12. Punti di non derivabilità

Consideriamo funzioni continue ma non derivabili in qualche punto del dominio.

I seguenti esempi analizzano i casi che si possono presentare in tali punti di non derivabilità.

Esempi

1) $f(x) = x|x-3|$

La funzione è continua in $\mathbb{R}$. Tenendo conto che

$$f(x) = \begin{cases} x(x-3) & per \;\; x \geq 3 \\ x(3-x) & per \; x < 3 \end{cases}$$

calcoliamo la derivata prima $\forall x \neq 3$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & per \;\; x > 3 \\ -2x+3 & per \;\; x < 3 \end{cases}$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 3^+} f'(x) = 3 = f'_+(3) \qquad\qquad \lim_{x\to 3^-} f'(x) = -3 = f'_-(3)$$

poiché

$$f'_+(3) \neq f'_-(3)$$

la funzione $f(x)$ non è derivabile in $x = 3$ in cui la retta tangente destra è diversa da quella sinistra. Il campo di derivabilità è $\mathbb{R} - (3)$, il punto $A(3;0)$ è un **punto angoloso**.

Dal segno della derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & x < \frac{3}{2} \vee x > 3 \\ 0 & x = \frac{3}{2} \\ < 0 & \frac{3}{2} < x < 3 \end{cases}$$

si deduce che

$x = \frac{3}{2}$ è punto di massimo relativo : $\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$

$x = 3$ è punto di minimo relativo : $(3;0)$

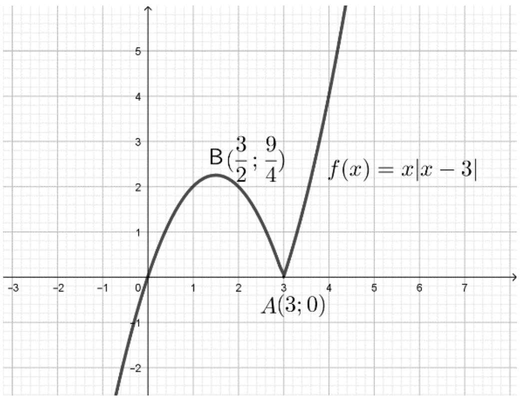


Fig. 1

2) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

La funzione è continua in $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata prima :

$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

La funzione è derivabile $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$. Risulta inoltre :

$f'(x) > 0$ per $x < 2 \vee x > 2$ e $\lim_{x \to 2^{\pm}} f'(x) = \lim_{x \to 2^{\pm}} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} = +\infty$

La funzione è crescente sia a sinistra che a destra di 2, nel punto $x = 2$ la retta tangente è parallela all'asse y . Il punto $F(2; 0)$ è un punto di flesso ascendente a tangente verticale (vedi fig. 2).

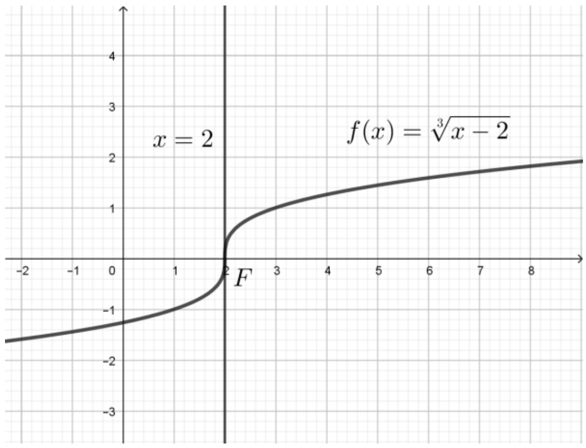


Fig. 2

3) $f(x) = \sqrt[5]{x(x+1)^2}$

La funzione è continua in $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata prima :

$f'(x) = \frac{3x+1}{5\sqrt[5]{x^4(x+1)^3}}$

La funzione è derivabile $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}$. Risulta inoltre

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & per\ x = -\frac{1}{3} \\ > 0 & per\ x < -1 \vee -\frac{1}{3} < x < 0 \vee x > 0 \\ < 0 & per -1 < x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

quindi $x = -\frac{1}{3}$ è un punto di minimo relativo : $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{\sqrt[5]{36}}{3}\right)$

e $x = -1$ è un punto di massimo relativo : $B(-1; 0)$; inoltre :

poiché : $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to -1^-} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to -1^+} f'(x) = -\infty$

nel punto $(-1; 0)$ la curva ha una sola semiretta tangente parallela all'asse y

di equazione $x = -1$. Il punto $(-1; 0)$ è una **cuspide**;

poiché : $\lim_{\Delta x \to 0^{\pm}} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = +\infty$

ed essendo la funzione crescente sia a sinistra che a destra di 0, il punto $O(0; 0)$ è un **punto di flesso**, e la curva è in tale punto tangente all'asse y.

