8. Integrali impropri

Definizione

Sia $f(x)$ una funzione *continua* nell'intervallo limitato $[a; b)$ aperto a destra e sia

b' un punto interno all'intervallo , cioè $a < b' < b$.

Si dice **integrale improprio di** $f(x)$ **su** $[a; b)$ il limite

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b' \to b^-} \int_a^{b'} f(x)dx \ .$$

Se il limite *esiste finito* la f si dice integrabile in $[a; b]$ oppure che l'**integrale improprio è convergente** .

Se il limite *esiste ed è uguale a* $+\infty$ ($-\infty$) l'**integrale improprio è divergente** .

Se il limite *non esiste* l'**integrale improprio non esiste**.

Analogamente se la $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo limitato $(a; b]$ aperto a sinistra e $a < a' < b$, si dice **integrale improprio di** $f(x)$ **su** $(a; b]$ il limite

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a' \to a^+} \int_{a'}^b f(x)dx$$

con analoga terminologia.

Esempio

Esaminiamo il comportamento dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$$

a*l variare di* $p > 0$.

Poniamo

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x^p}dx$$

Se $p = 1$ si ha $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}[logx]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}(-loga) = +\infty$

quindi l'integrale è **divergente** .

Se $p \neq 1$ risulta

$$\int_a^1 \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}[x^{-p+1}]_a^1 = \frac{1}{1-p}\left[1 - \frac{1}{a^{p-1}}\right]$$

pertanto

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{1-p}\left[1 - \frac{1}{a^{p-1}}\right] = \begin{cases} +\infty & se\ \ p > 1 \\ \dfrac{1}{1-p} & se\ p < 1 \end{cases}$$

Quindi :

$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ è

- **convergente** se $p < 1$
- **divergente a** $+\infty$ se $p \geq 1$

Interpretazione geometrica

Consideriamo le funzioni $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,fig. 1, e $g(x) = \frac{1}{x^2}$, fig. 2, e calcoliamone l'integrale improprio nell'intervallo $(0; 1]$.

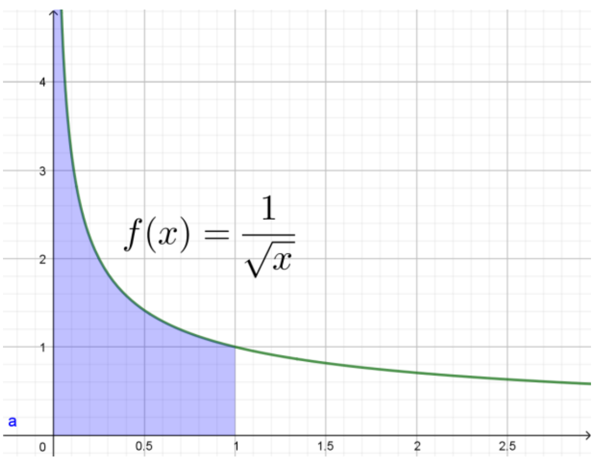

Fig. 1

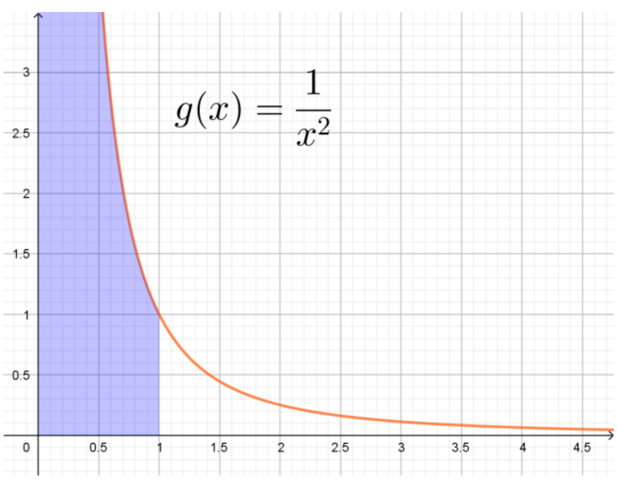

Fig. 2

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0^+} [2\sqrt{x}]_a^1 = 2$, la regione di piano delimitata dalla curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, dagli assi cartesiani per $x \in (0; 1]$ è illimitata tuttavia ha area finita 2.

