1. Funzioni in due variabili – Dominio

Definizione

Si dice funzione reale di due variabili reali una legge

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad /(x; y) \to z = f(x; y)$$

cioè che fa corrispondere a coppie $(x; y)$ di numeri reali un numero reale z.

Si chiama **insieme di definizione** o **dominio** E della funzione f l'insieme delle coppie $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ alle quali corrisponde un numero reale $z = f(x; y)$.

Nel riferimento $Oxyz$ il grafico di una funzione reale $z = f(x; y)$, almeno nei casi più semplici, è una superficie.

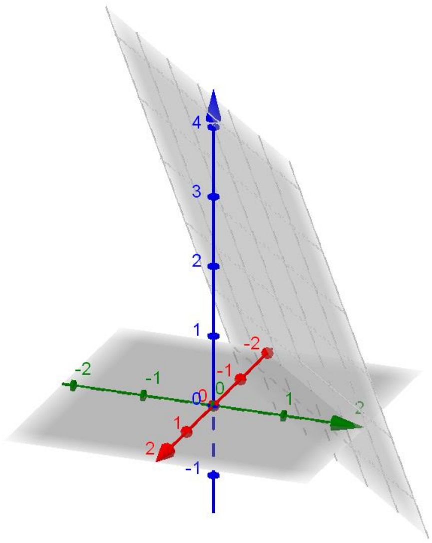
Esempi

1) Il grafico di una funzione del tipo

z$= ax + by + c$ è un piano.

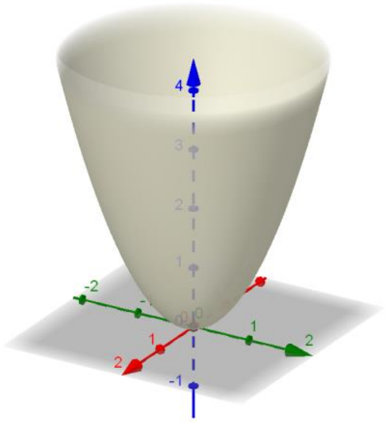
In figura il grafico del piano

$z = 2x - 2y + 4.$



2) In figura il grafico del paraboloide

$z = x^2 + y^2$.



Esercizi

Determinare l'insieme di definizione *E* (dominio) delle seguenti funzioni :

