9. Teorema di De L'Hopital

Il teorema (o regola) di de L'Hôpital riguarda limiti delle **forme indeterminate**:

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \mathbf{0}\cdot\infty \qquad \infty-\infty \qquad \mathbf{1}^{\infty} \qquad \mathbf{0}^{\mathbf{0}} \qquad \infty^{\mathbf{0}}$$

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Teorema (o regola) **di De L'Hopital**

Se f e g sono due funzioni continue in $[a;b]$ e derivabili in $(a;b)$, escluso al più il punto $x_0 \in (a;b)$, con :

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a;b) \quad (x \neq x_0) \qquad\qquad f(x_0)=0 \quad g(x_0)=0$$

e se esiste finito

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora esiste anche il

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

e risulta:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Il teorema vale anche nel caso in cui $x \to +\infty$ oppure $x \to -\infty$.

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

*1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-2^{x}}{x}$

*3) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{sinx}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-cosx}{sinx}$ 6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sinx-xcosx}{x^3}$

*7) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2-e^{\frac{1}{x}}}{x}$ 8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{log(3x+1)}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{log^2x-logx}{x^2-1}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx^2}{x}$

11) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{arctgx-\frac{\pi}{4}}{x-1}$

*12) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-arctgx}{e^{-x}}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx^2}{\log(1+x)}$

14) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1-cosx}}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x}{2}}-x-1}{sinx}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-sinx}{e^x-1-x^2}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+x}}{x+sinx}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos(8x)}{(1+x^2)^3-1}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx^4}{x^3(e^x-cosx)}$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x cosx-1}{log(1+x)}$

21) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x sinx-x}{log(1+x)}$

22) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log(2x^2-1)}{cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

23) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2-x)log(2-x)-sin(1-x)}{1-cos(x-1)}$

24) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\log(x-1)^2+x^2-2x}{(x-2)^2}$

Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema

Se f e g sono due funzioni continue in $[a;b]$ e derivabili in $(a;b)$, escluso al più il punto $x_0 \in (a;b)$ e sia

$$g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a;b) \quad (x \neq x_0)$$

Se f e g sono entrambe infinite per $x \to x_0$ e se esiste il

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora esiste anche il

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

e risulta:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Il teorema vale anche nel caso in cui $x \to +\infty$ oppure $x \to -\infty$.

Limiti notevoli

a) Dimostriamo che

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty \qquad \forall\, \alpha\in\mathbb{R}_0^+}$$

Alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ applichiamo il teorema di De L'Hopital calcolando il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

Si possono avere due casi:

1) $\alpha\le 1$ allora $\alpha-1\le 0$ pertanto risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$$

2) $\alpha>1$, in questo caso il $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}}$ si presenta ancora sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, si riapplica il teorema più volte finché l'esponente di x risulti minore o uguale a 0.

In definitiva si ha :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty \qquad \forall\, \alpha>0$$

Possiamo, quindi, dire che :

La **funzione esponenziale e^x** , per $x\to+\infty$, è un **infinito di ordine superiore** a qualunque potenza di x a esponente positivo.

La proprietà vale ancora per l'esponenziale a^x con $a>1$, cioè

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}=+\infty \qquad \forall\, \alpha>0,\, a>1$$

b) Dimostriamo che :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0 \qquad \forall\, \alpha\in\mathbb{R}_0^+}$$

Alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ applichiamo il teorema di De L'Hopital calcolando il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0$$

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{logx}{x^{\alpha}}=0 \qquad \forall\,\alpha>0$$

Si può, quindi, dire che :

La **funzione $\boldsymbol{logx}$** , per $x\to+\infty$, è un **infinito di ordine inferiore** a qualunque potenza di x a esponente positivo.

La proprietà vale ancora per $log_a x$ con $a>1$, cioè

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{log_a x}{x^{\alpha}}=0 \qquad \forall\,\alpha>0, a>1$$

Esercizi

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-x^2+4x^3}{2-x^3}$

2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x+x^4}{x^2+2x^3}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x+1}{3-x-2x^5}$

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5e^{2x}-2}{1-e^x}$

5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}$

6) $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x+2}}{x^3}$

*7) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{x^2-4}}{2x^4}$

*8) $\lim_{x\to+\infty}\frac{log(x^2-1)}{\sqrt{x}}$

9) $\lim_{x\to+\infty}\frac{logx}{\sqrt[3]{x}}$

10) $\lim_{x\to0^+}\frac{log\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x^2}}$

11) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\log(x-\frac{\pi}{2})}{tgx}$

