7. Teoremi sulle funzioni continue

Teorema di Weierstrass

Ogni funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $I = [a; b]$ è dotata di massimo e minimo

Esempi

Controllare se le seguenti funzioni verificano, nell'intervallo a fianco indicato, il teorema di Weierstrass , eventualmente servendosi del grafico:

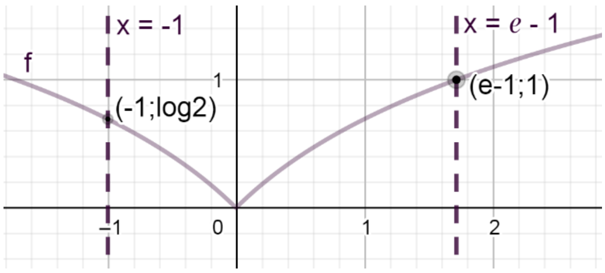
1) $f(x) = \log(1 + |x|) = \begin{cases} \log(1 - x) \ \ se \ -1 \le x \le 0 \\ \log(1 + x) \ \ se \ \ 0 < x \le e - 1 \end{cases}$ $\qquad I = [-1; e - 1]$

La funzione è continua in $\mathbb{R}$,

quindi in $I = [-1; e - 1]$,

perciò ha minimo e massimo assoluti in I; inoltre è crescente per $x \ge 0$, decrescente per $x \le 0$, risulta:

minimo$= f(0) = 0; massimo = f(e - 1) = 1$



2) $f(x) = x^2 - 2|x| + 1 = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 \ \ se \ -2 \le x \le 0 \\ x^2 - 2x + 1 \ \ se \ \ 0 < x \le 2 \end{cases}$ $\qquad I = [-2; 2]$

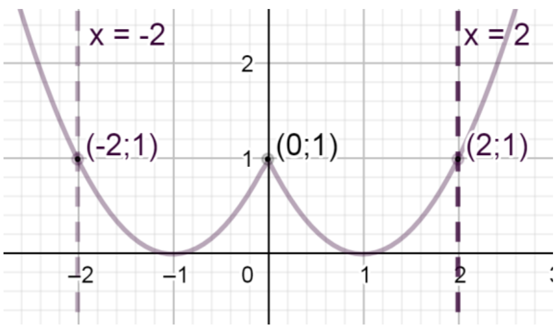
La funzione è continua in $\mathbb{R}$, quindi in $I = [-2; 2]$,

perciò ha minimo e massimo assoluti in I;

dal grafico si deduce che:

minimo$= f(-1) = f(1) = 0;$

$massimo = f(-2) = f(0) = f(2) = 1$



3) $f(x) = x + arctgx$ $\qquad I = [0; 1]$

La funzione è continua in $\mathbb{R}$, quindi in $I = [0; 1]$, perciò ha minimo e massimo assoluti in I; essendo somma di funzioni crescenti è crescente e risulta :

minimo$= f(0) = 0; massimo = f(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$

4) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad I = [1; 3]$

La funzione è continua in $\mathbb{R} - \{0\}$, quindi in $I = [1; 3]$, perciò ha minimo e massimo assoluti in I; si osserva inoltre che è decrescente in I, quindi :

minimo$= f(3) = \sqrt[3]{e}; massimo = f(1) = e$.

La stessa funzione non verifica il teorema di Weierstass in $I = [-1; 3]$, in quanto non è continua in x=0

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Controllare se le seguenti funzioni verificano, nell'intervallo a fianco indicato, il teorema di Weierstrass:

1)$f(x) = \frac{x-3}{x}$ $I = [1; 4]$; 2)$f(x) = \frac{4x-1}{x^2+1}$ $I = [-3; 2]$

3)$f(x) = \frac{x-2}{x^2-3}$ $I = [-4; -2]$; 4)$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ $I = [-1; 2]$

*5)$f(x) = \frac{x^3}{1-e^x}$ $I = [-1; 2]$; *6) $f(x) = x + [x]$ $I = \left[\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right]$

