5. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee

$$y'' + 2by' + cy = f(x)$$

L'integrale generale dell'equazione non omogenea è dato dalla somma:

- dell'integrale generale dell'equazione omogenea $y'' + 2by' + cy = 0$
- di una soluzione qualsiasi dell'equazione completa $y'' + 2by' + cy = f(x)$.

L'integrale particolare $y(x)$ dell'equazione data si determina tenendo conto che se:

a) $f(x) = P(x)$ $P(x)$ è un polinomio di grado p
si cerca una soluzione $y(x)$ sotto forma di polinomio di grado $\leq p + 2$;

b) $f(x) = e^{\gamma x}$ si possono presentare due casi :

- se $e^{\gamma x}$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata, si può determinare una soluzione dell'equazione completa del tipo
$$y(x) = ce^{\gamma x} ;$$
- se $e^{\gamma x}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata, si determina una soluzione dell'equazione completa del tipo
$$y(x) = (Ax^2 + Bx)e^{\gamma x}$$

c) $f(x) = c_1 sin\beta x + c_2 cos\beta x$
se $sin\beta x$ e $cos\beta x$ non sono soluzioni dell'equazione omogenea associata, si può cercare una soluzione dell'equazione completa della forma
$$y(x) = Asin\beta x + Bcos\beta x$$

Esempi

1. Consideriamo l'equazione:

$$y'' - 4y' = -2x + e^x$$

Determiniamo dapprima l'integrale generale della equazione omogenea associata

$$y'' - 4y' = 0 \qquad \text{dato da} \qquad y(x) = c_1 + c_2 e^{4x}.$$

L' integrale particolare $\overline{y(x)}$ dell'equazione completa è la somma $y_1(x) + y_2(x)$, dove:

a) $y_1(x)$ è un integrale particolare della equazione

$$y'' - 4y' = -2x$$

b) $y_2(x)$ è un integrale particolare della equazione

$$y'' - 4y' = e^x$$

Sia $y_1(x) = Ax^2 + Bx + C$, risulta $y'_1(x) = 2Ax + B$, $y''_1(x) = 2A$.

da cui

$$2A - 8Ax - 4B = -2x \Longrightarrow A = \frac{1}{4}, \ \ B = \frac{1}{8} \Longrightarrow y_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$$

Sia $y_2(x) = Ce^x$, risulta $y'_2(x) = Ce^x$, $y''_2(x) = Ce^x$, da cui

$$Ce^x - 4Ce^x = e^x \Longrightarrow C = -\frac{1}{3} \Longrightarrow y_2(x) = -\frac{1}{3}e^x$$

Perciò l'integrale generale dell'equazione data è

$$c_1 + c_2e^{4x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{3}e^x$$

2. Consideriamo l'equazione:

$$y'' + 9y = x + sinx$$

Determiniamo dapprima l'integrale generale della equazione omogenea associata

$$y'' + 9y = 0 \qquad \text{dato da} \qquad y(x) = c_1cos(3x) + c_2sin(3x).$$

L' integrale particolare $\overline{y(x)}$ dell'equazione completa è la somma $y_1(x) + y_2(x)$, dove:

a) $y_1(x)$ è un integrale particolare della equazione

$$y'' + 9y = x$$

b) $y_2(x)$ è un integrale particolare della equazione

$$y'' + 9y = sinx$$

Sia $y_1(x) = Ax^2 + Bx + C$, risulta $y'_1(x) = 2Ax + B$, $y''_1(x) = 2A$ da cui

$$2A + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = x \quad \Longrightarrow \quad A = C = 0, \ \ B = \frac{1}{9} \quad \Longrightarrow \quad y_1(x) = \frac{1}{9}x$$

Sia $y_2(x) = Asinx + Bcosx$, risulta

$$y'_2(x) = Acosx - Bsinx,$$

$$y''_2(x) = -Asinx - Bcosx$$

da cui

$$-Asinx - Bcosx + 9\,Asinx + 9Bcosx = sinx \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{8}, \ B = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{8}sinx$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione data è

$$c_1cos(3x) + c_2sin(3x) + \frac{1}{9}x + \frac{1}{8}sinx$$

3. Consideriamo l'equazione

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

Determiniamo innanzi tutto l'integrale generale della equazione omogenea associata

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad \text{dato da} \qquad \overline{y(x)} = (A + Bx)e^{-x}$$

Determiniamo, ora, un integrale particolare $y_1(x)$ dell'equazione completa.

Poiché e^{-x} è soluzione dell'equazione omogenea associata , cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$y_1(x) = (cx^2 + dx)e^{-x}\ .$$

Si ha :

$$y_1'(x) = -[cx^2 + x(d - 2c) - d]e^{-x}$$

$$y_1''(x) = [cx^2 + x(d - 4c) + 2c - 2d]e^{-x}$$

Sostituiamo nell'equazione completa e, svolti i calcoli e divisi entrambi i membri per e^{-x} si ha:

$2c = 1$ da cui $c = \frac{1}{2}$ e d qualunque , possiamo porre $d = 0$.

