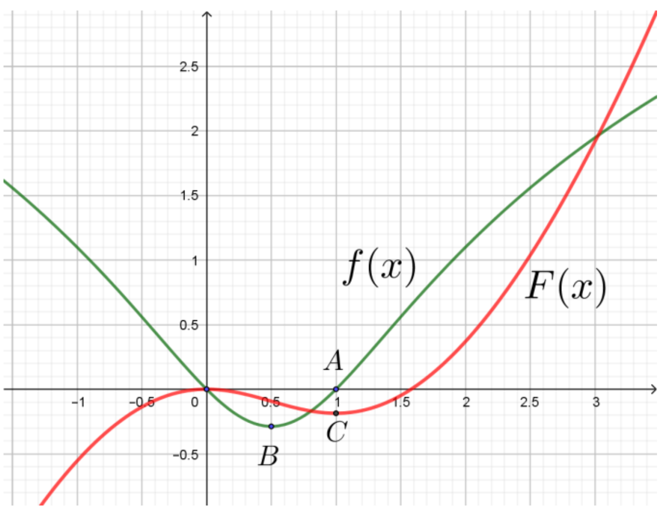
		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Quindi $x = \frac{1}{2}$ è punto di minimo e il corrispondente punto sulla curva è $B\left(\frac{1}{2}; log\,\frac{3}{4}\right)$.

Inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ quindi non ha asintoti.

		0		1	
$F'(x) = f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗		↘		↗

Per quanto riguarda la $F(x)$ dal segno di $f(x) = F'(x)$ e di $f'(x) = F''(x)$ si deduce che $x = 0$ è punto di massimo relativo e $x = 1$ è punto di minimo relativo (C in figura) , mentre $x = \frac{1}{2}$ è punto di flesso ; inoltre $F(0) = 0$; i grafici di $f(x)$ e $F(x)$ sono riportati in fig.



Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Applicazioni del teorema di Torricelli-Barrow

*1) Determinare i punti a tangente orizzontale della funzione $\int_{-1}^{x} \frac{2t-t^2}{t^2+1}\, dt$.

*2) Determinare gli eventuali punti a tangente orizzontale della funzione

$$F(x) = \int_0^x (t-1) arctgt\, dt .$$

*3) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$F(x) = \int_{-2}^{x} \frac{\sqrt{t+3}}{t^4+2}\, dt$$

nel suo punto di ascissa $x = -2$.

*4) Data la funzione $F(x) = \int_1^x t\sqrt{t^4+1}\, dt$:

a) dimostrare che la $F(x)$ è pari;
b) determinare le rette tangenti al grafico della $F(x)$ nei punti $x = \pm 1$;
c) dimostrare che ha un punto di minimo relativo;
d) studiare la concavità .

*5) Data la funzione $F(x) = \int_0^x e^{2t-t^2}\, dt$

a) dimostrare che la $F(x)$ non ha punti a tangente orizzontale;
b) verificare che ha un punto di flesso a tangente obliqua .

*6) Data la funzione $F(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$,

a) determinare eventuali massimi e minimi;
b) determinare eventuali flessi ;
c) tracciarne il grafico.

*7) Data la funzione $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$ e tale che $f(1) = -4$, calcolare il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x f(t)dt}{x^3 - x}.$$

*8) Calcolare la derivata della funzione integrale

$$F(x) = \int_0^{x^3} e^{-cost}\, dt.$$

*9) Dimostrare che la funzione

$$F(x) = \int_{-2}^{x} (t^2 + t + 3)e^{-t+1} dt$$

è invertibile e poi calcolare la derivata dell'inversa $(F^{-1})'(0)$.

Soluzioni

***1. S.** $x = 0$ e $x = 2$; ($F'(x) = \frac{2x - x^2}{x^2 + 1} = 0$ ….) ;

***2. S.** $x = 0$ punto di massimo relativo, $x = 1$ punto di minimo relativo ;

($F'(x) = (x - 1)arctgx \geq 0$ per $x \leq 0 \vee x \geq 1$ …) ;

***3. S.** $y = \frac{1}{18}(x + 2)$; (si ha : $F(-2) = 0$, $F'(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^4+2}$, $F'(-2) = \frac{1}{18}$ …);

