4. Piano tangente e retta normale a una superficie

Si dice **piano tangente** a una superficie *S* nel suo punto $P_0(x_{0;}y_0; z_0)$ il piano che contiene tutte le rette tangenti nel punto P_0 a tutte le curve tracciate sulla superficie e passanti per P_0.

Si chiama **normale** in P_0 alla superficie *S* la retta perpendicolare al piano tangente nel punto di tangenza P_0.

a. L'equazione della superficie *S* è data in forma *esplicita*

$$z = f(x; y)$$

dove $f(x; y)$ è una funzione derivabile rispetto sia a x che a y.

.L'equazione del **piano tangente** a *S* nel suo punto $P_0(x_{0;}y_0; z_0)$ è

$$z - z_0 = f_x(x_{0;}y_0)(x - x_0) + f_y(x_{0;}y_0)(y - y_0)$$

L'equazione della **normale** a *S* nel suo punto $P_0(x_{0;}y_0; z_0)$,
se $f_x(x_{0;}y_0) \neq 0$ e $f_y(x_{0;}y_0) \neq 0$, è

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_{0;}y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_{0;}y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Nei seguenti casi la normale è data da :

se $f_x(x_{0;}y_0) = 0$ e $f_y(x_{0;}y_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \frac{y-y_0}{f_y(x_{0;}y_0)} = \frac{z-z_0}{-1} \end{cases}$

se $f_x(x_{0;}y_0) \neq 0$ e $f_y(x_{0;}y_0) = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} y - y_0 = 0 \\ \frac{x-x_0}{f_x(x_{0;}y_0)} = \frac{z-z_0}{-1} \end{cases}$

se $f_x(x_{0;}y_0) = 0$ e $f_y(x_{0;}y_0) = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}$

b. L'equazione della superficie *S* è data in forma implicita

$$F(x; y; z) = 0$$

dove *F* è derivabile rispetto alle variabili x, y, z .

L'equazione del **piano tangente** a *S* nel suo punto $P_0(x_{0;}y_0; z_0)$ è

$$F_x(x_{0;}y_0; z_0)(x - x_0) + F_y(x_{0;}y_0; z_0)(y - y_0) + F_z(x_{0;}y_0; z_0)(z - z_0) = 0$$

L'equazione della **normale** a *S* nel suo punto $P_0(x_{0;}y_0; z_0)$ è

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_{0;}y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_{0;}y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_{0;}y_0; z_0)}$$

se $F_x(x_{0;}y_0; z_0) \neq 0$, $F_y(x_{0;}y_0; z_0) \neq 0$, $F_z(x_{0;}y_0; z_0) \neq 0$.

Esercizi

Determinare l'equazione del piano tangente e della normale alla superficie data nel punto a fianco indicato :

1. $z = x^4 - 2y^3 + 2x + y - 1$ $P_0(0; 1; -2)$

2. $z = 3x^4 + y + 1$ $P_0(1; 0; 4)$

3. $z = 5x^2 + y^2 + xy - 2x$ $P_0(0; 1; 1)$

4. $z = x^2 + 3y^2 + x - 1$ $P_0(-1; 1; 2)$

5. $z = \frac{x+y}{x-y}$ $P_0(-1; 1; 0)$

6. $z = \frac{1}{x^2+y^2}$ $P_0(1; 0; 1)$

7. $z = \frac{x^4+y^4}{x}$ $P_0(1; 1; 2)$

8. $z = \sqrt{y^2 - x - 1}$ $P_0(0; 2; \sqrt{3})$

9. $z = \sqrt{xy + y} + 3x + 1$ $P_0(0; 1; 2)$

10. $z = \sqrt[3]{x^2y + 6}$ $P_0(1; 2; 2)$

11. $z = e^{x+y}$ $P_0(0; 0; 1)$

12. $z = e^{-(x^4+y^2)}$ $P_0(0; 0; 1)$

13. $z = y^2e^{x^2}$ $P_0(0; 0; 0)$

14. $z = 2xe^{-x^2y}$ $P_0(1; 0; 2)$

15. $z = log(x^2 + y^2 + 1)$ $P_0(-1; 0; log2)$

16. $z = log(x^4 + y^2)$ $P_0(0; 1; 0)$

17. $z = \log(xy + 2)$ $P_0\left(e; -\frac{1}{e}; 0\right)$

18. $z = sin(x + y)$ $P_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; 1\right)$