1. $z = x^2 - y^2 + y + 1$

2. $z = 4x^4 - 3xy + 2y$

3. $z = 4\frac{x^4 - xy + 2}{|x^2y - 3y| + 8}$

4. $z = \frac{1}{x^2 + y^2 - 4}$

5. $z = \frac{x - 2y}{3x - y}$

6. $z = \frac{x^4 - y}{x - y}$

7. $z = \frac{1}{x^3 - y}$

8. $z = \frac{x + 2}{x^2 + y^2}$

9. $z = \frac{1}{2x^2y^2 + 3x^2 + 2y^2 + 3}$

10. $z = \sqrt{1 - x - y}$

11. $z = \sqrt{|x + y| - 4}$

12. $z = \frac{3 - \sqrt{x + 2y}}{x^2 + y^2 + 1}$

13. $z = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

14. $z = \frac{\sqrt[3]{x - y}}{1 + \sqrt{4x - y}}$

15. $z = log(1 - x^2 - y^2)$

16. $z = \log(x - 2) - \log(1 - y)$

17. $z = \sqrt{e^x - y}$

18. $z = e^{x+y} - x$

19. $z = arcsin(xy - 1)$

20. $z = arccos\frac{xy}{x^2 + y^2}$

21. $z = \sqrt{\log(x - y + 4)}$

22. $z = \sqrt{x + 2} - \sqrt{y + 1}$

23. $z = \sqrt{(x + 2)(y + 1)}$

24. $z = \log(x + y) - \log(x - y)$

25. $z = e^{4x - y} + \arcsin(x - y)$

26. $z = \frac{x^2 + 2y^2}{x}$

27. $z = log(x^2 + 4y^2 - 4)$

28. $z = \frac{\text{arctg}(x - y)}{1 - e^{3x - 2y}}$

29. $z = \frac{\log(x-y)}{\sqrt{1+e^{x-y}}}$

30. $z = log\,\frac{x^2}{x+2y}$

31. $z = \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}$

32. $z = \sqrt{1-|x|-|y|}$

Soluzioni

1. S. $E = \mathbb{R}^2$; **2. S.** $E = \mathbb{R}^2$; **3. S.** $E = \mathbb{R}^2$;

4. S. $E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 4 \neq 0\}$, cioé il dominio è costituito da tutti i punti del piano xy esclusi i punti della circonferenza di centro l'origine e raggio 2 ;

5. S. $E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x - y \neq 0\}$, cioè il dominio è costituito da tutti i punti del piano xy esclusi i punti della retta $3x - y = 0$;

6. S. $E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x - y \neq 0\}$, cioè il dominio è costituito da tutti i punti del piano xy esclusi i punti della retta $x - y = 0$;

7. S. $E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq x^3\}$, cioè tutti i punti del piano xy esclusi quelli della cubica $y = x^3$;

8. S. $E = \mathbb{R}^2 - (0;0)$, cioè tutti i punti del piano xy escluso l'origine degli assi;

9. S. $E = \mathbb{R}^2$, poiché si può scrivere $2x^2y^2 + 3x^2 + 2y^2 + 3 = (x^2+1)(2y^2+3)$;

10. S. $E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / 1 - x - y \geq 0\}$;

cioé tutti i punti del semipiano indicato in fig. 1 compresi i punti della retta $x + y - 1 = 0$; vedi fig. 1

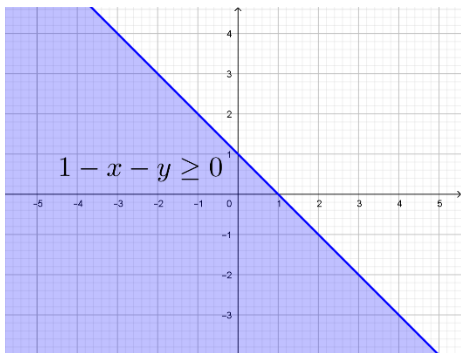


Fig. 1

11. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2\ / |x+y| \geq 4\ \}$;

cioé tutti i punti del piano xy esterni alla striscia delimitata dalle rette

$x + y = 4$ e $x + y = -4$

compresi i punti delle rette, vedi fig. 2

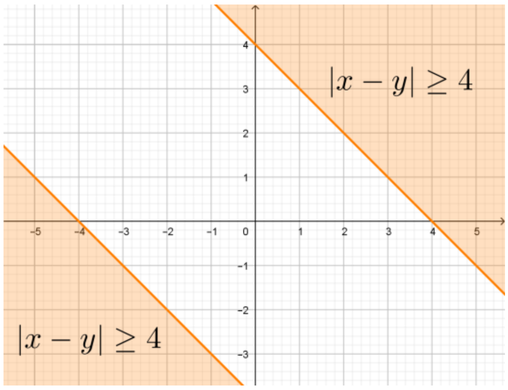


Fig. 2

12. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x + 2y \geq 0\}$, cioè il dominio è costituito da tutti i punti del piano xy appartenenti al semipiano chiuso $x + 2y \geq 0$;

13. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2\ /\ 4 - x^2 - y^2 > 0\}$, cioè il dominio è costituito da tutti i punti del piano xy interni al cerchio di centro l'origine e raggio 2 ;

14. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2\ /\ 4x - y \geq 0\}$, cioè il dominio è costituito da tutti i punti del piano xy appartenenti al semipiano chiuso $4x - y \geq 0$;

15. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\ \}$, cioè tutti i punti del piano xy interni al cerchio di centro l'origine e raggio 1 ;

16. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2 > 0 \wedge 1 - y > 0\}$; un quadrante esclusi i punti delle semirette ;

17. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq e^x\}$;

la regione del piano xy sotto la curva $y = e^x$ compresi i punti della curva , vedi fig. 3

