2. Esponenziale complesso

Per ogni numero complesso

$$a + ib$$

si definisce **l'esponenziale complesso** e^{a+ib} il numero complesso

$$e^{a+ib} = e^{a}(cosb + isinb)$$

Pertanto essendo $e^{i\vartheta}$=$(cos\vartheta + isin\vartheta)$ il numero complesso z di modulo ρ e anomalia ϑ si può esprimere nella **forma esponenziale**

$$\boldsymbol{z = \rho e^{i\vartheta}}$$

Se

- $z = \ \rho\, e^{i\vartheta}$ allora il suo coniugato è $\bar{z} = \rho\, e^{-\,i\vartheta}$
- $z = \ \rho\, e^{i\vartheta}$ è reale allora $\vartheta = k\pi$ con $k \in \mathbb{N}$
- $z = \ \rho\, e^{i\vartheta}$ è immaginario puro allora $\vartheta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{N}$

In particolare :

$$1 = e^{0i} \qquad i = e^{\frac{\pi}{2}i} \qquad -1 = e^{\pi i} \qquad -i = e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

La relazione

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

è detta **formula di Eulero**.

Esempi

Scrivere in forma esponenziale i seguenti numeri complessi:

a) $z = 2 + 2i$

b) $z = -3\sqrt{3} + 3i$

a) Si ha

$$z = 2 + 2i = 2(1 + i) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

pertanto il numero z ha modulo $\rho = 2\sqrt{2}$ e argomento $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ quindi il numero z ha forma esponenziale

$$z = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$$

b) Si ha

$$z = -3\sqrt{3} + 3i = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 6\left(cos\frac{5}{6}\pi + isin\frac{5}{6}\pi\right) = 6\, e^{\frac{5}{6}\pi i}$$

Esercizi

Scrivere in forma esponenziale i seguenti numeri complessi:

1. $\frac{1}{1+i}$ **2.** $3 - 3i$

3. $\sqrt{3} - i$ **4.** $1 + \sqrt{3}i$

Esprimere in forma trigonometria ed esponenziale il numero z :

5. $z = 1 - i$ **6.** $z = 4 + 4\sqrt{3}i$

Esempio

Dopo aver trasformato in forma esponenziale i seguenti numeri

$z_1 = 6\left(cos\frac{3}{4}\pi + isin\frac{3}{4}\pi\right)$ e $z_2 = \sqrt{3}\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

calcolare

$$z_1 \cdot z_2 \qquad e \qquad \frac{z_1}{z_2}$$

Scriviamo in forma esponenziale i numeri dati

$z_1 = 6\left(cos\frac{3}{4}\pi + isin\frac{3}{4}\pi\right) = 6\, e^{\frac{3}{4}\pi i}$ $z_2 = \sqrt{3}\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$

applicando le proprietà delle potenze si ha:

$$z_1 \cdot z_2 = 6\, e^{\frac{3}{4}\pi i} \cdot \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i} = 6\sqrt{3}\, e^{\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{6}\right)i} = 6\sqrt{3}\, e^{\frac{7}{12}\pi}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6\, e^{\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}} = 2\sqrt{3}\, e^{\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{6}\right)i} = 2\sqrt{3}\, e^{\frac{11}{12}\pi}$$

Esercizi

Dati z_1 *e* z_2 *calcolare* $z_1 \cdot z_2$ *e* $\frac{z_1}{z_2}$ *in forma esponenziale* :

7. $z_1 = 3\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 6\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$

8. $z_1 = 8\left(cos\frac{5\pi}{8} + isin\frac{5\pi}{8}\right)$, $z_2 = 4\left(cos\frac{3}{8}\pi + isin\frac{3}{8}\pi\right)$

***9.** *Dati* $z_1 = 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)$ *e* $z_2 = \frac{i}{1+i}$ *calcolare* $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$ *in forma esponenziale e algebrica.*

***10.** *Calcolare* $\frac{(-1+\sqrt{3}i)e^{\frac{\pi}{6}i}}{3\sqrt{3}-3i}$.

Soluzioni

1. S. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; **2. S**. $3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; **3. S**. $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$; **4. S**. $2e^{i\frac{\pi}{3}}$;

5. S. $z = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + isin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}$; **6. S.** $8\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$;

7. S. $z_1 \cdot z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 6e^{i\frac{\pi}{4}} = 18e^{i\frac{5}{12}\pi}$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$;

8. S. $z_1 \cdot z_2 = 32e^{i\pi} = -32$; $\frac{z_1}{z_2} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$;

***9. S.** $8\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = 8(1+i)$; $z_1 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = 4e^{\frac{\pi}{4}i}$,

$z_2 = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$; $z_1^2 = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$; $\bar{z}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ …);

***10. S.** $\frac{1}{3}\,e^{\pi i} = -\frac{i}{3}$; ($-1 + \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$,

$3\sqrt{3} - 3i = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 6\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 6e^{-\frac{\pi}{6}i}$, applichiamo ora le

proprietà delle potenze : $\frac{2e^{\frac{2\pi}{3}i}}{6e^{-\frac{\pi}{6}i}} \cdot e^{\frac{\pi}{6}i} = \frac{1}{3}e^{\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)i} = \frac{1}{3}\,e^{\pi i} = -\frac{i}{3}$);