6. Significato geometrico dell'integrale definito

Calcolo di aree

Sia $f(x)$ continua in $[a;b]$.

1) Se $f(x) \geq 0$ in $[a;b]$ si ha :

$$Area\ (T) = \int_a^b f(x)dx$$

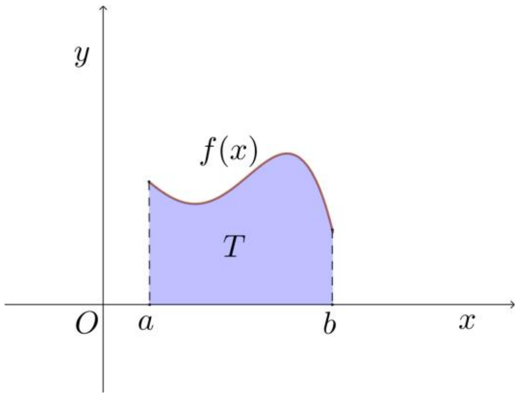


Fig. 1

2) Se $f(x) \leq 0$ in $[a;b]$ si ha :

$Area\ (T) = -\int_a^b f(x)dx$

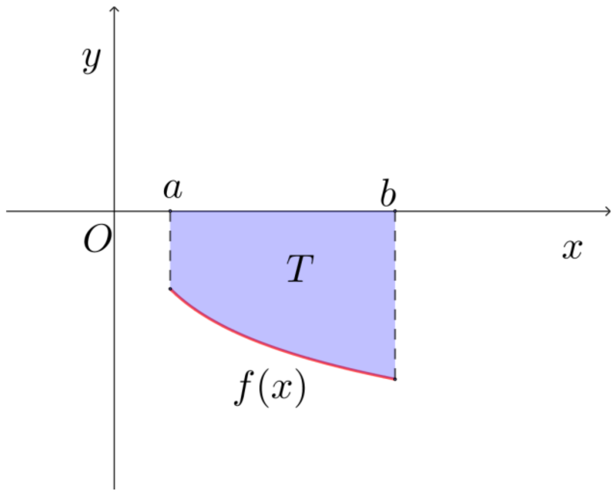


Fig. 2

3) Se $f(x)$ non ha segno costante in $[a;b]$ si ha:
$Area(T) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$
cioè

$$Area(T) = \int_a^b |f(x)|dx$$

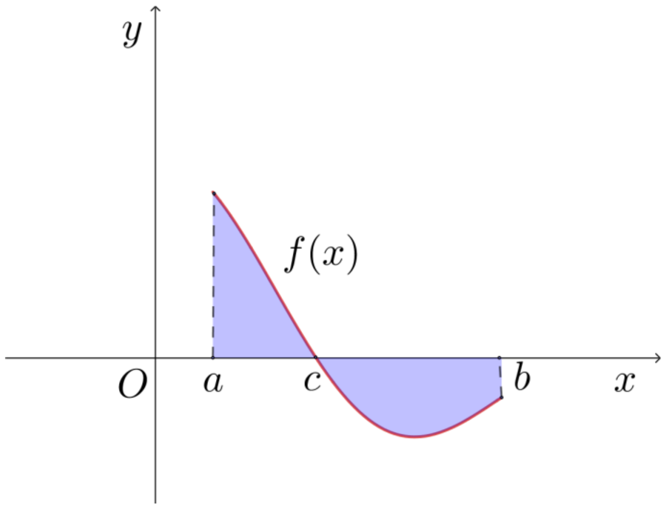


Fig. 3

4) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in $[a;b]$ e

$f(x) \geq g(x) \qquad \forall x \in [a;b]$

allora

$$Area(T) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

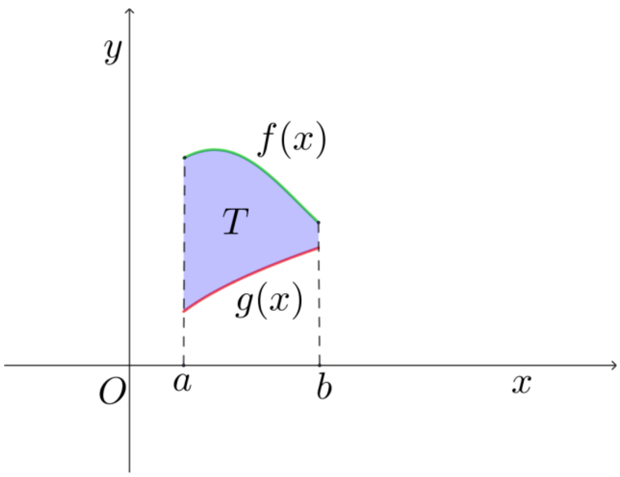


Fig. 4

5) Se $x = f(y)$ e $x = g(y)$ sono continue e $f(y) \geq g(y)$ in $[c;d]$, allora :