***4. S.** a) poiché la $F'(x) = x\sqrt{x^4 + 1}$ è dispari allora la $F(x)$ è pari ;

b) per $x = 1$ risulta : $F(1) = 0$, $F'(x) = x\sqrt{x^4 + 1}$, $F'(1) = \sqrt{2}$, pertanto la retta tangente ha equazione $y = \sqrt{2}(x - 1)$, per $x = -1$ per la simmetria la retta tangente ha equazione $y = -\sqrt{2}(x + 1)$;
$c)$ $F'(x) = x\sqrt{x^4 + 1} \geq 0$ per $x \geq 0$ quindi $x = 0$ è punto di minimo relativo ; d) $F''(x) = f'(x) = \frac{3x^4+1}{\sqrt{x^4+1}} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, pertanto la concavità è sempre verso l'alto ;

***5. S.** a) poiché $F'(x) = e^{2x-x^2} > 0 \;\; \forall x$, la funzione è sempre crescente;

b) poiché $F''(x) = f'(x) = 2(1-x)e^{2x-x^2} \geq 0$ per $x \leq 1$, $x = 1$ è ascissa di un punto di flesso a tangente obliqua poiché $F'(1) = f(1) = e \neq 0$;

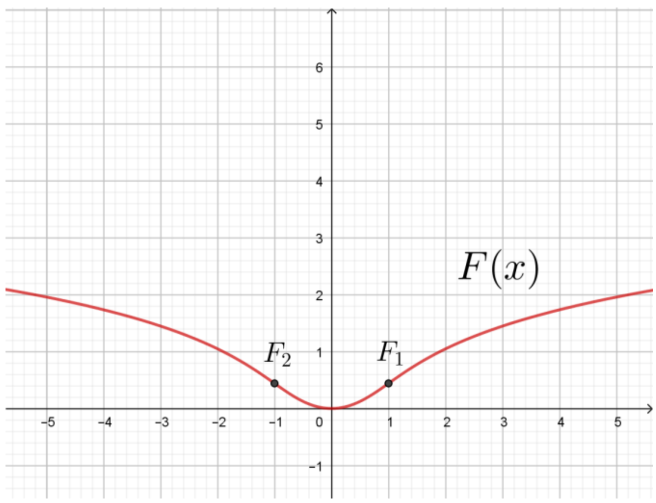
***6. S.** a) $F'(x) = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$, la F è pari poiché la f è dispari ed essendo $F(0) = 0$, il grafico passa per l'origine degli assi ; essendo $F'(x) = f(x) \geq 0$ per $x \geq 0 \Rightarrow x = 0$ è punto di minimo relativo;

b) si ha $F''(x) = f'(x) = \frac{1-x^4}{\sqrt{(1+x^4)^3}} \geq 0$ per $-1 \leq x \leq 1$, i punti $x = \pm 1$ sono ascisse di punti di flesso, F_1 , F_2 ; inoltre, dal seguente grafico

		0	
$F'(x) = f(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘		↗

si deduce che $F(x) \geq 0 \;\forall x$;

c) Grafico della funzione $F(x)$



***7. S.** -2 ; (il limite si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, è possibile applicare il teorema di De l'Hopital :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)}{x^3-x} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{3x^2-1} = \frac{-4}{2} = -2 \text{);}$$

***8. S.** $3x^2e^{-cos(x^3)}$; (la $F(x)$ è composta mediante le funzioni

$$g(y) = \int_0^y e^{-cost}\,dt \qquad \text{e} \qquad y = h(x) = x^3;$$

poiché e^{-cost} è continua in $\mathbb{R}$ la $g(y)$ per il teorema di Torricelli-Barrow è derivabile in $\mathbb{R}$ e risulta $g'(y) = e^{-cosy}$; quindi la $F(x)$ composta di funzioni derivabili in $\mathbb{R}$ è derivabile in $\mathbb{R}$. Applichiamo la regola di derivazioni delle funzioni composte:

$$F'(x) = g'\big(h(x)\big)\cdot h'(x) = 3x^2e^{-cos(x^3)} \text{) ;}$$

***9. S.** $\frac{1}{5e^3}$ (poiché $F'(x) = (x^2+x+3)e^{-x+1} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, la $F(x)$ è crescente in $\mathbb{R}$ pertanto invertibile; si ha $F(x) = 0$ per $x = -2$, dalla regola di derivazione della funzione inversa si ha:

$$(F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(-2)} = \frac{1}{((-2)^2-2+3)e^{-(-2)+1}} = \frac{1}{5e^3} \text{):}$$