7. Interpretazione vettoriale. Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione Si definisce **vettore** a n componenti reali (o vettore di $\mathbb{R}^n$) ogni $n-pla$ ordinata di numeri reali

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Il vettore nullo è il vettore $\mathbf{0} = (0,0, \dots ,0)$.

Prende il nome di **vettore riga** la matriceA_{1xn} i cui elementi sono le componenti del vettore

$$\boldsymbol{x} = (x_1 \;\; x_2 \dots . x_n)$$

Prende il nome di **vettore colonna** la matriceA_{nx1} i cui elementi sono le componenti del vettore

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Prodotto matrice vettore

Definizione .Data la matrice A con m righe ed n colonne e

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots \;\; a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore $\boldsymbol{x} = (x_1 \;\; x_2 \dots . x_n)$ si definisce loro prodotto e si indica con A $\boldsymbol{x}$ il prodotto, righe per colonne , della matrice A per il vettore colonna $\boldsymbol{x}$**,** cioè

$$\mathrm{A}\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots \;\; a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \;\dots\dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \;\dots\dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\,x_2 + \;\dots\dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Pertanto se $\boldsymbol{b} = (b_{1,} \;\; b_2 \dots . b_m)$, l'equazione vettoriale

$$\mathrm{A}\,\boldsymbol{x} = \;\boldsymbol{b}$$

equivale a

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \;\dots\dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \;\dots\dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\,x_2 + \;\dots\dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot\cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

ossia al sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + \ \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + \ \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Definizione I vettori $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots\dots, \boldsymbol{a_n}$ si dicono **linearmente dipendenti** se esistono n numeri reali $\lambda_{1,}\lambda_2, \dots\dots, \lambda_n$ **non tutti nulli** tali che la combinazione lineare di $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots\dots, \boldsymbol{a_n}$ a coefficienti $\lambda_{1,}\lambda_2, \dots\dots, \lambda_n$ sia uguale al vettore nullo

$$\lambda_1\boldsymbol{a_1}+\lambda_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0} \qquad (***)$$

Se ciò non si verifica, cioè se

$$\lambda_1\boldsymbol{a_1}+\lambda_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$$

se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \dots = \lambda_n = 0$ i vettori si dicono **linearmente indipendenti.**

Se $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots\dots, \boldsymbol{a_n}$ sono vettori colonna a n componenti

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots\dots, \boldsymbol{a_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

l'equazione vettoriale

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

equivale al sistema omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\,\lambda_2 + \ \dots\dots + a_{1n}\lambda_n = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\,\lambda_2 + \ \dots\dots + a_{2n}\lambda_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\,\lambda_2 + \ \dots\dots + a_{nn}\lambda_n = 0 \end{cases}$$

nelle incognite $\lambda_{1,}\lambda_2, \dots\dots, \lambda_n$.

Se il determinante formato dalle componenti dei vettori è diverso da zero

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\ a_{mn} \end{vmatrix} \neq 0$$

il sistema ha l'unica soluzione $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \ldots = \lambda_n = 0$, cioè i vettori sono linearmente indipendenti. In questo caso ogni altro vettore colonna a n componenti

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

si può scrivere come loro combinazione lineare .

Esempio

I vettori $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ con

$$\boldsymbol{a_1}(2;3;1) \qquad \boldsymbol{a_2}(1;2;3) \qquad \boldsymbol{a_3}(4;1;3)$$

sono indipendenti, infatti

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 26 \neq 0$$

Il vettore **b**(16;10;16) si può esprimere come combinazione lineare di $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$

$$\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} + \lambda_3\boldsymbol{a_3} = \boldsymbol{b}$$

I coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 16 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 10 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 16 \end{cases}$$

Le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, Quindi :

$$\boldsymbol{a_1} + 2\boldsymbol{a_2} + 3\boldsymbol{a_3} = \boldsymbol{b}$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

