2. Verifiche di limiti

Servendosi della definizione di limite verificare le seguenti uguaglianze:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n}{n} = -1$

Occorre mostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, la disequazione

$$\left|\frac{2-n}{n} - (-1)\right| < \varepsilon$$

è verificata per tutti gli *n* successivi a un indice n_ε. Infatti

$$\left|\frac{2}{n} - 1 - (-1)\right| < \varepsilon \Longrightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon \Longrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$$

Indicato con n_ε il primo intero maggiore o uguale di $\frac{2}{\varepsilon}$, la disequazione risulta verificata $\forall n > n_\varepsilon$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-3n}{2n} = -\frac{3}{2}$

$\forall\varepsilon > 0$ risolviamo la disequazione $\left|\frac{1-3n}{2n} + \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$.

Risulta successivamente :

$$\left|\frac{1-3n}{2n} + \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{1}{2n}\right| < \varepsilon \ \Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}$$

Pertanto, indicato con n_ϵ il primo intero maggiore o uguale a $\frac{1}{2\varepsilon}$, la disequazione risulta verificata $\forall n > n_\epsilon$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3+2n^2}{1+n^2} = 2$

$\forall\varepsilon > 0$ risolviamo la disequazione $\left|\frac{-3+2n^2}{1+n^2} - 2\right| < \varepsilon$.

Si ha : $\left|\frac{-3+2n^2}{1+n^2} - 2\right| = \frac{5}{1+n^2} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n^2 > \frac{5-\varepsilon}{\varepsilon}$ e, supposto $0 < \varepsilon < 5$, $\Rightarrow \ n > \sqrt{\frac{5-\varepsilon}{\varepsilon}}$.

Pertanto, indicato con n_ϵ il primo intero maggiore o uguale a $\sqrt{\frac{5-\varepsilon}{\varepsilon}}$, la disequazione risulta verificata non appena si scelga un intero $n > n_\varepsilon$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} log_2\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = 0$

$\forall\varepsilon > 0$ risolviamo la disequazione $\left|log_2\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\right| < \varepsilon$.

Poiché per $n > 1$ risulta $1 + \frac{1}{n-1} > 1$ e quindi $log_2\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) > 0$, la disequazione equivale a :

$$log_2\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) < \varepsilon \quad \Rightarrow \; 1 + \frac{1}{n-1} < 2^{\varepsilon} \; \Rightarrow \quad \frac{1}{n-1} < 2^{\varepsilon} - 1$$

e, essendo $2^{\varepsilon} - 1 > 0 \quad \forall\varepsilon > 0$, si ha $n > 1 + \frac{1}{2^{\varepsilon}-1}$.

Pertanto, indicato con n_{ϵ} il primo intero maggiore o uguale a $1 + \frac{1}{2^{\varepsilon}-1}$, la disequazione risulta verificata $\forall n >\; n_{\varepsilon}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3 + 4} = +\infty$

Occorre risolvere, per ogni $k > 0$, la disequazione

$$\sqrt{n^3 + 4} > k$$

Si ha:

$$\sqrt{n^3 + 4} > k \Longrightarrow n^3 > k^2 - 4 \Longrightarrow n > \sqrt[3]{k^2 - 4}$$

Indicato con n_k il primo intero maggiore o uguale di $\sqrt[3]{k^2 - 4}$, la disequazione risulta verificata $\forall n > n_k$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2}{n} = +\infty$

Occorre risolvere, per ogni $k > 0$, la disequazione

$$\frac{n^2 - 2}{n} > k$$

Si ha:

$$\frac{n^2 - 2}{n} > k \Longrightarrow n^2 - kn - 2 > 0$$

soddisfatta per $n > \frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}$. Indicato con n_k il primo intero maggiore o uguale di $\frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}$, la disequazione risulta verificata $\forall n > n_k$.

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{1-n} = +\infty$

$\forall k > 0$ risolviamo la disequazione $\left(\frac{2}{3}\right)^{1-n} > k$.

Si ha successivamente :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1-n} > k \ \Rightarrow \ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > k \ \Rightarrow \ n > 1 + log_{\frac{3}{2}}k \ .$$

Pertanto, indicato con n_k il primo intero maggiore o uguale a $1 + log_{\frac{3}{2}}k$, la disequazione risulta verificata $\forall n > \ n_k$.

8) $\lim\limits_{n\to\infty}(2 - logn) = -\infty$

Occorre risolvere, per ogni $k > 0$, la disequazione

$$2 - \log n < -k$$

Si ha: $$2 - \log n < -k \Longrightarrow \log n > 2 + k \Longrightarrow n > e^{2+k}$$

Indicato con n_k il primo intero maggiore o uguale di e^{2+k} , la disequazione risulta verificata $\forall n > n_k$.

9) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4 - \sqrt{n^2 + 1}\right) = -\infty$

$\forall k > 0$ risolviamo la disequazione $4 - \sqrt{n^2 + 1} < -k$.

Si ha :

$$\sqrt{n^2 + 1} > 4 + k \quad \Rightarrow \quad n^2 > -1 + (4 + k)^2$$

e, essendo

$$-1 + (4 + k)^2 > 0 \quad \forall k > 0 , \qquad \text{risulta} \qquad n > \sqrt{-1 + (4 + k)^2} \ .$$

Indicato con n_k il primo intero maggiore o uguale di $\sqrt{-1 + (4 + k)^2}$, la disequazione risulta verificata $\forall n > n_k$.

Nella maggior parte dei casi per calcolare il $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ è utile, accanto alla successione $a_n = f(n)$, considerare la *funzione associata* $f(x)$ con x reale, in quanto coincidono i limiti $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$ Per esempio $$\lim_{n\to\infty}\frac{1-3n}{2n+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-3x}{2x+1} = -\frac{3}{2}$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Verificare i seguenti limiti:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3n}{n} = 3$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+n}{n^2} = 0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (3 + 2n^2) = +\infty$

*4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{1-2n} = -\infty$

*5. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{n+4} = +\infty$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n}{n+4} = -2$

Soluzioni

***4.** $\forall k > 0$ risolviamo la disequazione $\sqrt[3]{1-2n} < -k$; si ha

$$1 - 2n < -k^3 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1+k^3}{2}$$

Indicato con n_k il primo numero naturale maggiore o uguale a $\frac{1+k^3}{2}$, la disequazione risulta verificata $\forall n > n_k$;

*** 5.** $\forall k > 0$ risolviamo la disequazione $3^{n+4} > k$; risulta

$$n + 4 > log_3 k \quad \Rightarrow \quad n > log_3 k - 4$$

Indicato con n_k il primo numero naturale maggiore o uguale $log_3 k - 4$, la disequazione risulta verificata $\forall n > n_k$;