1. Punti - Rette - Piani

Formulario

A$(x_1; y_1; z_1)$ B$(x_2; y_2; z_2)$ C$(x_3; y_3; z_3)$

Distanza tra due punti $\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

Punto medio di AB $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

Punto del segmento AB $\left(x_1 + t(x_2 - x_1); y_1 + t(y_2 - y_1); z_1 + t(z_2 - z_1)\right)$ $t \in [0; 1]$

Baricentro del triangolo ABC $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

Equazione del piano α perpendicolare al vettore $\vec{v}\ (a; b; c)$: $ax + by + cz + d = 0$

Piani in posizioni particolari

- Piano xy : $z = 0$; piano xz : $y = 0$; piano yz: $x = 0$
- Piano per l'asse z : $ax + by = 0$;
- Piano per l'asse x: $by + cz = 0$;
- Piano per l'asse y : $ax + cz = 0$;

Piano per tre punti A, B, C
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Retta per P_0 $(x_0; y_0; z_0)$ di data direzione $\vec{d} = (l; m; n)$

$$r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$ ovvero se $l \neq 0, m \neq 0, n \neq 0$ $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$

Retta AB

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$$ ovvero se $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$ $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

Retta intersezione di due piani
$$\begin{matrix} \alpha: \\ \alpha'; \end{matrix} \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Condizioni di parallelismo

- Tra due piani **α** e α' : $a = ka', b = kb', c = kc'$ $(k \in \mathbb{R}_0)$
- Tra retta r e piano **α**: $al + bm + cn = 0$
- Tra le rette r di direzione $\vec{d} = (l; m; n)$ e r' di direzione $\overrightarrow{d'} = (l'; m'; n')$
  $l' = kl$ $m' = km$ $n' = kn$ $(k \in \mathbb{R}_0)$

Condizioni di perpendicolarità

- Tra due piani $\boldsymbol{\alpha}$ e α' : $aa' + bb' + cc' = 0$
- Tra due rette $r\ \ e\ \ r'$: $ll' + mm' + nn' = 0$
- Tra retta r e piano α : $l = ka, m = kb, n = kc$ $(\ k \in \mathbb{R}_0)$

Distanza di $\boldsymbol{P_0}$ $(x_0; y_0; z_0)$ dal piano α: $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Fascio di piani paralleli al piano $\boldsymbol{\alpha}$: $ax + by + cz + d = 0$: $ax + by + cz + h = 0$ con $h \in \mathbb{R}$

Stella di piani di centro $\boldsymbol{C(x_0; y_0; z_0)}$: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

Fascio di piani avente per asse la retta $\boldsymbol{r}$: $\begin{matrix}\alpha: \\ \beta:\end{matrix}\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$:

$ax + by + cz + d + \lambda(a'x + b'y + c'z + d') = 0$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, l'equazione non comprende il piano β

$\lambda(ax + by + cz + d) + a'x + b'y + c'z + d' = 0$, $(\lambda \in \mathbb{R})$, l'equazione non comprende il piano α

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

1. Dato il punto A(1;-2;1) , siano B il simmetrico di A rispetto all'origine , C il simmetrico di A rispetto all'asse x, D il simmetrico di A rispetto al piano yz . Determinare il perimetro del triangolo BCD.

2. Dati i punti A(1;-2;1) e B(0;4;5) determinare le coordinate del punto C tale che B sia il punto medio di AC .

*3. Dati i punti A(-1;2;4) e B(-4;1;0) determinare le coordinate del punto C che divide il segmento AB in modo che AC=2CB.

4. Dati i punti A(0;0;-1) , B(0;2;0) , C(2;1;-1) , determinare il perimetro del triangolo che unisce i punti medi dei lati del triangolo ABC .

Retta per due punti

Determinare l'equazione della retta passante per i due punti dati :

5. $A(-1;0;2)$, $B(0;1;-1)$;

6. $\mathrm{A}(2;-1;3)$, $\mathrm{B}(0;2;-1)$

7. $\mathrm{A}(0;0;0)$, $\mathrm{B}(4;-5;2)$

8. $\mathrm{A}\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$

*9. $\mathrm{A}(-2;3;1)$, $\mathrm{B}(-2;1;-2)$

Retta per un punto e avente direzione data $\vec{d}$

Determinare l'equazione della retta passante per il punto dato A e avente direzione data $\vec{d}$:

10. $\mathrm{A}(0;1;-2)$, $\vec{d}=(-2;1;1)$

11. $\mathrm{A}(3;5;2)$, $\vec{d}=(1;-1;0)$

12. $\mathrm{A}(-4;0;1)$, $\vec{d}=(-1;-1;-1)$

13. $\mathrm{A}(3;7;-5)$, $\vec{d}=(3;-2;-1)$

14. $\mathrm{A}(0;-2;-2)$, $\vec{d}=(0;1;-4)$

Determinare l'equazione della retta r passante per un punto A e parallela alla retta s :