***1**. Dati i tre vettori

$$\boldsymbol{v_1}(1;-1) \qquad \boldsymbol{v_2}(2;1) \qquad \boldsymbol{v_3}(-4;3)$$

a) Verificare che $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ sono indipendenti
b) Esprimere $\boldsymbol{v_3}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$

***2**. Dati i tre vettori

$$\boldsymbol{v_1}(0; 0; -1) \qquad \boldsymbol{v_2}(-2; -1; 0) \qquad \boldsymbol{v_3}(-3;0;1)$$

a) Dimostrare che sono indipendenti
b) Esprimere il vettore $\boldsymbol{v_4}$(3; -2; -1) come combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$

***3**. Dati i tre vettori

$$\boldsymbol{v_1}(1; k;1) \qquad \boldsymbol{v_2}(1; -1; 1) \qquad \boldsymbol{v_3}(4; 1; 1-k)$$

a) Determinare per quali valori di k sono indipendenti

b) posto k=0, esprimere $\boldsymbol{v_4}$(-2; 3; 1) come combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$

***4**. Verificare che i tre vettori di $\mathbb{R}^3$ **a**$(1; 2; 1)$, **b**$(2; 0; 1)$, **c**$(-1; -3; -2)$sono linearmente indipendenti .

***5**. Verificare che i tre vettori di $\mathbb{R}^3$ **a**$(1; -2; 0)$, **b**$(2; -1; 3)$, **c**$(-1; 3; 1)$ sono linearmente dipendenti .

***6**. Determinare t affinché i tre vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{a}(1; -2; 1) , \qquad \mathbf{b}(t; -1; -1) , \qquad \mathbf{c}(1; 3; 2)$$

siano linearmente dipendenti .

***7.** Verificare che $\forall l \in \mathbb{R}$ i tre vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{a}(l - 1; 1; 0) , \qquad \mathbf{b}(2; -1; 2) , \qquad \mathbf{c}(3; -l; -l)$$

sono linearmente indipendenti .

8. Verificare che i tre vettori

$$\boldsymbol{v_1}(1; 0;2) \qquad \boldsymbol{v_2}(2; -1; 3) \qquad \boldsymbol{v_3}(0; k; k-1)$$

sono indipendenti $\forall$ k$\in \mathbb{R}$.

9. Determinare h affinché i tre vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{a}(h; -1; 2 - h) , \qquad \mathbf{b}(0; h + 1; 0) , \qquad \mathbf{c}(1; 3; -1)$$

siano linearmente indipendenti .

10.. Dati i tre vettori

$$\boldsymbol{v_1}(-2; 3) \qquad \boldsymbol{v_2}(4; -1) \qquad \boldsymbol{v_3}(- 8;7)$$

a) Verificare che $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ sono indipendenti

b) Esprimere $\boldsymbol{v_3}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$

11. Dopo aver verificato che i tre vettori $\mathbb{R}^3$

a $(3; -1; 1)$, **b** $(-1; 4; 2)$, **c** $(1; 7; 5)$

sono linearmente dipendenti , esprimere **c** come combinazione lineare di **a** e **b** .

12. Determinare t affinché i tre vettori di $\mathbb{R}^3$

a$(t; 1; -3)$, **b**$(1; 0; -4)$, **c**$(2t; 3; -1)$

siano linearmente indipendenti .

Nel caso di dipendenza lineare, esprimere **b** come combinazione lineare di **a** e **c** .

13. Dopo aver dimostrato che per $k = 1$ i tre vettori

$\boldsymbol{v_1}$(1; 0 ;k) $\boldsymbol{v_2}(-3; 1; 2)$ $\boldsymbol{v_3}$(4 ; - k ; -1)

sono linearmente dipendenti.

a) Esprimere $\boldsymbol{v_3}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$.
b) Posto $k = 2$, esprimere $\boldsymbol{v_4}$(-9; 3; -1) come combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$

14. Dopo aver verificato che i tre vettori di $\mathbb{R}^3$

a$(2; -4; -1)$, **b**$(1; -3; 2)$, **c**$(3; 2; -1)$

sono linearmente indipendenti , esprimere il vettore **d** $(4; 3; -9)$ come

combinazione lineare di **a**, **b**, **c** .