$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \to 0^+} [-\frac{1}{x}]_a^1 = +\infty$, la regione di piano delimitata dalla curva $y = \frac{1}{x^2}$, dagli assi cartesiani per $x \in (0; 1]$ è illimitata e non ha area finita.

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

*1) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

*2) $\int_1^3 \frac{1}{x-1} dx$

3) $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}} dx$

*4) $\int_0^1 logx\, dx$

*5) $\int_0^1 \frac{logx}{x} dx$

*6) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}$

7) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$

Definizione

Sia $f(x)$ una funzione *continua* nell'intervallo illimitato superiormente $[a; +\infty)$ sia b un numero maggiore di a.

Si dice **integrale improprio di $f(x)$ su $[a; +\infty)$** il limite

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) dx\ .$$

Se il limite *esiste finito* la f si dice integrabile in $[a; +\infty)$ oppure che l'**integrale improprio è convergente** .

Se il limite *esiste ed è uguale a* $+\infty$ ($-\infty$) l'**integrale improprio è divergente** .

Se il limite *non esiste* l'**integrale improprio non esiste**.

Analogamente se la $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo illimitato $(-\infty; b]$, $a < b$, si dice **integrale improprio di $f(x)$ su** $(-\infty; b]$ il limite

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

con analoga terminologia.

Esempio

Esaminiamo il comportamento dell'integrale

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

al variare di $p > 0$.

Poniamo

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^p} dt$$

Se $p = 1$ si ha $\lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to+\infty} [logx]_1^b = \lim_{b\to+\infty} logb = +\infty$

quindi l'integrale è **divergente** .

Se $p \neq 1$ risulta

$$\int_{1}^{b} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} [x^{-p+1}]_1^b = \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right]$$

pertanto

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & se \quad p > 1 \\ +\infty & se \quad p < 1 \end{cases}$$

Quindi :

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ è **convergente** se $p > 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ è **divergente a** $+\infty$ se $p \leq 1$

Interpretazione grafica

Consideriamo le funzioni $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,fig. 3, e $g(x) = \frac{1}{x^2}$, fig. 4, e calcoliamone l'integrale improprio nell'intervallo $[\,1; +\infty)$.

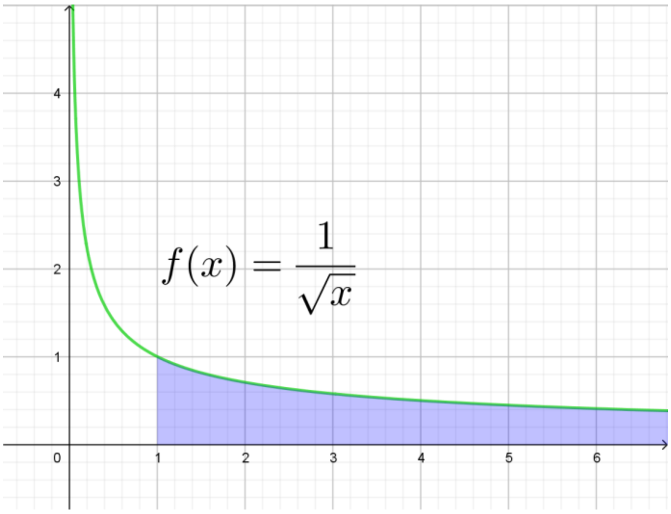

Fig. 3

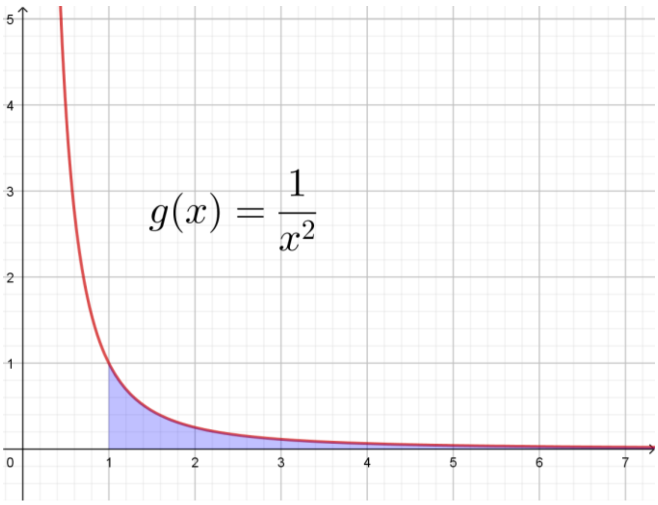

Fig. 4

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to +\infty} \int_1^{a} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to +\infty} [2\sqrt{x}]_1^a = +\infty$, la regione di piano delimitata dalla curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ dall'asse x per $x \in (0; 1]$ è illimitata e non ha area finita.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \to +\infty} [-\frac{1}{x}]_1^a = 1$, la regione di piano delimitata dalla curva $y = \frac{1}{x^2}$ e dall'asse x per $x \in (0; 1]$ è illimitata tuttavia ha area finita 1.