15. $A(4;-2;1)$ $\quad s:\begin{cases} x=2t \\ y=1-3t \\ z=3-t \end{cases}$

16. $A(0;-2;-2)$ $\quad s:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{1-z}{4}$

17. $A(3;-1;-4)$ $\quad s:\begin{cases} x-y+1=0 \\ x-2z-3=0 \end{cases}$

18. $A(7;5;-1)$ $\quad s:\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+y+z+1=0 \end{cases}$

19. $A(-1;-1;-2)$ $\quad s:\begin{cases} x=2 \\ z=-3 \end{cases}$

Retta per un punto e perpendicolare al piano α

Esempio

Determinare la retta r perpendicolare al piano $\alpha: x-3y+2z+3=0$ *e passante per il punto* $A(-2;1;-3)$.

Il vettore $\vec{n}=(1;-3;2)$, le cui componenti sono i coefficienti delle incognite nell'equazione del piano, è perpendicolare al piano ed è anche il vettore direttore della retta r la cui equazione quindi è: $r:\begin{cases} x=t-2 \\ y=-3t+1 \\ z=2t-3 \end{cases}$

Esercizi

Determinare la retta r perpendicolare al piano α e passante per il punto A.

20. $A(4;-2;1)$ $\alpha: 2x-y+3z-1=0;$ 21. $A(1;0;-3)$ $\alpha: x+y=0;$

22. $A(-5;2;1)$ $\alpha: y=2$; 23. $A\left(8;\frac{3}{4};-2\right)$ $\alpha: 3x+2y-z+1=0;$

24. $A(-3;1;0)$ $\alpha: 2x-5y+3z-1=0;$

Piano per tre punti

Determinare l'equazione del piano passante per tre punti dati :

25. $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(0;0;0)$; 26. $A(1;-1;0)$, $B\left(\frac{1}{3};-1;1\right)$, $C\left(-1;2;\frac{3}{2}\right)$;

27. $A(0;2;-3)$, $B(4;-1;1)$, $C(-1;1;2)$; 28. $A(1;2;2)$, $B(-2;3;0)$, $C(2;-2;1)$;

29. $A(3;0;-4)$, $B(-1;2;0)$, $C(0;-1;0)$.

Piano $\boldsymbol{\alpha}$ passante per un punto e parallelo a un piano $\boldsymbol{\beta}$ dato

Determinare l'equazione del piano passante per il punto A e parallelo al piano β:

30. $A(0;0;1)$, $\beta: 3x-2y+z-2=0;$ 31. $A\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};-2\right)$, $\beta: x+y-2z+4=0;$

32. $A\left(\frac{3}{2};-2;1\right)$, $\beta: 2x+2y-5z-1=0$

Piano passante per un punto e perpendicolare a una retta data

Esempio

Determinare l'equazione del piano α passante per il punto $A(-3;4;2)$ e perpendicolare alla retta $r: \frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{2}=2-z$.

Il vettore $\vec{d}=(4;2;-1)$ è un vettore direttore della retta r ed è anche perpendicolare al piano α la cui equazione quindi è del tipo :

$$4x+2y-z+h=0.$$

Determiniamo h imponendo l'appartenenza di A al piano (vedi fig. 1):

$$4 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 + h = 0 \Longrightarrow h = 6 \quad \text{perciò} \quad \alpha : \ 4x + 2y - z + 6 = 0$$

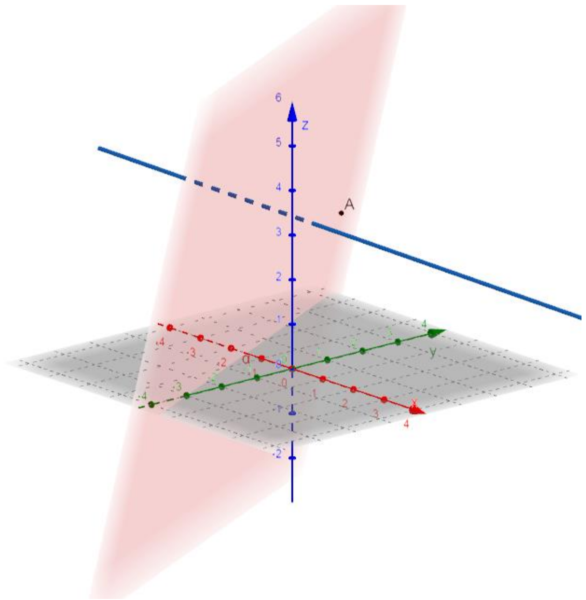


Fig. 1

Esercizi

Determinare l'equazione del piano α passante per il punto A e perpendicolare a alla retta r data :

