Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Кафедра Інформатики
Кафедра РТІКС

КОМПЛЕКС НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

навчальної дисципліни
«Теорія масового обслуговування»

підготовки бакалавра
спеціальності 122 «Коп'ютерні науки спеціалізацій «Інформатика» та «Інформаційно-комунікаційні технології» та спеціальності 6.040302 «Інформатика».

Розробник С. В. Машталір, проф. каф. ІНФ, д.т.н.

Схвалено на засіданні кафедрою ІНФ
Протокол від 31.08.2017 № 1
Схвалено на засіданні кафедри РТІКС
Протокол від 31 серпня 2017 р. № 1

Харків 2017 р.

ЗМІСТ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

Кафедра Інформатики

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Декан факультету ПММ

_______________проф. Дорошенко В.О.
(підпис, прізвище, ініціали)

"______" ____________ 2017 р.

Р О Б О Ч А П Р О Г Р А М А
НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«Теорія масового обслуговування»

спеціальність 122 Комп’ютерні науки та інформаційні технології
(код і назва спеціальності)
освітня програма ІНФОРМАТИКА
(назва освітньої програми)

Факультет Прикладної математики та менеджменту

2017-2018 н. р.

Робоча програма з навчальної дисципліни «Теорія масового обслуговування» для студентів за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», освітня програма «Інформатика» для студентів освітньо кваліфікаційного рівня «бакалавр».

Розробник: д.т.н., професор кафедри інформатики Машталір С.В.

„ 31 " серпня 2017 р.

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри інформатики

протокол № 1 від "31" серпня 2016р.

Завідувач кафедри інформатики ___________ Є.П. Путятін

31 серпня 2016 року

Схвалено методичною комісією факультету ПММ

протокол № 10 від 31.08.2017 року

Голова методичної комісії С.М. Ієвлева

31.08.2017

1 ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень</td><td>Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Кількість кредитів 3</td><td>Галузь знань
12 Інформаційні технології</td><td rowspan="2">Цикл дисциплін самостійного вибору ВНЗ</td></tr>
<tr><td>освітня програма
«Інформатика»</td></tr>
<tr><td>Модулів 2</td><td rowspan="4">Спеціальність: 122
освітня програма
«Інформатика»</td><td rowspan="2">Рік підготовки: 2</td></tr>
<tr><td>Змістовних модулів 4</td></tr>
<tr><td>Індивідуальних завдань -</td><td rowspan="2">Семестр: 2</td></tr>
<tr><td>Загальна кількість годин 90</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних – 2,33
самостійної роботи студента – 2,66</td><td rowspan="7">Освітньо-кваліфікаційний рівень: бакалавр</td><td>Кількість годин: 90</td></tr>
<tr><td>Аудиторні: 1) лекції, год: 18</td></tr>
<tr><td>2) практичні, год:2</td></tr>
<tr><td>3) лабораторні, год: 16</td></tr>
<tr><td>4) консультації, год: 6</td></tr>
<tr><td>Самостійна робота, год: 48</td></tr>
<tr><td>Вид контролю: комб. іспит</td></tr>
</table>

2 МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Метою курсу "Теорія масового обслуговування " є знайомство студентів із теорією управління випадковими процесами в системах масового обслуговування. У рамках курсу розглядаються методи моделювання вихідних потоків та різноманітних класів систем масового обслуговування, наприклад, розглядаються методи моделювання Пуасонівського потоку, одноканальних та багатоканальних систем масового обслуговування з відмовами та очікуванням.

Студенти також одержать практичні навички створення систем масового обслуговування.

Вивчення курсу "Теорія масового обслуговування" базується на знаннях, що отримані при вивчені таких курсів, як „Теорія ймовірності”, „Математичний аналіз”.

За результатом вивчання дисципліни студенти повинні:

ЗНАТИ:

– основи формування систем масового обслуговування;

– володіти питаннями управління випадковими процесами в СМО.

ВМІТИ:

– моделювати системи масового обслуговування згідно з вихідними даними системи та характеристиками її функціонування.

3 ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль I. **Потоки вимог**

Тема 1. Предмет, ціль і задачі курсу. Потоки. Найпростіші потоки.

Тема 2. Потоки Пальма. Квазірекуррентні потоки. Потоки Ерланга.

Тема 3. Нестаціонарні, неординарні потоки, та потоки з можливою післядією.

Тема 4. Час обслуговування вимог

Змістовий модуль II. **Класифікація СМО. Класичні СМО.**

Тема 1. Класифікація СМО. Класифікація Кендалла. Критерії ефективності.