12) $\lim_{x\to+\infty}\frac{log(4x-1)}{3-\sqrt[3]{x}}$

13) $\lim_{x\to0^+}\frac{logx}{ctgx}$

14) $\lim_{x\to0^-}\frac{\log(-x)}{e^{-\frac{1}{x}}}$

15) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{log(x^5-3)}$

16) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(e^{x-1}+3)}$

17) $\lim_{x\to+\infty}\frac{arctgx+x}{log(x^5-3)}$

*18) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x+2}}{x^5+2x}$

Forma indeterminata $0 \cdot \infty$

Limite notevole

Dimostriamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} \cdot logx = 0 \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}_0^+}$$

Trasformiamo il limite che si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot (-\infty)$ nel limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{logx}{x^{-\alpha}}$ che si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$ e applichiamo il teorema di De L'Hopital calcolando il limite del rapporto delle derivate :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} \cdot logx = 0 \qquad \forall\alpha > 0$$

Risulta anche

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} \cdot log_a x = 0 \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}_0^+, a > 1$$

Esempio

Il limite

$$\lim_{x\to 1}(1-x^3)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot\infty$, occorre perciò trasformarlo in una delle forme $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$. Si ha:

$$\lim_{x\to 1}(1-x^3)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x^3)}{ctg\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Calcoliamo il limite del rapporto delle derivate ottenendo

$$\lim_{x\to 1}\frac{-3x^2}{-\frac{\pi}{2}\left[1+ctg^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]} = \frac{6}{\pi}$$

Pertanto anche il limite dato esiste e risulta

$$\lim_{x\to 1}(1-x^3)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to 1}\frac{-3x^2}{-\frac{\pi}{2}\left[1+ctg^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]} = \frac{6}{\pi}$$

Esercizi

1) $\lim_{x\to 0}(3x-2x^2)ctgx$

*2) $\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

3) $\lim_{x\to 0^+}(1-e^{4x})\,ctg(3x)$

*4) $\lim_{x\to 1^+}(x-1)\,log\left(\frac{1}{x-1}\right)$

5) $\lim_{x\to 0^+} x^2 logx$

6) $\lim_{x\to 1^+}(x-1)log^2(x-1)$

7) $\lim_{x\to 0^+}(x^4+x^3)\,log(x)$

8) $\lim_{x\to +\infty} e^{-x}\,log(1+x^2)$

9) $\lim_{x\to 1^+}(x-1)\log(\log(x))$

10) $\lim_{x\to -\infty}(x^4-x^2+4)e^{x+1}$

11) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} cosx\cdot\log(cosx)$

12) $\lim_{x\to +\infty} x^3 sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

13) $\lim_{x\to 0^+}(x+sin4x)\,ctg(x)$

14) $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x}{2}}\,log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

15) $\lim_{x\to 2}(x-2)ctg(\pi x)$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{x}arcsinx$

17) $\lim_{x\to 0^+}(arcsinx)\cdot log(x)$

18) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{1+x}\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)$

19) $\lim_{x\to +\infty} x\left(-\frac{\pi}{2}+arctg(x+1)\right)$

20) $\lim_{x\to +\infty} e^{-x^2+1}(-x^3+x)$

Forma indeterminata $\infty-\infty$

Esempio

Il limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sinx}\right)$$

si presenta nella forma indeterminata ∞ - ∞, occorre perciò trasformarlo in una delle forme $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$. Si ha:

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sinx}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sinx-x}{xsinx}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)$, calcoliamo il limite del rapporto delle derivate:

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{cosx-1}{sinx+xcosx}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)$, poiché ancora abbiamo ottenuto una forma indeterminata riapplichiamo il teorema ottenendo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-sinx}{2cosx-xsinx}\right)=0$$

Ne consegue che

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sinx}\right)=0$$

Esercizi

*1) $\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x}{x^2-9}-\frac{x+1}{x-3}\right)$

2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+x^2}-\frac{1}{x}\right)$

3) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-e^{\frac{1}{x}}\right)$

4) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{e^{3x}}{1+x}-x^4\right)$

5) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

6) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{e^{2x}}{e^x+1}-x^3\right)$

*7) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}+log(x-1)\right)$

8) $\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{log(-x)}\right)$

9) $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{sinx}-\frac{1}{x^2+x}\right)$

*10) $\lim_{x\to \pi^-}\left(\frac{1}{sinx}-tg\frac{x}{2}\right)$

11) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$

*12) $\lim_{x\to +\infty}(x-logx)$

Forme indeterminate $\mathbf{0^0}$ $\quad\infty^{\mathbf{0}}$ $\quad\mathbf{1}^{\infty}$