*7) $f(x) = sign(logx)$ $I = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$;

*8)$f(x) = \begin{cases} 3 - log|x| & per -2 \leq x \leq -1 \\ 4x^2 - 1 & per -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$ $I = [-2; 1]$

9) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & x \geq 1 \\ logx & 0 < x < 1 \end{cases}$ $I = \left[\frac{1}{3}; 4\right]$

*10) $f(x) = \frac{1}{|x|-|2x-3|}$ $I = [2; 4]$; 11) $f(x) = \sqrt{e^{-x} \cdot cosx}$ $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

*12) Le funzioni f e g siano continue in $\mathbb{R}^+$.

La funzione $f\big(g(x)\big)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass in ogni intervallo $[a; b] \in \mathbb{R}^+$?;

*13) Le funzioni f e g siano continue in $I = [a; b]$ con rispettivi massimi $maxf = 3$ e $maxg = -5$.

Cosa si può dire del massimo della funzione $f + g$?

*14) Se la funzione f è continua in $I = [a; b]$ e assume $minf = -3$ e $maxf = 1$,

cosa si può dire del minimo e del massimo della funzione $|f|$?

*15) Se la funzione f è monotona e decrescente in $I = [a; b]$ si ha $minf = f(b)$ e $maxf = f(a)$ allora necessariamente per la funzione f^2 risulta

$minf^2 = [f(b)]^2$ e $maxf^2 = [f(a)]^2$?

Teorema di esistenza degli zeri

Se una funzione continua in un intervallo $I=[a;b]$assume in due punti x_1 e x_2 di I valori di segno opposto, esiste almeno un punto interno all'intervallo (x_1,x_2) in cui la funzione vale zero

Esercizi

Controllare se le seguenti funzioni, nell'intervallo a fianco indicato, soddisfano le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri:

16)$f(x)=x-2x^2+x^3$ $I=[-2;2]$

17)$f(x)=5x^3-3x^2-2x+1$ $I=[-4;1]$

18)$f(x)=x^5+2|x|^3x+1$ $I=[-4;1]$

19)$f(x)=e^x-2$ $I=[-1;2]$

20)$f(x)=log\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$ $I=[-2;0]$

*21) $f(x)=log(x^2+2)$ $I=[0;1]$

*22) $f(x)=\frac{1}{arctgx}$ $I=[-1;1]$

23) $f(x)=\begin{cases}|x^2-4| & x\leq 1\\ -x^4+4 & x>1\end{cases}$ $I=[-3;3]$

24)$f(x)=(sin^3x)cosx+tgx$ $I=\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$

*25) $f(x)=\log_2|x^2-1|^3+1$ $I=[-2;0]$

26)$f(x)=arctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $I=\left[\frac{\pi}{4}-1;1+\frac{\pi}{4}\right]$

*27) Determinare k affinché la funzione

$$f(x)=\begin{cases}arcsinx & -1\leq x<\frac{1}{2}\\ k\cdot arccosx & \frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases} \qquad I=\left[-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

soddisfi le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo a fianco indicato.

*28) Determinare i possibili valori di a affinché la funzione

$$f(x)=\begin{cases}sin^2x & x\leq 0\\ ax^4-x^3 & x>0\end{cases} \qquad I=\left[-\frac{\pi}{4};1\right]$$

ammetta almeno uno zero nell'intervallo a fianco indicato.

Stabilire se le seguenti equazioni ammettono soluzioni nell'intervallo a fianco indicati. Risolvere gli esercizi con i due seguenti metodi:

a) applicando il teorema di esistenza degli zeri;
b) utilizzando, se possibile, il metodo grafico: scrivere l'equazione nella forma $f(x) = g(x)$ e tracciare i grafici delle due curve $y = f(x)$ e $y = g(x)$; le soluzioni sono le ascisse degli eventuali punti d'intersezione delle due curve.