Тема 2. Стани СМО. Рівняння Чепмена-Колмогорова.

Тема 3. СМО з відмовами.

Тема 4. СМО з очікуванням.

Тема 5. Змішані СМО.

Змістовий модуль III. **Пріоритетне обслуговування.**

Тема 1. Типи пріоритетів. Дисципліни обслуговування.

Тема 2. СМО з умовними пріоритетами.

Тема 3. СМО з безумовними пріоритетами.

Тема 4. Системи з декількома чергами.

Змістовий модуль IV. **Мережі масового обслуговування.**

Тема 1. Класифікація ММО. Критерії стабільності ММО.

Тема 2. Експоненційні ММО.

4 СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	у тому числі				
		лк	пз	лб	конс	ср
Модуль 1						
Змістовий модуль І. Потоки вимог						
Тема 1. Предмет, ціль і задачі курсу. Потоки. Найпростіші потоки.	7	2	2			3
Тема 2. Потоки Пальма. Квазірекуррентні потоки. Потоки Ерланга	11	2		4		5
Тема 3. Нестаціонарні, неординарні потоки, та потоки з можливою післядією.	6	1			2	3
Тема 4. Час обслуговування вимог	6	1				5
Разом за змістовим модулем І	**30**	**6**	**2**	**4**	**2**	**16**
Модуль 2						
Змістовий модуль ІІ. Класифікація СМО. Класичні СМО.						
Тема 1 Класифікація СМО. Класифікація Кендалла. Критерії ефективності	3	1				3
Тема 2. Стани СМО. Рівняння Чепмена-Колмогорова.	3	1				3
Тема 3. СМО з відмовами.	9	1	2	4		3
Тема 4. СМО з очікуванням.	11	2	2	4		3
Тема 5. Змішані СМО.	9	1			2	3
Разом за змістовим модулем ІІ	**35**	**6**	**4**	**8**	**2**	**15**
Змістовий модуль ІІІ. Пріоритетне обслуговування						
Тема 1. Типи пріоритетів. Дисципліни обслуговування	4	1				3
Тема 2. СМО з умовними пріоритетами.	4	1				3
Тема 3. СМО з безумовними пріоритетами.	4	1				3
Тема 4. Системи з декількома чергами.	3	1				2
Разом за змістовим модулем ІІІ	**15**	**4**				**11**
Змістовий модуль IV. Мережі масового обслуговування.						
Тема 1. Класифікація ММО.	4	1				3
Тема 2. Експоненційні ММО.	6	1			2	3
Разом за змістовим модулем IV	**10**	**2**			**2**	**6**
Разом годин	**90**	**18**	**6**	**12**	**6**	**48**

5 ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

№	Назва теми	Кількість годин
		денна
1	Роз'єднання та сумування потоків	2
2	СМО з відмовами. Характеристики.	2
3	СМО з очікуванням. Характеристики.	2
	1. Загальна кількість	**6**

6 ТЕМИ ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ

№	Назва теми	Кількість годин
		денна
1	Моделювання найпростішого потоку	4
2	Моделювання СМО з відмовами.	4
3	Моделювання СМО з очікуванням	4
	2. Загальна кількість	**12**

6 САМОСТІЙНА РОБОТА

№	Назва теми	Кількість годин
		денна
1	Вивчення теоретичного матеріалу з використанням конспектів і навчальної літератури	14
2	Підготовка до лабораторних занять	14
3	Види потоків.	5
4	Класичні СМО.	5
5	Пріоритетне обслуговування.	5
6	Мережі масового обслуговування	5
	3. Загальна кількість	**48**

8 МЕТОДИ КОНТРОЛЮ

Для оцінювання роботи студента протягом семестру підсумкова рейтингова оцінка розраховується як сума оцінок за різні види контрольних заходів: контрольних та лабораторних робіт, тестування. Максимальна рейтингова оцінка протягом семестру – 60 балів.

Як форма підсумкового контролю для дисципліни використовується комбінований іспит (40 балів).

Отримані бали переводяться за національною шкалою та шкалою ECTS.