Ricordiamo che si può scrivere

$$\boxed{f(x)^{g(x)}=e^{logf(x)^{g(x)}}=e^{g(x)logf(x)}}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$$

Il limite è della forma indeterminata 1^{∞}; scriviamo la funzione nella forma

$$(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=e^{log\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{log(1+x^2)}{x}}$$

Calcoliamo il limite dell'esponente che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{log(1+x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}=0$$

Perciò risulta

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=1$$

Esercizi

*1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

*2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2-4)^{\frac{1}{x}}$

5) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2+logx}}$

*7) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$

* 8) $\lim\limits_{x\to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$

*9) $\lim\limits_{x\to 1^+} (logx)^{x-1}$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty} (logx)^{\frac{1}{x}}$

11) $\lim\limits_{x\to 2} (3-x)^{\frac{1}{x-2}}$

12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-cosx)^{tgx}$

13) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} (2x-1)^{\cos\pi x}$

14) $\lim\limits_{x\to 0^+} (sinx)^{\frac{x}{x-1}}$

15) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)^{e^{-x}}$

16) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{log(x^4+2)}$

17) $\lim\limits_{x\to 0^+} (cotgx)^{x^3+x}$

18) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{x}{x-2}\right)^{cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$

Soluzioni

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

***1.S.** 2; (il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e le funzioni $e^{2x}-1$ e x soddisfano le ipotesi del teorema di De L'Hopital ; calcoliamo il limite del rapporto delle derivate: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2$, poiché tale limite esiste allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni e risulta $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2$);

2.S. 1-log2;

***3.S.** 0 ; (il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$ e sono soddisfatte le ipotesi del teorema, calcoliamo perciò il limite del rapporto delle derivate: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{1}$, osserviamo che abbiamo ottenuto una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ più complessa della precedente ; in tal caso conviene calcolare il limite nella forma $\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}}$, ora il limite è del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e (vedi teorema) calcoliamo il limite del rapporto delle derivate :

$\lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}} = 0$, quindi $\lim_{x\to 0^-} -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1} = 0$);

4.S. 3 ; **5.S.** 1; **6.S.** $\frac{1}{3}$;

***7.S.** 0 ; (scritta la funzione nella forma $x - \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}}$ per il calcolo del limite si veda la soluzione dell'es. n°3);

8. S. 3; **9.S.** $-\frac{1}{2}$; **10.S.** 0; **11. S.** $\frac{1}{2}$;

***12.S.** +∞; (passando alle derivate si ha $\lim_{x\to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1+x^2}$, riapplichiamo il teorema alla forma $\frac{\infty}{\infty}$ così ottenuta : $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x}$; ancora una forma $\frac{\infty}{\infty}$ perciò riapplichiamo il teorema $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$; ne consegue che :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - arctgx}{e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty \text{);}$$

13. S. 0 ; **14. S.** $\sqrt{2}$; **15. S.** $-\frac{1}{2}$; **16. S.** 0 ; **17. S.** $\frac{1}{4}$; **18. S.** $\frac{32}{3}$; **19. S.** 1; **20. S.** 1; **21. S.** 0 ;

22. S. $-\frac{8}{\pi}$; **23. S.** 1; **24. S.** +∞;

Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

1. S. -4 ; **2.S.** $-\infty$; **3.S.** 0 ; **4. S.** $-\infty$; **5.S.** $+\infty$; **6.S.** $-\infty$;

***7.S.** +∞ ; (applicando il teorema si ha : $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2xe^{x^2-4}}{8x^3} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{e^{x^2-4}}{4x^2}$, applichiamo ancora il teorema : $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2xe^{x^2-4}}{8x} = +\infty$, ne segue che $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{e^{x^2-4}}{2x^4} = +\infty$; a tale risultato si poteva arrivare tenendo conto dell'esempio a) e cioè che e^x è un infinito di ordine superiore a qualunque potenza di x);

***8.S.** 0 ; (applichiamo il teorema : $\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x\sqrt{x}}{x^2+1} = 0$ ...);

9.S. 0 ; **10.S.** 0 ; **11. S.** 0; **12.S.** 0 ; **13. S.** 0 ; **14. S.** 0 ; **15.S.** +∞ ; **16.S.** 0 ; **17.S.** +∞;

***18. S.** +∞ ;(calcoliamo il limite del rapporto delle derivate : $\lim_{x\to +\infty} \frac{3^{x+2}log3}{5x^4+2}$, applicando il teorema ancora 4volte ..., oppure il risultato si giustifica osservando che il numeratore è un infinito di ordine superiore a x^5);

