7. Convergenza assoluta

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ si dice **assolutamente convergente** se converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

i cui termini sono uguali ai valori assoluti dei termini della serie data.

Teorema
Se **converge** la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

allora **converge** anche la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Ovviamente una serie i cui termini hanno segno costante se converge allora converge anche assolutamente.

Per studiare la convergenza assoluta ovviamente si utilizzano i criteri relativi alle serie i cui termini hanno segno costante: del confronto, del rapporto, della radice.

Esempio

Per studiare la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{cosk}{4^k}$, i cui termini non hanno segno costante per via dei coefficienti $cosk$, studiamo il comportamento della serie dei valori assoluti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{cosk}{4^k}\right|.$$

Utilizziamo il metodo del confronto osservando che, poiché $|cosk| \leq 1$, risulta

$$\left|\frac{cosk}{4^k}\right| \leq \frac{1}{4^k}$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}$ è convergente essendo una serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$, pertanto converge la serie dei valori assoluti e quindi la serie data.

Non vale il teorema inverso, cioè una serie può essere convergente senza esserlo assolutamente , infatti per esempio la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

è convergente , basta osservare che soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz, mentre non converge la serie dei valori assoluti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

che è una serie armonica generalizzata di coefficiente $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente ma non è assolutamente convergente, si dice che essa è **semplicemente convergente**.

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ è quindi semplicemente convergente.