2. Serie geometriche

Serie geometrica, di ragione q, è la serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots$$

La serie è:

a) **convergente** se $-1 < q < 1$ e ha somma
$$S = \frac{1}{1-q}$$
b) **divergente** a $+\infty$ se $q \geq 1$
c) **indeterminata o irregolare** se $q \leq -1$

Si osservi che se il primo valore di k è 1, allora si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

e se $|q| < 1$ ha somma

$$S = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}$$

Esempi

Stabilire il carattere delle seguenti serie geometriche e, nel caso siano convergenti,

calcolarne la somma S :

1) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{\pi}{4}\right)^k$ è una serie geometrica con $a_1 = -\frac{\pi}{4}$ e ragione $q = -\frac{\pi}{4} \in (-1; 1)$, quindi converge e ha somma $S = -\frac{\pi}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{\pi}{4+\pi}$

2) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt{3}-3\right)^k$ è una serie geometrica con $a_0 = 1$ e ragione$q = \sqrt{3} - 3 < -1$, quindi è irregolare o indeterminata.

3)) $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt[4]{(x+1)^k}$ è una serie geometrica con $a_0 = 1$ e ragione $q = \sqrt[4]{x+1}$. La serie è convergente se $-1 < \sqrt[4]{x+1} < 1 \Rightarrow -1 \leq x < 0$ e ha somma $S = \frac{1}{1-\sqrt[4]{x+1}}$; se $x \geq 0$ la serie diverge positivamente.

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

Stabilire il carattere delle seguenti serie geometriche e, nel caso siano convergenti, calcolarne la somma S :

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$

2. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$

*3. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k$;

*4. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}$

*5. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}$

6. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right)^k$

7. $\sum_{k=0}^{\infty}(e)^{-k}$

8. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(tg\,\frac{\pi}{6}\right)^k$

*9. $\sum_{k=0}^{\infty}(1-log2)^k$

10. $\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2k}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{10^k}$

12. $\sum_{k=0}^{\infty}(3-\pi)^k$

13. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{(e+2)^k}$

14. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt{3}-\pi\right)^k$

*15. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{5^k}$

16. $\sum_{k=0}^{\infty}\left[log\left(\frac{3}{4}\right)\right]^k$

*17. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k+4^k}{6^k}$

18. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k$

*19. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-2^k}{8^k}$

20. $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{e^2-1}\right]^k$

21. $\sum_{k=0}^{\infty}\left[arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right]^k$

*22. $\sum_{k=0}^{\infty}[sin2-cos3]^k$

*23. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(arctg(-3)\right)^k$

24. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}-1\right)^{-k}$

Determinare per quali valori del parametro reale la serie data è convergente, divergente, indeterminata o irregolare; nel caso della convergenza calcolare la somma S :

25. $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)^k$

26. $\sum_{k=0}^{\infty}(4+x)^k$

27. $\sum_{k=0}^{\infty}(x^2+2)^k$

28. $\sum_{k=0}^{\infty}(x^2-2x)^k$

29. $\sum_{k=0}^{\infty}(1+x)^{2k}$

30. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k$

31. $\sum_{k=0}^{\infty}(1+e^x)^k$

32. $\sum_{k=0}^{\infty}(2+\log x)^k$

33. $\sum_{k=0}^{\infty}[1+logx]^k$

34. $\sum_{k=0}^{\infty}(1-2^x)^k$

35. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kx}$

36. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^k}{3^k}\right)^x$

37. $\sum_{k=0}^{\infty}(2+|x|)^k$

38. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+|x|}\right)^k$

39. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt{1-x}-3\right)^k$

40. $\sum_{k=0}^{\infty}[arctgx+1]^k$

41. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^x}{2^x-1}\right)^k$

*42. $\sum_{k=0}^{\infty}(arccosx)^k$

43. $\sum_{k=0}^{\infty}(2-|x+3|)^k$

44. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+2a}{3}\right)^k$

45. $\sum_{k=0}^{\infty}(p^2-4)^k$,

Soluzioni

1. S. S = 3; **2. S.** $S = 4$;

***3.S** $S = 5$; ($\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k - 1 = 5$);

***4. S**. S= $\frac{1}{8}$; ($\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k - 1 \ldots$);

***5.S.** S= $\frac{1}{20}$; ($\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k - 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \cdots$);

6. S. $S = \sqrt{2} + 1$; **7. S.** S = $\frac{e}{e-1}$; **8. S.** $S = \frac{\sqrt{3}+3}{2}$;

***9. S.** S = $\log_2 e$; (ricordiamo che $\frac{1}{log2} = log_2 e$);

10. S. $S = \frac{e^2}{e^2-1}$; **11. S.** S = $\frac{2}{9}$; **12. S.** S= $\frac{1}{\pi-2}$;

13. S. S = $\frac{e+2}{e-1}$; **14. S.** irregolare ;

***15. S.** S= $\frac{5}{6}$; (poichè $cos(k\pi) = \begin{cases} 1 \ se\ k \text{ è } pari \\ -1 \ se\ k \text{ è } dispari \end{cases}$ la serie coincide con la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^k}$);