9 РОЗПОДІЛ БАЛІВ, ЯКІ ОТРИМУЮТЬ СТУДЕНТИ

Поточне тестування та самостійна робота															Сума
Змістовий модуль 1				Змістовий модуль 2					Змістовий модуль 3				Змістовий модуль 4		
Т1	Т2	Т3	Т4	Т1	Т2	Т3	Т4	Т5	Т1	Т2	Т3	Т4	Т1	Т2	
3	10	3	3	3	3	10	10	3	3	3	3	3	5	5	

															60

Шкала оцінювання: національна та ЄКТС

<table>
<tr><th rowspan="2">Оцінка з дисципліни</th><th colspan="2">Оцінка за національною шкалою</th><th rowspan="2">Оцінка за шкалою ЕКТС</th></tr>
<tr><th>екзамен</th><th>залік</th></tr>
<tr><td>96-100</td><td>5 (відмінно)</td><td rowspan="5">Зараховано</td><td>A</td></tr>
<tr><td>90-95</td><td>5 (відмінно)</td><td>B</td></tr>
<tr><td>75-89</td><td>4 (добре)</td><td>C</td></tr>
<tr><td>66-74</td><td>3 (задовільно)</td><td>D</td></tr>
<tr><td>60-65</td><td>3 (задовільно)</td><td>E</td></tr>
<tr><td>35-59</td><td rowspan="2">2 (незадовільно)</td><td rowspan="2">Не зараховано</td><td>FX</td></tr>
<tr><td>1-34</td><td>F</td></tr>
</table>

Критерії оцінювання знань та вмінь студента на іспиті:

Усний іспит (2 теоретичних питання та 1 практичних завдання):

4. «відмінно» (90 - 100 б.) – якщо студент відповів правильно на всі поставлені питання, виявив систематичні та глибокі знання навчального матеріалу, засвоїв взаємозв’язок основних понять дисципліни та їх значення для подальшої професійної діяльності;
5. «добре» (75-89 б.) – студент виявив загалом добрі знання навчального матеріалу при виконанні передбачених програмою завдань, але допустив ряд помітних помилок;
6. «задовільно»:
   4 бали в діапазоні 66-74 – студент виявив знання основного навчального матеріалу, припустив значну кількість помилок або недоліків у відповіді на запитання;
   5 бали в діапазоні 60-65 – студент виявив знання основного навчального матеріалу в мінімальному обсязі, припустив помилки, які він може усунути лише під керівництвом та за допомогою викладача.
7. «незадовільно»:

1 бали в діапазоні 35-59 – студент мав значні прогалини в знаннях основного навчального матеріалу, допускав принципові помилки;

2 бали в діапазоні 1-34 – студент не мав знань зі значної частини навчального матеріалу, допускав принципові помилки.

10 МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

10.1 Основна література

1. . Хинчин “Работы по теории массового обслуживания” М.: Наука, 1963.- 267 с.
2. Климов “Стохастические системы обслуживания” М.: Наука, 1966..- 242 с.
3. Боровков “Асимптотические методы теории массового обслуживания”.- Наука, М., 1980. 352 с.

10.2 Додаткова література

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. — 6-е изд. стер. — М.: Высш. шк., 1999.— 576 с.

10.3 Методичні посібники та вказівки:

1. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни “Теорія масового обслуговування” для студентів напряму Інформатика. Електронний варіант. Автор: Машталір С.В.
2. Методичні вказівки до організації самостійної роботи з дисципліни “ Теорія масового обслуговування ” для студентів напряму Інформатика. Електронний варіант. Автор: Кобилін О.А., Машталір С.В.

11 ІНФОРМАЦІЙНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Microsoft Visual Studio.

12. ІНДИВІДУАЛЬНІ РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ, КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

12.1 Список запитань екзамена по курсу

1. Найпростіший потік. Вивід формули, по якій розподілені прихожі заявки.
2. Характеристики найпростішого потоку, співвідношення інтенсивності й параметра, математичне очікування, дисперсія.
3. Найпростіший потік з можливою нестаціонарністю. Визначення й основні особливості.
4. Найпростіший потік з можливою неординарністю. Визначення й основні особливості.
5. Найпростіші потоки з можливою післядією. Визначення й основні особливості.
6. Рекурентні потоки без запізнювання. Визначення й основні особливості (формули).