Forma indeterminata 0 · ∞

1. S. 3 ;

***2. S.** $+\infty$; (poniamo $\frac{1}{\sqrt{x}} = t$ e otteniamo il limite $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^2}$, applichiamo il teorema :

$\lim_{t\to} \frac{e^t}{2t}$, applicando ancora il teorema …; oppure il risultato si giustifica tenendo conto che e^t è un infinito di ordine superiore a t^2, per $t \to +\infty$);

3. S. $-\frac{4}{3}$;

***4. S.** 0 ; (scriviamo il limite nella forma $\lim_{x\to1^+} \frac{log\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; poniamo $\frac{1}{x-1} = t$ ottenendo

$\lim_{t\to+\infty} \frac{logt}{t}$ e applicando il teorema : $\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{1} = 0$ …);

5. S. 0 ; **6. S.** 0; **7. S.** 0 ; **8. S.** 0 ; **9. S.** 0 ; **10. S.** 0; **11. S.** 0 ; **12. S.** $+\infty$;**13. S.** 5 ; **14. S.** $+\infty$;

15. S. $\frac{1}{\pi}$; **16. S.** 2 ; **17.S.** 0 ; **18.S** $-\infty$;**19.S.** -1; **20. S.** 0 ;

Forma indeterminata ∞ − ∞

***1.S.** $-\infty$; (riduciamo a denominatore comune : $\lim_{x\to3^+} \frac{-x^2-3x-3}{x^2-9} = -\infty$);

2.S. -1 ; **3.S.** $-\infty$; **4.S.** $+\infty$;

5.S. $\frac{1}{2}$; **6.S.** $+\infty$;

***7.S.** $+\infty$; (riduciamo a denominatore comune: $\lim_{x\to1^+} \frac{1+(x-1)log(x-1)}{x-1}$; occupiamoci

innanzitutto della forma indeterminata 0· ∞ che compare al numeratore :

$\lim_{x\to1^+} (x-1)log(x-1) = \lim_{x\to1^+} \frac{log(x-1)}{\frac{1}{x-1}}$, calcoliamo il limite del rapporto delle derivate

otteniamo: $\lim_{x\to1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = 0$, ne consegue che $\lim_{x\to1^+} \frac{1+(x-1)log(x-1)}{x-1} = +\infty$);

8.S. $-\infty$; **9.S.** 1;

***10. S.** $-\infty$; (tenendo conto che $tg\frac{x}{2} = \frac{1-cosx}{sinx}$, si ha $\lim_{x\to\pi^-} \left(\frac{1}{sinx} - tg\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{cosx}{sinx} = -\infty$);

11.S. $\frac{2}{3}$ **;**

***12. S.** $+\infty$;($\lim_{x\to+\infty} (x - logx) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{logx}{x}\right) = +\infty$ poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{logx}{x} = 0$);

Forme indeterminate 0^0 ∞^0 1^∞

***1.S.** $(0^0)1$; ($x^x = e^{logx^x} = e^{xlogx}$, calcoliamo il limite dell'esponente che si presenta

nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$, trasformandola in $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 0^+} xlogx = \lim_{x\to 0^+} \frac{logx}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$, da cui $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$);

***2.S.** (∞^0) 1; ($\left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{log\left(\frac{1}{x}\right)^x} = e^{xlog\frac{1}{x}} = e^{-xlogx}$ e si procede come nell'esercizio 1);

3.S. (0^0) 1; **4.S.** (∞^0) 1; **5.S.** (1^∞) e ; **6.S.** (0^0) e;

***7.S.** (1^∞) $+\infty$; ($\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0^+} log(1+x)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{log(1+x)}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{2x}} = +\infty$);

***8.S.** (1^∞) 0 ; ($\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{1+x}}{2x}} = 0$ perché $\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{1+x}}{2x} = -\infty$);

***9.S.** (0^0) 1; ($e^{log(logx)^{x-1}} = e^{(x-1)log(logx)}$, calcoliamo il limite dell'esponente

applicando più volte la regola di De l'Hopital :

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)log(logx) = \lim_{x\to 1^+} \frac{log(logx)}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{xlogx}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = -\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^2}{xlogx} =$$

$$= -\lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{logx+1} = 0$$ …);

10.S. (∞^0) 1; **11. S.** (1^∞) $\frac{1}{e}$**;** **12. S.** (1^∞) e^{-1}; **13. S.** (0^0) 1; **14.S.** (0^0) 1; **15.S.** (0^0) 1;

16.S. (1^∞) 1; **17. S.** (∞^0) 1; **18. S.** (∞^0) 1 ;