Quindi l'equazione particolare dell'equazione è

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x}$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione completa è dato da $\overline{y(x)} + y_1(x)$, cioè

$$y(x) = \left(A + Bx + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x}\ .$$

Esercizi

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

1. $y'' - y' = x^2$ **2.** $y'' + y = x^2$

3. $y'' - y' = 2x - x^2$ **4.** $y'' - 4y' = 2x - x^2$

5. $y'' - 4y = e^{2x}$ **6.** $y'' + 4y = e^{2x}$

7. $y'' + 25y = cosx$ **8.** $y'' - 2y' - 3y = cosx$

9. $y'' + 3y' + 2y = 1 + x$ **10.** $y'' + y' - 2y = x$

11. $y'' - 2y' - 3y = sinx$ **12.** $y'' + 4y' + 4y = x^2 - 2x$

13. $y'' + y = x$ **14.** $y'' + y = e^x$

15. $y'' + y = x + e^x$ **16.** $y'' + y = cosx$

17. $y'' - y' - 2y = 2e^x$ **18.** $y'' - y' - 2y = 2e^x + x - 1$

19. $y'' - 2y' = e^{2x}$

Osservazione

Il metodo usato per le equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti è applicabile anche a quelle lineari del primo ordine a coefficienti costanti

$$y' + ay = f(x)$$

La soluzione è la somma della somma

- dell'integrale generale dell'equazione omogenea $y' + ay = 0$

e

- di un integrale particolare dell'equazione completa
$$y' + ay = f(x)$$

con le stesse considerazioni sulla funzione $f(x)$.

Esempio

Per risolvere l'equazione

$$y' + 2y = x + 1$$

determiniamo innanzi tutto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$y' + 2y = 0$$

Si ha :

$$\frac{y'}{y} = -2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = -2dx \qquad \Rightarrow \qquad log|y| = -2x + c'$$

da cui

$$|y| = e^{-2x+c'} = e^{c'}e^{-2x} \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm e^{c'}e^{-2x}$$

Quindi, posto $c = \pm e^{c'}$, la soluzione dell'equazione omogenea è

$$y = ce^{-2x}$$

Cerchiamo, ora, una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$y = ax + b$$

Si ha $y' = a$ e, sostituendo nell'equazione data

$$a + 2(ax + b) = x + 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2ax + 2b + a = x + 1$$

Per il principio d'identità dei polinomi deve essere:

$2a = 1$ e $2b + a = 1$ da cui $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{4}$

L'integrale particolare è

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

e l'integrale generale dell'equazione è quindi

$$y = ce^{-2x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

Esercizi

Risolvere i seguenti esercizi , la cui soluzione è stata precedentemente ottenuta applicando la formula risolutiva, utilizzando il metodo sopra esposto:

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

20. $y' + 3y = 1$ **21.** $y' = 2 - y$ **21. S**. $ce^{-x}+2$

22. $y' = 4 + 2y$ **23.** $3y' - y = 5$

Determinare l'integrale particolare delle seguenti equazioni differenziali che soddisfa la condizione iniziale imposta :

24. $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **25.** $\begin{cases} y' = 2y - 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} y' = -y + 2 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$ **27.** $\begin{cases} y' = -y - 4 \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \end{cases}$

28. $\begin{cases} y' = 3y - 3 \\ y(0) = -3 \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} y' = -4y + 1 \\ y(2) = 4 \end{cases}$

30. $\begin{cases} y' + 3y + 9x = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **31.** $\begin{cases} y' = 2y - x^2 \\ y(0) = \frac{1}{4} \end{cases}$

Soluzioni

1. S. $y = c_1 + c_2e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$ **2. S.** $y = c_1cos(x) + c_2sin(x) + x^2 - 2$

3. S. $y = c_1 + c_2e^x + \frac{1}{3}x^3$ **4. S.** $y = c_1 + c_2e^{4x} + \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{32}x$

5.S. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}$ **6. S.** $y = c_1cos(2x) + c_2sin(2x) + \frac{1}{8}e^{2x}$

7.S. $y = c_1cos(5x) + c_2sin(5x) + \frac{1}{24}cosx$ **8. S.** $y = c_1\boldsymbol{e}^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{1}{5}cosx - \frac{1}{10}sinx$

9. S. $y = c_1\boldsymbol{e}^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ **10. S.** $y = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$;

11. S. $y = Ae^{-x} + Be^{3x} - \frac{1}{5}sinx + \frac{1}{10}cosx$; **12.S.** $y = (A + Bx)e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{7}{8}$;

13. S. $y = c_1sinx + c_2cosx + x$; **14. S.** $y = \frac{1}{2}e^x + c_1sinx + c_2cosx$;

15. S. $y = x + \frac{1}{2}e^{x} + c_1 sinx + c_2 cosx$; **16. S.** $y = c_1 sinx + c_2 cosx + \frac{x}{2} sinx$;

17. S. $y = Ae^{2x} + Be^{-x} - e^{x}$; **18.S.** $y = ce^{2x} + 2ce^{-x} - e^{x} - \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$;

19. S. $y = A + Be^{2x} + \frac{x}{2}e^{2x}$

20. S. ce^{-3x}+$\frac{1}{3}$ **21. S**. ce^{-x}+2 **22. S.** c$e^{2x} - 2$

23. S. c$e^{\frac{x}{3}} - 5$ **24.S.** $y = e^{x}$; **25. S.** $y = -\frac{1}{2}e^{2(x-1)} + \frac{1}{2}$

26. S. $y = -e^{-x-1} + 2$; **27. S.** $y = \frac{5}{2}e^{-x+\frac{1}{2}} - 4$; **28. S.** $y = -4e^{3x} + 1$;

29. S. $y = \frac{15}{4}e^{-4x+8} + \frac{1}{4}$; **30. S.** $y = 1 - 3x$; **31. S.** $y = \frac{2x^2+2x+1}{4}$;