11. Convessità, concavità, flessi

Sia f una funzione derivabile quante volte occorre in $(a; b)$, sia $x_0 \in (a; b)$ e

$P(x_0; f(x_0))$ il punto corrispondente sulla curva grafico di f.

Definizione
Si dice che la funzione f è **convessa** (o che volte la concavità verso l'alto) nel punto x_0 se esiste un intorno I di x_0 in cui il grafico non è mai al di sotto della retta t tangente alla curva in $P(x_0; f(x_0))$. (fig a)

Si dice che la funzione f è **concava** (o che volte la concavità verso il basso) nel punto x_0 se esiste un intorno I di x_0 in cui il grafico non è mai al di sopra della retta t tangente alla curva in $P(x_0; f(x_0))$. (fig b)

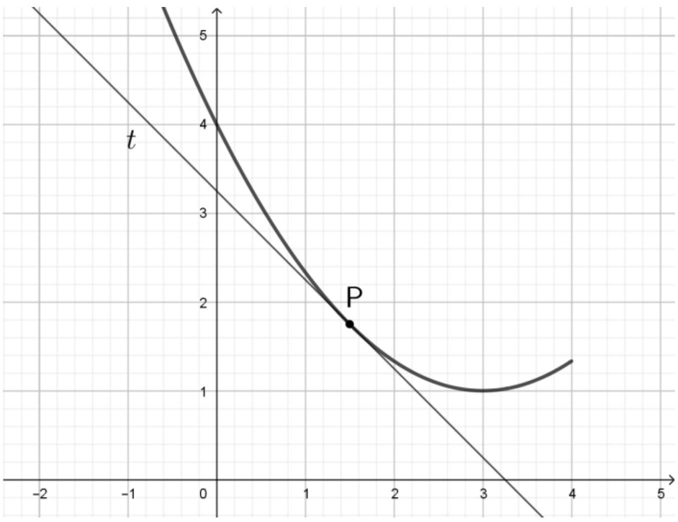

Fig. a

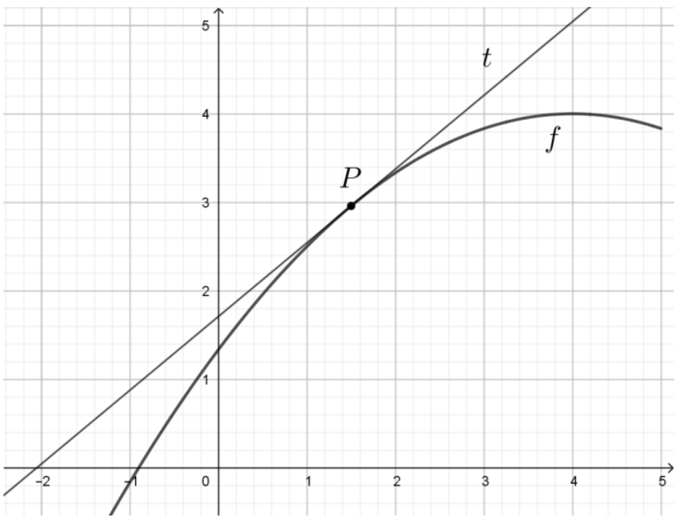

Fig. b

Definizione
Si dice che la curva grafico della funzione f ha in $P(x_0; f(x_0))$ un **punto** di **flesso** se in P la curva attraversa la retta tangente, cioè nell'intorno sinistro di x_0 la curva sta sopra la retta tangente e nell'intorno destro si trova al di sotto o viceversa.
Vedi fig. c e d .

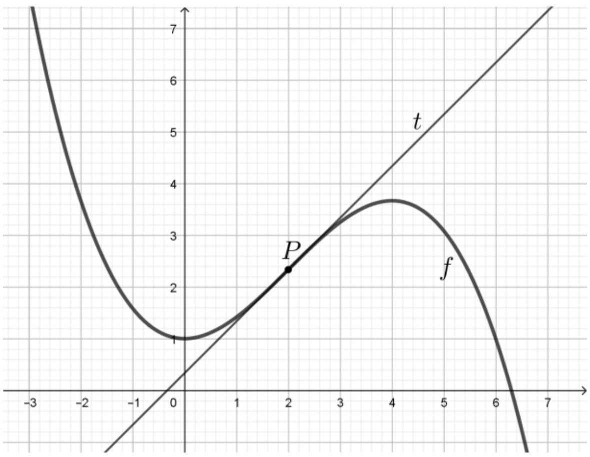

Fig. c

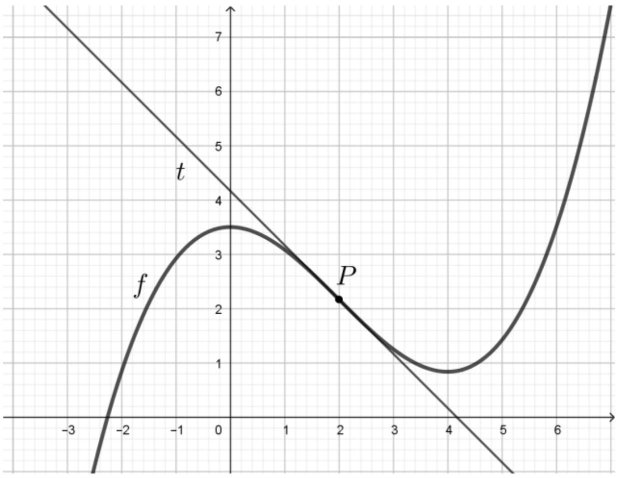

Fig. d

Teorema
Dall'esame della derivata seconda di una funzione nel punto x_0 si ricava:

a) se $f''(x_0) > 0$ la funzione è **convessa** in x_0
b) se $f''(x_0) < 0$ la funzione è **concava** in x_0
c) se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$ $P(x_0; f(x_0))$ è un **punto** di **flesso**

