## 5. Integrazione per parti

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Osserviamo che nella formula la funzione integranda al primo membro appare come il prodotto di un fattore derivato $f'(x)$ , che nel secondo membro viene integrato, per un fattore finito $g(x)$, che nel secondo membro viene derivato.

Ogni volta che si applica il metodo di integrazione per parti è necessario scegliere opportunamente il fattore derivato e il fattore finito

**Esempi**

**1)** $\int x \cdot cosx\ dx$

Poniamo

$$f'(x) = cosx \qquad \text{e} \qquad g(x) = x$$

da cui

$$f(x) = sinx \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 1$$

$$\int x \cdot cosx\ dx = x \cdot sinx - \int sinxdx = x \cdot sinx + cosx + c\ .$$

Se avessimo scambiato i ruoli ponendo

$$f'(x) = x \qquad \text{e} \qquad g(x) = cosx$$

avremmo ottenuto

$$\int x \cdot cosx\ dx = \frac{x^2}{2}cosx + \int \frac{x^2}{2}sinxdx$$

un integrale più complesso di quello di partenza.

**2)** In alcuni casi il metodo per parti deve essere applicato più volte come nel seguente integrale:

$$\int x^2 e^x dx$$

Poniamo

$$f'(x) = e^x \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2$$

ottenendo

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$

Nel secondo integrale poniamo

$$f'(x) = e^x \qquad \text{e} \qquad g(x) = x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) =$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

**3)** $\int x^2 log(1-x^2)dx$

Sia $\qquad f'(x) = x^2 \qquad$ e $\qquad g(\boldsymbol{x}) = log(1-x^2),$

risulta $\qquad f(x) = \frac{x^3}{3} \qquad$ e $\qquad g'(\boldsymbol{x}) = \frac{-2x}{1-x^2}$

quindi

$\int x^2 log(1-x^2)dx$=

$= \frac{x^3}{3} log(1-x^2) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{-2x}{1-x^2} dx = \frac{x^3}{3} log(1-x^2) - \frac{2}{3}\int \frac{1-x^4-1}{1-x^2} dx =$

$= \frac{x^3}{3} log(1-x^2) - \frac{2}{3}\int 1 + x^2 + \frac{1}{x^2-1} dx =$

$= \frac{x^3}{3} log(1-x^2) - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2-1} dx =$

$= \frac{x^3}{3} log(1-x^2) - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$

**4)** $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx \qquad a > 0$

Poniamo

$f'(x) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = x$

$g(x) = \sqrt{a^2-x^2} \qquad \Rightarrow \qquad g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int -\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2} dx + a^2 \int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2} dx + a^2 arcsin\frac{x}{a} + c'$$

Otteniamo, quindi :

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}dx + a^2 arcsin\frac{x}{a} + c'$$

Osserviamo che al secondo membro abbiamo ottenuto lo stesso integrale che vogliamo risolvere ma con segno opposto, pertanto lo sommiamo a quello al primo membro:

$$2\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 arcsin\frac{x}{a} + c'$$

Dividendo entrambi i membri per due otteniamo il risultato :

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2 arcsin\frac{x}{a} + c$$

Così per esempio :

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}arcsinx + c$$

$$\int \sqrt{9-4x^2}\,dx = 2\int \sqrt{\frac{9}{4}-x^2}\,dx = 2\left(\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{9}{4}-x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}arcsin\frac{2x}{3}\right) + c$$

Osserviamo che questo integrale è stato anche risolto con il metodo di sostituzione nel par. 3.

**Esercizi**

**( gli esercizi con asterisco sono avviati )**

In alcuni dei seguenti esercizi tra parentesi vengono indicati il fattore derivato e quello finito.

