5. Infinitesimi e infiniti

Infinitesimi

Definizione

Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

si dice che la funzione f è **infinitesima** oppure che è un **infinitesimo** per $x \to x_0$.

Confronto tra infinitesimi

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni infinitesime per $x \to x_0$. Se

$$\lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \begin{cases} 0 & f \text{ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a } g \\ l \neq 0 & f \text{ e } g \text{ sono infinitesimi dello stesso ordine} \\ +\infty & f \text{ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a } g \end{cases}$$

Esempio

Le funzioni $f(x) = e^{3x} - 1$ e $g(x) = sinx$ sono infinitesime per $x \to 0$, calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \lim_{x \to 0} \frac{|e^{3x} - 1|}{|sinx|} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{|e^{3x}-1|}{|3x|}}{\frac{|sinx|}{|3x|}} = 3$$

Ne segue che f e g sono infinitesime dello stesso ordine.

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Le funzioni f e g sono infinitesime f e g sono infinitesime per $x \to x_0$, calcolare il $\lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ e stabilire se una delle due è infinitesima di ordine superiore rispetto all'altra

1) $f(x) = x + \sqrt{x}$ $\qquad g(x) = sinx$ $\qquad x_0 = 0$

2) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$ $\qquad g(x) = x^2 - 2x$ $\qquad x_0 = 0$

3) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ $\qquad g(x) = x^2 - 1$ $\qquad x_0 = 1$

4) $f(x) = tg^2 x \qquad g(x) = x\sqrt{x} \qquad x_0 = 0$

5) $f(x) = tg^2 x \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} \qquad x_0 = 0$

6) $f(x) = tg^3 x \cdot sinx \qquad g(x) = x^3 + x^2 \qquad x_0 = 0$

7) $f(x) = x^3 \qquad g(x) = \log(1+3x) \qquad x_0 = 0$

*8) $f(x) = cosx - sinx \qquad g(x) = x - \frac{\pi}{4} \qquad x_0 = \frac{\pi}{4}$

*9) $f(x) = e^{x+1} - 1 \qquad g(x) = x^2 - 1 \qquad x_0 = -1$

10) $f(x) = x^3 - 8 \qquad g(x) = x^2 - 5x + 6 \qquad x_0 = 2$

Funzioni asintoticamente equivalenti

Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Si dice che le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono **asintoticamente equivalenti** per $x \to x_0$

e si indica

$$f \sim g \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Esempi

a) Poiché

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(mx)}{mx} = 1$ allora $\sin(mx) \sim mx$ per $x \to 0$, $(m \neq 0)$

$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ allora $log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$

b) Consideriamo il polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{n-h} x^{n-h}$$

$(n, h \in \mathbb{N}_0,\ h < n)$, infinitesimo per $x \to 0$.

Poiché

$$\lim_{x \to 0} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{n-h} x^{n-h}}{x^{n-h}} = a_{n-h}$$

il polinomio **è** ***infinitesimo per $x \to 0$ rispetto all'infinitesimo principale x di ordine uguale alla potenza di grado inferiore***;

inoltre, essendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{n-h}x^{n-h}}{a_{n-h}x^{n-h}}=1$$

risulta

$$P(x)\sim a_{n-h}x^{n-h} \qquad \text{per} \quad x\to 0 \ .$$

Si dice anche che $a_{n-h}x^{n-h}$ è la ***parte principale dell'infinitesimo per $x \to 0$***, avendo trascurato gli infinitesimi di ordine superiore.

Tabella funzioni equivalenti (o parte principale)per $x \to 0$
$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{n-h}x^{n-h} \sim \ a_{n-h}x^{n-h}$ $\sin(mx) \sim mx$ $tg(mx) \sim mx$ $1-\cos(mx) \sim \frac{1}{2}(mx)^2$ $\arcsin(mx) \sim mx$ $arctg(mx) \sim mx$ $\log(1+mx) \sim mx$ $e^{mx}-1 \sim mx$

Ordine di infinitesimo

Se f e g sono due funzioni infinitesime per $x \to x_0$ e se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ tale che : $$\lim_{x\to x_0}\frac{\lvert f(x)\rvert}{\lvert g(x)\rvert^{\alpha}}=l\neq 0$$ si dice che la funzione $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine $\boldsymbol{\alpha}$** rispetto a $g(x)$ (presa come campione).

