6. Studio della continuità e derivabilità

Ricordiamo il seguente teorema:

Teorema Se una funzione f è **derivabile** nel punto x_0 ivi è **continua**.

Pertanto se una funzione non è continua nel punto x_0 in tale punto non potrà neanche essere derivabile.

Il teorema non ammette il risultato inverso, cioè una funzione può essere continua in un punto senza essere ivi derivabile, come provano gli esempi che seguono.

Esempi

a) $f(x) = |logx|$

La funzione è definita e continua $\forall x \in (0; +\infty)$.

Essendo

$$logx \geq 0 \qquad \text{per } x \geq 1$$

si ha

$$f(x) = \begin{cases} logx & per\ \ x \geq 1 \\ -logx & per\ \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Derivando si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & per\ \ x > 1 \\ -\frac{1}{x} & per\ \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Analizziamo il comportamento della $f'(x)$ nel punto $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} -\frac{1}{x} = -1 = f'_-(1) \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1 = f'_+(1)$$

Poiché

$$f'_-(1) \neq f'_+(1)$$

la funzione è derivabile

$$\forall x > 0 \wedge x \neq 1$$

e $A(1;0)$ è un **punto angoloso** con semirette tangenti

$t_-: y = -x + 1$

$t_+: y = x - 1$

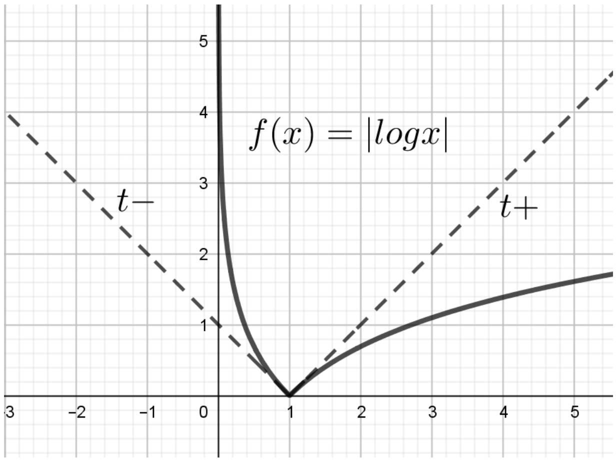

Fig. a

b) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & 0 < x < 1 \\ -x^2 + 2 & x \geq 1 \end{cases}$

La funzione è definita e continua $\forall x \in \mathbb{R}$. Derivando si ha :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-x}} & x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$

Analizziamo il comportamento della $f'(x)$ nel punto $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2\sqrt{-x}} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

Quindi la funzione non è derivabile per $x = 0$, nel punto $(0; 0)$ il grafico è tangente all'asse y : $(0; 0)$ è un **punto di flesso a tangente verticale**.

Analizziamo il comportamento della $f'(x)$ nel punto $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = f'_-(1) \qquad \lim_{x \to 1^+} -2x = -2 = f'_+(1)$$

Poiché

$$f'_-(1) \neq f'_+(1)$$

la funzione non è derivabile per $x = 1$;

$A(1;1)$ è un **punto angoloso** con

semirette tangenti :

$t_-: y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$

$t_+: y - 1 = -2(x - 1)$

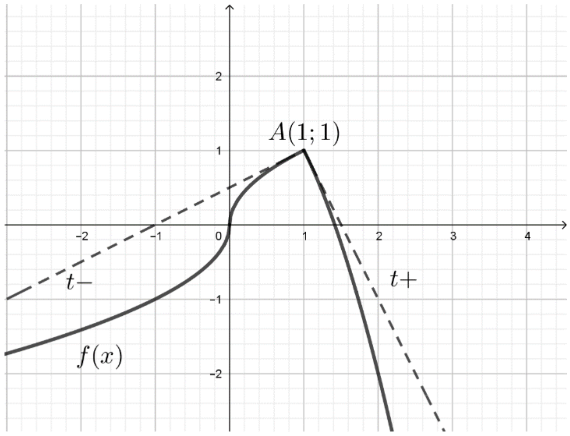

Fig. b

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Studiare la continuità e derivabilità delle seguenti funzioni, eventualmente servendosi del grafico. Classificare gli eventuali punti in cui le funzioni sono continue ma non derivabili: punti angolosi, cuspidi e determinare le semirette tangenti in tali punti. Determinare gli eventuali punti in cui la retta tangente è parallela all'asse delle ordinate: punti di flesso a tangente verticale.

*1) $f(x) = |x+1| + |1-x^2|$

* 2) $f(x) = (x-1)^2|x-1|$

*3) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

*4) $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)^2}$

* 5) $f(x) = x\sqrt[5]{x}$

*6) $f(x) = \sqrt{|x+4|}$

7) $f(x) = \sqrt{|9-x^2|}$

8) $f(x) = sinx \cdot |sinx|$

*9) $f(x) = e^{|x-2|}$

*10) $f(x) = \sqrt[3]{logx - 1}$

*11) $f(x) = arctg\sqrt[3]{|x|}$

*12) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x^2+1} & se\ x \leq 0 \\ x^2 + x + 1 & se\ x > 0 \end{cases}$

*13) $f(x) = \begin{cases} arctgx & per\ x \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} - x + 1 & per\ x > 1 \end{cases}$

*14) $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} + 2 & per\ x \leq 0 \\ \log(e^2 + x) & per\ x > 0 \end{cases}$

*15) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} - x & per\ x \leq 3 \\ -1 - \log_3 x & per\ x > 3 \end{cases}$