7. Квазірекурентні потоки без запізнювання. Визначення й основні особливості (формули).
8. Потік Ерланга. Закон Ерланга.
9. Просівання потоку. Операція просівання.
10. Виробляючі функції. Розподіл імовірності. Хвости розподілу ймовірностей.
11. Рекурентні потоки із запізнюванням. Визначення й основні особливості (формули).
12. Квазірекуріентні потоки із запізнюванням. Визначення й основні особливості (формули).
13. Інтенсивність просіяного потоку. Інтенсивність потоку Ерланга.
14. Операція просівання. Особливості застосування для потоку Ерланга.
15. Навести загальні характеристики для СМО.
16. Операція компанірування. Композиція.
17. Класифікація систем масового обслуговування. Класифікація Кендала.
18. Рівняння Колмогорова для ймовірностей станів.
19. Критерії ефективності СМО. Їхньої різниці для різного виду систем.
20. Одноканальні системи масового обслуговування з відмовами. Імовірності станів, характеристики системи.
21. Одноканальні системи масового обслуговування з очікуванням. Імовірності станів, характеристики системи.
22. Одноканальні системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги. Імовірності станів, характеристики системи.
23. Одноканальні системи масового обслуговування з обмеженим часом очікування. Імовірності станів, характеристики системи.
24. Замкнуті системи масового обслуговування. Імовірності станів, характеристики системи.
25. Багатоканальні системи масового обслуговування з відмовами. Імовірності станів, характеристики системи.
26. Багатоканальні системи масового обслуговування з очікуванням. Імовірності станів, характеристики системи.
27. Багатоканальні системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги. Імовірності станів, характеристики системи.
28. Мережі масового обслуговування. Класифікація.
29. Експонентні мережі масового обслуговування. Принцип роботи, умови стабільності.
30. Системи множинного доступу. Принцип роботи, умови стабільності.
31. Системи поллінга. Принцип роботи, умови стабільності.
32. Застосування методу Монте-Карло для моделювання систем масового обслуговування.
33. Час обслуговування заявки. Загальні принципи.
34. Види дисциплін обслуговування при обслуговуванні із пріоритетом.
35. Опис роботи систем з відносним пріоритетом. Пріоритети, що будуються лінійно.
36. Опис роботи систем з абсолютним пріоритетом.

37. Опис роботи систем з відносним пріоритетом. Пріоритети, що задають пріоритетними функціями.

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

«Теорія масового обслуговування»

підготовки бакалавра
спеціальності 122 «Коп'ютерні науки» спеціалізацій «Інформатика» та «Інформаційно-комунікаційні технології» та спеціальності 6.040302 «Інформатика».

Електронний документ

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою ІНФ
Протокол № 1
від 31.08.2017

кафедрою РТІКС
Протокол № 1
від 31.08.2017

Харків 2017 р.

Конспект лекцій з дисципліни «Теорія масового обслуговування» підготовки бакалавра спеціальності 122 «Коп’ютерні науки» спеціалізацій «Інформатика» та «Інформаційно-комунікаційні технології» та спеціальності 6.040302 «Інформатика». [Електронний документ] / Упоряд.: С.В. Машталір. − Харків: ХНУРЕ, 2017. − 60с.

Упорядник С.В. Машталір, проф. каф. ІНФ, д.т.н., проф.

Лекція №1

Теорія масового обслуговування (ТМО) – наука, що вивчає черги і обслуговування в порядку черги.

У створенні черг є елемент випадковості.

Момент появи викликів – випадковий. Але є елемент випадковості в самому обслуговуванні. Залежно від того, чи перебуває система обслуговування з одного приладу або з багатьох, вона називається одноканальної або багатоканальної. Важливо не тільки час очікування в черзі, а й час обслуговування.

Ще завдання ТМО: черги з пріоритетом; черга з відмовами (клієнти можуть прочекати певний час, потім йдуть).

Знаючи характеристики черги, параметри системи, розрахувати систему, тобто включити оптимальну кількість приладів, що б були мінімальні черги і менше холостий хід приладів.

Приклад: телефонна станція.

Виробляючі функції.

Якщо є послідовність $\{a_n\}$, то її виробляючою функцією називається статечний ряд $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ з коефіцієнтами з цієї послідовності: $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ в тому випадку, якщо цей статечний ряд сходиться.

Зокрема, якщо абс. сходиться числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$, то статечний ряд сходиться в області $|x|<1$ і в цій області виробляюча функція існує.

Якщо є цілочисельна випадкова величина, тобто приймаюча значення $0,1,2,\dots,n$ з ймовірностями $p_0,p_1,p_2,\dots,p_n$, то послідовність $\{p_n\}$ називається розподілом ймовірностей цієї випадкової величини і якщо для цієї послідовності побудувати виробляючу функцію $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, то ця функція називається виробляє функцією випадкової величини.

Оскільки $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, то виробляюча функція існує в інтервалі $|x|<1$ $p_n = P\{\xi = n\}$.

Розглянемо ймовірність $q_n = P\{\xi > n\} = \sum_{j=n+1}^{\infty} p_j$. Ці ймовірності q_n називаються хвостами розподілу ймовірностей.