33. $A(0; -2; 2)$, $r: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 2 \\ z = t + 2 \end{cases}$;

34. $A(\sqrt{2}; -\sqrt{3}; 0)$, $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{3-z}{4}$;

*35. $A(1; 3; -2)$, $r: \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$

*36. $A(0; 0; -2)$, $r: \begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \end{cases}$

37. $A(0; -1; 2)$, $r: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases}$

Piano per un punto contenente una data retta

Determinare il piano α passante per il punto $A(-2;1;1)$ e contenente la retta r

*38. $r: \begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$.

39. *Nel fascio di piani aventi per asse la retta $r: \frac{x+3}{2}=\frac{1-y}{3}=z$ determinare il piano α passante per il punto $A(-1;0;-2)$.*

*40. *Determinare l'equazione del piano α che contiene la retta r ed è parallelo alla retta s, essendo :*

$$r: \begin{cases} 2x-y=0 \\ x-2y+z=1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3y-z=1 \end{cases}.$$

*41. *Determinare l'equazione del piano α passante per $A(2;0;-3)$ e perpendicolare alla retta* $r: \begin{cases} x=-t+4 \\ y=3 \\ z=t-1 \end{cases}$.

*42. *Determinare l'equazione del piano α passante per $A(1;-1;2)$ e perpendicolare alla retta* $r: \begin{cases} x-2y+5=0 \\ 3y+z=10 \end{cases}$.

Distanza tra due rette parallele

Esempio

Dopo aver verificato che le rette r e r' sono parallele, calcolare la loro distanza

$$r: \begin{cases} x=2z-4 \\ y=-2z-4 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x=4t'+2 \\ y=-4t'+1 \\ z=2t'+3 \end{cases}$$

1° metodo

Verifichiamo la condizione di parallelismo $l'=kl$, $m'=km$, $n'=kn$ $(k \in \mathbb{R}_0)$.Poiché la retta $r: (2t-4;-2t-4;t)$ ha direzione $\vec{d}=(2;-2;1)$ e la retta r' ha direzione $\overrightarrow{d'}=(4;-4;2)$, le due rette risultano essere parallele o addirittura coincidenti. Per verificare che non sono coincidenti basta far vedere che preso un punto P $\in r$ esso non sta su r'. Consideriamo per esempio il punto $\mathrm{P}(-4;-4;0) \in r$ e sostituiamo le sue coordinate in r', si ha:

$$\begin{cases} -4 = 4t' + 2 \\ -4 = -4t' + 1 \\ 0 = 2t' + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = -\frac{3}{2} \\ t' = \frac{5}{4} \\ t' = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

Ciò significa che le rette non coincidono.

Per determinare la distanza tra r e r' consideriamo il piano α perpendicolare a entrambe passante per un punto qualunque di r, per esempio P stesso, di equazione

$$2(x+4) - 2(y+4) + z = 0 \quad \text{cioè} \quad 2x - 2y + z = 0$$

e determiniamo la sua intersezione P' con r' (vedi fig. 2) . Si ha :

$$2(4t'+2) - 2(-4t'+1) + 2t' + 3 = 0 \quad \Rightarrow 18t' + 5 = 0 \quad \Rightarrow t' = -\frac{5}{18}$$

da cui, sostituendo in r', si ha $P'\left(\frac{8}{9}; \frac{19}{9}; \frac{22}{9}\right)$.

Dunque la distanza tra r e r' è

$$\overline{PP'} = \sqrt{\left(-4 - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(-4 - \frac{19}{9}\right)^2 + \left(\frac{22}{9}\right)^2} = \frac{11}{3}\sqrt{5}$$

valore minimo di $\overline{PP'}$.