$$Area(T) = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

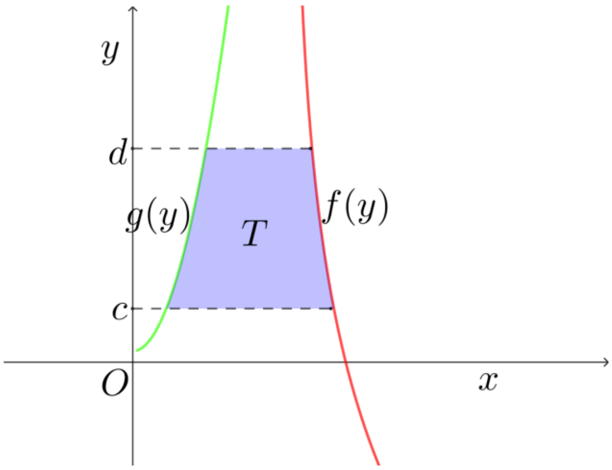


Fig. 5

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

*1) Calcolare l'area del dominio piano T delimitato dalla curva $y = log(x^2 + x)$, dall'asse x e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.

*2) Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \frac{3|x|}{(x+2)^2}$, dall'asse x e dalle rette $x = -1$ e $x = 1$.

*3) Calcolare l'area della regione finita D di piano delimitata dal grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & x \leq 1 \\ e^{-x+1} & x > 1 \end{cases}$$

dall'asse x e dalle rette $x = 0$ e $x = 2$.

*4) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione

$f(x) = x \cdot sin(\pi x)$ e dall'asse x per $x \in [0; 2]$.

*5) Dopo aver tracciato il grafico della funzione $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da tale grafico e dall'asse x.

*6) Tracciare i grafici delle funzioni $f(x) = |x + 1|^3$ e $g(x) = -x^2 - 2x + 1$ e poi calcolare l'area della regione finita di piano D delimitata da tali grafici.

*7) Calcolare l'area della regione finita di piano T delimitata dal grafico della funzione

$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{2+x}}$, dall'asse x con $-1 \leq x \leq 1$.

*8) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici delle funzioni

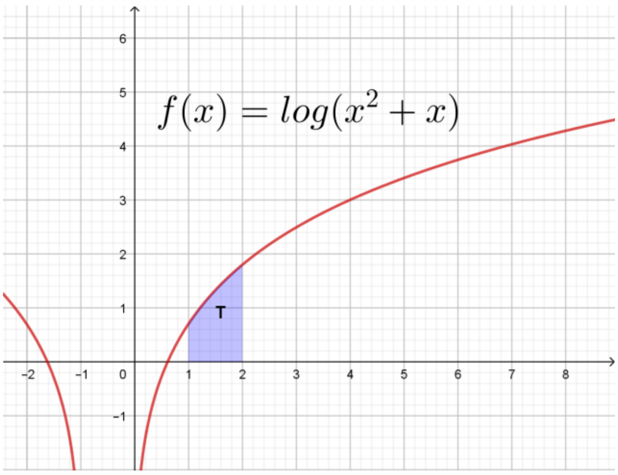
$$f(x) = x^2(4-x^2) \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{|x|-2}{|x|+1} .$$

*9) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola $2y = x^2$ e dalla curva $y = \frac{1}{1+x^2}$.

*10) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, dalla retta ad essa tangente nel punto di ascissa 1 e dall'asse y.