Для послідовності цих хвостів теж можна побудувати виробляючу функцію $Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$.

Теорема 1 (зв'язок між $Q(x)$ і $P(x)$)

$$Q(x)=\frac{1-P(x)}{1-x}.$$

Доведення:

Уявімо вираз q_n в вигляді виробляючої функції:

$Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} p_j x^n$; отримуємо порядок підсумовування рівний $\sum_{j=1}^{\infty} p_j \sum_{n=0}^{j-1} x^n$. Внутрішня сума – кінцева геометрична прогресія зі знаменником x дорівнює $\sum_{j=1}^{\infty} p_j \frac{1-x^j}{1-x} = \frac{1-P_0-P(x)+P_0}{1-x} = \frac{1-P(x)}{1-x}$.

Теорема 2

Математичне очікування $M\xi = P'(1) = Q(1)$ $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$. В області збіжності степеневий ряд можна поелементно диференціювати $P'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n p_n x^{n-1}$, $P'(1)=\sum_{n=1}^{\infty} n p_n = M\xi$.

За першою теоремою $Q(x)(1-x)=1-p(x)$; $Q'(x)(1-x)-Q(x)=-P'(x)$; $Q(1)=P'(1)$.

Теорема 3 (Дисперсія)

$M\xi^2 = P''(1) + P'(1) = 2Q'(1) + Q(1)$;

$M\xi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n$; $\qquad P''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-2} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n n x^{n-2}$;

$P''(1) = M\xi^2 - P'(1)$; $M\xi^2 = P''(1) + P'(1)$.

Продифференциювавши двічі $Q(x)(1-x) = 1 - P(x)$, отримуємо другу формулу.

Теорема 4 (про виробляючу функцію композиції)

Якщо ξ, η – незалежні величини, а $\zeta = \xi + \eta$, то розподіл ймовірнісної суми – композиція розподілу ймовірностей доданків, тобто якщо:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= P\{\xi = n\} \\ b_n &= P\{\eta = n\} \\ c_n &= P\{\zeta = n\} \end{aligned}\right\} \text{то } c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 .$$

Ця операція – операція компанірування.

$\{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\}$ послідовності, що входять до операції, називаються компонентами, а результат називається композицією.

Якщо $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k$ і якщо всі складові однаково розподілені, $\{a_n\}$ - розподіл ймовірностей, то розподіл ξ – k-кратна композиція

$$\underbrace{\{a_n\} * \{a_n\} * \ldots * \{a_n\}}_{k \text{ раз}} = \{a_n\}^{*k} .$$

Теорема 5

Коли розподіли ймовірностей компаніруються їх виробляючи функції перемножуються: тобто

Виробляюча функція композиції дорівнює добутку виробляють функцій компонентів

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \bullet \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n \beta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0\beta_0 & \alpha_0\beta_1 & \alpha_0\beta_2\ldots\alpha_0\beta_n\ldots \\ \alpha_1\beta_0 & \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2\ldots\alpha_1\beta_n\ldots \\ \alpha_2\beta_0 & \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2\ldots\alpha_2\beta_n\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \alpha_n\beta_0 & \alpha_n\beta_1 & \alpha_n\beta_2\ldots\alpha_n\beta_n\ldots \end{pmatrix}$$

Підсумовування по діагоналі на k-ой діагоналі сума індексів k.

Якщо $\{a_n\}*\{b_n\}=\{c_n\}$

$$\left.\begin{array}{l} A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \\ B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \\ C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \end{array}\right\}\text{Дов. C(x)=A(x)}\cdot\text{B(x)}$$

Перемножимо ряди A і B:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k=0}^{n}a_kx^k\cdot b_{n-k}x^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\underbrace{\sum_{k=0}^{0}a_kb_{n-k}}_{c_n\text{ по правилу компонування}}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=C(x)\,.$$

Якщо одну і ту ж послідовність $\{a_n\}$ компанірувати k раз $\{a_n\}^{*k}$, то вироблююча функція - $[A(x)]^k$.

Теорема 6

Розглянемо $S_N=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_N$, ξ_i однаково розподілені; їх число випадково.

Припустимо, що $P\{\xi_j=n\}=f_n$, $P\{N=n\}=q_n$.

Хочемо знайти розподіл ймовірностей S_N.

Якщо вироблююча функція суми S_N $-$ $P(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_kx^k$ де, $p_k=P\{S_N=k\}$, то $P(x)=G(F(x))$, де $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nx^n$, а $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_nx^n$.