16. S. $S = \frac{1}{1-log\left(\frac{3}{4}\right)}$;

***17. S.** S = 5 ; (la serie è la somma delle due serie geometriche $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

entrambe convergenti di somme rispettive 2 e 3 , quindi anche la serie data è convergente e ha per somma $S = 2 + 3 = 5$, vedi paragrafo 4.Combinazioni lineari di due serie);

18. S. $S = -\frac{2}{5}$;

***19. S.** S = $-\frac{4}{21}$; (vedi esercizio 17);

20. S. $S = \frac{e^2-1}{e^2-2}$; **21. S.** $S = \frac{6}{6-\pi}$;

***22. S.** diverge a $+\infty$; (poiché la ragione è $q = sin2 - cos3 \cong 0{,}90 - (-0{,}99) = 1{,}88 > 1$ la serie diverge a $+\infty$);

***23. S.** irregolare ; (poiché la ragione è $q = arctg(-3) \cong -1{,}25 < -1$ la serie è irregolare);

24. S. irregolare ;

25. S. converge per $0 < x < 2$ con somma $S = \frac{1}{x}$; diverge positivamente per $x \leq 0$; indeterminata per$x \geq 2$;

26. S. converge per $-5 < x < -3$ con somma $S = \frac{1}{-3-x}$; diverge positivamente per $x \geq -3$; indeterminata per$x \leq -5$;

27. S. $\forall x \in \mathbb{R}$ divergente a $+\infty$;

28. S. $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2} \wedge x \neq 1$ converge con somma $S=\frac{1}{1-x^2+2x}$; $x=1$ irregolare ;

$x \leq 1-\sqrt{2} \vee x \geq 1+\sqrt{2}$ diverge positivamente;

29. S. converge per $-2<x<0$ con somma $S=\frac{1}{1-(1+x)^2}$;

diverge positivamente per $x \leq -2 \vee x \geq 0$;

30. S. $x>0$ converge con somma $S=\frac{x+1}{2x}$; $-1<x \leq 0$ diverge positivamente ;

$x<-1$ irregolare ;

31. S. diverge positivamente $\forall x$;

32. S. converge per $e^{-3}<x<e^{-1}$ con somma $S=\frac{1}{-1-logx}$;

diverge positivamente per $x \geq e^{-1}$; indeterminata per 0< $x \leq e^{-3}$;

33. S. $e^{-2}<x<1$ converge con somma $S=-\frac{1}{logx}$; $x \geq 1$ diverge positivamente ;

$0<x \leq e^{-2}$ irregolare ;

34. S. converge per $x<1$ con somma $S=\frac{1}{2^x}$; indeterminata per $x \geq 1$;

35. S. converge per $x>0$ con somma $S=\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$; diverge positivamente per $x \leq 0$

36. S. $x>0$ converge con somma $S=\frac{3^x}{3^x-2^x}$; $x \leq 0$ diverge positivamente ;

37. S. diverge positivamente $\forall x$;

38. S. converge$\forall x \neq 0$ con somma $S=\frac{1}{|x|}+1$; diverge positivamenteper $x=0$;

39. S. $-15<x<-3$ converge con somma $S=\frac{1}{4-\sqrt{1-x}}$;

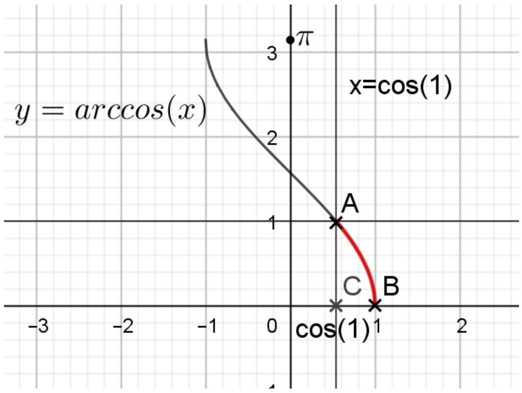
$x \leq -15$ diverge positivamente; $-3 \leq x \leq 1$ irregolare;

40. S. $x<0$ converge con somma $S=\frac{1}{arctgx}$; $x \geq 0$ diverge positivamente ;

41. S. $x<-1$ converge con somma $S=1-2^x$;

$x>0$ diverge positivamente; $-1 \leq x<0$ irregolare;

***42. S.** $cos(1) < x \leq 1$ converge con somma $S = \frac{1}{1-arccosx}$;



$-1 \leq x \leq \cos(1)$ diverge positivamente;

43. S. $-6 < x < -4 \vee -2 < x < 0$ converge con somma $S = \frac{1}{|x+3|-1}$;

$-4 \leq x \leq -2$ diverge positivamente ; $x \leq -6 \vee x \geq 0$ irregolare ;

44. S. $a \leq -2$ irregolare; $-2 < a < 1$ convergente con somma $S = \frac{3}{2-2a}$;

$a \geq 1$ diverge positivamente ;

45. S. $-\sqrt{3} \leq p \leq \sqrt{3}$ irregolare ; $-\sqrt{5} < p < -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} < p < \sqrt{5}$ convergente con somma

$S = \frac{1}{5-p^2}$; $p \leq -\sqrt{5} \vee p \geq \sqrt{5}$ divergente positivamente;