Soluzioni

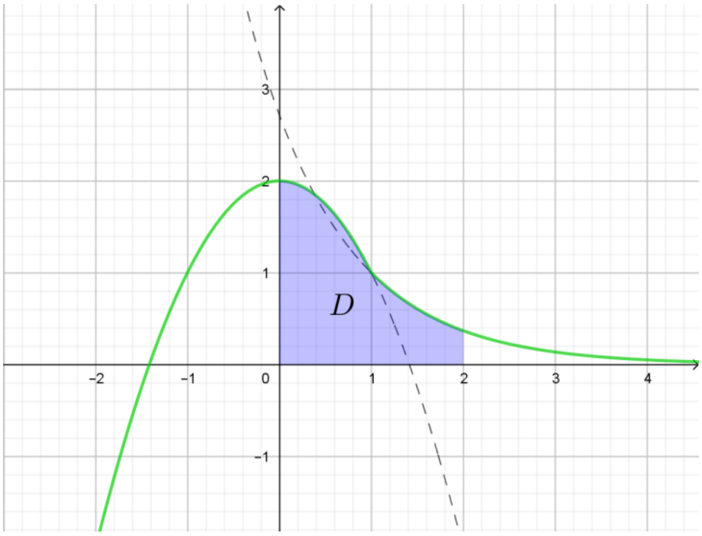
***1. S.** $3log3 - 2$; (studiamo il segno della funzione : $log(x^2+x) \geq 0$ per $x^2 + x \geq 1$ le cui soluzioni sono : $x \leq -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \vee x \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, poiché nell'intervallo $[1; 2]$ la funzione è positiva (vedi la figura) si ha $Area(T) = \int_1^2 log(x^2+x)dx$;



***2. S.** $3log\frac{3}{4}+2$; (si ha $\frac{3|x|}{(x+2)^2}\geq 0 \ \ \forall x\neq -2$ e poiché $|x|=x$ per $x\geq 0$ e $|x|=-x$ per $x<0$

si ha : $Area(T)=\int_{-1}^{1}\frac{3|x|}{(x+2)^2}\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{-3x}{(x+2)^2}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{3x}{(x+2)^2}\,dx=\cdots$) ;

***3. S.** $\frac{5}{3}+\frac{e-1}{e}$; (area = $\int_0^1(-x^2+2)dx+\int_1^2 e^{-x+1}dx$ ... , vedi grafico) ;



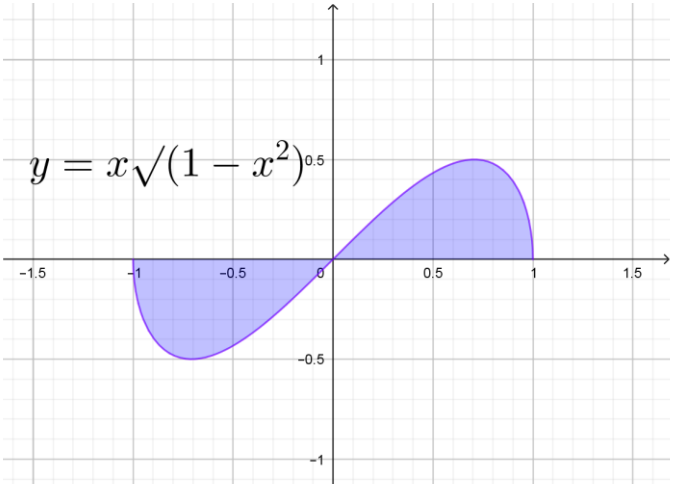
***4. S.** $\frac{4}{\pi}$; (poiché nell'intervallo $[0;2]$ risulta $sin(\pi x)\geq 0$ per $0\leq x\leq 1$ e $sin(\pi x)\leq 0$ per $1\leq x\leq 2$, l'area si calcola dividendo l'intervallo $[0;2]$:

area = $\int_0^1 x\cdot sin(\pi x)\,dx-\int_1^2 x\cdot sin(\pi x)\,dx=\cdots$, l'integrale $\int xsin(\pi x)dx$ si calcola per parti:

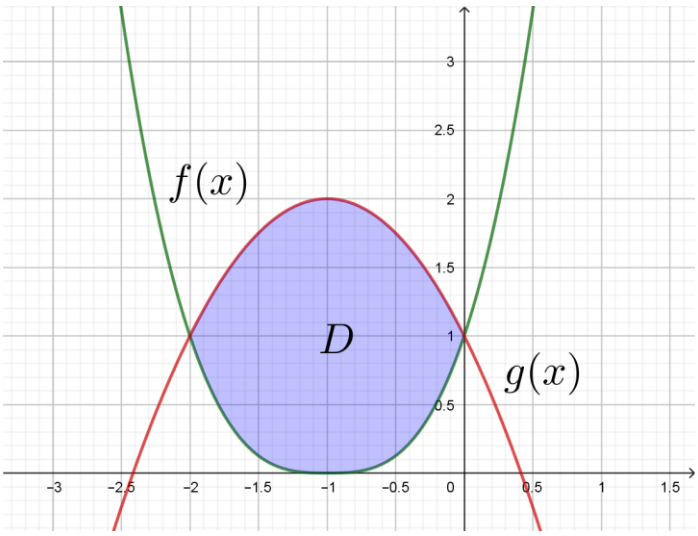
$\int xsin(\pi x)dx=-\frac{x}{\pi}cos(\pi x)+\frac{1}{\pi}\int cos(\pi x)dx=-\frac{x}{\pi}cos(\pi x)+\frac{1}{\pi^2}sin(\pi x)+c$) ;

***5. S.** $\frac{2}{3}$; (la funzione è dispari ed è ≥ 0 per $0 \leq x \leq 1$ (vedi figura) pertanto si ha

$Area(T) = 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$);

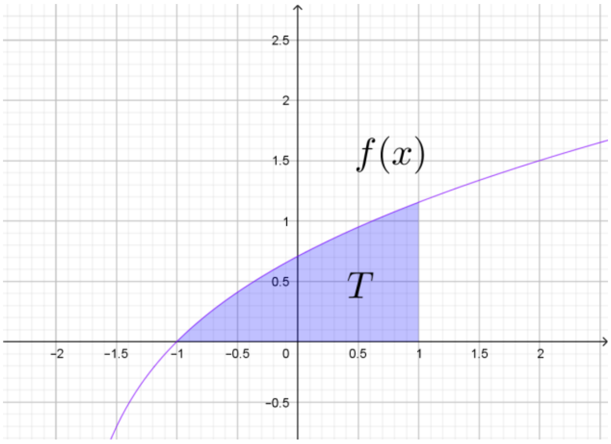


***6. S.** $\frac{17}{6}$; (tracciato il grafico (vedi figura), si osserva che il dominio è simmetrico rispetto alla retta $x = -1$, pertanto



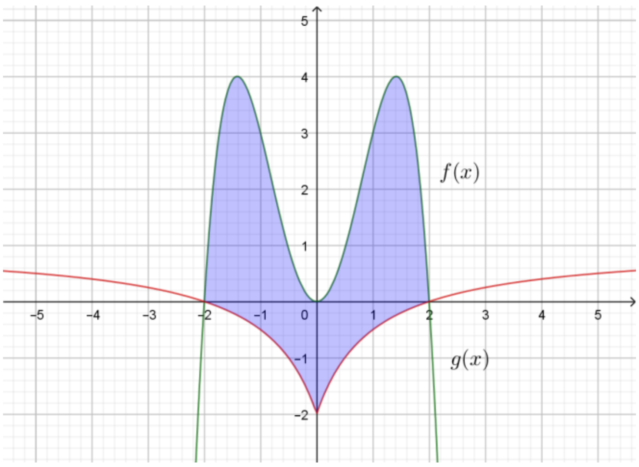
$Area(D) = 2\int_{-1}^{0}(-x^2 - 2x + 1 - (x+1)^3)dx$ ...);

***7. S.** $\frac{4}{3}$; (in figura è riportato il grafico della funzione f e la regione T:



per il calcolo dell'integrale porre $\sqrt{2+x} = t$) ;

***8. S.** $\frac{68}{15} + 6log3$; (in figura il grafico delle funzioni e del dominio :



osservare che entrambe le funzioni sono pari , pertanto si ha :

$$Area(T) = 2\int_0^2 [f(x) - g(x)]dx = 2\int_0^2 \left[x^2(4-x^2) - \frac{x-2}{x+1}\right]dx = \cdots \text{) ;}$$

***9. S.** $\frac{3\pi-2}{6}$; (entrambe le funzioni sono pari);

***10. S.** $\frac{e^2-5}{4e}$; (per il calcolo della retta tangente : $y(1) = \frac{e+e^{-1}}{2} = \frac{e^2+1}{2e}$, $y'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$,

$y'(1) = \frac{e^2-1}{2e}$, pertanto retta tangente : $y = \frac{(e^2-1)}{2e}x + \frac{1}{e}$ ...);