Esempio

La funzione $f(x)=1-cosx$ è infinitesima di ordine 2 per $x\to 0$ rispetto all'infinitesimo campione x , infatti

$$\lim_{x\to 0}\frac{|1-cosx|}{|x|^{\alpha}}=\lim_{x\to 0}\frac{|1-cosx|}{|x|^{2}|x|^{\alpha-2}}=\begin{cases}0 & se\ \alpha<2\\ \frac{1}{2} & se\ \alpha=2\\ +\infty & se\ \alpha>2\end{cases}$$

La parte principale è $\frac{1}{2}x^2$.

Esercizi

Determinare l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni per $x \to 0$ rispetto all'infinitesimo principale x e determinarne la parte principale:

11) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 5x^2$

12) $f(x) = 2x^2\sqrt[3]{x} + x^3$

13) $f(x) = 5x^3 + x$

14) $f(x) = x^4 + sinx$

15) $f(x) = x + tg(x)$

16) $f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 3x}{\sqrt{x}}$

17) $f(x) = \sqrt{x^6 + x^4}$

18) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}$

*19 $f(x) = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2}{x+1}}$

20) $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$

21) $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{x\sqrt[3]{x}}$

22) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{4x^3 + x}{x+5}}$

23) $f(x) = sin^3x$

24) $f(x) = (sinx)^4 cosx$

25) $f(x) = sin(x^4)cosx$

26) $f(x) = (sinx)^3 x^2$

*27) $f(x) = sin(4x)tgx$

28) $f(x) = 1 - \cos(4x)$

29) $f(x) = \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}$

30) $f(x) = \frac{1}{3}e^{x^2} - \frac{1}{3}$

31) $f(x) = e^{-x^2} - 1$

32) $f(x) = \arcsin(5x^3)$

33) $f(x) = arctg\sqrt{x}$

*34) $f(x) = \sqrt{x} + arcsin\sqrt[4]{x}$;

35) $f(x) = \log(1 + x^2)$

36) $f(x) = \log(1 + sinx)$

Esercizi

Determinare l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni per $x \to x_0$ *rispetto all'infinitesimo principale* $x - x_0$ *:*

*37) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \qquad x_0 = 1$

*38) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + 2 - x \qquad x_0 = 2^+$

39) $f(x) = (x-1)^2 + sin(x-1) \qquad x_0 = 1$

40) $f(x) = log(2-x)$ $x_0 = 1$

41) $f(x) = tg(x+1)^2$ $x_0 = -1$

42) $f(x) = \sqrt{3+x} - x - 3$ $x_0 = -3^+$

43) $f(x) = e^{(x+2)^2} - 1$ $x_0 = -2$

*44) $f(x) = \frac{x^2-10x+25}{\sqrt{x-5}}$ $x_0 = 5^+$

45) $f(x) = 1 + cosx$ $x_0 = -\pi$

*46) $f(x) = \sqrt[3]{-x^2+6x} + 3$ $x_0 = -3$

La funzione $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine α** ($\alpha \in \mathbb{R}_0^+$) per $x \to \infty$ se

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} \right| = \lim_{x\to\infty} |x|^\alpha |f(x)| = l \neq 0$$

Esercizi

Determinare l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni per $x \to \infty$ rispetto all'infinitesimo principale $\frac{1}{x}$:

*47) $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$

48) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+x+1}$

49) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^4+3}}$

*50) $f(x) = \frac{\sqrt{2+x}}{4x+x^3}$

*51) $f(x) = \frac{3x-1}{x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

52) $f(x) = sin^2 \frac{1}{x}$

53) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}+x^2\sqrt{x}}$

54) $f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}$

55) $f(x) = log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}$

56) $f(x) = tg\left(\frac{1}{x}\right)^2$

Infiniti

Definizione di infinito

Si dice che la funzione f è **infinita** per $x \to x_0$ o che è **un infinito** se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad (-\infty)$$

Analogamente, se f è definita in un insieme illimitato superiormente (inferiormente) e se :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \; (-\infty) \qquad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \; (-\infty)\right)$$

si dice che f è **infinita** per $x \to +\infty$ $(-\infty)$.

