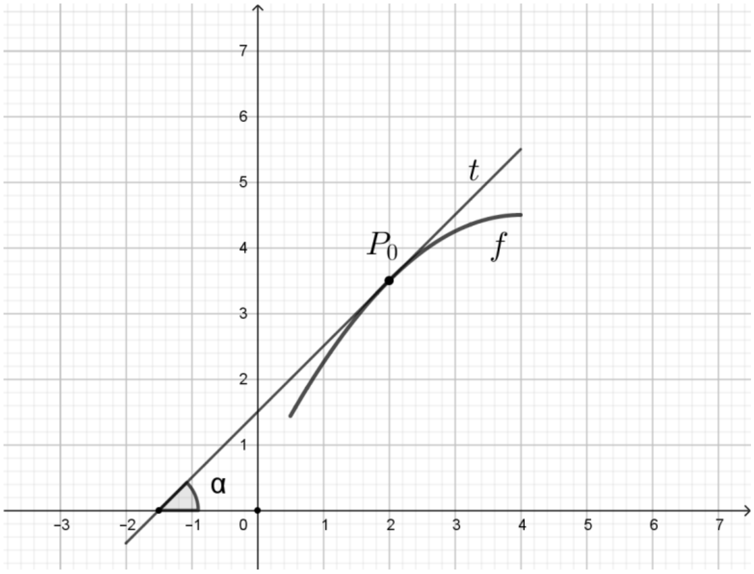
5. Equazione della retta tangente

Se il sistema di riferimento è monometrico la **derivata** della funzione $f(x)$ nel punto x_0 è uguale alla **tangente goniometrica dell'angolo** α che la retta (orientata verso l'alto) tangente al grafico della funzione nel punto $P_0(x_0; f(x_0))$ forma con la direzione positiva dell'asse x :

$$f'(x_0) = tg\alpha$$



La **retta tangente** al grafico della funzione $f(x)$ nel punto $P_0(x_0; f(x_0))$ ha equazione

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione f nel punto x_0 .

*1) $f(x) = -x^3 - x^2 + 3x + 1$ $\quad x_0 = -1$

*2) $f(x) = |x^3 + 2x^2|$ $\quad x_0 = -3$

*3) $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$ $\quad x_0 = 2$

*4) $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ $\quad x_0 = 1$

*5) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ $\quad x_0 = 0$

6) $f(x) = x\sqrt{\frac{2x}{x+7}}$ $\quad x_0 = 2$

*7) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2+x}}$ $\quad x_0 = -1$

8) $f(x) = |sin2x|$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$

*9) $f(x) = e^{-x^2+1}$ $x_0 = 1$

*10) $f(x) = xe^{-x^2-x}$ $x_0 = -1$

*11) $f(x) = e^{x\,\frac{x-2}{x+2}}$ $x_0 = 2$

*12) $f(x) = \log(2x - x^2)$ $x_0 = \frac{1}{2}$

*13) $f(x) = arctg(x^2 + 1)$ $x_0 = 0$

*14) $f(x) = arctg\sqrt{x}$ $x_0 = 3$

*15) $f(x) = arcsin(2x - 3)$ $x_0 = 1$

Determinare le ascisse dei punti delle seguenti curve in cui la retta tangente è parallela all'asse delle ascisse:

*16) $y = log^2x - logx$

*17) $y = x - 2cosx$

*18) $y = e^{-x}(x^2 - 1)$

19) $y = x\sqrt[3]{3x+2}$

*20) $y = x - \frac{x}{2-x^2}$

*21) $y = e^{2x} - 3e^x + 2$

Determinare le ascisse dei punti delle seguenti curve in cui la retta tangente forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse l'angolo α a fianco indicato:

*22) $y = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3}$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$