29) $e^{2x} - x - 2 = 0$ $\qquad I = [0; 2]$

30) $\sqrt{x} - 3logx = 0$ $\qquad I = [1; 2]$

31) $ctgx - x^2 = 0$ $\qquad I = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

32) $arctg(x - 1) - x + 1 = 0$ $\qquad I = [-1; 2]$

33) $x\sqrt[3]{x} - e^x = 0$ $\qquad I = [-1; 1]$

*34) Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ soddisfano in $I = [a; b]$ le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri, stabilire se tale teorema è necessariamente soddisfatto anche dalle funzioni:

a) $f(x) + g(x)$
b) $f(x) \cdot g(x)$

Fornire esempi che giustifichino le risposte.

Esistenza e unicità degli zeri di una funzione

Esempi

1)Data la funzione $f(x) = 3 - \sqrt{x^3 + 4}$ dimostrare che

a) $f(x)$ è decrescente $\forall x \in \left[-\sqrt[3]{4}; +\infty\right[$
b) L'equazione $f(x) = 0$ ha una sola soluzione che risulta interna all'intervallo $[1; 2]$

a) Per ogni $x_1, x_2 \in \left[-\sqrt[3]{4}; +\infty\right[$ con $x_1 < x_2$ dimostriamo che risulta
$$f(x_1) > f(x_2)$$

Si ha:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Longrightarrow x_1^3 + 4 < x_2^3 + 4 \Longrightarrow \sqrt{x_1^3 + 4} < \sqrt{x_2^3 + 4}$$

Ne segue che

$$-\sqrt{x_1^3+4} > -\sqrt{x_2^3+4} \Rightarrow 3-\sqrt{x_1^3+4} > 3-\sqrt{x_2^3+4}$$

cioè $f(x_1) > f(x_2)$, ossia $f(x)$ è decrescente

b) Essendo $f(x)$ decrescente e continua in $\left[-\sqrt[3]{4}; +\infty\right[$ e

$$f(1) = 3-\sqrt{5} > 0 \qquad f(2) = 3-\sqrt{12} < 0$$

per il teorema di esistenza degli zeri si annulla in $[1; 2]$, e tale soluzione è unica in tutto il dominio.

2) Data la funzione $f(x) = x - 1 + \log(2x+1)$ dimostrare che

$a) f(x)$ è crescente $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

b) L'equazione $f(x) = 0$ ha una sola soluzione che risulta interna all'intervallo $[0; 1]$

a) Per ogni $x_1, x_2 \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ con $x_1 < x_2$ dimostriamo che risulta

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Si ha:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow \log(2x_1+1) < \log(2x_2+1)$$

e quindi

$$x_1 - 1 + \log(2x_1+1) < x_2 - 1 + \log(2x_2+1)$$

cioè $f(x_1) < f(x_2)$, ossia $f(x)$ è crescente in $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

b) Essendo $f(x)$ crescente e continua in $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$$f(0) = -1 < 0 \qquad f(1) = log3 > 0$$

per il teorema di esistenza degli zeri si annulla in $[0; 1]$, e tale soluzione è unica in tutto il dominio.

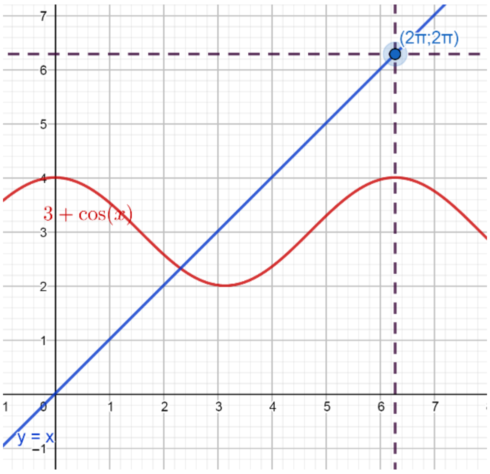
Teorema del punto fisso

Se $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $I = [a; b]$ e ivi assume valori $f(x) \subseteq [a; b]$, allora l'equazione $f(x) = x$ ha almeno una soluzione in $[a; b]$.