Confronto tra infiniti

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni **infinite** per $x \to x_0$. Se

$$\lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \begin{cases} +\infty & f \text{ è un infinito di ordine superiore rispetto a } g \\ l \neq 0 & f \text{ e } g \text{ sono infinite dello stesso ordine} \\ 0 & f \text{ è un infinito di ordine inferiore rispetto a } g \end{cases}$$

Ordine di infinito

Se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|^{\alpha}} = l \neq 0$$

si dice che f è **infinito di ordine α rispetto a** g.

Esempi

a) Sia $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio di grado n.

Poiché

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = \infty \qquad \text{il polinomio è infinito per } x \to \infty.$$

Per calcolare l'ordine di ∞ raccogliamo x^n a fattor comune, ottenendo

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = \lim_{x \to \infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) = \lim_{x \to \infty} a_n\, x^n = \infty$$

Pertanto l'ordine di ∞ è uguale al grado n , cioè il polinomio tende all'infinito per

$x \to \infty$ con il termine di grado massimo $a_n\, x^n$ che prende il nome di **parte principale** di ∞.

Esercizi

Determinare l'ordine di infinito delle seguenti funzioni per $x \to \infty$ rispetto all'infinito principale x :

57) $f(x) = 2x^6 - x^2 + 2$

58) $f(x) = x^4 - 3x^5$

59) $f(x) = \frac{x-2x^4}{3x+1}$

* 60) $f(x) = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2+3}$

61) $f(x) = 3x^2\sqrt{x} - 3x^3$

62) $f(x) = \frac{1}{2}x^3\sqrt{x} - x^3\sqrt[4]{x-2} - x$

63) $f(x) = \frac{5x^6-2}{\sqrt[3]{x^2}}$

64) $f(x) = x + \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$

*65) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{5+x^2}{x+7}}$

66) $f(x) = x^3\sqrt{x} + \frac{x^2}{x+2}$

67) $f(x) = x\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-5}}$

68) $f(x) = \frac{x-2x^2}{x+1} + \sqrt{x^3}$

69) $f(x) = \frac{4x-x^6\sqrt[3]{x}}{x^2+x+1}$

70) $f(x) = \frac{1-2x^7}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

71) $f(x) = \frac{x^4+sinx}{x+4}$

72) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-x^3}{\sqrt{x}+1}$

73)Verificare che $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ è un infinito pe $x \to 1^+$ di ordine $\frac{1}{2}$ rispetto all'infinito $\frac{1}{x-1}$.

74)Verificare che $f(x) = \frac{1}{x^3-2x+1}$ è un infinito pe $x \to 1$di ordine 1 rispetto all'infinito $\frac{1}{x-1}$.

*75)Verificare che $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3-5x+2}}$ è un infinito pe $x \to 2$ di ordine $\frac{1}{5}$ rispetto all'infinito $\frac{1}{x-2}$.

***75. S.** fattorizzando il radicando si ha**:** si ha $x^3 - 5x + 2 = (x-2)(x^2+2x-1)$…;

*76)Verificare che $f(x) = \frac{1}{(x^3-1)(x^2-4x+3)}$ è un infinito pe $x \to 1$di ordine 2 rispetto all'infinito $\frac{1}{x-1}$.

