6. Esercizi di riepilogo

*1. $\int\left(arcsinx + \sqrt{1-x^2}\right)dx$

2. $\int \frac{2x+x^3}{6x-x^2-5}dx$

*3. $\int \frac{1}{sin^2x(tgx+2)}dx$

*4. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

*5. $\int cos^3 2x \cdot sin2xdx$

6. $\int \sqrt{tgx}\,(1+tg^2x)dx$

7. $\int \frac{x-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$

8. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx$

*9. $\int \frac{arctge^x}{e^{-x}+e^x}dx$

*10. $\int xe^{\sqrt{x}}dx$

*11. $\int sinx \cdot cosx \cdot e^{2x}dx$

12. $\int \frac{1}{xlog^2(2x)}dx$

*13. $\int \frac{\cos(6x)}{sin^2(3x)\cdot cos^2(3x)}dx$

14. $\int \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}dx$

* 15. $\int x^2log(1-x^2)dx$

*16. $\int \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x+1}dx$

*17. $\int\left(\frac{1}{x(logx+2)^2}+log\sqrt{x}\right)dx$

18. $\int xlog(2x+1)dx$

19. $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx$

*20. $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx$

* 21. $\int \frac{cosx}{1+cos^2x}dx$

* 22. $\int sinx \cdot cos3x\, dx$

*23. $\int x^2log(x+1)dx$

*24. $\int x^2arctgxdx$

*25. $\int x \cdot arctg\sqrt{x}\, dx$

*26. $\int sin^2x \cdot cos^2xdx$

*27. $\int sin^3x \cdot cos^4xdx$

*28. $\int sin(3x) \cdot cosx\, dx$

*29. $\int tg^3x\, dx$

*30. $\int sin^5x\, dx$

31. $\int \frac{x^3-x^2+x-3}{6-7x+x^2}dx$

*32. $\int \frac{1}{e^{-x}+1}dx$

*33. $\int \frac{e^{2x+2}}{e^x-e^{2x}}dx$

*34. $\int \frac{x(e^{x^2}+1)}{e^{x^2}+x^2+1}dx$

*35. $\int \frac{1}{\sqrt{8-x^2}}dx$

*36. $\int \sqrt{8-x^2}\, dx$

*37. $\int \frac{1}{\sqrt{8+x^2}}dx$

*38. $\int \sqrt{8+x^2}\, dx$

*39. $\int \frac{1}{x(log^2x-1)}dx$

*40. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}dx$

*41. $\int \frac{sin^3x}{1-cosx}dx$

*42. $\int \frac{cos^2x}{sin^3x}dx$

*43. $\int(\sqrt{3+4x^2}\ -2x)dx$

*44. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x}-x}dx$

*45. $\int \frac{1}{4sinx-3cosx}dx$

*46. $\int \frac{1}{x^3+1}dx$

Soluzioni

***1. S**. (vedi par.5 es. 2, esempio 4, par.4 es.53) $\frac{1}{2}\left[(2x+1)arcsinx+(x+2)\sqrt{1-x^2}\right]+c;$

2. S. $-\frac{1}{2}x(x+12)-\frac{135}{4}log|x-5|+\frac{3}{4}log|x-1|+c;$

***3. S.** posto $tgx=t\ \ si\ ha\ x=arctgt$ $,dx=\frac{1}{1+t^2},sin^2x=\frac{t^2}{1+t^2}$,sostituendo nell'integrale e semplificando

$\int\frac{1}{t^2(t+2)}dt=\frac{1}{4}\int\frac{-t+2}{t^2}dt+\frac{1}{4}\int\frac{1}{t+2}dt=-\frac{1}{4}log|t|-\frac{1}{2t}+\frac{1}{4}log|2+t|+c,$ quindi

$\int\frac{1}{sin^2x(tgx+2)}dx=-\frac{log|tgx|}{4}+\frac{log|2+tgx|}{4}-\frac{1}{2tgx}+c;$

***4.S.** $2\sqrt{x+1}+2log\left|\sqrt{x+1}-1\right|-logx+c$; (porre $\sqrt{x+1}=t$);

***5. S.** $\int cos^3 2x\cdot sin2xdx=-\frac{1}{2}\int cos^3 2x\cdot(-2sin2x)dx=-\frac{cos^4 2x}{8}+c;$

6. S. $\frac{2tgx\sqrt{tgx}}{3}+c$; **7. S.** $\frac{2}{3}\left[x\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x^3}\right]+c;$ **8. S.** $log\sqrt{|e^{2x}-1|}+c;$

