7. Differenziale – Calcolo approssimato

Sia f una funzione derivabile in un intervallo $(a; b)$ e siano x_0 e $x_0 + \Delta x$ due punti di $(a; b)$.

Definizione
Si dice **differenziale** della funzione f relativo al punto x_0 la funzione lineare:

$$df: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \to \Delta x \to f'(x_0)\Delta x$$

che associa all'incremento Δx della variabile x il prodotto della derivata della funzione f calcolata nel punto x_0 per l'incremento Δx.

Il differenziale $f'(x_0)\Delta x$ viene indicato anche con i simboli:

df oppure df

Proprietà fondamentali dei differenziali :

a) $dc = 0$ se c è una costante
b) $dx = \Delta x$ se x è la variabile indipendente
c) $d(cf) = cdf$
d) $d\,(f \pm g) = df \pm dg$
e) $d(f \cdot g) = gdf + fdg$
f) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2} \quad (g \neq 0)$
g) $df(g) = f'(g)dg$

Esercizi

Calcolare il differenziale delle seguenti funzioni relativo al punto x_0 a fianco indicato:

1) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2x \qquad x_0 = 0$

2) $f(x) = \frac{1-x^2}{x} \qquad x_0 = 2$

3) $f(x) = sin^2x + cosx \qquad x_0 = \frac{\pi}{4}$

4) $f(x) = \log(-x+2) \qquad x_0 = -1$

5) $f(x) = arctg(x^2 - 1) \qquad x_0 = 1$

6) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad x_0 = 0$

7) $f(x) = e^{sinx} \qquad x_0 = 0$

8) $f(x) = e^{-x^2} \qquad x_0 = -1$

Approssimazione lineare di una funzione

L'incremento Δf della funzione $f(x)$ dovuto all'incremento Δx differisce dal differenziale df di un infinitesimo o(Δx) di ordine superiore rispetto a Δx , quindi possiamo scrivere

$$\Delta f = df + o(\Delta x)$$

cioè

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

In definitiva, se $x = x_0 + \Delta x$ è vicino a x_0, cioè per Δx "piccolo" , vale la seguente ***approssimazione lineare*** *di f:*

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Esempi di approssimazioni lineari di $f(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

	$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$	$(1-x)^\alpha \simeq 1 - \alpha x$
$\alpha=-1$	$\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x$	$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x$
$\alpha=-2$	$\frac{1}{(1+x)^2} \simeq 1 - 2x$	$\frac{1}{(1-x)^2} \simeq 1 + 2x$
$\alpha=\frac{1}{2}$	$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$	$\sqrt{1-x} \simeq 1 - \frac{1}{2}x$
$\alpha=-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \simeq 1 - \frac{1}{2}x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$
$\alpha=\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{3}x$	$\sqrt[3]{1-x} \simeq 1 - \frac{1}{3}x$

$\sin(\alpha x) \simeq \alpha x$	$\cos(\alpha x) \simeq 1 - \frac{1}{2}(\alpha x)^2$	$tg(\alpha x) \simeq \alpha x$
$\log(1+\alpha x) \simeq \alpha x$	$e^{\alpha x} \simeq 1 + \alpha x$	$10^{\alpha x} \simeq 1 + \alpha x log 10$
$\arcsin(\alpha x) \simeq \alpha x$	$arccos(\alpha x) = \frac{\pi}{2} - \alpha x$	$arctg(\alpha x) \simeq \alpha x$

Esempi

a) *Calcolare un valore approssimato di*

$$\log(1{,}4).$$

Considerata la funzione $f(x) = logx$ la cui derivata è $Dlogx = \frac{1}{x}$, si ha :

$$x = 1{,}4 \qquad x_0 = 1 \qquad \Delta x = 0{,}4 \qquad \frac{1}{x_0} = 1$$

quindi:

$$\log(1{,}4) = \log(1 + 0{,}4) \cong \ log1 + 1 \cdot 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \log(1{,}4) \cong 0{,}4$$

b) *Calcolare un valore approssimato di* $\sqrt[3]{1{,}06}$ e $\frac{1}{0{,}98}$

Dalla tabella si ha che :

$\sqrt[3]{1{,}06} = \sqrt[3]{1 + 0{,}06} \cong 1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}06 = 1{,}02$; $\frac{1}{0{,}98} = \frac{1}{1-0{,}02} \cong 1 + 0{,}02$ =1,02

Esercizi

Calcolare i valori approssimati di :

9) $\sqrt{1{,}06}$ 10) $e^{0{,}02}$ 11) $\frac{1}{1{,}07}$ 12) $\sin(0{,}03)$

13) $\log(1{,}04)$ 14) $\cos(0{,}06)$ 15) $\frac{1}{1{,}03^2}$ 16) $\log(0.8)$ 17) $e^{-0{,}02}$

17) $e^{-0{,}02}$

Soluzioni

1. S. $df = -\frac{3}{2}dx$; **2. S.** $df = -\frac{5}{4}dx$; **3. S.** $df = \frac{2-\sqrt{2}}{2}dx$; **4. S.** $df = -\frac{1}{3}dx$;

5. S. $df = 2dx$; **6. S.** $df = dx$; **7. S.** $df = dx$; **8. S.** $df = 2e^{-1}dx$;

9. S. 1,03 ; **10.S.** 1,02 ; **11. S.** 0,93; **12. S.** 0,03 ; **13. S.** 0,04 ; **14. S.** 0,99 ; **15. S.** 0,94 ;

16. S. $-0{,}2$; **17. S.** 0,98 ;