8. Teoremi di Rolle – Cauchy – Lagrange

Teorema di Rolle
Se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a;b]$, è derivabile in $(a;b)$ e assume valori uguali agli estremi :

$$f(a) = f(b)$$

esiste almeno un punto x_0 interno all'intervallo in cui la sua derivata si annulla:

$$f'(x_0) = 0$$

Esempio

Verificare se la seguente funzione verifica nell'intervallo a fianco indicato le ipotesi del teorema di Rolle; in caso affermativo trovare i punti dell'intervallo che verificano il teorema:

$$f(x) = e^{\frac{x^2-1}{x+3}} \qquad I = [-1;1]$$

La funzione data è continua e derivabile in $\mathbb{R} - \{-3\}$, quindi in $[-1;1]$, inoltre $f(-1) = f(1) = 1$. Pertanto $f(x)$ verifica in $[-1;1]$ le ipotesi del teorema di Rolle.

Esiste perciò almeno un punto dell'intervallo (-1;1) in cui

$$f'(x) = 0$$

Infatti

$$f'(x) = e^{\frac{x^2-1}{x+3}} \frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 + 6x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -3 \pm \sqrt{8}$$

Il punto cercato è $x = -3 + \sqrt{8} \in (-1;1)$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Verificare se le seguenti funzioni soddisfano nell'intervallo a fianco indicato le ipotesi del teorema di Rolle e, in caso affermativo, trovare i punti che verificano il teorema.

*1) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x \qquad I = [-2;1]$

*2) $f(x) = 3x^2 - x^4 \qquad I = [-1;1]$

*3) $f(x) = (1 + cosx)sinx \qquad I = [0;\pi]$

* 4) $f(x) = |\sin x - \cos x|$ $\quad I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right]$

* 5) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & per\ x \leq 1 \\ \log x & per\ x > 1 \end{cases}$ $\quad$ I $= \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; e\right]$

*6) $f(x) = \begin{cases} 2 - \log_2(1-x) & se - 3 \leq x < 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 & se\ 0 \leq x \leq 1 + \sqrt{5} \end{cases}$

*7) $f(x) = arctg(1 + x^2)$ $\quad I = [-2{,}2]$

8) $f(x) = \log(-x^2 + 2x + 3)$ $\quad I = [0; 2]$

*9) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} + 1 & se\ \ 0 \leq x < 1 \\ x^2 - \frac{5}{2}x + 3 & se\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

10) $f(x) = e^{\frac{x^2-4x}{2}}$ $\quad I = [1; 3]$

11) $f(x) = \sqrt[5]{x^4 - 4x^2}$ $\quad I = [0; 2]$

*12) $f(x) = \sqrt[5]{x^4 - 4x^2}$ $\quad I = [-2; 2]$

13) $f(x) = sin^2 x. cosx$ $\quad I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

*14) $f(x) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x + 1 + \log_3(4 - x^2)$ $\quad I = [-1; \sqrt{3}]$

*15)$f(x) = 2^{|x|+3} - 8|x| - 8$ $\quad I = [-1; 1]$

*16) Dimostrare che la derivata della funzione $f(x) = cos(x^4 + 2x^2) + log(x^2 + 4)$ si annulla in almeno un punto interno all'intervallo $I = [-4; 4]$.

17) Determinare i coefficienti $a, b, c \in R$ affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 & per - 1 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & per\ \ x < -1\ \ o\ x > 1 \end{cases} \qquad I = [-2; 2]$$

soddisfi, nell'intervallo a fianco indicato le ipotesi del teorema di Rolle.

Determinare poi i punti che verificano il teorema.