*77) Dopo aver verificato che $\lim_{x\to 0} \frac{tg(2x)}{x^3} = +\infty$, determinare l'ordine di infinito rispetto all'infinito campione $\frac{1}{x}$

Soluzioni

1. S. g di ordine superiore rispetto a f; **2. S.** f e g dello stesso ordine;

3. S. g di ordine superiore rispetto a f; **4. S.** f di ordine superiore rispetto a g;

5. S. f di ordine superiore rispetto a g; **6. S.** f di ordine superiore rispetto a g;

7. S. f di ordine superiore rispetto a g;

***8. S.** f e g dello stesso ordine;(tenere conto che $cosx - sinx = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cosx - \frac{\sqrt{2}}{2}sinx\right) =$

$= \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ ...);

***9. S.** f e g dello stesso ordine; ($\lim_{x\to -1}\left|\frac{e^{x+1}-1}{(x+1)(x-1)}\right| = \lim_{x\to -1}\frac{1}{|x-1|}\left|\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\right| = \frac{1}{2}$) ;

10. S. f e g dello stesso ordine;

11. S. 2; $-5x^2$; **12. S.** $\frac{7}{3}$; $2x^2\sqrt[3]{x}$; **13. S**. 1; x ; **14. S**. 1; x;

15. S. 1; $2x$; **16. S.** $\frac{1}{2}$; $3\sqrt{x}$; **17. S.** 2; x^2 ; **18. S.** $\frac{1}{3}$; $\sqrt[3]{x}$;

***19. S.** 1; $\sqrt{2}|x|$; ($\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{x^4+2x^2}{x+1}}}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|\sqrt{\frac{x^2+2}{x+1}}}{|x|^\alpha} = \sqrt{2}$ se $\alpha = 1$);

20. S. 1;$-x$; **21. S.** $\frac{2}{3}$; $3\sqrt[3]{x^2}$; **22. S.** $\frac{1}{3}$; $\sqrt[3]{\frac{x}{5}}$; **23. S.** 3; x^3 ; **24. S**. 4; x^4;

25. S. 4; x^4 ; **26. S**. 5; x^5;

***27. S**. 2; $4x^2$; ($\lim_{x\to 0}\frac{|\sin(4x)tgx|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}4\left|\frac{\sin(4x)}{4x}\right|\left|\frac{tgx}{x}\right|\frac{1}{|x|^{\alpha-2}} = 4$ se $\alpha = 2$);

28. S. 2; $8x^2$; **29. S.** 1; $\frac{3}{2}x$; **30. S**. 2; $\frac{1}{3}x^2$; **31. S.** 2; $-x^2$;

32. S. 3; $5x^3$; **33.S.** $\frac{1}{2}$; $\sqrt{x}$ **;**

***34. S.** $\frac{1}{4}$; $\sqrt[4]{x}$; ($\sqrt{x}$ è infinitesimo per $x \to 0^+$ di ordine $\frac{1}{2}$, inoltre $\lim_{x\to 0^+}\frac{arctg\sqrt[4]{x}}{x^\alpha} =$

$= \lim_{x\to 0^+}\frac{arctg\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}\cdot x^{\alpha-\frac{1}{4}}} = 1$ se $\alpha = \frac{1}{4}$, pertanto la funzione è infinitesima di ordine $\frac{1}{4}$ per $x \to 0^+$);

35. S. 2; x^2 ; **36. S**. 1; x;

***37. S.** 2 ; (fattorizzando si ha: $f(x) = (x-1)^2(x^2+1)$...);

***38. S.** $\frac{1}{2}$; (per $x > 2$ risulta : $\lim_{x\to 2^+}\frac{|\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}-(x-2)|}{|x-2|^\alpha} = \lim_{x\to 2^+}\frac{|\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}|}{|x-2|^{\alpha-\frac{1}{2}}} = 2$ per $\alpha = \frac{1}{2}$);

39. S. 1 ; **40. S.** 1 ; **41. S.** 2 ; **42. S.** $\frac{1}{2}$; **43. S.** 2 ;

***44. S.** $\frac{3}{2}$; ($\lim_{x\to 5^+} \frac{\frac{(x-5)^2}{\sqrt{x-5}}}{|x-5|^{\alpha}} = \lim_{x\to 5^+} \frac{(x-5)^{\frac{3}{2}}}{|x-5|^{\alpha}} = 1$ se $\alpha = \frac{3}{2}$) ;

