5. Sistemi di equazioni lineari. Teoremi fondamentali

Un sistema di m equazioni in n incognite $x_1, x_2, \dots\dots, x_n$, del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \;\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \;\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\,x_2 + \;\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove a_{ij} ($i = 1, \dots., m; j = 1, \dots, n$) sono detti coefficienti e b_i $(i = 1, \dots., m)$ termini noti , si dice:

- **compatibile** se ammette almeno una soluzione
- **determinato** se è compatibile e la soluzione è unica
- **incompatibile** se non ha soluzioni.

Un sistema si dice **omogeneo** se $b_i = 0$ $(i = 1, \dots., m)$, cioè se sono nulli tutti i termini noti.

Un sistema omogeneo *ha sempre almeno una soluzione*, detta *banale* $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Detta A la matrice dei coefficienti, detta anche **matrice incompleta**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots \;\; a_{mn} \end{pmatrix}$$

e B la matrice dei coefficienti e termini noti, detta anche **matrice completa**

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots \;\; a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

il seguente fondamentale teorema permette di decidere se un sistema è compatibile o incompatibile.

Teorema di Rouché – Capelli

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare sia compatibile è che la matrice incompleta A e la matrice completa B abbiano lo stesso rango.

Esempi

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + 3y \ = 2 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

calcoliamo il rango della matrice A incompleta e il rango dalla matrice B completa

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Risulta:

- r(A) =2 (c'è almeno un minore di ordine 2 non nullo)
- r(B) =2 (risulta det(B)=0; si osservi che una riga è combinazione lineare delle altre due :la 2ª è somma delle altre due)
- Il sistema dato è **compatibile**.

2. Se invece consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + 3y \ = 2 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

si osserva che la matrice A dei coefficienti ha rango 2 , mentre la matrice completa

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero, quindi r(B)=3.

Il sistema è perciò **incompatibile**.

Teorema di Cramer

Dato il sistema lineare di n equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ \dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

indicata con A la matrice dei coefficienti, sussiste il seguente

Teorema di Cramer

Se $\mathrm{r(A)} = n$, cioè se $\det(\mathrm{A}) \neq 0$, il sistema (*) di n equazioni in n incognite è compatibile e determinato.

La $n -$ pla soluzione $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è data da

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \qquad (i = 1,2, \dots, n)$$

dove $\mathrm{A_i}$ indica la matrice ottenuta da A sostituendo alla $\mathrm{i} -$ esima colonna la colonna dei termini noti .

Esempio

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

Si ha :

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

quindi il sistema è determinato. Calcoliamo la soluzione.

Risulta

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 21 \qquad \text{da cui } x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(\mathrm{A})} = 1$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -21 \qquad \text{da cui } x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(\mathrm{A})} = -1$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 21 \qquad \text{da cui } x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(\mathrm{A})} = 1$$

Quindi la **soluzione** è $(1; -1; 1)$.

Un sistema **omogeneo** di n equazioni in n incognite **in cui il determinante A dei coefficienti è diverso da zero** ha la sola soluzione, detta **banale**, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Risolvere i seguenti sistemi in cui il numero delle equazioni = numero delle incognite applicando il teorema di Cramer, dopo aver verificato che det(A) $\neq 0$:

***1.** $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3y-3z=-1 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+2y-3z=-2 \\ x-y-z=3 \\ x+2y+2z=-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x+2y-3z=0 \\ x+y+z=-5 \\ x-4z=-2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x-y-2z=1 \\ 2x+y+3z=1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ 2x+5y-2z=-4 \\ x-y-3z=1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-5y+z=2 \\ x+y-2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ -2x-y=-3 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x-3y-z=-6 \\ 2x-2y-z=3 \\ x+y-2z=-1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-4y+z=-5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x-y-2z=1 \\ y+z=-1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x-4y+2z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ 4x-y+3z=0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -x+y+4z=1 \\ 3x-2y-z=1 \\ x-2z=5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} -3x+2y-z=0 \\ x+y+4z=1 \\ 3x-z=3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x-2y-z-t=-1 \\ 2x+y+4t=2 \\ -x-y+5z-t=4 \\ y+3z=0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x-y+3z-t=4 \\ x+y-3z-t=0 \\ -5x-y-z-t=1 \\ y-3z-2t=3 \end{cases}$

Soluzioni

***1. S.** (det(A) $\neq 0$) $x = -\frac{11}{3} \wedge y = -\frac{10}{3} \wedge z = -3$; cioè $\left(-\frac{11}{3}; -\frac{10}{3}; -3\right)$;

(calcoliamo il determinante della matrice A dei coefficienti :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$, quindi il sistema è determinato , si ha

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -11 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{11}{3}$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -10 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{10}{3}$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -9 \quad \Rightarrow \quad z = -3 \;);$$

2. S. (det(A) $\neq 0$) $x = \frac{5}{3} \wedge y = -\frac{11}{5} \wedge z = \frac{13}{15}$; cioè $\left(\frac{5}{3}; -\frac{11}{5}; \frac{13}{15}\right)$;

3. S. (det(A) $\neq 0$) $\left(\frac{50}{3}; -\frac{79}{3}; \frac{14}{3}\right)$; **4. S.** ($\det(A) \neq 0$); $\left(\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; -\frac{1}{3}\right)$;

5. S. (det(A) $\neq 0$) $\left(\frac{27}{53}; -\frac{50}{53}; \frac{8}{53}\right)$; **6. S.** ($\det(A) \neq 0$); $\left(0; -\frac{4}{9}; -\frac{2}{9}\right)$;

7. S. ($\det(A) \neq 0$) $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$; **8. S.** ($\det(A) \neq 0$) $\left(\frac{13}{2}; \frac{5}{2}; 5\right)$;

9. S. ($\det(A) \neq 0$) $\left(\frac{8}{7}; \frac{9}{7}; -1\right)$; **10. S.** ($\det(A) \neq 0$) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{5}{3}\right)$;

11. S. ($\det(A) \neq 0$) $\left(\frac{1}{20}; -\frac{5}{8}; -\frac{11}{40}\right)$; **12. S.** ($\det(A) \neq 0$) $\left(\frac{41}{9}; \frac{58}{9}; -\frac{2}{9}\right)$;

13. S. ($\det(A) \neq 0$) $\left(\frac{29}{32}; \frac{39}{32}; -\frac{9}{32}\right)$; **14. S.** ($\det(A) \neq 0$) $\left(-\frac{7}{4}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$;

15. S. ($\det(A) \neq 0$) $\left(-\frac{2}{5}; \frac{43}{20}; \frac{29}{20}; -\frac{13}{5}\right)$;