5. Serie armonica, serie armonica generalizzata

La **serie armonica** è la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

che **diverge positivamente** .

La **serie armonica generalizzata** è la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Essa

converge se $\alpha > 1$

diverge se $\alpha \leq 1.$

Esempi

Analizzare il carattere delle seguenti serie:

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{k+3}$. Posto $k + 3 = n$ la serie diventa $4 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$, cioè multiplo della serie armonica, quindi diverge

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \sqrt[4]{k}}$. Si può scrivere $\frac{1}{k \sqrt[4]{k}} = \frac{1}{k^{\frac{5}{4}}}$ perciò si tratta di una serie armonica generalizzata convergente.

3) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k-1}}$. Posto $k - 1 = n$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, quindi diverge.

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Analizzare il carattere delle seguenti serie:

*1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^7}$

*3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5+2k^2}{k}$

*4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+k}{k^3}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[4]{k^3}}$

6. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-5}{k+3}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

*8. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{4^k}\right)$

9. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k-1}}$

*10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$

*11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{k\sqrt[5]{k^3}}$

*12. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^2}$

*13. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{k^2+4k+4}}$

Soluzioni

***1. S.** diverge positivamente; (posto $k+1=n$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$) ;

2. S. converge ;

***3. S.** diverge positivamente ; (è somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k}$ armonica e della serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2k$ entrambe divergenti positivamente);

***4. S.** converge ; (somma di due serie armoniche generalizzate $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^3}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ entrambe convergenti);

5. S. converge ; **6. S.** diverge negativamente ;

7. S. diverge positivamente ;

***8. S.** diverge positivamente ;(somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$ divergente positivamente e della serie geometrica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}$ convergente);

***9. S.** diverge positivamente ; ($k-1=n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$);

***10. S.** diverge positivamente; ($\alpha=\frac{2}{3}$);

***11. S.** converge; ($\frac{\sqrt[3]{k}}{k\sqrt[5]{k^3}}=\frac{1}{k^{\frac{19}{15}}}$, $\alpha=\frac{19}{15}>1$);

***12. S.** converge ; ($k+2=n \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$);

***13. S.** diverge positivamente; ($\frac{1}{\sqrt[4]{k^2+4k+4}}=\frac{1}{\sqrt{k+2}}$, posto $k+2=n$ …);