*1. $\int logx\,dx$ $\quad (f'(x) = 1,\ \ g(x) = logx)$

*2. $\int arcsinx\,dx$ $\quad (f'(x) = 1,\ \ g(x) = arcsinx)$

3. $\int arctgx\,dx$ $\quad (f'(x) = 1,\ \ g(x) = arctgx)$

4. $\int xlogx\,dx$ $\quad (f'(x) = x,\ \ g(x) = logx)$

5. $\int x^3 logx\,dx$   6. $\int x^4 logx\,dx$

7. $\int \log(x^2+1)\,dx$   8. $\int x\log(x^2-4)\,dx$

9. $\int (x^2+4)logx\,dx$

* 10. $\int \frac{\log(logx)}{x}\,dx$

*11. $\int x\cdot arctgx\,dx$

*12. $\int x\cdot arcsinx dx$

13. $\int x^2 arctgx\,dx$

14. $\int x\cdot arctg\sqrt{x^2-1}\,dx$

*15. $\int \frac{\text{arctg}x}{x^2}\,dx$

16. $\int \frac{\text{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\,dx$

17. $\int xe^x dx$

*18. $\int x^3e^x dx$

19. $\int x^2e^{-x}dx$

20. $\int (x-3)\,e^x\,dx$

21. $\int (x^2-x)e^{-x}dx$

22. $\int xsinxdx$

23. $\int x^2cosxdx$

*24. $\int e^x cosxdx$

25. $\int log^2xdx$

26. $\int \frac{logx}{x^4}dx$

*27. $\int sin(logx)dx$

28. $\int \sqrt{x}logxdx$

*29. $\int \frac{log\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

*30. $\int x^3e^{-x^2}dx$

*31. $\int x^5e^{-x^2}dx$

*32. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

33. $\int xlog^2xdx$

*34. $\int \sqrt{4-x^2}dx$

*35. $\int log\left(\frac{x^2-1}{x}\right)dx$

*36. $\int log\frac{x-1}{x^2+1}dx$

*37. $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx$

38. $\int \frac{logx}{(1+x)^2}\,dx$ $\quad\left( f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}\ , g(x)=logx\ \right)$

*39. $\int \frac{x^2}{(1-x)^3}\,dx$

*40. $\int \frac{1}{sin^3x}\,dx$

41. $\int \frac{1}{cos^3x}\,dx$

*42. $\int log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)dx$

## Soluzioni

***1. S.** $x(logx-1)+c$; $\left( f(x)=x\ , g'(x)=\frac{1}{x}\ , \int logx\, dx = xlogx - \int x\cdot\frac{1}{x}\, dx = \cdots \right)$;

***2. S.** $x\cdot arcsinx+\sqrt{1-x^2}+c$; $\big( f(x)=x,\ \ g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\int arcsinx\, dx = x\cdot arcsinx - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\cdots \big)$ ;

**3. S.** $x\cdot arctgx-\frac{1}{2}log(x^2+1)+c$; **4. S.** $\frac{1}{2}x^2logx-\frac{1}{4}x^2+c$ ;

**5. S.** $\frac{1}{4}x^4logx-\frac{1}{16}x^4+c$; **6. S.** $\frac{x^5}{5}logx-\frac{x^5}{25}+c$ ;

**7. S.** $x\log(x^2+1)-2x+2arctgx+c$ ; **8. S.** $\frac{1}{2}(x^2-4)\log(x^2-4)-\frac{1}{2}x^2+c$ ;

**9. S.** $(\frac{x^3}{3}+4x)logx-\frac{x^3}{9}-4x+c$

***10. S.** $logx(log(logx)-1)+c$ ; $\big( f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=log(logx)$ , si ha $f(x)=logx$,

$g'(x)=\frac{1}{xlogx}\ \Rightarrow \int\frac{\log(logx)}{x}\, dx = logx\cdot log(logx)-\int logx\cdot\frac{1}{xlogx}\, dx=\cdots$ ;

oppure porre $logx=t$ da cui $\frac{1}{x}$dx=dt quindi l'integrale diventa $\int logtdt$ e integrare per parti ( vedi esercizio 1 )… ) ;

**11. S.** $\frac{1}{2}(x^2+1)arctgx-\frac{1}{2}x+c$; $\big(f'(x)=x\ , g(x)=arctgx\ , f(x)=\frac{1}{2}x^2, g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ,

$\int x\cdot arctgx\, dx=\frac{1}{2}x^2arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}x^2arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\cdots \big)$ ;

***12. S.** $\frac{1}{4}(2x^2-1)arcsinx+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+c$; $\big( f'(x)=x,\ \ g(x)=arcsinx$ ;

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$ , $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,

$\int x\cdot arcsinxdx=\frac{1}{2}x^2arcsinx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}x^2arcsinx+\frac{1}{2}\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

