5. Differenziale totale

Definizione
Sia $f(x;y)$ una funzione definita in E e ivi parzialmente derivabile rispetto a x e y , per ogni punto $(x_0;y_0)$ interno ad E, l'espressione

$$df = f_x(x_0;y_0)\Delta x + f_y(x_0;y_0)\Delta x$$

è detta **differenziale totale** della funzione $f(x;y)$ relativa al punto $(x_0;y_0)$ e all'incremento $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = y - y_0$ delle variabili.

Il differenziale totale , quanto più Δx e Δy sono piccoli, fornisce una buona approssimazione dell'incremento della funzione :

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0) \cong df$$

da cui

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \cong f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0)\Delta x + f_y(x_0;y_0)\Delta y$$

e posto $(x;y) = (x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ si ha:

$$f(x;y) \cong f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0)\Delta x + f_y(x_0;y_0)\Delta y = f(x_0;y_0) + df$$

Quindi, il differenziale consente di valutare i valori di una funzione nei punti $(x;y)$

vicini al punto $(x_0;y_0)$ in cui la funzione è nota.

Interpretazione geometrica

La superficie di equazione $z = f(x;y)$, per le ipotesi fatte, è dotata in ogni suo punto interno $P_0(x_0;y_0;z_0)$ di piano tangente di equazione

$$z - z_0 = f_x(x_{0;}y_0)(x - x_0) + f_y(x_{0;}y_0)(y - y_0) = df$$

Da ciò si riconosce che il differenziale totale rappresenta l'incremento che subisce la quota del punto variabile sul piano tangente in P_0 quando la sua proiezione sul piano xy passa dalla posizione $P(x_0;y_0)$ alla posizione posizione $(x;y)$.

Geometricamente l'approssimazione

$$f(x;y) \cong f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0)\Delta x + f_y(x_0;y_0)\Delta y = f(x_0;y_0) + df$$

equivale dunque a confondere la superficie con il piano a essa tangente nel punto $P_0(x_0;y_0;z_0)$.

Esercizi

Gli esercizi con asterisco sono avviati

Calcolare il differenziale totale delle seguenti funzioni relativamente al punto P_0 a fianco indicato:

1. $f(x;y) = x^3 - y^2 + xy \qquad P_0(1;-1)$

2. $f(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad P_0(-2;1)$

3. $f(x;y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \qquad P_0(1;3)$

4. $f(x;y) = sinx + cos^2y \qquad P_0\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$

5. $f(x;y) = log(3x + y) \qquad P_0(1;1)$

6. $f(x;y) = xlog(x + y) \qquad P_0(-1;2)$

7. $f(x;y) = e^{x+y} \qquad P_0(0;0)$

8. $f(x;y) = e^{y^2-x} \qquad P_0(1;-1)$

9. $f(x;y) = (2x + 3y)e^x \qquad P_0(0;3)$

***10.** Si abbia un cilindretto di acciaio di raggio $r_0 = 10mm$ e altezza $h_0 = 3cm$ con base superiore fissa e si applichi alla base inferiore una coppia di forze di momento M.

Indicata con α la misura in radianti dell'angolo di torsione, cioè dell'angolo di cui ruotano l'una rispetto all'altra le basi , si ha

$$\alpha = \frac{2hM}{\pi G r^4} radianti$$

dove G=$13350 k_P/mm^2$. Si valuti in modo approssimato la variazione di α se r e h variano entrambe di 1mm.

***11.** Consideriamo un cilindretto di acciaio di raggio $r_0 = 10cm$ e altezza $h_0 = 3m$ soggetto a una forza verticale F di trazione parallela all'asse del cilindro.

L'allungamento Δh subito dal cilindretto è dato da:

$$\Delta h = \frac{1}{E} \cdot \frac{F \cdot h}{\pi r^2} mm$$

dove il coefficiente E per l'acciaio è $2 \cdot 10^4 k_P/mm^2$.

Supposto F costante, calcolare in modo approssimato la variazione Δh se r e h variano entrambe di 1cm.

Soluzioni

1. S. $df = 2\Delta x + 3\Delta y;$

2.S. $df = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2\Delta x + \Delta y)$;

3. $\boldsymbol{S}.\frac{1}{50}\ \Delta x - \frac{7}{50}\Delta y;$

4. S. $\Delta x - \Delta y$;

5. S. $df = \frac{3}{4}\Delta x + \frac{1}{4}\Delta y;$

6.S. $df = -\Delta x - \Delta y;$

7. S. $df = \Delta x + \Delta y;$

8. S. $-\Delta x - 2\Delta y$;

9. S. $11\ \Delta x + 3\Delta y$;

***10.** S $-\frac{22M}{\pi G\cdot 10^4} rad$

$(\ \alpha = f(r;h);\quad \Delta\ \alpha = \Delta f(r;h) \cong df = f_r(r_0;h_0)\Delta r + f_h(r_0;h_0)\Delta h\ ;\quad \Delta r = \Delta r = 1mm$

$f_r = \frac{2hM}{\pi G}\cdot\left(-\frac{4}{r^5}\right)$ da cui $f_r(r_0;h_0) = \frac{M}{\pi G}\cdot\left(-\frac{24}{10^4}\right)$; $f_h = \frac{2M}{\pi G r^4}$ da cui $f_h(r_0;h_0) = \frac{M}{\pi G}\cdot\frac{2}{10^4}$

$\Delta\ \alpha \cong -\frac{22M}{\pi G\cdot 10^4} rad)$

***11.** S . $\Delta\ (\Delta\ h) \cong -\frac{59F}{10^3\pi E} mm;$

$(\Delta h = f(r;h);\quad \Delta\Delta h\ = \Delta f(r;h) \cong df = f_r(r_0;h_0)\Delta r + f_h(r_0;h_0)\Delta h;\quad \Delta r = \Delta h = 10mm$

$f_r = \frac{Fh}{\pi E}\left(-\frac{2}{r^3}\right)$ da cui $f_r(r_0;h_0) = \frac{F}{\pi E}\left(-\frac{6}{10^3}\right)$; $f_h = \frac{F}{\pi E}\left(\frac{1}{r^2}\right)$ da cui $f_h(r_0;h_0) = \frac{F}{\pi E}\left(\frac{1}{10^4}\right);$

$\Delta\Delta h \cong -\frac{59F}{10^3\pi E} mm)$