Доведення: (за формулою повної ймовірності)

$$p_k=P\{S_N=k\}=\sum_{n=0}^{\infty}p\{N=n\}\,.$$

$$P\{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=k\}=\sum_{n=0}^{\infty}q_n\{f_k\}^{*n}\,.$$

$$P\{x\}=\sum_{k=0}^{\infty}p_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}g_n\{f_k\}^{*n}x^k=\sum_{n=0}^{\infty}g_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\{f_k\}^{*n}x^k\right).$$

Внутрішня сума – виробляюча функція n-кратної композиції, тобто виробляюча функція в n-го ступеня

$$=\sum_{n=0}^{\infty}g_n[F(x)]^n$$

$$\left.\begin{aligned}P(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}g_n[F(x)]^n\\ G(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}g_n x^n\end{aligned}\right\}P(x)=G(F(x)).$$

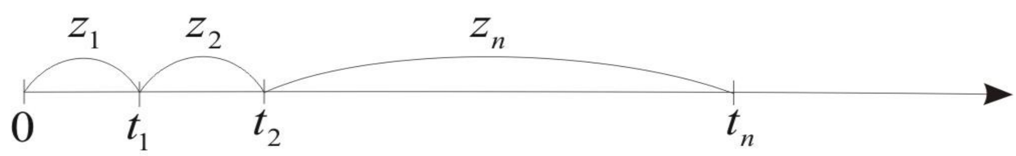
Якщо треба знайти p_n, а знаємо $P(x)$, то потрібно розкласти $P(x)$ в степеневий ряд $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n x^n$.

Лекція №2

Вхідний потік. Найпростіший потік.

Вхідним потоком називається послідовність випадкових надходжень заявок.

Тому випадковий потік відкладається на осі часу.



z_1 - час до першої заявки.

z_2 - інтервал між першою і другою заявкою і т.д.

$z_k=t_k-t_{k-1}$

Потік заявок називається найпростішим, якщо виконуються властивості:

1). Стаціонарність

2). Відсутність післядії

3). Ординарність.

Стаціонарність: ймовірність появи заявки на інтервалі $(a, a+t)$ не залежить від a.

Відсутність післядії полягає в тому, що якщо два інтервали часу перетинаються, то поява заявок на цих інтервалах часу незалежні.

Ординарність – для малих інтервалів часу ймовірність появи однієї заявки приблизно пропорційна довжині інтервалу часу, а ймовірність появи великого числа заявок нескінченно мала в порівнянні з величиною інтервалу часу.

Якщо $\varphi(t)$ – ймовірність появи принаймні однієї заявки за час t.

$\psi(t)$ – ймовірність появи принаймні двох заявок за час t, то

$$\varphi(t) = \lambda t + 0(t) \qquad t \to 0$$

$$\psi(t) = 0(t) \qquad t \to 0$$

де λ – ***інтенсивність потоку***. Тобто середня кількість подій за одиницю часу.

Властивість ординарності означає, що практично неможлива поява більш ніж однієї заявки в один і той же момент часу.

Доведемо що ***найпростіший потік є пуассоновським***, тобто що розподіл числа викликів за час підкоряється закону Пуассона.

Позначимо через $p_n(t)$ ймовірність того, що за час t надійшло n заявок. З огляду на стаціонарного потоку все одно $(0,t)$ або $(a, a+t)$.

Якщо $N(t)$ - це число заявок, що надійшли за t, то $p_n(t) = \{N(t) = n\}$

а). $n = 0$. Будемо шукати $p_0(t)$

Беремо інтервал $t + \Delta t$

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t) p_0(\Delta t) \qquad (1)$$

(Відсутність післядії - інтервали часу незалежні).

З іншого боку $p_0(\Delta t) = 1 - \varphi(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t - 0(\Delta t)$

Підставимо $p_0(\Delta t)$ в (1):

$$p_0(t+\Delta t)=p_0(t)-\lambda p_0(t)\Delta t-p_0(t)0(\Delta t),$$

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}=-\lambda p_0(t)-p_0(t)\frac{0(\Delta t)}{\Delta t}$$

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Rightarrow$ права частина має ліміт $-\lambda p_0(t)\Rightarrow$ ліва також, тобто існує похідна $\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)$, $\frac{dp_0}{p_0}=-\lambda dt$.