Una funzione è **convessa** (**concava**) in $(a; b)$, o meglio volge la concavità verso l'alto (verso il basso) se lo è in ogni punto di $(a; b)$.

Lo studio della convessità, concavità e flessi di una funzione consiste nello studio degli zeri e del segno della derivata seconda.

Determinare gli intervalli di concavità, convessità e gli eventuali flessi delle seguenti funzioni:

Esempio

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \log(x-1)$.

La funzione è dotata di derivate di qualunque ordine $\forall x \in (1;+\infty)$

Si ha

$f'(x) = x + \frac{1}{x-1} > 0 \quad \forall x \in (1;+\infty)$

$f''(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \begin{cases} < 0 & \forall x \in (1;2) \\ = 0 & per\ x = 2 \\ > 0 & \forall x \in (2;+\infty) \end{cases}$

	1	2	x
f''	$-$	0	$+$
f	concava		convessa

Perciò $x = 2$ è l'ascissa di un punto di flesso. Essendo $f(2) = 2$ il flesso ha coordinate (2;2).

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Determinare i punti in cui le seguenti funzioni volgono la concavità verso l'alto

(sono convesse), verso il basso (sono concave) e gli eventuali punti di flesso .

1) $f(x) = 4 - x^3$

*2) $f(x) = x(x+1)^2$

3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$

4) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

5) $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$

*6) $f(x) = \frac{3x}{4+x^2}$

7) $f(x) = \frac{8x^3+1}{x}$

*8) $f(x) = e^{2x-x^2}$

9) $f(x) = (x+1)e^{-x}$

*10) $f(x) = (2-x)e^{-\frac{x}{2}}$

*11) $f(x) = log^3(x)$

12) $f(x) = -2logx - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}$

Soluzioni

1.S. convessa in $(-\infty; 0)$, concava in $(0; +\infty)$, flesso a tangente orizzontale $(0;4)$;

***2.S.** $f'(x) = (x+1)(3x+1)$, $x = -1$ punto di max. rel. , $x = -\frac{1}{3}$ punto di min. rel. ;

$f''(x) = 6x + 4$, concava in $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$, convessa in $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$, flesso $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{27}\right)$;

3.S. concava in $(-\infty; 2)$, convessa in $(2;+\infty)$, flesso $(2; -9)$;

4.S. concava in $(-\infty; -1)$, convessa in $(-1; +\infty)$, flesso $(-1; \frac{5}{6})$;

5.S. convessa in $\left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$, concava in $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; +\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, flessi $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{3}{16}\right)$;

***6.S.** $f'(x) = \frac{3(4-x^2)}{(4+x^2)^2}$, $x = -2$ punto di minimo relativo, $x = 2$ punto di massimo relativo ;

$f''(x) = \frac{6x(x^2-12)}{(4+x^2)^3}$, concava in $\left(-\infty; -2\sqrt{3}\right) \cup \left(0; 2\sqrt{3}\right)$,

convessa in $\left(-2\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(2\sqrt{3}; +\infty\right)$, flessi: $(0; 0)$, $\left(\pm 2\sqrt{3}; \pm\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$;

7.S. convessa in $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty)$, concava in $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, flesso $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$;

8.S. $f'(x) = 2(1-x)e^{2x-x^2}$; $x = 1$ punto di massimo relativo ;

$f''(x) = 2e^{2x-x^2}(2x^2 - 4x + 1)$,

convessa in $\left(-\infty; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$, concava in $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$, flessi $\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}; e^{\frac{1}{2}}\right)$;

9.S. concava in $(-\infty; 1)$, convessa in $(1;+\infty)$, flesso $\left(1; \frac{2}{e}\right)$;

***10. S.** $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(x-4)$, $x = 4$ punto di min . relativo,

$f''(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(6-x)$, convessa in $(-\infty; 6)$, concava in $(6; +\infty)$, flesso $(6; -4e^{-3})$;

***11.S.** $f'(x) = \frac{3}{x}log^2(x)$, $(1; 0)$ punto di flesso a tangente orizzontale;

$f''(x) = \frac{3}{x^2}(2logx - log^2x)$, convessa in $(1; e^2)$, concava in $(0; 1) \cup (e^2; +\infty)$,

flessi $(1; 0)$, $(e^2; 8)$;

12.S. convessa $\left(0; \sqrt{2}\right)$, concava in $(\sqrt{2};+\infty)$; flesso $(\sqrt{2}; -log2)$;