Soluzioni

***1. S.** continua in $\mathbb{R}$, derivabile in $\mathbb{R}-\{-1;1\}$; $(-1;0)$ e $(1;2)$ punti angolosi;

$$(f(x)=\begin{cases}-x-1+x^2-1=x^2-x-2 \ se\ x\le -1\\ x+1+1-x^2=-x^2+x+2 \qquad se -1<x\le 1\\ x+1+x^2-1=x^2+x \qquad se\ x\ge -1\end{cases};$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x-1 & se \quad x<-1\\ -2x+1 & se \ -1<x<1\\ 2x+1 & se \quad x>1\end{cases};$$

$$f'_-(-1)=-3 \quad f'_+(-1)=3; f'_-(1)=-1 \quad f'_+(1)=3 \ldots..);$$

***2. S.** continua e derivabile in $\mathbb{R}$;

$$\left(f(x)=\begin{cases}-(x-1)^3 \ se \ x\le 1\\ (x-1)^3 \quad se\ x>1\end{cases}; f'^{(x)}=\begin{cases}-3(x-1)^2 \ se\ x<1\\ 3(x-1)^2 \quad se\ x>1\end{cases}; f'_-(1)=f'_+(1)=0\ldots\right);$$

***3. S:** continua in $\mathbb{R}$; derivabile in $\mathbb{R}-\{1\}$; (1;0) punto di flesso a tangente verticale;

$$\left(f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}; \lim_{x\to 1} f'(x)=+\infty \ldots..\right);$$

***4. S.** continua in $\mathbb{R}$, derivabile in $\mathbb{R}-\{-3\}$; $(-3;0)$ cuspide,

$$\left(f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x+3}}, \text{si ha: } \lim_{x\to -3^-} f'(x)=-\infty \text{ e } \lim_{x\to -3^+} f'(x)=+\infty \ldots\right);$$

***5. S.** continua e derivabile in $\mathbb{R}$; $\left(f(x)=x^{\frac{6}{5}}; f'(x)=\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}=\frac{6}{5}\sqrt[5]{x}\ldots\right);$

***6. S.** continua in $\mathbb{R}$; derivabile in $\mathbb{R}-\{-4\}$; (-4;0) cuspide;

$$(f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+4} \ se\ x\ge -4\\ \sqrt{-x-4} \ se\ x<-4\end{cases}; f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}} \quad se\ x>-4\\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x-4}} \quad se\ x<-4\end{cases} \quad ; \lim_{x\to -4^\mp} f'(x)=\mp\infty:$$

$$\ldots\ldots\ldots\ (-4;0)\text{cuspide});$$

7. S. continua in $\mathbb{R}$, derivabile in $\mathbb{R}-\{-3;3\}$; $(-3;0)$ e $(3;0)$ cuspidi;

8, S. continua e derivabile in $\mathbb{R}$;

***9. S.** continua in $\mathbb{R}$; derivabile in $\mathbb{R}-\{2\}$; (2;1) punto angoloso;

$$\left(f(x)=\begin{cases}e^{x-2} \ se\ x\ge 2\\ e^{-x+2} \ se\ x<-4\end{cases}; f'(x)=\begin{cases}e^{x-2} \ se\ x>2\\ -e^{-x+2} se\ x<2\end{cases}; \lim_{x\to -2^\mp} f'(x)=\mp 1\right);$$

***10. S.** continua in $\mathbb{R}_0^+$, derivabile in $\mathbb{R}_0^+-\{e\}$; $(e;0)$ punto di flesso a tangente verticale;

$$(f'(x)=\frac{1}{3x\sqrt[3]{(logx-1)^2}}; \lim_{x\to e} f'(x)=+\infty \ldots..);$$

***11. S.** continua in $\mathbb{R}$; derivabile in $\mathbb{R}-\{0\}$; (0;0) cuspide;

$$\left(f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)} & per\ x>0\\ \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)} & per\ x<0\end{cases};\ \lim_{x\to 0^{\mp}} f'(x)=\mp\infty..\right);$$

***12. S.** continua in $\mathbb{R}$, derivabile in $\mathbb{R}-\{-1\}$; $(-1;0)$ punto angoloso;

$$\left(f(x)=\begin{cases}\frac{-x-1}{x^2+1} & se\ x\le -1\\ \frac{x+1}{x^2+1} & se -1<x\le 0\\ x^2+x+1 & se\ x>0\end{cases};\quad f'(x)=\begin{cases}\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} & se\ x<-1\\ -\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} & se -1<x<0\\ 2x+1 & se\ x>0\end{cases};\ldots\right);$$

***13. S.** continua in $\mathbb{R}$; derivabile in $\mathbb{R}-\{1\}$; $\left(1;\frac{\pi}{4}\right)$ punto angoloso;

($\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=-1$….);

***14. S.** continua in $\mathbb{R}$; derivabile in $\mathbb{R}-\{0\}$; $(0;2)$ punto angoloso;

$$\left(f'(x)=\begin{cases}e^{2x}+2xe^{2x} & per\ x<0\\ \frac{1}{e^2+x} & per\ x>0\end{cases};\quad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\frac{1}{e^2}\ ,\lim_{x\to 0^-} f'(x)=1\right);$$

***15. S.** continua in $\mathbb{R}$; derivabile in $\mathbb{R}-\{2;3\}$; $(2;-2)$flesso a tangente verticale, (3 ;-2) punto angoloso;

$$\left(f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}-1 & per\ x<3\\ -\frac{1}{x}\log_3 e & per\ x>3\end{cases};\ \lim_{x\to 2^{\pm}} f'(x)=+\infty;\ \lim_{x\to 3^+} f'(x)=-\frac{1}{3}\log_3 e\ ;\right.$$

$$\left.\lim_{x\to 3^-} f'(x)=-\frac{2}{3}\ldots\right);$$