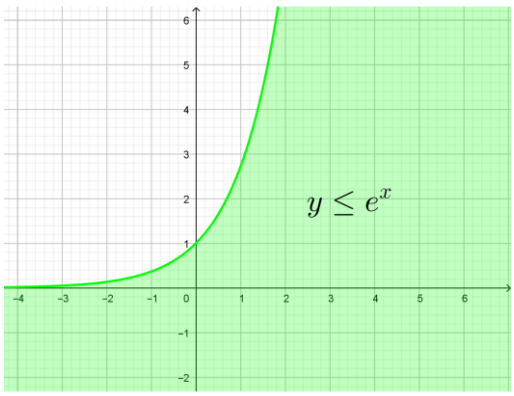


Fig. 3

18. S. $E = \mathbb{R}^2$;

19. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \le xy - 1 \le 1,\ cio\acute{e}\ 0 \le xy \le 2\}$;

il dominio è la regione del piano xy compresa tra gli assi x e y e i due rami dell'iperbole $xy = 2$, inclusi i punti degli assi e i punti dell'iperbole , vedi fig. 4

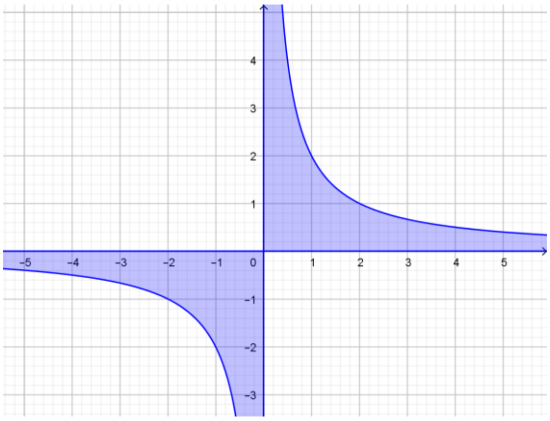


Fig. 4

20. S. deve essere $-1 \le \frac{xy}{x^2+y^2} \le 1$, relazione vera $\forall (x; y) \ne (0; 0)$, come dimostriamo in seguito, pertanto $E = \mathbb{R}^2 - (0; 0)$;

Dimostriamo che $-1 \le \frac{xy}{x^2+y^2} \le 1 \quad \forall (x; y) \ne (0; 0)$.

Poiché $x^2 + y^2 > 0$ la relazione può essere scritta $-(x^2 + y^2) \le xy \le x^2 + y^2$.

a) Dimostriamo la relazione $xy \le x^2 + y^2$ tenendo conto dei segni di x e y :

- $\begin{cases} x \text{ e } y \quad \text{concordi} \\ (x-y)^2 + 2xy \ge xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ e } y \quad \text{concordi} \\ (x-y)^2 \ge -xy \end{cases}$ relazione vera perché $-xy < 0$
- se x e y sono discordi la relazione è vera perché $xy < 0$

b) Dimostriamo la relazione $-xy \le x^2 + y^2$ tenendo conto dei segni di x e y :

- se x e y sono concordi la relazione è vera perché $-xy < 0$
- $\begin{cases} x \text{ e } y \quad \text{discordi} \\ (x+y)^2 - 2xy \ge -xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ e } y \quad \text{discordi} \\ (x+y)^2 \ge xy \end{cases}$ relazione vera perché $xy < 0$

21. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 /\ x - y + 4 \ge 1\}$, cioè il dominio è costituito da tutti i punti del piano xy appartenenti al semipiano chiuso $x - y + 3 \ge 0$;

22. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2 \ge 0 \wedge y + 1 \ge 0\}$;