***9. S.** $\int\frac{arctge^x}{e^{-x}+e^x}dx=\int\frac{arctge^x}{1+e^{2x}}\ e^x\ dx=(posto\ e^x=t\ldots\ )=\frac{arctg^2e^x}{2}+c;$

***10. S.** $2e^{\sqrt{x}}\left(x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-6\right)+c;$ (porre $\sqrt{x}=t$, si ottiene l'integrale $2\int t^3\ e^t dt$ ... integrare due volte per parti par. 5 es. 18) ;

***11 S.** $\int sinx\cdot cosx\cdot e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int sin2x\cdot e^{2x}dx=\cdots$ (integrare per parti) $=$

$=\frac{e^{2x}}{8}(sin(2x)-cos(2x))+c$;

12. S. $-\frac{1}{log2x}+c;$

***13. S.** $\int\frac{\cos(6x)}{sin^2(3x)\cdot cos^2(3x)}dx=\int\frac{\cos(6x)}{\frac{1}{4}sin^2(6x)}dx==\frac{2}{3}\int\frac{6\cos(6x)}{sin^2(6x)}dx....=-\frac{2}{3sin6x}+c$;

14. S. $2\left[\frac{x\sqrt{x}}{3}-\frac{3x}{2}+6\sqrt{x}-12log\left(\sqrt{x}+2\right)\right]+c;$

***15.S.** integrando per parti $\int x^2log(1-x^2)dx=\frac{x^3}{3}log(1-x^2)-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{-2x}{1-x^2}dx=$

$=\frac{x^3}{3}log(1-x^2)-\frac{2}{3}\int\frac{x^4-1+1}{x^2-1}dx=\frac{x^3}{3}log(1-x^2)-\frac{2}{3}\int(x^2+1)dx-\frac{2}{3}\int\frac{1}{x^2-1}dx=\cdots=$

$=\frac{x^3}{3}log(1-x^2)-\frac{2x^3}{9}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}log\left|\frac{x+1}{1-x}\right|+c;$

***16.S.** $\int\frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx+\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int(e^x-1)dx+\ log(e^x+1)=$
$=e^x-x+log(e^x+1)+c$;

***17.S.** $\int\left(\frac{1}{x(logx+2)^2}+log\sqrt{x}\right)dx=\int\frac{1}{x(logx+2)^2}dx+\frac{1}{2}\int logxdx=$
(il 1° integrale è immediato , il 2° per parti($par.5\ es.1$)) $=-\frac{1}{logx+2}+xlog\sqrt{x}-\frac{x}{2}+c$;

18.S. $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}\right)log(2x+1)-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x+c;$ **19.S**. $\log\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+c;$

***20.S.**Posto $\sqrt{x-2}=t \ \rightarrow x-2=t^2 \rightarrow dx=2tdt,$ si ha $\int \frac{t^2+2}{t}\cdot 2tdt=$

$\cdots..da\ cui\ \int \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx = \frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x-2}+c;$

***21. S.**$\int \frac{cosx}{1+cos^2x}dx=\int \frac{cosx}{2-sin^2x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{cosx}{1-\left(\frac{sinx}{\sqrt{2}}\right)^2}dx$, posto $\frac{sinx}{\sqrt{2}}=t \ \rightarrow cosxdx=\sqrt{2}dt$ si ha $=$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{1-t^2}dt=-\frac{\sqrt{2}}{4}log\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+c\ perciò\ \int \frac{cosx}{1+cos^2x}dx=-\frac{\sqrt{2}}{4}log\left|\frac{\sqrt{2}-sinx}{sinx+\sqrt{2}}\right|+c;$

***22.S**. ricordando le formule di Werner, si ha $sinx\cdot cos3x=\frac{1}{2}(\sin(x+3x)-\sin(3x-x))$

quindi $\int sinx\cdot cos3x\ dx$=$\frac{1}{2}\int(sin4x-sin2x)dx=-\frac{cos4x}{8}+\frac{cos2x}{4}+c$;