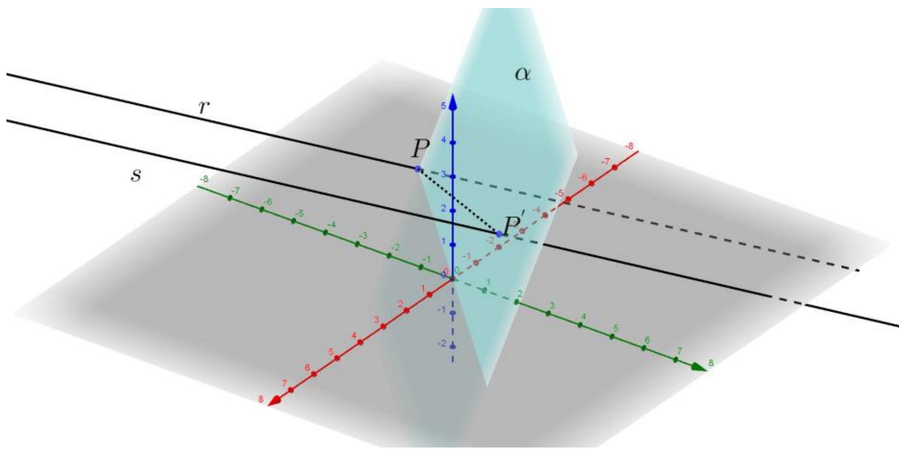


Fig. 2

2° metodo

Ricavando t' dalla terza equazione, si ha $r': \begin{cases} x = 2z - 4 \\ y = -2z + 7 \end{cases}$ perciò le due rette r e r' sono parallele perchè intersezioni di uno stesso piano con due piani tra loro paralleli.

Per calcolare la loro distanza prendiamo un punto fisso P su r e un punto variabile P' su r', la distanza tra r e r' è il minimo della distanza $\overline{PP'}$.

Siano $\mathrm{P}(-4; -4; 0) \in r$ e $\mathrm{P}'(4t' + 2; -4t' + 1; 2t' + 3)$ punto variabile su r'. Consideriamo la funzione

$$f(t') = \overline{PP'}^2 = (4t' + 6)^2 + (-4t' + 5)^2 + (2t' + 3)^2$$

Sia ha: $f'(t') = 8(4t' + 6) - 8(-4t' + 5) + 4(2t' + 3) = 0 \Longrightarrow t' = -\frac{5}{18}$

Perciò

$$\sqrt{f\left(-\frac{5}{18}\right)} = \sqrt{\left(-\frac{10}{9} + 6\right)^2 + \left(\frac{10}{9} + 5\right)^2 + \left(-\frac{5}{9} + 3\right)^2} = \frac{11}{3}\sqrt{5}$$

Esercizi

Dopo aver verificato che le rette r e r' sono parallele, calcolare la loro distanza:

43. $r: (-3t + 1; -t + 1; 2t - 1)$ $\quad r': \left(-\frac{3}{2}t'; -\frac{1}{2}t'; t' + 4\right)$

44. $r: (2t - 1; -t + 3; t)$ $\quad r': (4t' + 5; -2t'; 2t' - 5)$

45. $r: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases}$ $\quad r': \begin{cases} x + z = 0 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

46. $r: \begin{cases} x - y + 3z - 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ $\quad r': \begin{cases} 2y = 5x + 8 \\ 2z = x \end{cases}$

47. $r: \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -z + 4 \end{cases}$ $\quad r': \begin{cases} x = -2y + 6 \\ z = -y + 3 \end{cases}$

Distanza tra due rette sghembe

Date due rette r e s si definisce **distanza** tra le due rette il minimo delle distanze $\overline{HK}$ tra i punti $H \in r$ e quelli $K \in s$.

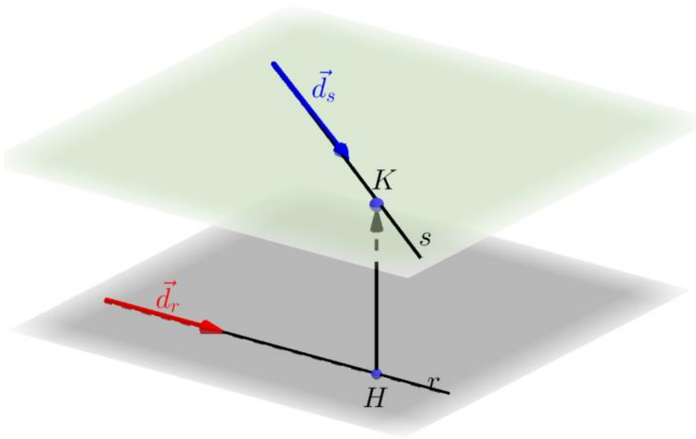


Fig. 3

Detti $\overrightarrow{d_r}$ e $\overrightarrow{d_s}$ i vettori direttori delle due rette per determinare la distanza $\overline{HK}$ basta prendere un punto H su r , un punto K su s e imporre che il vettore $\overrightarrow{HK}$ sia perpendicolare a entrambe le rette, cioè che siano nulli entrambi i prodotti scalari (vedi fig. 3) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{d_r} = 0 \\ \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{d_s} = 0 \end{cases}$$

■ Il problema della distanza tra rette sghembe viene affrontato nel capitolo delle funzioni in due variabili con i metodi dell’analisi.