19. $z = sin\left(\frac{\pi}{4} + x + y\right)$ $P_0\left(\pi; \frac{\pi}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

20. $z = sinx \cdot cosy$ $P_0\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$

21. $F(x; y; z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{8} = 0$ $P_0(2; 5; 4)$

22. $F(x; y; z) = x^2 + y^2 - 2z^2 = 3$ $P_0(1; 2; 1)$

Soluzioni

1. S. calcoliamo le derivate parziali e i loro valori in $(0;1)$:

$$f_x(x;y) = 4x^3 + 2 \qquad f_x(0;1) = 2$$

$$f_y(x;y) = -6y^2 + 1 \qquad f_y(0;1) = -5$$

piano tangente : $z + 2 = 2x - 5(y-1) \Rightarrow z = 2x - 5y + 3$

retta normale : $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{-1}$;

2. S . $f_x(x;y) = 12x^3$; $\quad f_x(1;0) = 12$

$$f_y(x;y) = 1 \quad f_y(1;0) = 1$$

piano tangente $z - 4 = 12(x-1) + y \Rightarrow z = 12x + y - 8$

retta normale $\frac{x-1}{12} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 12y = x - 1 \\ y = -z \end{cases}$;

3. S. $f_x(x;y) = 10x + y - 2$; $\quad f_x(0;1) = -1$

$$f_y(x;y) = 2y + x \quad f_y(0;1) = 2$$

piano tangente $z - 1 = -x + 2(y-1) \Rightarrow z = -x + 2y - 1$

retta normale $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} z = x + 1 \\ y = -2z + 3 \end{cases}$;

4. S. $f_x(x;y) = 2x + 1$; $\quad f_x(-1;1) = -1$

$$f_y(x;y) = 6y \quad f_y(-1;1) = 6$$

piano tangente $z - 2 = -(x+1) + 6(y-1) \Rightarrow z = -x + 6y - 5$

retta normale $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-1}$;

5. S. $f_x(x;y) = -\frac{2y}{(x-y)^2} \qquad f_x(-1;1) = -\frac{1}{2}$

$$f_y(x;y) = \frac{2x}{(x-y)^2} \qquad f_y(-1;1) = -\frac{1}{2}$$

piano tangente: $z = -\frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(y-1) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$

retta normale : $\frac{x+1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{z}{-1}$;

6. S. $f_x(x;y) = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad f_x(1;0) = -2$

$f_y(x;y) = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y(1;0) = 0$

piano tangente : $z - 1 = -2(x-1) \Rightarrow z = -2x + 3$

retta normale : $\begin{cases} \frac{x-1}{-2} = \frac{z-1}{-1} \\ y = 0 \end{cases}$; vedi fig. 1

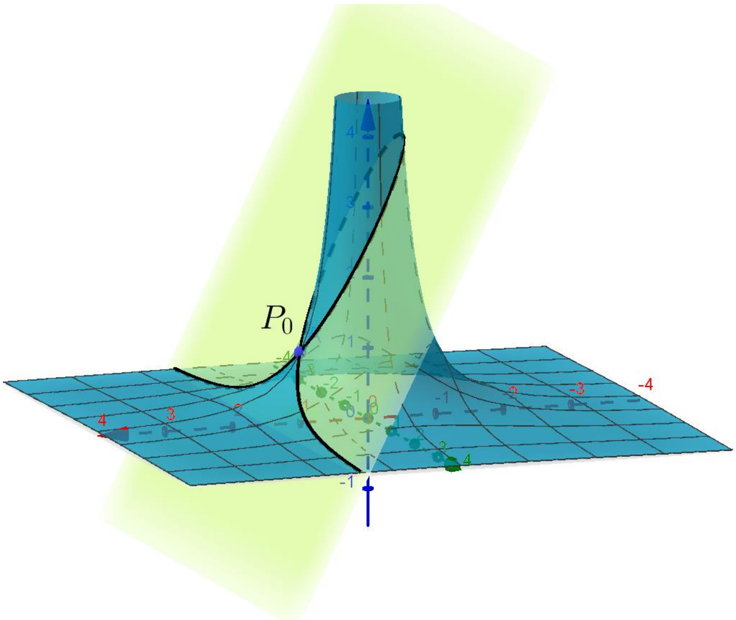

Fig. 1

7. S. $f_x(x;y) = \frac{3x^4-y^4}{x^2}$; $\quad f_x(1;1) = 2$

$f_y(x;y) = \frac{4y^3}{x} \qquad f_y(1;1) = 4$

piano tangente $z - 2 = 2(x-1) + 4(y-1) \Longrightarrow z = 2x + 4y - 4$

retta normale $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$;

