6. Funzioni composte

Definizione
Sono date le funzioni

$$f: E_f \to C_f \qquad \text{e} \qquad g: E_g \to C_g$$

e sia.
La funzione

$$t: E_f \to C_g$$

che fa corrispondere a ogni elemento $x \in E_f$ l'elemento $g(f(x)) \in C_g$ si dice **funzione composta** di f e g e si indica con $g \circ f$ (g composto f).

Se il codominio C_f della f non è contenuto nel dominio E_g della g è possibile ancora definire la funzione composta $g \circ f$ purché si possa determinare un sottoinsieme

$E'_f \subseteq E_f$ in modo tale che il codominio $f(E'_f) \subseteq E_g$.

Per esempio, date le funzioni

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/x \to x^3 \qquad\qquad g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}/x \to \sqrt{x}$$

osserviamo che sui valori negativi del codominio $\mathbb{R}$ di f non è definita la g. In tal caso è sufficiente restringere a $\mathbb{R}^+$ il dominio della f per poter definire la funzione composta $g \circ f$.

In generale, pur essendo ben definite le funzioni $g \circ f$ e $f \circ g$, per l'ordine di composizione non vale la proprietà commutativa, cioè

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Esempio

Consideriamo le funzioni

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/x \to x^2$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/x \to 3x - 1$

Il codominio della funzione f è $C_f = [0; +\infty)$; poiché esso è contenuto nel dominio $\mathbb{R}$ della funzione g è possibile definire la funzione composta $g \circ f$ e risulta :

$$g(f(x)) = 3x^2 - 1.$$

E' possibile definire anche la funzione $f \circ g$ che consiste nell'applicare su x prima

la funzione g e, sul risultato, la f e risulta :

$$f(g(x)) = (3x - 1)^2$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Date le funzioni $f(x)$ *e* $g(x)$ *determinare le funzioni* $f(g(x))$ *e* $g(f(x))$ *con i*

rispettivi domini

1) $f(x) = x - 2 \quad g(x) = x^2 + x$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad g(x) = x + 4$

3) $f(x) = \sqrt[3]{4 - 2x} \quad g(x) = \frac{1}{x}$

4) $f(x) = \sqrt{x - 4} \quad g(x) = x^2$

5) $f(x) = \sqrt{x} \quad g(x) = logx$

6) $f(x) = 3^x \quad g(x) = x^2 + 4$

7) $f(x) = \frac{1}{x-1} \quad g(x) = e^x$

8) $f(x) = sinx \quad g(x) = x^3 - 1$

*****9) $f(x) = logx \quad g(x) = -x^2 - 4$

10) $f(x) = e^{2x} \quad g(x) = log(x - 1)$

11) $f(x) = arcsinx \quad g(x) = x^4$

*12) $f(x) = arcsinx \quad g(x) = x^2 + 2$

Soluzioni

1. S. $f\big(g(x)\big) = x^2 + x - 2$; $E = \mathbb{R}$; $g\big(f(x)\big) = (x-2)^2 + x - 2$; $E = \mathbb{R}$;

2. S. $f\big(g(x)\big) = \sqrt[3]{x+4}$, $E = \mathbb{R}$; $g\big(f(x)\big) = \sqrt[3]{x} + 4$, $E = \mathbb{R}$

3. S. $f\big(g(x)\big) = \sqrt[3]{4 - \frac{2}{x}}$; $E = \mathbb{R} - \{0\}$; $g\big(f(x)\big) = \frac{1}{\sqrt[3]{4-2x}}$; $E = \mathbb{R} - \{2\}$;

4. S. $f\big(g(x)\big) = \sqrt{x^2 - 4}$; $E = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; $g\big(f(x)\big) = x - 4$; $E = [4; +\infty)$;

5. S. $f\big(g(x)\big) = \sqrt{logx}$, $E = [1; +\infty)$; $g\big(f(x)\big) = log\sqrt{x}$, $E = (0; +\infty)$;

6.S. $f\big(g(x)\big) = 3^{x^2+4}$, $E = \mathbb{R}$; $g\big(f(x)\big) = 3^{2x} + 4$, $E = \mathbb{R}$;

7. S. $f\big(g(x)\big) = \frac{1}{e^x - 1}, E = R - \{0\}$; $g\big(f(x)\big) = e^{\frac{1}{x-1}}\, E = \mathbb{R} - \{1\}$;

8.S. $f\big(g(x)\big) = \sin(x^3 - 1)$, $E = \mathbb{R}$; $g\big(f(x)\big) = sin^3x - 1$, $E = \mathbb{R}$;

***9.S.** $g(x)$ è definita in $\mathbb{R}$ e ha codominio $C_g = (-\infty; -4]$ mentre $f(x)$ esiste solo per valori positivi dell'argomento del logaritmo, quindi $f\big(g(x)\big) = \log(-x^2 - 4)$ *non esiste*.

La funzione $f(x)$, definita in $(0; +\infty)$, ha codominio $\mathbb{R}$, in cui è definita la funzione $g(x)$, cioè $C_f = E_g$pertanto esiste in $E = (0; +\infty)$ $g\big(f(x)\big) = -log^2x - 4$;

10. S. $f\big(g(x)\big) = e^{2log(x-1)} = (x-1)^2, E = (1; +\infty)$; $g\big(f(x)\big) = log(e^{2x} - 1), E = (0; +\infty)$;

11. S. $f\big(g(x)\big) = arcsinx^4$; $E = [-1; 1]$; $g\big(f(x)\big) = (arcsinx)^4; E = [-1; 1]$;

***12. S.** $g(x)$ è definita in $\mathbb{R}$ e ha codominio $C_g = [2; +\infty)$ mentre $f(x)$ esiste solo in $[-1; 1]$, quindi $f\big(g(x)\big) = \arcsin(x^2 + 2)$ non esiste. La funzione $f(x)$, definita in E_f= $[-1; 1]$, ha codominio $C_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, la funzione $g(x)$ è definita in $E_g = \mathbb{R}$, quindi $C_f \subseteq E_g$ pertanto esiste in $[-1; 1]$ $g\big(f(x)\big) = (arcsinx)^2 + 2$.