Esempio

Dopo aver verificato che le rette

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda - 2 \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 2\mu - 1 \\ y = \mu \\ z = \mu - 1 \end{cases}$$

sono sghembe calcolarne la distanza $\overline{HK}$, cioè il minimo delle distanze tra i punti $H \in r$ e $K \in s$.

Le rette non sono parallele poiché non lo sono i loro vettori direzione

$$\vec{d_r} = (4; -1; 1) \quad \text{e} \quad \vec{d_s} = (2; 1; 1).$$

Non sono incidenti poiché il sistema per determinare se hanno un punto in

comune

$$\begin{cases} 4\lambda - 2 = 2\mu - 1 \\ -\lambda + 1 = \mu \\ \lambda = \mu - 1 \end{cases}$$

non ha soluzioni. Pertanto le rette sono sghembe.

Prendiamo un punto su ognuna delle due rette :

$H(4\lambda - 2; -\lambda + 1;\ \lambda)$ su r e $K(2\mu - 1; \mu;\ \mu - 1)$ su s

e sia

$\overrightarrow{HK} = (2\mu - 4\lambda + 1;\ \mu + \lambda - 1;\ \mu - \lambda - 1)$

Imponiamo la condizione di perpendicolarità :

$$\begin{cases} \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{d_r} = 0 \\ \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{d_s} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8\mu - 16\lambda + 4 - \mu - \lambda + 1 + \mu - \lambda - 1 = 0 \\ 4\mu - 8\lambda + 2 + \mu + \lambda - 1 + \mu - \lambda - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui $\begin{cases} 4\mu - 9\lambda + 2 = 0 \\ 3\mu - 4\lambda = 0 \end{cases}$ che ha come soluzione $\lambda = \frac{6}{11}$, $\mu = \frac{8}{11}$

Sostituendo si ha :

$$\overrightarrow{HK} = (\frac{3}{11}; \frac{3}{11}; -\frac{9}{11})$$

Pertanto la distanza è data da

$$\overline{HK} = \sqrt{\left(\frac{3}{11}\right)^2 + \left(\frac{3}{11}\right)^2 + \left(-\frac{9}{11}\right)^2} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$

Esercizi

Dopo aver verificato che le rette r e s sono sghembe calcolarne la distanza $\overline{HK}$:

48. $r: \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 1 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = -2h \\ y = 4h + 4 \\ z = 2h + 5 \end{cases}$

49. $r: \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = -t \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = h - 1 \\ y = 3h \\ z = h - 1 \end{cases}$

50. $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = h - 1 \\ y = 0 \\ z = h - 3 \end{cases}$

51. $r: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t + 5 \\ z = 5 + 3t \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = h \\ y = 2h - 1 \\ z = 5h - 2 \end{cases}$

52. $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda + 1 \\ z = 5\lambda + 3 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = \mu + 1 \\ y = 2\mu - 1 \\ z = \mu \end{cases}$

53. $r: \begin{cases} x = 4\lambda + 1 \\ y = -\lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 2\mu + 1 \\ z = 3\mu + 1 \end{cases}$

Esercizi di riepilogo

54. Dati tre punti A$(1; 1; 2)$, B$(0; -1; 0)$, C$(3; 0; 0)$ determinare:

a) l'equazione del piano passante per A,B,C;

b) il perimetro del triangolo ABC;

c) il baricentro del triangolo ABC;

d) la lunghezza della mediana relativa al lato AB

55. Tra gli infiniti piani passanti per A$(1;0;-2)$ (stella di piani di centro A) determinare:

a) l'equazione del piano parallelo al piano di equazione $3x+y+z+5=0$

b) l'equazione del piano che interseca il piano xy nei punti (1;0;0) e (0;-1;0)

*56. Tra gli infiniti piani passanti per A$(1;2;-2)$ (stella di piani di centro A) determinare:

a) il piano α contenente la retta $x=2y=4z$

b) il piano β parallelo ad α passante per $(-1;2;-1)$

c) la distanza tra α e β

*57. Dato il piano γ:$x-2y+3z-5=0$, determinare:

a) l'equazione del piano α passante per A(1;-2;3) e parallelo a γ

b) la distanza tra α e γ;

c) l'equazione del piano β passante per l'origine O e (0;1;−6) perpendicolare a γ

58. Scritta l'equazione della retta r passante per $P_1(1;3;-1)$ e per $P_2(0;-1;2)$ determinare:

a) il fascio di piani passanti per r e il piano del fascio passante per A(0;3;-4);

b) l'equazione del piano passante per A e perpendicolare a r.

