

3. Limiti all'infinito di funzioni razionali

Polinomi

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n\end{aligned}$$

Esempi

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^4 + 2x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(-3 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^4 = -\infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 + 7x^3 + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(-4 + \frac{7}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^5 = +\infty$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 + 2x - 4) = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 = -\infty$

In definitiva un polinomio si comporta all' ∞ come il suo monomio di grado massimo

Esercizi

- 1) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (4x^3 + x^2 - 4)$ 2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-5x^4 + x^2 - 4x + 3)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x^2 - 8x + 1)$ 4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-2x^2 + 4x - x^6 - 3)$

Funzioni razionali fratte

Per il comportamento all' ∞ del rapporto tra polinomi, che si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \infty & \text{se } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

Esempi

- a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{3x} = 0$
- b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^3 + 2x}{2x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^3}{2x^3} = 2$
- c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^5 + x^2 + 1}{4x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^5}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$

Esercizi

5) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^6+x+1}{2x^3-1}$

6) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x^6+x^7+1}{x^3-2x}$

7) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2+3x^3+2x}{x^3-2x}$

8) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-x^3}{x^2-x+4}$

9) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x^3+x^2+1}{x^3-2x}$

10) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2+x)^3}{x(1-x)^2}$

Soluzioni

1.S. $\pm\infty$; 2. S. $-\infty$; 3.S. $+\infty$; ; 4. S. $-\infty$

5. S. $\pm\infty$; 6. S. $+\infty$; 7. S. 3 ; 8.S. $\mp\infty$;

9. S. -4 ; 10. S. 1 ;