Graficamente ciò significa che se il rettangolo di base $I = [a; b]$ sull'asse x e di altezza $f(I)$ sull'asse y è contenuto nel quadrato di estremi opposti $(a; a)$ e $(b; b)$, allora la retta $y = x$ interseca il grafico di f in almeno un punto

Esempio

La funzione $f(x) = 3 + cosx$ in $I = [0; 2\pi]$ verifica le condizioni del teorema in quanto continua in $I = [0; 2\pi]$,inoltre $2 \leq 3 + cosx \leq 4$ e $f(I) = [2; 4] \subset [0; 2\pi]$. pertanto l'equazione $f(x) = x$ ha almeno una soluzione. Graficamente si osserva che la retta y=x interseca il grafico di f in un punto.



Esercizi

Verificare se le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema del punto fisso nell'intervallo a fianco indicato:

*35) $f(x) = 3 + \log_2(x - 1)$ $I = [3; 9]$

*36) $f(x) = 1 - 2^{-3x-2}$ $I = [0; 1]$

*37) $f(x) = 4 - \frac{1}{2}\sin(x)$ $I = [0; 2\pi]$

*38) $f(x) = \begin{cases} 3 - \log_2|x| & se\ -2 \leq x \leq -1 \\ 4x^2 - 1 & se\ -1 < x \leq 1 \end{cases}$ $I = [-2; 1]$

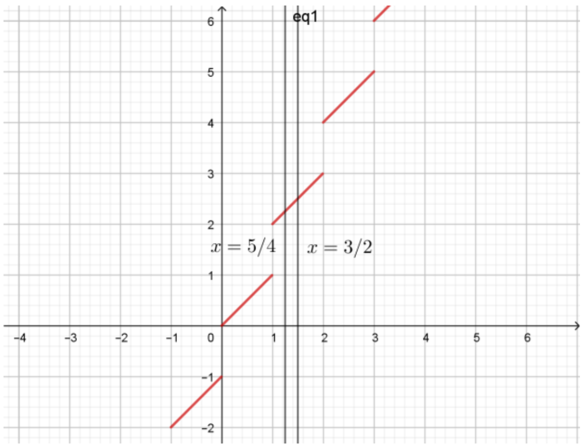
Soluzioni

Teorema di Weierstrass

1. S. si ; **2. S.** si ; **3.S.** sì ; **4. S.** si ;

*__5. S.__ no ; (il dominio della funzione si ottiene imponendo che sia $e^x \neq 1$, coè $x \neq 0 \in I$, quindi la funzione non soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass perché non è continua in $x = 0 \in (-1; 2)$);

***6. S.** sì; (ricordiamo che $[x]$= parte intera di x = all'intero immediatamente precedente o uguale a x ed è una funzione che ha un salto uguale a 1 in corrispondenza a ogni intero, la funzione data $f(x)$ è continua in I perché al suo interno non cade alcun intero. In figura il grafico di $f(x)$ nell'intervallo I.)



***7. S.** no ; (ricordiamo che $sign(x) = \begin{cases} -1 & se\ \ x < 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ 1 & se\ x > 0 \end{cases}$, poiché

$logx \begin{cases} < 0 & se\ 0 < x < 1 \\ 0 & se\ x = 1 \\ > 0 & se\ x > 1 \end{cases}$ allora risulta $sign(logx) = \begin{cases} -1 & se\ \ 0 < x < 1 \\ 0 & se\ \ x = 1 \\ 1 & se\ \ x > 1 \end{cases}$,

pertanto la $f(x)$ non è continua in $x = 1 \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$);

***8.S.** si ; ($3 - log|x|$ è definita in $\mathbb{R}_0$ ed è continua in $-2 \leq x \leq -1$, $4x^2 - 1$ è continua in $\mathbb{R}$, poiché $3 - log|-1| = 3 = 4(-1)^2 - 1$ risulta $f(-1) = 3$ e la f è continua in I);