*59. Dopo aver verificato che le due rette

$$\begin{cases} x-3y=0 \\ x+4z=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y-z=3 \\ 2x+3z=3 \end{cases}$$

sono incidenti e hanno in comune il punto $A(3;1;-1)$, determinare il piano che le contiene entrambe

60. Data la retta r: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ e il punto A $(-1; 2; -4)$ determinare:

a) l'equazione della retta *s* passante per A e parallela a r

b) l'equazione del piano α individuato da *r* e *s*;

*61. Dopo aver verificato che le due rette

r: $\begin{cases} x = 4y + z - 1 \\ y + z = 5 \end{cases}$ s: $\begin{cases} x = 3y - 1 \\ y = 2 - z \end{cases}$

sono parallele, determinare:

a) l'equazione del piano α che le contiene

b) la lunghezza del segmento AB, dette A e B le intersezioni di r rispettivamente con i piani xz e xy

Soluzioni

1.S. $2\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)$ **2. S**. C(-1;10;9)

***3.S**. C $\left(-3;\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$ ($C(-1-3t;2-t;4-4t)$, con 0<t<1, quindi

$\overline{AC}^2=4\overline{BC}^2 \Longrightarrow 9t^2+t^2+16t^2=4(26+26t^2-52t)\ldots\ldots$) (altrimenti : posto

$C(x;y;z)$, $\overrightarrow{AC}=(x+1;y-2;z-4)$, $\overrightarrow{CB}=(-4-x;1-y;-z)$, $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$ si traduce nel sistema : $\begin{cases} x+1=-8-2x \\ y-2=2-2y \\ z-4=-2z \end{cases}$ da cui C $\left(-3;\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$) ;

4. S. $\sqrt{5}+\frac{\sqrt{6}}{2}$

Retta per due punti

5. S. $x+1=y=\frac{2-z}{3}$; **6. S.** $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}$;

7. S. $\frac{x}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{2}$; **8. S.** $x-\frac{1}{3}=y+\frac{1}{3}=z-\frac{1}{3}$;

***9.S.** $\begin{cases} x=-2 \\ \frac{3-y}{2}=\frac{1-z}{3} \end{cases}$;(scritta l'equazione nella forma $\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t, \\ z=z_1+(z_2-z_1)t \end{cases}$ si ha $\begin{cases} x=-2 \\ y=3-2t \\ z=1-3t \end{cases}$

da cui $\begin{cases} x=-2 \\ t=\frac{3-y}{2} \\ t=\frac{1-z}{3} \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x=-2 \\ \frac{3-y}{2}=\frac{1-z}{3} \end{cases}$);

Retta per un punto e avente direzione data $\vec{d}$

10. S. $\begin{cases} x=-2t \\ y=1+t \\ z=-2+t \end{cases}$; **11. S.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=5-t \\ z=2 \end{cases}$;

12. S. $\begin{cases} x=-4-t \\ y=-t \\ z=1-t \end{cases}$; **13. S.** $\begin{cases} x=3+3t \\ y=7-2t \\ z=-5-t \end{cases}$;

14. S. $\begin{cases} x=0 \\ y=-2+t \\ z=-2-4t \end{cases}$ $\text{oppure}(0;-2+t;-2-4t)$;

15. S. $r\!:\begin{cases} x=4+2t' \\ y=-2-3t' \\ z=1-t' \end{cases}$; **16. S.** $r\!:\begin{cases} x=2t \\ y=-2-3t \\ z=-2-4t \end{cases}$;

17. S. $r\!:\left(3+t;-1+t;-4+\frac{t}{2}\right)$; **18. S.** $r\!:(7-t;5+t;-1+t)$; **19. S.** $r\!:\begin{cases} x=-1 \\ z=-2 \end{cases}$;

Retta per un punto e perpendicolare al piano α

20. S. $r: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$; **21. S.** $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -3 \end{cases}$; **22. S.** $r: \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$;

23. S. $r: \left(8 + 3t; \frac{3}{4} + 2t; -2 - t\right)$;

24.S. $r: (-3 + 2t; 1 - 5t; 3t)$;

Piano per tre punti

25. S. $\alpha: x - 2y + z = 0$; **26.S.** $\alpha: 3x + y + 2z - 2 = 0$;

27. S. $\alpha: 11x + 24y + 7z - 27 = 0$; **28. S.** $\alpha : 9x + 5y - 11z + 3 = 0$;

29. S. $\alpha: 6x + 2y + 5z + 2 = 0$;

Piano α passante per un punto e parallelo a un piano β dato

30.S. $\alpha: 3x - 2y + z - 1 = 0$; **31. S.** $\alpha: 4x + 4y - 8z - 19 = 0$;

32. S. $\alpha: 2x + 2y - 5z + 6 = 0$;

Piano passante per un punto e perpendicolare a una retta data

33.S. $\alpha: 2x - y + z - 4 = 0$; **34. S.** $\alpha: 3x + 2y - 4z + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = 0$;