$=\frac{1}{2}x^2arcsinx+\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}dx-\frac{1}{2}arcsinx$

tenendo conto che, vedi esempio 4,

$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}arcsinx+c$ si ha

$\int x\cdot arcsinxdx=\frac{1}{2}x^2arcsinx+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}arcsinx\right)-\frac{1}{2}arcsinx+c=\cdots \big)$ ;

**13. S.** $\frac{x^3}{3}arctgx-\frac{x^2}{6}+\frac{\log(x^2+1)}{6}+c$ ; **14. S.** $\frac{x^2}{2}arctg\sqrt{x^2-1}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}+c$ ;

***15. S.** $-\frac{\text{arctg}x}{x} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + log|x| + c$ ;

$(\ f'(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = arctgx$ , $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , si ha quindi :

$\int \frac{\text{arctg}x}{x^2}\,dx = -\ \frac{arctgx}{x} - \int -\frac{1}{x(1+x^2)}dx = -\frac{arctgx}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$

tenendo conto che : $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ risulta

$\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx \dots$ ) ;

**16. S.** $-2\frac{\text{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + log\left|\frac{x}{x+1}\right| + c$ ; **17. S.** $e^x(x-1) + c$;

***18. S.** $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$; ( $f'(x) = e^x$ , $g(x) = x^3$ , $f(x) = e^x$, $g'(x) = 3x^2 \Rightarrow$

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$

integriamo ancora per parti l'integrale ottenuto ponendo $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x^2$, da cui

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2\int x e^x dx)$

integriamo ancora per parti l'ultimo integrale ottenuto ponendo $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x \Rightarrow$

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3[x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx)] \dots$ ) ;

**19. S.** $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$; **20. S.** $(x-4)\,e^x + c$

**21. S.** $-e^{-x}(x^2 + x + 1) + c$; **22. S.** $sinx - xcosx + c$;

**23. S.** $2xcosx + (x^2 - 2)sinx + c$;

***24. S.** $\frac{1}{2}e^x(cosx + sinx) + c$; $(f'(x) = e^x$, $g(x) = cosx$ , si ha :

$\int e^x cosxdx = e^x cosx - \int -e^x sinxdx = e^x cosx + \int e^x sinxdx$

integriamo ancora per parti l'ultimo integrale ponendo $f'(x) = e^x$ e $g(x) = sinx$ , si ha

$\int e^x cosxdx = e^x cosx + e^x sinx - \int e^x cosxdx$

osserviamo che abbiamo ottenuto di nuovo l'integrale di partenza ma con segno opposto, pertanto lo portiamo al primo membro e lo sommiamo :

$2\int e^x cosxdx = e^x cosx + e^x sinx + c' \quad \Rightarrow \int e^x cosxdx = \frac{1}{2}e^x(cosx + sinx) + c$ ;

si può verificare che si sarebbe giunti allo stesso risultato se per ogni integrazione si fosse sempre posto $g(x) = e^x$ ) ;

**25. S.** $xlog^2x - 2xlogx + 2x + c$; **26. S.** $-\frac{1}{9x^3}(3logx + 1) + c$;

***27. S.** $\frac{1}{2}x\big(sin(logx) - cos(logx)\big) + c;$

( $f'(x) = 1,\ \ g(x) = sin(logx) \quad \Rightarrow \quad f(x) = x\ ,\ \ g'(x) = cos(logx) \cdot \frac{1}{x}$ , si ha :

$\int sin(logx)dx = x \cdot sin(logx) - \int x \cdot cos(logx) \cdot \frac{1}{x}dx =$

$= x \cdot sin(logx) - \int cos(logx)dx$

per l'ultimo integrale ottenuto porre $f(x) = x$ , $g(x) = cos(logx)$ e integrare per parti:

$\int sin(logx)dx = x \cdot sin(logx) - xcos(logx) - \int sin(logx)dx$ da cui:

$\int sin(logx)dx = \frac{1}{2}x\big(sin(logx) - cos(logx)\big) + c$ ) ;

**28. S.** $\frac{2}{9}x\sqrt{x}(3logx - 2) + c;$

***29. S.** $\sqrt{x}(logx - 2) + c;$ ( $\sqrt{x} = t$ e poi per parti );

***30. S.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2 + 1) + c;$ ($\int x^3 e^{-x^2}dx = \int x^2 \cdot xe^{-x^2}dx$ e poi per parti ponendo