Teorema di Cauchy

Teorema
Siano f e g due funzioni continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a;b]$, derivabili in ogni punto interno a tale intervallo, e sia inoltre

$$g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a;b)$$

Esiste, allora, almeno un punto $x_0 \in (a;b)$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Esempi

Verificare se le funzioni f e g soddisfano , nell'intervallo a fianco indicato, le ipotesi del teorema di Cauchy e, in caso affermativo, determinare i punti che verificano il teorema .

a) $f(x) = x^2 - 2x \qquad g(x) = x^2 + 3x+4 \qquad I = [0;1]$

Le funzioni date sono continue e derivabili in $\mathbb{R}$, quindi in $I = [0;1]$, inoltre

$$g'(x) = 2x + 3 \neq 0 \;\; \forall x \in \; I$$

Ne segue che sono verificate le ipotesi del teorema e risulta:

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} = \frac{-1}{4} \quad \Rightarrow \qquad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x-2}{2x+3}$$

E quindi

$$\frac{2x-2}{2x+3} = -\frac{1}{4} \;\; \Longrightarrow \;\; x = \frac{1}{2} \in \; I = (0;1)$$

b) $(x) = 2x - x^3$, $\qquad g(x) = x^2 - 4x \qquad I = [-1;1]$

Le funzioni sono continue e derivabili in $\mathbb{R}$, quindi lo sono in $\mathrm{I} = [-1;1]$.

Si ha : $f'(x) = 2 - 3x^2$, $g'(x) = 2x - 4 \neq 0 \; \forall \; x \in \mathrm{I}$.

Sono quindi verificate le ipotesi del Teorema di Cauchy . Si ha

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{2-3x^2}{2x-4} = \frac{1-(-1)}{-3-5} \quad \Rightarrow \quad 6x^2 - x - 2 = 0$$

L'equazione ha soluzioni per $x_0 = -\frac{1}{2}$ *e* $x_1 = \frac{2}{3}$, entrambi sono punti di Cauchy

perché entrambi interni all'intervallo I.

c) $f(x) = x^2 + 4$ $\quad g(x) = e^x$ $\quad I = [0; 1]$

Le funzioni date sono continue e derivabili in $\mathbb{R}$, quindi in $I = [0; 1]$, inoltre

$$g'(x) = e^x \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ne segue che sono verificate le ipotesi del teorema e risulta:

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{1}{e-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x}{e^x}$$

Si ha

$$\frac{1}{e-1} = \frac{2x}{e^x} \implies e^x - 2(e-1)x = 0$$

La radice si può accertare applicando il teorema di esistenza degli zeri alla funzione continua

$$h(x) = e^x - 2(e-1)x$$

relativamente all'intervallo $I = [0; 1]$.

Poiché $h(0) = 1 > 0$ e $h(1) = -e + 2 < 0$, si deduce che esiste in $(0; 1)$ il punto che verifica il teorema.

Esercizi

*1) $f(x) = x^3 + 3x^2$ $\quad g(x) = 2x$-1 $\quad I = [-1; 2]$

2) $f(x) = -2x^2 + 3x$, $\quad g(x) = 4x - 1$ $\quad I = [-2; 0]$

3) $f(x) = sin^3 x$, $\quad g(x) = cosx$ $\quad I = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$

*4) $f(x) = \sqrt[4]{x^3 + 1}$ $\quad g(x) = 2 - x$ $\quad I = [-2; 0]$

*5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ $\quad g(x) = 2 - \sqrt{x^2 + 9}$ $\quad I = [-2; 4]$

*6) $f(x) = log(x^2 + 1)$, $\quad g(x) = x^2 + x$ $\quad I = [-1; 1]$

7) $f(x) = e^{x+1}$, $\quad g(x) = 2 - 3x$ $\quad I = [-1; 0]$

Teorema di Lagrange

Teorema
Se f è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$, esiste almeno un punto $x_0 \in (a; b)$ tale che:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Esempi

Verificare se le seguenti funzioni soddisfano, nell'intervallo a fianco indicato, le ipotesi del teorema di Lagrange e, in caso affermativo, trovare i punti dell'intervallo che soddisfano il teorema.

a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ $\quad\mathrm{I} = [2; 14]$

La funzione è definita e continua per $x \geq -2$, quindi è continua in I.

Risulta : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$, quindi la funzione è derivabile per $x > -2$.