45. S. 2 ;

***46. S.** 1 ; ($\lim_{x\to -3} \frac{\left|\sqrt[3]{-x^2+6x}+3\right|}{|x+3|^{\alpha}} = \lim_{x\to -3} \frac{\left|\left(\sqrt[3]{-x^2+6x}+3\right)\left(\sqrt[3]{(-x^2+6x)^2}-3\sqrt[3]{-x^2+6x}+9\right)\right|}{\left(\sqrt[3]{(-x^2+6x)^2}-3\sqrt[3]{-x^2+6x}+9\right)|x+3|^{\alpha}} =$

$= \lim_{x\to -3} \frac{|x^2-6x-27|}{\left(\sqrt[3]{(-x^2+6x)^2}-3\sqrt[3]{-x^2+6x}+9\right)|x+3|^{\alpha}} = \lim_{x\to -3} \frac{|(x+3)(x-9)|}{\left(\sqrt[3]{(-x^2+6x)^2}-3\sqrt[3]{-x^2+6x}+9\right)|x+3|^{\alpha}} == \frac{4}{15}$ se $\alpha = 1$);

***47. S.** 2; ($\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{|x^2+x|}}{\frac{1}{|x|^{\alpha}}} = \lim_{x\to \infty} \frac{|x|^{\alpha}}{|x^2+x|} = 1$ per $\alpha = 2$;

48. S. $\frac{3}{2}$; **49. S.** $\frac{2}{3}$;

***50. S.** $\frac{5}{2}$; ($\lim_{x\to +\infty} |x|^{\alpha} \frac{\sqrt{2+x}}{|4x+x^3|} = \lim_{x\to +\infty} |x|^{\alpha-3} \frac{\sqrt{x}\sqrt{\frac{2}{x}+1}}{\left|\frac{4}{x^2}+1\right|} = \lim_{x\to +\infty} |x|^{\alpha-\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{\frac{2}{x}+1}}{\left|\frac{4}{x^2}+1\right|} = 1$ se $\alpha = \frac{5}{2}$);

***51. S.** $\frac{1}{2}$; ($\lim_{x\to +\infty} |x|^{\alpha} \frac{|x|\left|3-\frac{1}{x}\right|}{|x\sqrt{x}|\left|1+\frac{\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}}\right|} = \lim_{x\to +\infty} |x|^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{\left|3-\frac{1}{x}\right|}{\left|1+\frac{\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}}\right|} = 3$ se $\alpha = \frac{1}{2}$) ;

52. S. 2 ; **53. S.** $\frac{5}{2}$; **54. S.** 2 ; **55. S.** 2 ; **56. S.** 2 ;

57. S. 6 ; **58. S.** 5 ; **59. S.** 3;

***60. S.** $\frac{2}{3}$ **;** ($\lim_{x\to +\infty} \frac{\left|\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2+3}\right|}{|x|^{\alpha}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left|\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-3\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^2}}\right)\right|}{|x|^{\alpha}} = 2$ se $\alpha = \frac{2}{3}$);

61. S. 3; **62. S.** $\frac{7}{2}$; **63. S.** $\frac{16}{3}$; **64. S.** 1;

***65. S.** $\frac{1}{4}$; ($\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[4]{\frac{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{x\left(7+\frac{1}{x}\right)}}}{|x|^{\alpha}} = \sqrt[4]{\frac{1}{7}}$ se $\alpha = \frac{1}{4}$) ;

66. S. $\frac{7}{2}$ **;** **67. S.** 1 ; **68. S.** $\frac{3}{2}$; **69. S.** $\frac{13}{3}$; **70. S.** $\frac{13}{2}$;

71. S. 3 ; **72. S.** $\frac{5}{2}$;

***75. S.** fattorizzando il radicando si ha**:** si ha $x^3 - 5x + 2 = (x-2)(x^2+2x-1)$…;

***76. S** fattorizzando il denominatore risulta :

$$(x^3-1)(x^2-4x+3) = (x-1)(x^2+x+1)(x-1)(x-3)\ldots;$$

***77. S.**2 ; ($\lim_{x\to 0} \frac{tg(2x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{tg(2x)}{2x} \cdot \frac{2x}{x^3} = \lim_{x\to 0} 1 \cdot \frac{2}{x^2} = +\infty$ …);