Вирішуючи рівняння отримаємо:

$$\ln p_0(t)=-\lambda t+\ln C$$

$$p_0(t)=Ce^{-\lambda t} \qquad (*)$$

Знайдемо С:

$$t=0;\ p_0(0)=1$$

З іншого боку $p_0(0)=C$ (З (*)) С=1

$$\boxed{p_0(t)=e^{-\lambda t}}$$

Будемо шукати $p_n(t)$ при $n\ge 1$

$$p_n(t+\Delta t)=p_n(t)p_0(\Delta t)+p_{n-1}(t)p_1(\Delta t)+\underbrace{p_{n-2}(t)p_2(\Delta t)+\ldots+p_0(t)p_n(\Delta t)}_{r} \quad (2)$$

Покажемо, що $r=0(\Delta t)$

$r=\sum\limits_{k=2}^{n}p_k(\Delta t)p_{n-k}(t)\le\sum\limits_{k=2}^{n}p_k(\Delta t)\le$ (Відкинемо другі множники - їх замінимо 1) $\le\sum\limits_{k=2}^{n}p_k(\Delta t)=\psi(\Delta t)$

Тобто $\underset{r=0(\Delta t)}{0\le r\le\psi(\Delta t)=0(\Delta t)}$ ($r\ge 0$ так як це похідна ймовірностей)

$$p_n(t+\Delta t)=p_n(t)p_0(\Delta t)+p_{n-1}(t)p_1(\Delta t)+0(\Delta t) \qquad (3)$$

$$p_0(\Delta t)=1-\varphi(\Delta t)=1-\lambda\Delta t-0(\Delta t)$$

$$p_1(\Delta t)=\varphi(\Delta t)-\psi(\Delta t)=(\text{так як } \varphi(\Delta t)=p_1(\Delta t)+p_2(\Delta t)+\ldots)=\lambda\Delta t+0(\Delta t)$$

$$\psi(\Delta t)=p_2(\Delta t)+p_3(\Delta t)+\ldots$$

Підставляємо це в формулу (3), отримаємо:

$$p_n(t+\Delta t)=p_n(t)-p_n(t)\lambda\Delta t+p_{n-1}(t)\lambda\Delta t+0(\Delta t)$$

$$\frac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{\Delta t}=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)+\frac{0(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\frac{dp_n}{dt}=-\lambda p_n+\lambda p_{n-1} \qquad (4)$$

Є послідовність $\{p_n(t)\}$ невідомих функцій, рівняння пов'язує попередню і останню функцію.

Розв’язавши рівняння маємо $\boxed{p_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$.

Для закону Пуассона з параметром μ математичне очікування і дисперсія дорівнюють μ, таким чином для пуассонівського потоку

$$M[N(t)]=D[N(t)]=\lambda t .$$

$A(t)=P\{z_k<t\}$ – функція розподілу часу між заявками.

В силу стаціонарності від k не залежить.

$P\{z_1<t\}=p_0(t)=e^{-\lambda t}$ - ймовірність того, що за час t не буде жодної заявки.

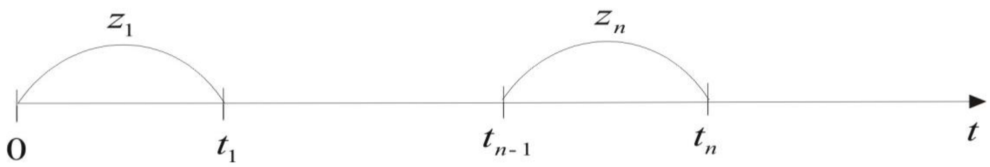
$$\begin{cases} A(t)=1-e^{-\lambda t} & t>0 \\ A(t)=0 & t<0 \end{cases}$$

Така функція розподілу називається показовою.

Таким чином, для ***найпростішого потоку інтервали між заявками мають показовий розподіл***.

Лекція №3

Рекуррентний та квазірекуррентний потік.



Виклики надходять у випадкові моменти часу. Послідовність викликаючих моментів часу називається викликаючим потоком.

Позначимо $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – інтервали часу міх викликаючи ми моментами.

Визначення 1. Якщо послідовність випадкових величин $z_1, z_2, \ldots, z_n$ незалежна в сукупності, то потік викликаючих моментів називається потоком з обмеженою післядією.

Визначення 2. Позначимо $A_n(t) = P\{z_n < t\}$ $n = 1, 2, \ldots$. Якщо починаючи з номера 2 всі ці функції рівні між собою $A_2(t) = A_3(t) = \ldots = A_n(t) = \ldots$, тобто якщо $z_2, z_3, \ldots$ однаково розподілені, то викликаючий потік називається рекурентним потоком з запізненням. (Окремий випадок потоку з обмеженою післядією).