23. S. $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/(x-2)(y+1)\geq 0\}$, vedi fig. 5

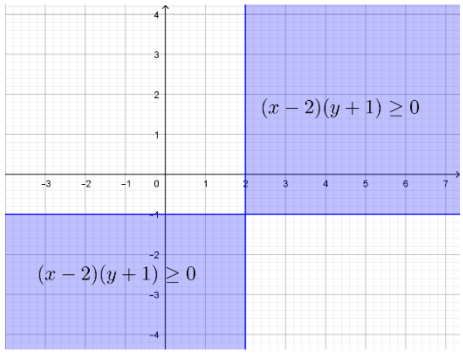


Fig. 5

24. S. $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \ / \begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases}\right\}$, cioè il dominio è costituito da tutti i punti del piano xy appartenenti all'angolo posto nel I° e IV° quadrante avente per lati le rette

$$x+y=0 \quad \text{e} \quad x-y=0$$

esclusi i lati dell'angolo, vedi fig. 6

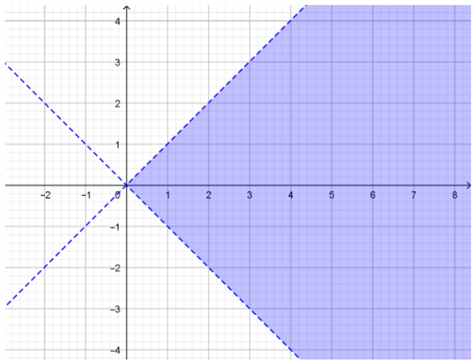


Fig. 6

25. S. $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \ / |x-y|\leq 1\}$, cioè il dominio è costituito da tutti i punti del piano xy appartenenti alla striscia limitata dalle rette $x-y-1=0$ e $x-y+1=0$ incluse le rette stesse, vedi fig. 7

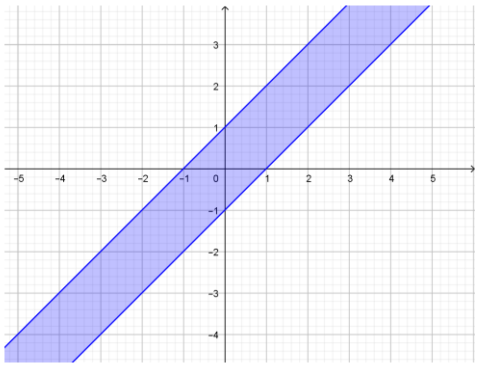


Fig.7

26. S. $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \ / x\neq 0\}$, cioètutto il piano xy escluso l'asse y ;

27. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 4y^2 - 4 > 0\}$;

i punti del piano xy esterni

all'ellisse $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$

vedi fig. 8

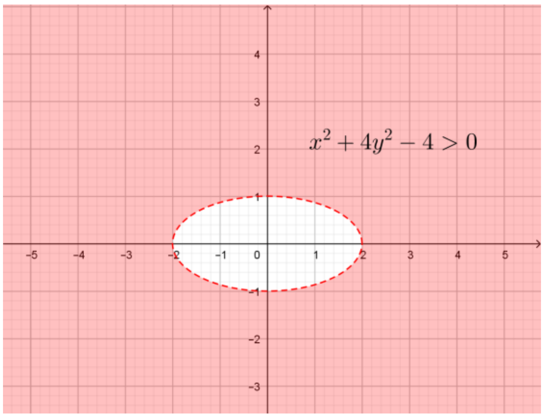


Fig. 8

28. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad /3x - 2y \neq 0\}$, cioè il dominio è costituito da tutti i punti del piano xy esclusa la retta $3x - 2y = 0$;

29. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad /x - y > 0\}$, cioè il dominio è costituito da tutti i punti del semipiano aperto $x - y > 0$;

30. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y > 0 \wedge x \neq 0\}$;

31. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \neq 0\}$;

32. S. $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 1 - |x| - |y| \geq 0\}$;

cioè tutti i punti del

quadrato in fig.9

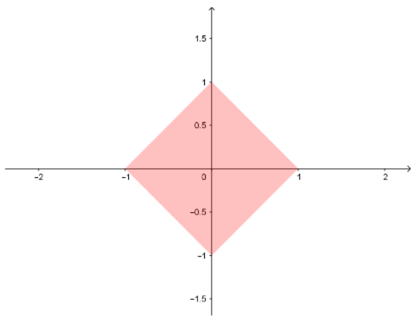


Fig. 9