1. Definizione di o piccolo

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni entrambe infinitesime per $x \to x_0$.

Se risulta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

cioè se $f(x)$è infinitesima di ordine superiore rispetto a $g(x)$, si dice che $f(x)$ è un **o-piccolo** di $g(x)$ per $x \to x_0$ e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

Il simbolo $o(\dots)$ indica una qualunque funzione che goda della proprietà data nella definizione.

Esempi

1) $1 - cosx = o(x)$ per $x \to 0$
   infatti risulta
   $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{1} = 0$$
2) $sin^2x = o\big(log(1 + x)\big)$ per $x \to 0$

   infatti risulta applicando la regola di De L'Hopital

   $$\lim_{x\to 0} \frac{sin^2x}{log(1 + x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2sinxcosx}{\frac{1}{1 + x}} = 0$$

Algebra degli o-piccolo

$c \cdot o\big(g(x)\big) = o\big(g(x)\big) \quad (c \neq 0)$ per $x \to x_0$ cioè i fattori numerici si possono trascurare
$o\big(c \cdot g(x)\big) = o\big(g(x)\big)$ per $x \to x_0$
$o(g(x)) + o\big(g(x)\big) = o\big(g(x)\big)$ per $x \to x_0$
$f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$ per $x \to x_0$
$o(f(x)) \cdot o\big(g(x)\big) = o(f(x) \cdot g(x))$ per $x \to x_0$
$o\big(o(f(x))\big) = o(f(x))$ per $x \to x_0$
Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ allora $(f(x))^\alpha = o((g(x))^\alpha)$, $\alpha > 0$

Se l'argomento dell'o-piccolo è una potenza di x con esponente positivo e $x \to x_0 = 0$, si ha: m, n positvi

$c \cdot o(x^m) = o(c \cdot x^m) = o(x^m)$
$o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^p)$ con p uguale al minore tra m e n
$o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
$x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
$x^m = o(x^n)$ se $n < m$

Esempio

1) per $x \to 0$ dalle proprietà degli o-piccolo si ha

   $o(x^2) \cdot (-2 + x^3 + sin^2 x) = -2o(x^2) + x^3 \cdot o(x^2) + o(x^2) \cdot sin^2 x$
   ora :
   $-2o(x^2) = o(x^2)$ $\quad\quad$ $x^3 \cdot o(x^2) = o(x^3 \cdot x^2) = o(x^5)$
   poiché $sin^2 x \sim x^2$ per $x \to 0$, risulta
   $o(x^2) \cdot sin^2 x = o(x^2 \cdot sin^2 x) = o(x^2 \cdot x^2) = o(x^4)$
   quindi
   $o(x^2) \cdot (-2 + x^3 + sin^2 x) = o(x^2) + o(x^5) + o(x^4) = o(x^2)$