8. S. $f_x(x;y) = \frac{-1}{2\sqrt{y^2-x-1}}$ $\qquad f_x(0;2) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$

$f_y(x;y) = \frac{y}{\sqrt{y^2-x-1}} \qquad f_y(0;2) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

piano tangente: $z - \sqrt{3} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}(y-2)$

retta normale : $\frac{x}{-\frac{1}{2\sqrt{3}}} = \frac{y-2}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{z-\sqrt{3}}{-1}$;

9. S. $f_x(x;y)=\frac{y}{2\sqrt{xy+y}}+3;\quad f_x(0;1)=\frac{7}{2}$

$$f_y(x;y)=\frac{x+1}{2\sqrt{xy+y}}\quad f_y(0;1)=\frac{1}{2}$$

piano tangente $z-2=\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}(y-1)\Longrightarrow 7x+y-2z+3=0$

retta normale $\frac{x}{\frac{7}{2}}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-2}{-1}$

10. S. $f_x(x;y)=\frac{2xy}{3\sqrt[3]{(x^2y+6)^2}};\quad f_x(1;2)=\frac{1}{3}$

$$f_y(x;y)=\frac{x^2}{3\sqrt[3]{(x^2y+6)^2}}\quad f_y(1;2)=\frac{1}{12}$$

piano tangente $z-2=\frac{1}{3}(x-1)+\frac{1}{12}(y-2)\Longrightarrow 4x+y-12z+18=0$

retta normale $3(x-1)=12(y-2)=-z+2;$

11. S. $f_x(x;y)=f_y(x;y)=e^{x+y};$

$$f_x(0;0)=f_y(0;0)=1$$

piano tangente $z-1=x+y$

retta normale $\mathrm{x}=\mathrm{y}=\frac{z-1}{-1};$

12. S. $f_x(x;y)=-4x^3e^{-(x^4+y^2)}\qquad f_x(0;0)=0$

$$f_y(x;y)=-2ye^{-(x^4+y^2)}\qquad f_y(0;0)=0$$

piano tangente $\propto$: $z=1$

retta normale : $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, cioè l'asse z; vedi fig. 2

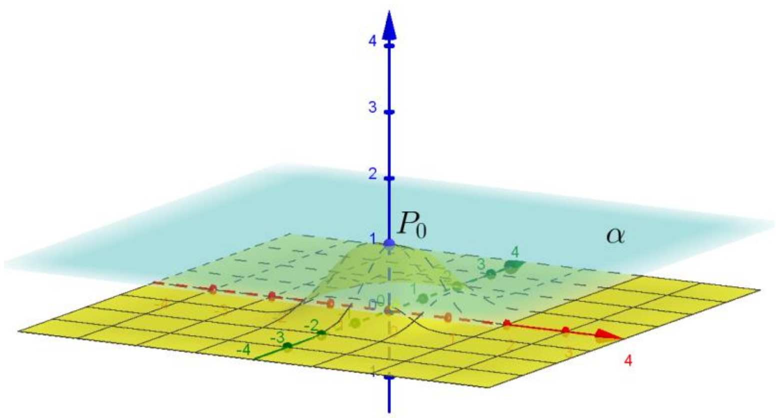

Fig. 2

13. S. $f_x(x;y) = 2xy^2e^{x^2}$ $\quad f_x(0;0) = 0$

$f_y(x;y) = 2ye^{x^2}$ $\quad f_y(0;0) = 0$

piano tangente: $z = 0$; retta normale : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, cioè l'asse z ;

14. S. $f_x(x;y) = 2e^{-x^2y}(1-2x^2y)$ $\quad f_y(x;y) = -2x^3e^{-x^2y}$;

$f_x(1;0) = 2$ $\quad f_y(1;0) = -2$

piano tangente $z - 2 = 2(x-1) - 2y \Longrightarrow z = 2x - 2y$

retta normale $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{-1}$.