Sono pertanto soddisfatte in I le ipotesi del teorema di Lagrange, ne segue che

esiste almeno un punto $x_0 \in (2; 14)$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0 + 2}} = \frac{f(14) - f(2)}{14 - 2}$$

Si ha

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0+2}} = \frac{4-2}{12} \quad \rightarrow \quad \sqrt{x_0 + 2} = 3 \quad \rightarrow \quad x_0 = 7$$

Il punto $x_0 = 7$ è il punto di Lagrange cercato.

b) $f(x) = 3x - log(2x + 1)$ $\quad I = [0; 1]$

La funzione data è continua e derivabile in $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$quindi in $[0; 1]$,

perciò, poiché

$$f(1) - f(0) = 3 - log3$$

$$f'(x) = 3 - \frac{2}{2x+1},$$

applicando il teorema di Lagrange risulta:

$$3 - log3 = 3 - \frac{2}{2x+1} \Rightarrow 2x+1 = \frac{2}{log3} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{log3} \in (0; 1)$$

c) $f(x) = x + e^{x^2-4}$ $\quad I = [-2; 2]$

La funzione data è continua e derivabile in $\mathbb{R}$, quindi in $I = [-2; 2]$, poichè

$$f(2) - f(-2) = 4 \qquad\qquad f'(x) = 1 + 2xe^{x^2-4}$$

applicando il teorema si ha

$$1 = 1 + 2xe^{x^2-4} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \in (-2; 2)$$

d) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x & se -2 \le x < 1 \\ 2x^3 + 2 & se\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$

*S*i ha che:

1) $f(x)$ è continua in $[-2; 1) \cup (1; 2]$ e risulta

$\lim\limits_{x \to 1^-} (x^3 + 3x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x^3 + 2) = 4 = f(1)$

quindi è continua in $[-2; 2]$

2) Derivabile in $(-2; 2)$ infatti essendo

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & se -2 \le x < 1 \\ 6x^2 & se\ 1 < x \le 2 \end{cases}$$

in $x = 1$ risulta:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x^2 + 3) = 6$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 6x^2 = 6$

Quindi $f'(1) = 6$

Pertanto $f(x)$ è continua e derivabile in $I = [-2; 2]$, applicando il teorema di Lagrange si ha

$$\frac{f(2) - f(-2)}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

$$3x^2 + 3 = 8 \quad \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{5}{3}} \qquad se -2 \le x < 1$$

$$6x^2 = 8 \quad \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{3}} \qquad se\ 1 \le x \le 2$$

Pertanto i punti $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$ e $x_2 = \sqrt{\frac{4}{3}}$ sono i punti che verificano il teorema.

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + 3 & se -2 \le x < 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log(x+1) + 3 & se\ 0 \le x \le e-1 \end{cases}$

1) $f(x)$ è continua in $[-2; 0) \cup (0; e-1]$ e risulta

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}x^2+x+3\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log(x+1)+3\right)=3=f(0)$$

quindi è continua in $[-2; e-1]$

2)Derivabile in $(-2; e-1)$ infatti essendo

$$f'(x)=\begin{cases} x+1 & se -2\le x<0 \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2(x+1)} & se\ 0<x\le e-1 \end{cases}$$

in $x=0$ risulta:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2(x+1)}\right)=1$$

Quindi $f'(1)=1$

Pertanto $f(x)$ è continua e derivabile in $I=[-2; e-1]$,applicando il teorema di Lagrange si ha

$$\frac{f(e-1)-f(-2)}{e+1}=\frac{e}{2(e+1)}$$

$$f'(x)=\begin{cases} x+1=\dfrac{e}{2(e+1)} \Rightarrow x=\dfrac{-e-2}{2(e+1)} & se -2\le x<0 \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2(x+1)}=\dfrac{e}{2(e+1)} \Rightarrow x=-e-2 \notin [0; e-1) & \end{cases}$$

L'unico punto che verifica il teorema è $x=\frac{-e-2}{2(e+1)}$.

Esercizi

1) $f(x)=-x^3+2x^2+x-1$ $\qquad I=[0;1]$

2) $f(x)=\sqrt{x}-3x$ $\qquad I=[1;4]$

3) $f(x)=x-\sqrt[3]{x+1}$ $\qquad I=[-2;7]$

4) $f(x)=x\sqrt{x+1}$ $\qquad I=[-1;3]$

*5) $f(x)=\begin{cases} -x^2-x+2 & x\le 0 \\ -\log(x+1)+2 & 0<x \end{cases}$ $\qquad I=[-2; e-1]$

6) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{5-x} & se\ 1\le x<4 \\ -10\sqrt{x}+2x+3 & se\ 4\le x\le 9 \end{cases}$ $\qquad I=[1;9]$

7) $f(x)=\begin{cases} e^{-x^2}-1 & x\le 0 \\ \log(x+1) & x>0 \end{cases}$ $\qquad I=[-2;2]$

8) $f(x)=arcsinx-x$ $\qquad I=[-1;1]$

*9) $f(x) = (x-1)|x-1|$ $\qquad I = [0; 2]$

10) $f(x) = arctg(1-x)$ $\qquad I = [0; 1]$

*11) Determinare a e b ∈ R affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & x > 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Determinare inoltre il punto $x_0 \in [0; 1]$ per il quale risulta verificato il teorema di Lagrange.

*12) Sia f una funzione derivabile nell'intervallo $I = [-1; 3]$.

Se la derivata prima soddisfa la condizione

$$|f'(x)| \leq 5 \qquad \forall x \in I$$

qual è la massima variazione di f in I ?

13) Sia f una funzione due volte derivabile nell'intervallo $I = [2; 4]$.

Se la derivata seconda verifica la condizione

$$|f''(x)| \leq 2 \qquad \forall x \in I$$

qual è la massima variazione del coefficiente angolare della funzione in I ?

Soluzioni

Teorema di Rolle

***1.S.** sì, $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$;

(infatti la $f(x)$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$, pertanto lo è in I, inoltre $f(-2) = f(1) = 0$; si ha :

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2 = 0$ per $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$; poiché entrambi i valori sono interni a I ....) ;

***2. S.** sì, $x_0 = 0$(infatti la $f(x)$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$, pertanto lo è in I, inoltre

$f(-1) = f(1) = 2$; si ha: $f'(x) = 6x - 4x^3 = 0$ per $x_0 = 0$ e $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$;

il punto che soddisfa il teorema è $x_0 = 0 \in (-1; 1)$, perché gli altri sono esterni a I);

***3. S.** Sì**,** $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

(**l**a funzione data è continua e derivabile in $\mathbb{R}$, quindi in $I = [0; \pi]$,inoltre

$f(0) = f(\pi) = 0$, perciò $f(x)$ verifica in$[0; \pi]$ le ipotesi del teorema di Rolle.

Poiché: $f'(x) = -sinx \cdot sinx + (1 + cosx)cosx = 0 \Rightarrow cosx = -\cos(2x)$...);

***4. S.** no;

(la $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{2}$, ma non è derivabile per $x = \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right)$);

***5. S.** sì, $x_0 = \frac{1}{2}$(infatti la $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, inoltre $f(e) = f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$,

si ha : $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ $f'_+(1) = f'_-(1) = 1$, pertanto è

derivabile in I, $f'(x) = 0$ per $x_0 = \frac{1}{2}$ interno a I) ;

***6. S.** no ,(risulta $f(-3) = f(1 + \sqrt{5}) = 0$ e si ha che $f(x)$ è continua in$[-3; 0) \cup (0; 1 + \sqrt{5}\,]$ e inoltre

$\lim_{x\to 0^-}[2 - \log_2(1 - x)] = \lim_{x\to 0^+}(\frac{-1}{2}x^2 + x + 2) = f(0) = 2$, quindi è continua in $\left[-3; 1 + \sqrt{5}\right]$,

ma non è derivabile in x=0 $\in \left(-3; 1 + \sqrt{5}\right)$, infatti ,essendo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}\, log_2 e & se -3 \leq x < 0 \\ -x + 1 & se\ 0 \leq x \leq 1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

in $x = 0$ risulta

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-x} log_2 e = log_2 e$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -x + 1 = 1$);

***7. S.** sì, $x_0 = 0$; (infatti la funzione è continua e derivabile in $\mathbb{R}$, $f(-2) = f(2)$,

$f'(x) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} = 0$ *per* $x_0 = 0 \in (-2; 2)$);

8. S. sì, $x_0 = 1$;

***9. S. sì** $x = \frac{5}{4}$ **(**infatti $f(x)$ è continua in$[0; 1) \cup (1; 2]$ e risulta:

$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2+1} + 1 = \lim_{x\to 1^+} x^2 - \frac{5}{2}x + 3 = f(1) = \frac{3}{2}$, quindi è continua in $[0; 2]$;