Soluzioni

***1.S** a) Infatti la combinazione lineare a$\boldsymbol{v_1} + b\boldsymbol{v_2}$ è uguale al vettore nullo se il sistema lineare omogeneo nelle incognite a, b,

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione (0;0), come immediatamente si verifica.

b) Cerchiamo i coefficienti della combinazione lineare in modo che sia

$$a\boldsymbol{v_1} + b\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_3}$$

cioè $\begin{cases} a + 2b = -4 \\ -a + b = 3 \end{cases}$ da cui $a = -\frac{10}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$

perciò

$$-\frac{10}{3}\boldsymbol{v_1}-\frac{1}{3}\boldsymbol{v_2}=\boldsymbol{v_3}\ .$$

***2**. **S.** a) Basta far vedere che la combinazione lineare a$\boldsymbol{v_1}+b\boldsymbol{v_2}+$ c $\boldsymbol{v_3}$ è uguale al vettore nullo se e solo se $a=b=c=0$, cioè che il sistema lineare omogeneo nelle incognite a,b,c

$$\begin{cases}-2b-3c=0\\ -b=0\\ -a+c=0\end{cases}$$

ammette solo la soluzione banale (0;0;0) . Ciò si verifica immediatamente .

b) Determiniamo a,b,c in modo che risulti

$$a\boldsymbol{v_1}+b\boldsymbol{v_2}+c\,\boldsymbol{v_3}=\boldsymbol{v_4}$$

e consideriamo il sistema

$$\begin{cases}-2b-3c=3\\ -b=-2\\ -a+c=-1\end{cases}$$

la cui soluzione è $a=-\frac{4}{3}, b=2, c=-\frac{7}{3}$, perciò

$$-\frac{4}{3}\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{2v_2}-\frac{7}{3}\boldsymbol{v_3}=\boldsymbol{v_4}\ ;$$

***3**. **S.** a) I vettori sono indipendenti se

$$\begin{vmatrix}1 & k & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 1-k\end{vmatrix}\neq 0 \quad \text{cioè se } k^2+4k+3\neq 0 \ \Longrightarrow k\neq -1 \ e\ k\neq -3\ ;$$

b) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases}a+b+4c=-2\\ -b+c=3\\ a+b+c=1\end{cases} \quad \text{da cui } a=6\,, b=-4\ , c=-1\ ,$$

perciò $\boldsymbol{v_4}= 6\boldsymbol{v_1}-4\,\boldsymbol{v_2}\ -\ \boldsymbol{v_3}$;

***4.S.** si deve verificare che è diverso da zero il determinante dei coefficienti dei tre vettori;

***5.S.** si deve verificare che è uguale a zero il determinante dei coefficienti dei tre vettori;

***6**. **S.** $t=-\frac{4}{7}$; si impone che sia uguale a zero il determinante dei coefficienti dei tre vettori ;

***7. S.** si verifica che il determinante dei coefficienti dei tre vettori è diverso da zero $\forall l\in\mathbb{R}$, in quanto $\det(A)=3l^2-l+6$;

8.S Si ha det(A) =1$\neq 0\ \forall k\in\mathbb{R}$; **9.S.** $\det(A)=-2(h+1)\neq 0, \forall h\neq -1$;

10.S. b) $2\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v_2}=\boldsymbol{v_3}$ **;** **11. S.** **a** + 2 **b** = **c** **;**

12.S. $\det(A) = 4t - 8$; indipendenza lineare per $\forall t \neq 2$;per $t = 2$ si ha **b** = $\frac{3}{2}$ **a** $-\frac{1}{2}$ **c** ;

13. S. a) $\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2}$ **;** b) $\boldsymbol{v_4} = -2\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_3}$; **14. S.** **d** = 2 **a** -3 **b** $+$ **c .**