15. S. $f_x(x;y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$ $\quad f_x(-1;0) = -1$

$f_y(x;y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$ $\quad f_y(-1;0) = 0$

piano tangente: $z - log2 = -(x+1)$

retta normale : $\begin{cases} \frac{x+1}{-1} = \frac{z-log2}{-1} \\ y = 0 \end{cases}$;

16. S. $f_x(x;y) = \frac{4x^3}{x^4+y^2}$ $\quad f_x(0;1) = 0$

$f_y(x;y) = \frac{2y}{x^4+y^2}$ $\quad f_y(0;1) = 2$

piano tangente: $z = 2(y-1) = 2y - 2$

retta normale : $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2z + 1 \end{cases}$;

17. S. $f_x(x;y) = \frac{y}{xy+2}$; $\quad f_x\left(e;-\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

$f_y(x;y) = \frac{x}{xy+2}$ $\quad f_y\left(e;-\frac{1}{e}\right) = e$

piano tangente $z = -\frac{1}{e}(x-e) + e\left(y+\frac{1}{e}\right) \Longrightarrow z = -\frac{1}{e}x + ey + 2$

retta normale $\frac{x-e}{-\frac{1}{e}} = \frac{y+\frac{1}{e}}{e} = \frac{z}{-1}$;

18. S. $f_x(x;y) = cos(x+y)$ $\qquad f_x\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$f_y(x;y) = cos(x+y)$ $\qquad f_y\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right) = 0$

piano tangente: $z = 1$

retta normale : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$; vedi fig. 3

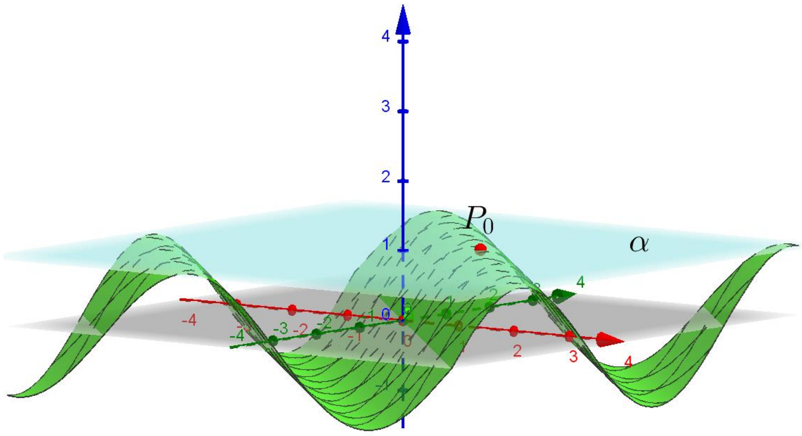

Fig. 3

19. S. $f_x(x;y) = f_y(x;y) = cos\left(\frac{\pi}{4} + x + y\right)$;

$f_x\left(\pi;\frac{\pi}{2}\right) = f_y\left(\pi;\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

piano tangente $z + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-\pi) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$

retta normale $\frac{x-\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y-\frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{z+\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}$;

20. S. $f_x(x;y) = cosx \cdot cosy$ $\qquad f_x\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$f_y(x;y) = -sinx \cdot siny$ $\qquad f_y\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{4}$

piano tangente: $z = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$

retta normale : $\frac{x-\frac{\pi}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{y-\frac{\pi}{4}}{-\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{z-\frac{\sqrt{6}}{4}}{-1}$

21. S. $F_x = \frac{x}{2}$, $F_x(P_0) = 1$, $F_y = \frac{2}{25}y, F_y(P_0) = \frac{2}{5}$, $F_z = -\frac{z}{4}$, $F_z(P_0) = -1$

piano tangente : $(x-2) + \frac{2}{5}(y-5) - (z-4) = 0 \quad \Rightarrow 5x + 2y - 5z = 0$

retta normale : $\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{\frac{2}{5}} = \frac{z-4}{-1}$;

22. S. piano tangente : $x + 2y - 2z - 3 = 0$

retta normale : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{-4}$;