$f'(x) = xe^{-x^2}$ e $g(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ , $g'(x) = 2x \Rightarrow$

$\int x^3 e^{-x^2}dx = \int x^2 \cdot xe^{-x^2}dx == -\frac{1}{2}e^{-x^2} \cdot x^2 + \int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2 + 1) + c;$

oppure porre $x^2 = t$ da cui $\frac{1}{2}\int te^{-t}\,dt$ e poi per parti … );

***31. S.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4 + 2x^2 + 2) + c;$ ($\int x^5 e^{-x^2}dx = \int x^4 \cdot xe^{-x^2}dx$ e poi per parti );

***32. S.** $2e^{\sqrt{x}}\big(\sqrt{x} - 1\big) + c;$ ( porre $\sqrt{x} = t$ e poi integrare per parti );

**33. S.** $\frac{x^2}{4}(2log^2x - 2logx + 1) + c;$

***34. S.** $\frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2} + 2arcsin\frac{x}{2} + c$ ; ($f'(x) = 1,\ \ g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ , poi per parti tenendo presente l'esempio 4 ) ;

***35. S.** $x\,log\left(\frac{x^2-1}{x}\right) - log\frac{x-1}{x+1} - x + c;$ ($f'(x) = 1$ , $g(x) = log\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$ ,

$f(x) = x$ , $g'(x) = \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{2x^2-x^2+1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$ ,

$\int log\left(\frac{x^2-1}{x}\right)dx = xlog\left(\frac{x^2-1}{x}\right) - \int \frac{x^2+1}{(x^2-1)}dx = xlog\left(\frac{x^2-1}{x}\right) - \int \frac{x^2-1+2}{x^2-1}dx$

$= xlog\left(\frac{x^2-1}{x}\right) - \int dx - 2\int \frac{1}{x^2-1}dx = \cdots$ ) ;

**36. S.** $-2arctgx - xlog(x^2+1) + (x-1)log(x-1) + x + c$;

$\left( f'(x) = 1,\, g(x) = log\frac{x-1}{x^2+1} \Rightarrow f(x) = x \;,\, g'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(1-x)(x^2+1)}\right.,$

$\int log\frac{x-1}{x^2+1}dx = x\,log\frac{x-1}{x^2+1} - \int x\cdot\frac{x^2-2x-1}{(1-x)(x^2+1)}dx = xlog\frac{x-1}{x^2+1} + \int\frac{x^3-2x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}dx =$

Nell'ultimo integrale, dividendo il numeratore per il denominatore si ottiene:

$\frac{x^3-2x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} = 1 - \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)} = 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2+1}$ …. ) ;

***37. S.** $-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$ ; ( $f'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ , $g(x) = x^2$ ,

$f(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}$ , $g'(x) = 2x$ … ) ;

**38.S.** $\frac{xlogx}{x+1} - log|x+1| + c$ ;

***39. S.** $\frac{4x-3}{2(1-x)^2} - log|x-1| + c$ ; ( $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ , $g(x) = x^2$ , $f(x) = \frac{1}{2(1-x)^2}$ , si ha :

$\int\frac{x^2}{(1-x)^3}\,dx = \frac{x^2}{2(1-x)^2} - \int\frac{2x}{2(1-x)^2}dx = \frac{x^2}{2(1-x)^2} + \int\frac{1-x-1}{(1-x)^2}dx =$

$= \frac{x^2}{2(1-x)^2} + \int\frac{1}{1-x}dx - \int\frac{1}{(1-x)^2}dx = \frac{x^2}{2(1-x)^2} - log|x-1| - \frac{1}{1-x} + c =$

$= \frac{x^2+2x-2}{2(1-x)^2} - log|x-1| + c = \frac{4x-3}{2(1-x)^2} + \frac{1}{2} - log|x-1| + c = \frac{4x-3}{2(1-x)^2} - log|x-1| + c'$…);

***40. S.** $-\frac{1}{2}\frac{cosx}{sin^2x} + \frac{1}{2}\log\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$ ;

$\left(\int\frac{1}{sin^3x}\,dx = \int\frac{1}{sin^2x}\cdot\frac{1}{sinx}\,dx = -ctgx\cdot\frac{1}{sinx} - \int ctgx\cdot\frac{cosx}{sin^2x}dx =\right.$

