6. Equazioni differenziali a variabili separabili

Si chiama *a variabili separabili* un'equazione differenziale del tipo

$$y' = f(x)g(y)$$

in cui il secondo membro è il prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y.

I seguenti esempi chiariscono il procedimento risolutivo.

Esempi

1. *Determinare l'integrale generale dell'equazione*

$$y' = xe^y$$

L'equazione si può scrivere nella forma

$$\frac{dy}{dx} = xe^y \rightarrow e^{-y}dy = xdx$$

da cui integrando membro a membro:

$$\int e^{-y}dy = \int xdx \rightarrow e^{-y} = -\frac{x^2}{2} + c$$

L'integrale generale è dunque:

$$y = -log\left|-\frac{x^2}{2} + c\right|$$

2. *Determinare l'integrale generale dell'equazione*

$$y' = x(1 - y^2).$$

Osserviamo innanzi tutto che le funzioni costanti $y = 1$ e $y = -1$, che annullano il fattore $(1 - y^2)$, sono soluzioni dell'equazione differenziale.

Determiniamo le altre soluzioni dividendo entrambi i membri per $1 - y^2 \neq 0$, ottenendo

$$\frac{dy}{1 - y^2} = x\ dx$$

Integrando membro a membro si ha :

$$\int \frac{dy}{1 - y^2} = \int x\ dx$$

da cui

$$\frac{1}{2}log\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = \frac{1}{2}x^2 + c \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{y+1}{y-1}\right| = e^{x^2+2c} = e^{2c}e^{x^2} = Ce^{x^2}$$

avendo posto $C = e^{2c}$.

Risolvendo in y si ottiene

$$y = \frac{Ce^{x^2} + 1}{Ce^{x^2} - 1}$$

La formula ottenuta fornisce, al variare di C , tutte le soluzioni dell'equazione data compresa la soluzione costante $y = -1$ ottenibile per $C = 0$, ma non comprende la soluzione $y = 1$.

La totalità delle soluzione è quindi

$$y = \frac{Ce^{x^2}+1}{Ce^{x^2}-1} \qquad \text{e} \qquad y = 1.$$

Esercizi

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

1. $y' = \frac{2x}{y}$ **2.** $xy' = y$

3. $y' = (x+1)(y^2+1)$ **4.** $y' = \sqrt{x}(y^2-1)$

5. $y' = xe^y$ **6.** $y' = xye^{x^2}$

7. $y' = xy + x$ **8.** $y' = e^{x+y}$

9.$y' = (y+1)sinx$ **10.** $y' = (x+2)y^2$

11.$y' = cos(x)y^3$ **12 .**$y' = x(4+y)^2$

Soluzioni

1. S. $y^2 - 2x^2 + c = 0$; **2. S.** $y = cx$;

3.S. $y = tg\left(\frac{1}{2}x^2 + x + c\right)$; **4. S.** $y = \pm 1$ e $y^2 = ce^{\frac{4}{3}x\sqrt{x}} + 1$;

5. S. $y = -log\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$; **6. S.** $log|y| = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$; $y = 0$

7. S. $log|y+1| = \frac{x^2}{2} + c$; $y = -1$; **8. S.** $y = -log(-e^{-x} + c)$

9.S. $log|y+1| = c - \cos(x)$; $y = -1$; **10. S.** $y = -\frac{2}{c+4x+x^2}$; y=0

11. S.$-\frac{1}{2y^2} = sinx + c$; y=0 ; **12. S.** $y = -\frac{2}{2c+x^2} - 4$.