***35. S.** $\alpha: x - y + 2z + 6 = 0$;(posto $x = t$, ricavando y e z in funzione di t , si ha la forma parametrica $r: \begin{cases} x = t \\ y = -t - \frac{1}{2} \\ z = 2t - \frac{3}{2} \end{cases}$, perciò $\vec{d} = (1, -1, 2)$ è il vettore direttore di r, perpendicolare al piano cercato la cui equazione è del tipo $x - y + 2z + h = 0$, imponendo il il passaggio per A…

Vedi fig. es. 35)

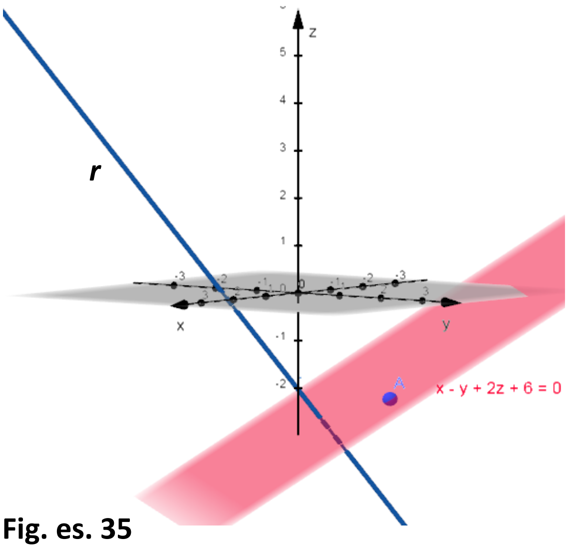
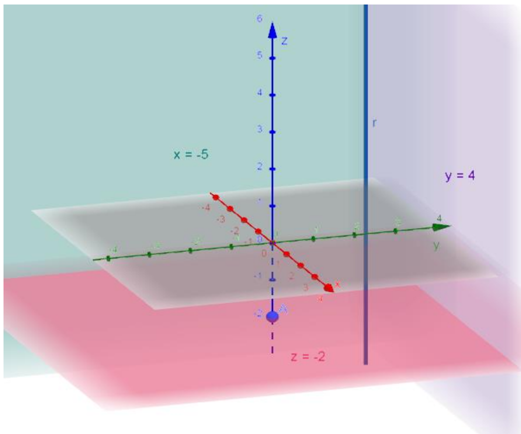


Fig. es. 35

***36. S.** $\alpha: z = -2$; (vedi fig. es. 36

Fig. es. 36



37. S. $\alpha: x - y + 3z - 7 = 0$;

Piano per un punto contenente una data retta

***38. S.** $\alpha: 3x + 14y - 5z - 3 = 0$; (determinare due punti sulla retta e poi trovare il piano per tre punti, oppure scrivere l'equazione del fascio di piani che ha per asse r e imporre il passaggio per A);

39.S. $\alpha: 7x + 6y + 4z + 15 = 0$;

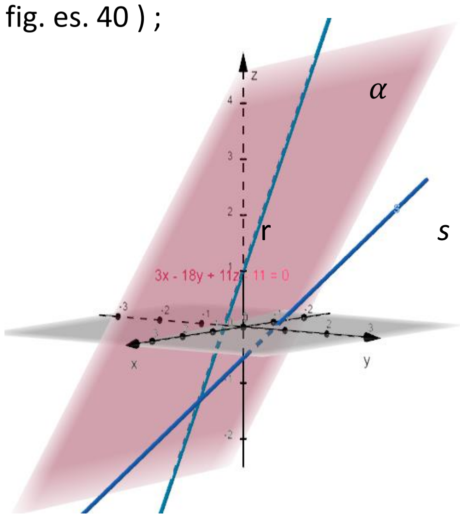
***40. S.** $\alpha: 3x - 18y + 11z - 11 = 0$;($s: \begin{cases} x = -5t + 1 \\ y = t \\ z = 3t - 1 \end{cases}$ il vettore direttore di s : $\overrightarrow{d_s} = (-5; 1; 3)$,

sia β il fascio di piani che ha per asse r : $\beta: x - 2y + z - 1 + k(2x - y) = 0$, cioè

$\beta: (1 + 2k)x + (-2 - k)y + z - 1 = 0$ di vettore $\vec{n} = (1 + 2k; -2 - k; 1)$ normale a β, deve essere $\overrightarrow{d_s} \cdot \vec{n} = -5(1 + 2k) - 2 - k + 3 = 0 \Rightarrow k = -\frac{4}{11}$, da cui:

$\alpha: 3x - 18y + 11z - 11 = 0$, vedi fig. es. 40) ;

Fig. es. 40



***41.S.** $\alpha: x - z - 5 = 0$; ($\overrightarrow{d_r} = (-1; 0; 1)$, $-x + z + k = 0$, passaggio per A per $k = 5$)

***42.S.** $\alpha: 2x + y - 3z + 5 = 0$

($r: \begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = t \\ z = -3t + 10 \end{cases}$ $\overrightarrow{d_r} = (2; 1; -3) \Rightarrow \alpha: 2(x-1) + y + 1 - 3(z-2) = 0$) ;

Distanza tra due rette parallele

43.S. $\sqrt{13}$; **44. S.** $4\sqrt{\frac{10}{3}}$; **45. S.** $\sqrt{\frac{15}{2}}$; **46. S.** $\sqrt{\frac{43}{15}}$; **47. S.** $\sqrt{\frac{1}{2}}$;

Distanza tra rette sghembe

48. S. $\overline{HK} = \sqrt{3}$ $\left(t = -2; h = -\frac{3}{2}\right)$; **49. S.** $\overline{HK} = \frac{7\sqrt{2}}{5}$; $\left(t = -\frac{19}{25}, h = \frac{9}{25}\right)$;

50. S. $\overline{HK} = \frac{2}{\sqrt{11}}$ $\left(t = \frac{6}{11}; h = \frac{14}{11}\right)$; **51. S.** $\overline{HK} = \sqrt{\frac{392}{37}}$ $\left(t = -\frac{52}{37}; h = \frac{29}{37}\right)$;

52. S. $\overline{HK} = 2\sqrt{\frac{6}{11}}$; $\left(\lambda = -\frac{8}{11}; \mu = -\frac{5}{11}\right)$; **53. S.** $\overline{HK} = \frac{1}{3}$; $\left(\lambda = -\frac{26}{45}; \mu = -\frac{3}{5}\right)$;

Esercizi di riepilogo

54. S. a) $2x - 6y + 5z - 6 = 0; b)$ $6 + \sqrt{10}$; c) $\left(\frac{4}{3}; 0; \frac{2}{3}\right)$; d) $\frac{\sqrt{29}}{2}$;

55. S. a) $3x + y + z - 1 = 0; b) x - y - 1 = 0$;

***56. S.** a) α: $2x - 3y - 2z = 0$; (il piano α contiene la retta se passa per due suoi punti qualsiasi per esempio $O(0; 0; 0)$ e $B(4; 2; 1)$, quindi il piano α passa per A, O, B ....);

$b) \beta$: $2x - 3y - 2z + 6 = 0$; $c)$ $\frac{6}{\sqrt{17}}$ (la distanza cercata è la distanza di O dal piano β :

$\frac{|6|}{\sqrt{4+9+4}} = \frac{6}{\sqrt{17}}$);

***57. S.** a) α: $x - 2y + 3z - 14 = 0$ $b)$ $\frac{9}{\sqrt{14}}$; $c)$ β: $9x + 6y + z = 0$ (il β piano passa per l'origine pertanto ha equazione del tipo $ax + by + cz = 0$ e un suo vettore normale è $\overrightarrow{n_\beta} = (a; b; c)$ il piano γ ha vettore normale $\overrightarrow{n_\gamma} = (1; -2; 3)$, la condizione di perpendicolarità tra i due piani consiste nell'annullare il prodotto scalare dei due vettori normali :

$\overrightarrow{n_\beta} \cdot \overrightarrow{n_\gamma} = a - 2b + 3c = 0 \ldots$);

58. S. $r\begin{cases} 3x = -z + 2 \\ 3y = -4x + 5 \end{cases}$; a) $6x - 3y - 2z + 1 = 0$; b) $x + 4y - 3z - 24 = 0$;

***59. S.** $7x + 15y + 48z + 12 = 0$; (per determinare il piano che contiene entrambe le rette basta determinare il piano passante per A e per altri due punti uno su una delle due rette e un altro sull'altra);

60. S. a) $(3x = z + 1;\ y = -x + 1)$; b) $x - 2y - z + 1 = 0$;

***61. S.** a) α: $3x - 14y - 5z + 13 = 0$ $b)$ $5\sqrt{11}$; (per verificare che le due rette sono parallele si scrivono le loro equazioni in forma parametrica e si verifica che il loro vettori direzione sono paralleli, oppure , scritta la retta r nella forma r: $\begin{cases} x = 3y + 4 \\ y = 5 - z \end{cases}$ e constatare che le rette r e s: $\begin{cases} x = 3y - 1 \\ y = 2 - z \end{cases}$ sono intersezione di piani a due a due paralleli);