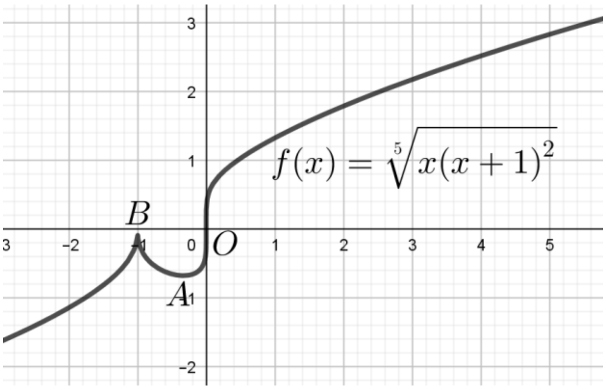


Fig. 3

Esercizi

*1) $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 2x}$

*2) $f(x) = |x|e^{-2x}$

*3) $f(x) = e^{\sqrt{|x|}}$

*4) $f(x) = 3\sqrt[3]{x+1} + |x|$

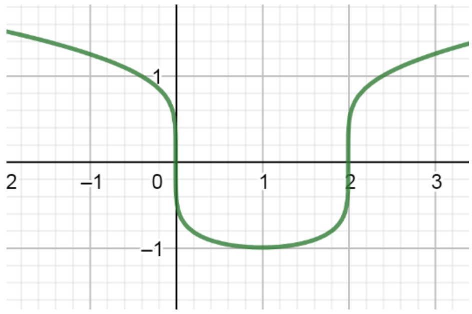
Soluzioni

***1.S**. f continua in $\mathbb{R}$, derivabile in $\mathbb{R}$ -$\{0; 2\}$,

infatti essendo $f'(x) = \frac{2x-2}{5\sqrt[5]{(x^2-2x)^4}}$ si ha:

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-2}{5\sqrt[5]{(x^2-2x)^4}} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{2x-2}{5\sqrt[5]{(x^2-2x)^4}} = +\infty$



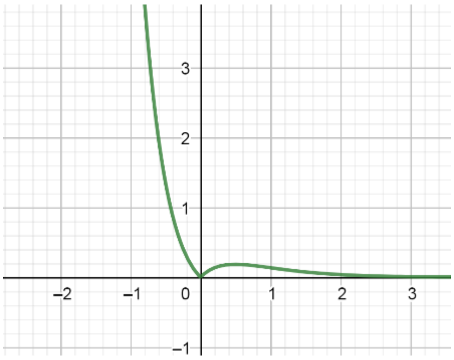
I punti (0;0) e (2;0) sono flessi a tangente verticale; minimo(1;-1)

***2.S.** f continua in $\mathbb{R}$, derivabile in $\mathbb{R}$ -$\{0\}$,infatti si ha

$f'(x) = \begin{cases} (-1+2x)e^{-2x} & per\ x < 0 \\ (1-2x)e^{-2x} & per\ x > 0 \end{cases}$, da cui :

$f'_-(0) = -1 \quad f'_+(0) = 1$; punto di minimo $x = 0$

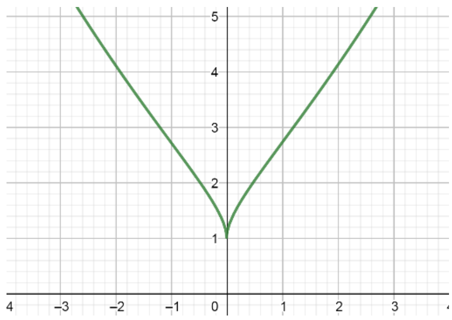
(0;0) punto angoloso; massimo rel $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2e}\right)$



***3.S.** f continua in $\mathbb{R}$, derivabile in $\mathbb{R}$ escluso $x = 0$,

infatti, essendo

$f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{\sqrt{-x}}}{2\sqrt{-x}} & per\ x < 0 \\ \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} & per\ x > 0 \end{cases}$

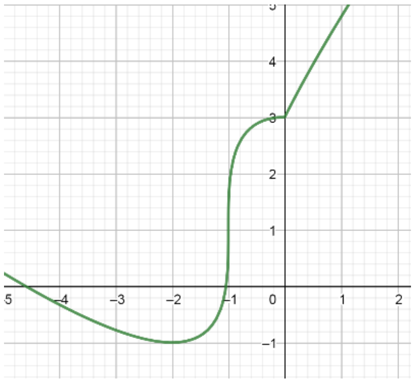


$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{e^{\sqrt{-x}}}{2\sqrt{-x}} = -\infty$

Punto di minimo x=0 (0;1) cuspide

***4.S.** f continua in $\mathbb{R}$, derivabile in $\mathbb{R}-\{-1;0\}$, infatti



$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}-1\ \forall x<0\\ \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}+1\ \forall x>0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1} f'(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}+1\right)=+\infty$$

$(-1;1)$ flesso a tangente verticale

$f'_-(0)=0$, $f'_+(0)=2$

$(0;3)$ punto angoloso; minimo(-2;-1)