***23 S**. integrando per parti e sviluppando si ricava:

$\int x^2log(x+1)dx$ =$\frac{x^3}{3}\log(x+1)-\frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x+1}dx=\frac{x^3}{3}\log(x+1)-\frac{1}{3}\int \frac{x^3+1-1}{x+1}dx=\cdots=$

$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\right)log(x+1)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{1}{3}x+c;$

***24.S.** $\frac{x^3}{3}arctgx+\frac{1}{6}log(x^2+1)-\frac{x^2}{6}+c$; (per parti ponendo $f'(x)=x^2$ e $g(x)=arctgx$);

***25. S.** $\frac{1}{2}(x^2-1)arctg\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}(x-3)}{6}+c$; (porre $\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2 \Rightarrow dx=2tdt$ e poi per parti);

***26. S.** $\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}sin4x\right)+c$; $(sin^2x\cdot cos^2x=\frac{1}{4}sin^2 2x=\frac{1-cos4x}{8}$) ;

***27. S.** $-\frac{1}{5}cos^5x+\frac{1}{7}cos^7x+c$; ($sin^3x\cdot cos^4x=sinx\cdot sin^2x\cdot cos^4x=$

$=sinx\cdot(1-cos^2x)\cdot cos^4x=sinx\cdot cos^4x-sinx\cdot cos^6x$ ...);

***28. S.** $-\frac{cos4x}{8}-\frac{cos2x}{4}+c$; (trasformare la funzione integranda mediante le formule di Werner);

***29. S.** $\frac{1}{2}tg^2x-\frac{1}{2}log(1+tg^2x)+c$; (1° metodo: porre $tgx=t \ \Rightarrow \ x=arctgt \ \Rightarrow$

$dx=\frac{1}{1+t^2}dt$ pertanto $\int \frac{t^3}{1+t^2}dt=\int\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}log(1+t^2)+c$,

quindi risulta $\int tg^3x\,dx=\frac{1}{2}tg^2x-\frac{1}{2}log(1+tg^2x)+c;$

2° metodo : $\int tg^3x\,dx=\int \frac{sin^3x}{cos^3x}dx=\int \frac{sinx\cdot(1-cos^2x)}{cos^3x}dx=\int \frac{sinx}{cos^3x}dx+\int \frac{-sinx}{cosx}dx=$

$=-\frac{1}{2cos^2x}+log|cosx|+c$; i due risultati coincidono a meno di una costante additiva);

***30. S.** $-cosx-\frac{1}{5}cos^5x+\frac{2}{3}cos^3x+c$; $(sin^5x=sinx\cdot sin^4x=sinx\cdot(1-cos^2x)^2$ ...);

31. S. $\frac{x^2}{2}+6x+\frac{1}{5}[183log|x-6|+2log|x-1|]+c;$

***32. S.** $\log(e^x+1)+c$; $(\int \frac{1}{e^{-x}+1}dx=\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ =....) ;

***33. S.** - $e^2log|1-e^x|$+c ; ($\int \frac{e^{2x+2}}{e^x-e^{2x}}dx=e^2\int \frac{e^{2x}}{e^x(1-e^x)}dx=\cdots$);

***34. S.** $\frac{1}{2}\log\left(e^{x^2}+x^2+1\right)+c$; ($\int\frac{x(e^{x^2}+1)}{e^{x^2}+x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x(e^{x^2}+1)}{e^{x^2}+x^2+1}dx$ =....) ;

***35. S**. $arcsin\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)+c$; ($\int\frac{1}{\sqrt{8-x^2}}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2}}dx=\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2}}dx=\cdots$);

***36. S.** $\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2}+4arcsin\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)+c$;

(1° metodo : per parti ponendo $f'(x)=1,\ g(x)=\sqrt{8-x^2}\Rightarrow f(x)=x,g'(x)=-\frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$

$\int\sqrt{8-x^2}\,dx\ =x\sqrt{8-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{8-x^2}}dx=\cdots$ si veda l'esempio 4 del par. 5 integrazione per parti ;

2° metodo : per sostituzione ponendo $x=2\sqrt{2}sint\ \Rightarrow\ dx=2\sqrt{2}cost\,dt$,

$\sqrt{8-x^2}=\sqrt{8-8sin^2t}=2\sqrt{2}cost$ … si veda nel par. 4 l'esempio relativo alle sostituzioni con funzioni goniometriche);