*23) $y = log(cosx)$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$

*24) $y = -x\sqrt{1-2x}$ $\alpha = \frac{3}{4}\pi$

Soluzioni

***1. S.** $t: y = 2x$; $(f(-1) = -2 , f'(x) = -3x^2 - 2x + 3 , f'(-1) = 2)$;

***2. S.** $t: y = -15x - 36$;

$(f(x) = x^2|x + 2| = x^2(-x - 2)$ per $x \leq -2 , f(-3) = 9$,

$f'(x) = -3x^2 - 4x, f'(-3) = -15)$;

***3. S.** $t: y = 3x - 10$; $(\mathrm{f}(2) = -4 , \mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{3}{(1-\mathrm{x})^2},\ \mathrm{f}'(2) = 3)$;

***4. S.** $t: y = \frac{\sqrt{5}}{5}(x + 4)$; $(f(1) = \sqrt{5} , f'(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} , f'(1) = \frac{\sqrt{5}}{5})$;

***5. S.** $t: x = 0$; (si ha: $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} = +\infty$) ; **6. S.** $25x - 27y - 14 = 0$;

***7. S.** $t: y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; (risulta: $f(-1) = -1$, $f'(x) = \frac{x+4}{2(x+2)\sqrt{2+x}} , f'(-1) = \frac{3}{2}$) ;

8. S. non esiste perchè f non è derivabile in $x_0 = \frac{\pi}{2}$);

***9. S.** $t: y = -2x + 3$; (risulta: $f(1) = 1$, $f'(x) = -2xe^{-x^2+1} , f'(1) = -2$);

***10. S.** $t: y = -1$; $(f(-1) = -1 , f'(x) = e^{-x^2-x}(1 - x - 2x^2), f'(-1) = 0)$;

***11. S.** $t: y = \frac{e^2}{4}(x - 2)$; (risulta: $f(2) = 0$, $f'(x) = e^x \frac{x^2}{(x+2)^2} ; f'(2) = \frac{e^2}{4}$) ;

***12. S.** $t: y - log\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$; $(f\left(\frac{1}{2}\right) = log\frac{3}{4} , f'(x) = \frac{2(1-x)}{2x-x^2} , f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3})$;

***13. S.** $t: y = \frac{\pi}{4}$; (risulta: $f(0) = \frac{\pi}{4}$, $f'(x) = \frac{2x}{1+(x^2+1)^2} , f'(0) = 0$);

***14. S.** $t: y - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{24}(x - 3)$; $(f(3) = \frac{\pi}{3} , f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} , f'(3) = \frac{\sqrt{3}}{24})$;

***15. S.** $t: x = 1$; (risulta: $f(1) = -\frac{\pi}{2},\ f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} ; \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} = +\infty$);

***16. S.** $x = \sqrt{e}$; ($f'(x) = \frac{2logx-1}{x} = 0$ per $logx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e}$) ;

***17. S.** $x = \frac{7}{6}\pi + k2\pi , x = \frac{11}{6}\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$; ($f'(x) = 1 + 2sinx = 0 \Rightarrow sinx = -\frac{1}{2}$ …) ;

***18. S.** $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$; ($f'(x) = -e^{-x}(x^2 - 2x - 1) = 0$ …); **19. S.** $x = -\frac{1}{2}$;

***20. S.** $-\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}}$; $\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}}$; ($f'(x) = \frac{x^4-5x^2+2}{(x^2-2)^2} = 0$ …);

***21. S.** $x = log\frac{3}{2}$; ($f'(x) = e^x(2e^x - 3) = 0 \Rightarrow e^x = \frac{3}{2}$) ;

***22. S.** $x = 1$; ($f'(x) = 2x^3 - x^2$, si devono trovare i valori di x tali che

$$f'(x) = tg\,\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow 2x^3 - x^2 = 1 \ \ldots) ;$$

***23. S.** $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$; ($f'(x) = -tgx = tg\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ...) ;

***24. S.** $x = 0$; ($f'(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{1-2x}} = tg\,\frac{3}{4}\pi = -1 \ldots$) .