Esercizi

*8) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$

*9) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

*10) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$

11) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$

12) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(logx)^2} dx$

*13) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(logx)^2} dx$

*14) $\int_1^{+\infty} log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$

*15) $\int_0^{+\infty} cosx\, dx$

*16) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx$

*17) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\, dx$

Soluzioni

***1. S.** $2\sqrt{2}$; ($\lim_{t\to1^+} \int_t^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{t\to1^+} \left[2\sqrt{x-1}\right]_t^3 ..$);

***2. S.** $+\infty$; ($\lim_{t\to1^+} [\log(x-1)]_t^3 ..$) ;

3. S. 6 ;

***4. S.** -1 ; ($\lim_{t\to0^+} \int_t^1 logx\, dx = \lim_{t\to0^+} [xlogx - x]_t^1 ..$) ;

***5. S.** $-\infty$; ($\lim_{t\to0^+} \left[\frac{log^2 x}{2}\right]_t^1 = \cdots$) ;

***6. S.** non esiste ;

($\int_0^1 \frac{dx}{x^2 sin^2\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{a'\to0^+} \int_{a'}^1 \frac{dx}{x^2 sin^2\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{a'\to0^+} \left[ctg\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{a'}^1 =$

$= \lim_{a'\to0^+} \left[ctg 1 - ctg\left(\frac{1}{a'}\right)\right]$ e il $\lim_{a'\to0^+} ctg\left(\frac{1}{a'}\right)$ non esiste) ;

7. S. 2 ;

***8. S.** 1 ; ($\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^b$ …) ;

***9. S.** 1 ; ($\lim_{b\to+\infty}[-e^{-x}]_0^b$ . ..) ;

***10. S.** π ; (poiché la funzione è pari l'integrale è uguale a

$2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$= $2\lim_{b\to+\infty}[arctgx]_0^b = 2\lim_{b\to+\infty}[arctgb - arctg0] = \pi$) ;

11. S. $\frac{1}{2}$; **12. S.** $\frac{1}{log2}$;

***13. S.** $+\infty$; (la funzione integranda $f(x) = \frac{1}{x(logx)^2}$ non è definita nell'estremo 1, pertanto l'intevallo $[1;+\infty)$ deve essere spezzato in due parti scegliendo a piacere un punto interno all'intervallo; nel nostro caso abbiamo scelto il punto 2 sfruttando così il risultato ottenuto nell'esercizio 12:

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(logx)^2}dx = \int_1^2\frac{1}{x(logx)^2}dx + \int_2^{+\infty}\frac{1}{x(logx)^2}dx = \lim_{t\to1^+}\int_t^2\frac{1}{x(logx)^2}\,dx + \frac{1}{log2} = \cdots$);

***14. S.** $\frac{\pi}{2} - log2$;

(calcoliamo per parti l'$\int log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = xlog\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \int x\frac{-2}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}dx$);

***15. S.** non esiste ; (si ha :

$\int_0^{+\infty}cosx\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t cosx\,dx = \lim_{t\to+\infty}[\,sinx]_0^t = \lim_{t\to+\infty}sint$ e questo limite non esiste);

***16. S.** 2 ; (per parti $\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}\,dx =$ …) ;

***17. S.** π ; (la funzione integranda è definita per $2 < x < 4$, pertanto l'integrale deve essere diviso in due integrali impropri scegliendo un punto a piacere interno a $[2;4]$, per esempio:

$\int_2^4\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx = \int_2^3\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx + \int_3^4\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx =$

$= \lim_{t\to2^+}\int_t^3\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx + \lim_{h\to4^-}\int_3^h\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx = \cdots$;

$\int\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-(x-3)^2}}dx = \arcsin(x-3) + c$);