***37. S.**$-\log(\sqrt{8+x^2}-x)+c$; (porre $\sqrt{8+x^2}=x+t\ \Rightarrow\ x=\frac{8-t^2}{2t}\ \Rightarrow\ dx=-\frac{t^2+8}{2t^2}$ si ha

$-\int\frac{1}{\frac{t^2+8}{2t}}\frac{t^2+8}{2t^2}dt=-\int\frac{1}{t}dt=-logt+c$, pertanto :

$\int\frac{1}{\sqrt{8+x^2}}dx=\ -log\left(\sqrt{8+x^2}-x\right)+c$) ;

***38. S.**$\frac{x}{2}\sqrt{8+x^2}-4log(\sqrt{8+x^2}-x)+c$; (si può procedere in due modi :

1° metodo : per parti ponendo $f'(x)=1,g(x)=\sqrt{8+x^2}\ \Rightarrow f(x)=x,g'(x)=\frac{x}{\sqrt{8+x^2}}$

$\int\sqrt{8+x^2}\,dx=x\sqrt{8+x^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{8+x^2}}dx=x\sqrt{8+x^2}-\int\frac{x^2+8-8}{\sqrt{8+x^2}}dx=$

$=x\sqrt{8+x^2}-\int\sqrt{8+x^2}dx+8\int\frac{1}{\sqrt{8+x^2}}dx$

per l'ultimo integrale si veda l'es. 37 precedente …;

2° metodo: si veda il par. 4, sostituzioni con le funzioni iperboliche : si pone

$x=2\sqrt{2}sinht\ \ \Rightarrow dx=2\sqrt{2}cosht$ e poiché $1+sinh^2t=cosh^2t$, si ha

$8\int cosh^2t\,dt=8\int\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2dt$ …) ;

***39. S.** $\frac{1}{2}log\ (\left|\frac{logx-1}{logx+1}\right|+c$; (porre $logx=t\ \Rightarrow\ \frac{1}{x}dx=dt$ da cui

$\int\frac{1}{t^2-1}dt=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$) ;

***40. S.** $-x-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-6\log\left|-1+\sqrt[6]{x}\right|+c$; (porre $\sqrt[6]{x}=t$

$x=t^6\ \ \Rightarrow\ \ dx=6t^5dt\ \ \Rightarrow\ 6\int\frac{t^3}{t^2-t^3}\cdot t^5dt$ …);

***41. S**. $-\frac{(1+cosx)^2}{2}+c$; $\left(\frac{sin^2x\cdot sinx}{1-cosx}=\frac{(1-cos^2x)\cdot sinx}{1-cosx}=(1+cosx)\cdot sinx\right)$;

***42. S.** $-\frac{cosx}{2sin^2x}-\frac{1}{2}log\left|tg\frac{x}{2}\right|+c$; ($\frac{cos^2x}{sin^3x}=cosx\cdot\frac{cosx}{sin^3x}$ per parti ponendo $f'(x)=\frac{cosx}{sin^3x}$ e

$g(x)=cosx \;\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2sin^2x}$, $g'(x)=-sinx$, pertanto :

$\int\frac{cos^2x}{sin^3x}dx==-\frac{cosx}{2sin^2x}-\frac{1}{2}\int\frac{sinx}{sin^2x}dx=-\frac{cosx}{2sin^2x}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{sinx}dx$, si ha :

$\int\frac{1}{sinx}dx=\int\frac{sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}}{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}dx=\cdots$);

***43. S.**$\frac{3}{4}log\left(\sqrt{3+4x^2}+2x\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{3+4x^2}-x^2+c$; ($\sqrt{3+4x^2}=2x+t$ ...);

***44. S.** $\frac{1}{2\left(2\sqrt{x^2-x}-2x+1\right)}-\frac{1}{2}log\left|2\sqrt{x^2-x}-2x+1\right|+c$;

(porre $\sqrt{x^2-x}=x+t$ .... $-2\int\frac{t+1}{(2t+1)^2}dt=..=\frac{1}{2(2t+1)}-\frac{1}{2}log|2t+1|+c$);

***45. S.** $\frac{1}{5}log\left|\frac{3tg\frac{x}{2}-1}{tg\frac{x}{2}+3}\right|$+c ; (trasformare in $tg\frac{x}{2}$ porre $t=tg\frac{x}{2}$, vedi par. 4 , sostituzioni , ...);

***46. S.** $\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c$; ($\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$,

risulta $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$ ...) ;