è derivabile in (0;2), infatti $f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{(x^2+1)^2} & se\ 0 \le x < 1 \\ 2x - \frac{5}{2} & se\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$ e in $x = 1$

risulta: $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

quindi $f'(1) = -\frac{1}{2}$. Inoltre $f(0) = f(2) = 2$

Si conclude che $f(x)$ verifica in $I = [0; 2]$ le ipotesi del teorema di Rolle.
Esiste perciò almeno un punto dell'intervallo $(0; 2)$ in cui $f'(x) = 0$.
Si osserva immediatamente che il punto in questione è $x_0 = \frac{5}{4} \in (0; 2)$);

10.S. sì, $x_0 = 2$; **11. S.** sì, $x_0 = \sqrt{2}$;

12.S. no,(è continua in I e $f(-2) = f(2) = 0$, ma essendo $f'(x) = \frac{4x^3-8x}{5\sqrt[5]{(x^4-4x^2)^4}}$ non è derivabile

per $x_0 = 0 \in (-2; 2)$;

13. S. sì, i punti che soddisfano l teorema sono tre: $x_0 = 0$, $x_1 = arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_2 = arcsin\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$;

14.S. sì, (la funzione data è continua e derivabile in$(-2; 2)$, quindi in
$I = \left[-1; \sqrt{3}\right]$, inoltre $f(-1) = f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$. Pertanto $f(x)$ verifica in $\left[-1; \sqrt{3}\right]$ le ipotesi del teorema di Rolle. Il punto cercato è la soluzione x$\in (-1; \sqrt{3})$ dell'equazione :
$\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{2x}{(4-x^2)}\log_3 e = 0$);

***15. S.** no;(la funzione è continua in $\mathbb{R}$, quindi in $I = [-1; 1]$, inoltre
$f(-1) = f(1) = 0$. Per lo studio della derivabilità si ha che , essendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x+3} + 8x - 8 & se\ -1 \le x < 0 \\ 2^{x+3} - 8x - 8 & se\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

risulta

$$f'(x) = \begin{cases} -2^{-x+3} log2 + 8 & se\ -1 \le x < 0 \\ 2^{x+3} log2 - 8 & se\ 0 < x \le 1 \end{cases}$$

per x =0

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -2^{-x+3} log2 + 8 = -8log2 + 8 = f'_-(0)$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2^{x+3} log2 - 8 = 8log2 - 8 = f'_+(0)$$

Quindi la funzione non è derivabile in x=0 ∈(-1;1), da ciò segue che non è applicabile il teorema di Rolle);

***16. (** la funzione soddisfa in I le ipotesi del teorema di Rolle, essendo continua e derivabile in $\mathbb{R}$ ed è pari);

17. S. $a = 1, b = 0, c = 8$; $x_0 = 0$, $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Teorema di Cauchy

***1.S.** le funzioni date sono continue e derivabili in $\mathbb{R}$, quindi in $I = [-1; 2]$, inoltre

$$g'(x) = 2 \neq 0 \ \ \forall x$$

Ne segue che sono verificate le ipotesi del teorema e risulta:

$$\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}=\frac{18}{6} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{3x^2+6x}{2}$$

Si ha

$$\frac{3x^2+6x}{2} = 3 \Longrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$$

Il punto che verifica il teorema è $x = -1 + \sqrt{3} \in \ I = (-1; 2)$;

2. S. *sì,* $x_0 = -1$; **3. S.** sì , $x_0 = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{7\sqrt{3}}{18}\right)$;

***4.S.** il teorema di Cauchy non è applicabile perché la funzione $f(x)$ non è derivabile in $x = -1 \ \in I = (-2; 0)$, infatti $f'(x) = \frac{3x^2}{4\sqrt[4]{(x^3+1)^3}}$ non esiste in $x = -1$;

***5.S.** no, infatti le funzioni date sono continue e derivabili in $\mathbb{R}$, quindi in $I = [-2; 4]$, però si ha: $g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ =0 per $x = 0 \in (-2; 4)$, si conclude che il teorema di Cauchy non è applicabile;