$= -\frac{cosx}{sin^2x} - \int\frac{cos^2x}{sin^3x}dx = -\frac{cosx}{sin^2x} - \int\frac{1}{sin^3x}dx + \int\frac{1}{sinx}dx \Longrightarrow$

$\Longrightarrow\; 2\int\frac{1}{sin^3x}\,dx = -\frac{cosx}{sin^2x} + \int\frac{1}{sinx}dx=$….

ricordiamo che gli integrali $\int\frac{1}{sinx}dx$ e $\int\frac{1}{cosx}dx$ sono stati risolti per sostituzione nel par. 4 ) ;

**41. S.** $\frac{1}{2}\frac{sinx}{cos^2x} + \frac{1}{2}\log\left|ctg(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\right| + c$ ;

***42. S.** $\left(x+\frac{1}{2}\right) log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}{2}+c;$

( poniamo $f'(x)=1,\ g(x)=log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$ , si ha :

$$\int log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)dx = xlog\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\int \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)dx =$$

$$= xlog\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}}dx = xlog\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$$

Possiamo procedere in due modi:

1° metodo :

Calcoliamo l'ultimo integrale per sostituzione :

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}}=t \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{x+1}=t^2 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{t^2}{1-t^2} \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{2t}{(1-t^2)^2}dt$$

Pertanto risulta :

$$\int\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = \int t\cdot\frac{2t}{(1-t^2)^2}dt = 2\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt \qquad (\#)$$

Calcoliamo per parti l'integrale

$\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt=-\frac{1}{2}\int t\cdot\frac{(-2t)}{(1-t^2)^2}dt$ ponendo $f'(t)=\frac{(-2t)}{(1-t^2)^2}$ e $g(t)=t$ , essendo

$f(t)=-\frac{1}{1-t^2}$ e $g'(t)=1$ , si ha

$$\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt=-\frac{1}{2}\int t\cdot\frac{(-2t)}{(1-t^2)^2}dt=-\frac{1}{2}\left[-\frac{t}{1-t^2}+\int\frac{1}{1-t^2}dt\right]$$

Poiché vale la seguente scomposizione :

$\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{2(t+1)}-\frac{1}{2(t-1)}$ si ha

$$\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt=-\frac{1}{2}\int t\cdot\frac{(-2t)}{(1-t^2)^2}dt=-\frac{1}{2}\left[-\frac{t}{1-t^2}+\int\frac{1}{1-t^2}dt\right]=$$

$$-\frac{1}{2}\left[-\frac{t}{1-t^2}+\frac{1}{2}log|t+1|-\frac{1}{2}log|t-1|\right]+c=\frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2}-\frac{1}{4}log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+c$$

Riprendiamo dall'integrale ( #) e ritornando in $x$ si ha

$$2\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt=\frac{t}{1-t^2}-\frac{1}{2}log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+c=\frac{\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{1-\frac{x}{x+1}}-\frac{1}{2}log\left|\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\right|+c$$

Ritornando all'integrale di partenza si ha :

$$\int log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)dx = xlog\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{x}\sqrt{x+1}+\frac{1}{4}log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2+c=$$

$$= xlog\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{x}\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)+c \ ;$$

2° metodo :

Riprendiamo dall'integrale ottenuto

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x+x^2}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{2x+1-1}{\sqrt{x+x^2}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{2x+1}{\sqrt{x+x^2}}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x+x^2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}dx$$

calcoliamo infine l'ultimo integrale.

Posto $\sqrt{x+x^2} = x+t$, si ha $x+x^2 = x^2+2xt+t^2 \rightarrow x = \frac{t^2}{1-2t} \rightarrow dx = \frac{2t-2t^2}{(1-2t)^2}\mathrm{dt}$

Da cui sostituendo e semplificando l'integrale diventa:

$$-\frac{1}{4}\int \frac{2}{1-2t}dt = \frac{1}{4}log|1-2t| + c$$

Pertanto

$$-\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}dx = \frac{1}{4}log\left|1-2\left(\sqrt{x+x^2}-x\right)\right| + c = \frac{1}{4}log\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^2 + c =$$

$$= -\frac{1}{2}log\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$$

In definitiva , ritornando all'integrale di partenza… ) ;