9. S. sì

***10. S.** no ; (il dominio della funzione si ottiene imponendo che risulti $|x| - |2x - 3| \neq 0$ cioè $x \neq 1 \vee x \neq 3$, pertanto la funzione non soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass, perché non è continua in $x = 3 \in (2; 4)$) ;

11. S. sì

***12. S.** dipende dalle funzioni f e g e dall'intervallo $[a; b]$;

(per esempio : $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = e^{x-3} - 1$ sono continue in $\mathbb{R}^+$

ma la funzione $f\big(g(x)\big) = \sqrt{e^{x-3} - 1}$ è continua in $[3; +\infty)$);

***13. S.** $M_{f+g} \leq 3 - 5 = -2$; (per esempio nell'intervallo $I = [-2; 2]$ consideriamo le funzioni $f(x) = -x^2 + 3$ e $g(x) = -|x - 1| - 5$; si ha $maxf = f(0) = 3$, $maxg = g(1) = -5$; la funzione somma $f(x) + g(x) = -x^2 - |x - 1| - 2$ ha massimo = $-\frac{11}{4}$ per $x = \frac{1}{2}$) ;

***14. S.** $min|f| = 0$, $max|f| = 3$; (una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $I = [a; b]$ e che ha in I minimo negativo e massimo positivo deve annullarsi necessariamente in almeno un punto di I; osserviamo anche che il grafico della funzione $|f(x)|$ coincide con quello della $f(x)$ per tutti gli x per i quali $f(x) \geq 0$ e con quello della $-f(x)$ per tutti gli x per i quali $f(x) < 0$);

***15. S.** no ; (considerare ad esempio la funzione $f(x) = -x + 1$ nell'intervallo $I = [0; 2]$);

Teorema di esistenza degli zeri

16.S. sì ; **17. S.** sì ; **18. S.** sì ; **19. S.** sì ; **20. S.** sì ;

***21.S.** no; (la funzione è continua in $\mathbb{R}$ e quindi in I , ma risulta $f(0) > 0$, $f(1) > 0$);

22.* S. no; (perché la funzione non è definita in $x = 0 \in (-1; 1)$) ;

23. S. sì ; **24. S.** sì ;

***25. S.** no; (la funzione non è definita $x = \pm 1$ e $x = -1 \in (-2; 0)$)

26. S. si ;

***27. S.** $k = \frac{1}{2}$; (innanzitutto si deve imporre che la funzione sia continua in I;

Ora, $arcsinx$ è continua $[-1; 1]$ quindi è continua in $-1 \leq x < \frac{1}{2}$, $k \cdot arccosx$ è continua in $[-1; 1]$ quindi lo è in $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, pertanto basta imporre che risulti $arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = karccos\left(\frac{1}{2}\right)$ cioè $\frac{\pi}{6} = k\frac{\pi}{3} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$; per tale valore di k la funzione è continua in $[-1; 1]$ e quindi in $I = \left[-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \subset [-1; 1]$.

Poiché $f(-1) = arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} < 0$ e $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{12} > 0$, la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri) ;

***28. S.** $a < 1$; (la funzione è continua in I, pertanto basta imporre che assuma valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo. Poiché $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0$, determiniamo a affinchè $f(1) = a - 1 < 0$, da cui $a < 1$);

29.S. sì ; **30.S.** sì ; **31. S.** sì ; **32.S.** sì ; **33.S.** sì

***34. S.** a) no;(per esempio in $I = [-1; 1]$ si considerino le funzioni $f(x) = -x^2 - x + \frac{1}{2}$ e $g(x) = x^3$ …);

b) no ; (si considerino in $I = [-1; 1]$ le stesse funzioni del caso a) …);

Teorema del punto fisso

***35. S.** sì ; ($f(I) = [4; 6]$);

***36. S.** si ; ($f(I) = \left[\frac{3}{4}; \frac{31}{32}\right]$);

***37. S.** si ; ($f(I) = \left[\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right]$);

***38. S.** no; (f è continua in I , ma $f(I) = [-1; 3]$ non è contenuto in I);