***6. S.** no , perché $g'(x) = 2x + 1 = 0$ *per* $x = -\frac{1}{2} \in (-1; 1)$; **7. S.** *sì,* $x_0 = log(e - 1) - 1$;

Teorema di Lagrange

1. S. sì, $x_0 = \frac{1}{3}$; **2. S.** sì, $x_0 = \frac{9}{4}$; **3. S.** no, perché la f non è derivabile in $x = -1 \in (-2; 7)$;

4. S. sì, $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{21}}{6}$;

***5.S.** sì, $x_0 = -\frac{e+2}{2(e+1)}$; (a) $-x^2 - x + 2$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\log(x + 1) + 2$ è continua $\forall x > -1$, inoltre $f(0) = 2 = \lim_{x\to 0^+}(-\log(x + 1) + 2)$, pertanto la funzione è continua in $\mathbb{R}$ e quindi in I; b) $f'(x) = \begin{cases} -2x-1 & x<0 \\ -\frac{1}{x+1} & x>0 \end{cases}$, la funzione è derivabile $\forall x \neq 0$;

poiché $\lim_{x\to 0^-}(-2x-1) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x+1} = -1 = f'(0)$ la funzione è derivabile in $\mathbb{R}$ e

quindi in I; c) applichiamo il teorema di Lagrange:

$$\frac{f(e-1)-f(-2)}{e-1-(-2)} = \frac{1-0}{e+1} = \frac{1}{e+1}$$

$-2x-1 = \frac{1}{e+1} \Rightarrow x_0 = -\frac{e+2}{2(e+1)}$ se $-2 \leq x < 0$

$-\frac{1}{x+1} = \frac{1}{e+1} \Rightarrow x = -e-2$ se $0 \leq x \leq e-1$, valore non accettabile .

Quindi il punto che verifica il teorema è $x_0 = -\frac{e+2}{2(e+1)}$);

6. S. no, non è continua; **7.S.** no, non è derivabile per $x=0$; **8. S.** sì, $x_{0,1} = \pm\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}$;

*** 9. S.** sì, $x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{3}{2}$;(a) la funzione è continua in $\mathbb{R}$; b) $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2(x-1) & 0 \leq x < 1 \\ 2(x-1) & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, in $x=1$ risulta :

$\lim_{x\to 1^-} -2(x-1) = \lim_{x\to 1^+} 2(x-1) = 0 = f'(0)$, pertanto la funzione è derivabile in $\mathbb{R}$,

pertanto sono soddisfatte in I le ipotesi del teorema di Lagrange; c) $\frac{f(2)-f(0)}{2} = 1$, da cui

$-2(x-1) = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ se $0 \leq x \leq 1$

$2(x-1) = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$ se $1 < x \leq 2$

I punti che soddisfano il teorema sono due: $x_0 = \frac{1}{2}$ e $x_1 = \frac{3}{2}$);

10.S. sì, $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{4-\pi}}{\sqrt{\pi}}$;

***11. S.** $a = 1,\ b = -2$; $x_0 = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$; (a) poiché la funzione è continua $\forall x \neq 1$, si deve

imporre che lo sia anche in 1: $f(1) = 0$ quindi deve essere $a+b+1=0$;

b) $f'(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2 & x<1 \\ 2ax+b & x>1 \end{cases}$, poiché la funzione è derivabile $\forall x \neq 1$ si deve imporre

che lo sia anche in 1, cioè che sia $2a+b=0$. Il sistema $\begin{cases} a+b+1=0 \\ 2a+b=0 \end{cases}$ ha la

soluzione $a=1,\ b=-2$ ….);

***12.S.** $|f(x_1)-f(x_2)| \leq 20$, $\forall x_1, x_2 \in I$; (per il Teorema di Lagrange $\forall x_1, x_2 \in I$ risulta

$f(x_1)-f(x_2) = f'(c)(x_2-x_1)$ essendo c un opportuno punto interno all'intervallo di estremi x_1 e x_2; ne segue la tesi tenendo conto che $|x_2 - x_1| \leq 4$ e che $|f'(x)| \leq 5$);

13. S. $|f'(x_1) - f'(x_2)| \leq 4$, $\forall x_1, x_2 \in I$;