Визначення 3. Якщо $A_1(t)$ теж збігається з усіма подальшими, то потік з обмеженою післядією називається рекурентним потоком без запізнювання або просто рекурентним потоком. Також має назву ***потока Пальма.***

Рекурентний потік з запізненням характеризується двома функціями розподілу:

$$A_1(t) = P\{z_1, t\}$$

$$A(t) = P\{z_k, t\} \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Для рекуррентного потоку без запізнювання

$$A_1(t) = A(t)$$

Позначимо $B_n(t) = P\{t_n < t\}$ – функція розподілу n-го викликаючого моменту.

$t_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ Якщо складові незалежні, то функція розподілу суми – композиція функцій розподілу доданків.

Зокрема, якщо $z_2 + \ldots + z_n$ однаково розподілені, z_1 має функцію розподілу A, то $B_n(t) = A_1(t) * [A(t)]^{*(n-1)}$.

Для рекуррентного потоку без запізнювання

$$B_n(t) = [A(t)]^{*n}$$

Припустимо, що є щільність $A'(t) = a(t)$ (для випадку потоку з запізненням ще є $A_1'(t) = a_1(t)$).

Тоді також є $B_n'(t) = b_n(t)$. Вона знаходиться як композиція щільностей $b_n(t) = a_1(t) * [a(t)]^{*(n-1)}$.

Розглянемо для цих щільностей перетворення Лапласа:

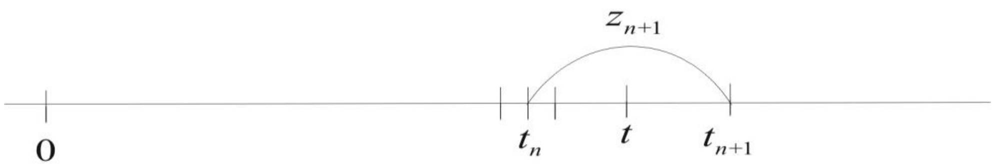
$$\alpha(S) = \int_0^\infty e^{-St} a(t) dt$$

$$\alpha_1(S) = \int_0^\infty e^{-St} a_1(t) dt$$

$$\beta_n(S) = \int_0^\infty e^{-St} b_n(t) dt$$

Нас цікавить ймовірність того, що за час від 0 до t з'явиться n викликів – $P_n(t)$.

Завдання в тому, що б цю функцію висловити через функції, що характеризують потік $A(t)$ та $A_1'(t)$.



n-й викликаючий момент $t_n < t$, а $t_{n+1} > t$.

$P_n(t) = P\{t_n < t, t_{n+1} > t\}$

Якщо для t_n щільність розподілу b_n, то ймовірність попадання в конкретну точку – 0. Тому розглянемо ймовірність попадання в окіл точки τ.

$t_n = \tau \quad P\{\tau < t < \tau + d\tau\} = b_n(\tau) d\tau$

$$z_{n+1} > t - \tau : P\{z_{n+1} > t - \tau\} = 1 - A(t - \tau)$$

Так як τ - довільне (між 0 і t), за формулою повної ймовірності отримуємо інтеграл:

$$P_n(t) = \int_0^t [1 - A(t - \tau)] b_n(\tau) d\tau \qquad (1)$$

Продифференцируем (1) по t:

Покажемо, що права частина має похідну, звідси і ліва теж.

Диференціюючи за формулою Лейбшіца:

$$\left[\int_0^t [1-A(t-\tau)]b_n(\tau)d\tau\right]' = [1-\overbrace{A(t-t)}^{A(0)=0}]b_n(t)-\int_0^t 1-a(t-\tau)b_n(\tau)d\tau$$

$$p_n(t)=P_n'(t)=b_n(t)-\int_0^t a(t-\tau)b_n(\tau)d\tau \text{ (згортка)} \qquad (2)$$

У формулі (2) перейдемо до перетворення Лапласа:

$$\int_0^t e^{-St}p_n(t)dt=\beta_n(S)-\alpha(S)\beta_n(S) \qquad (3)$$

композиція- $F_1(x)*F_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(x-y)f_2(y)dy$

$$\left(f_2(y)=F_2'(y)\right)$$

Для щільностей $f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-y)f_2(y)dy$.

Якщо випадкова величина позитивна, то виходить $\int_0^x$, тобто композиція переходить в згортку.

$b_n(t)=a_1(t)*[a(t)]^{*(n-1)}$. Згортка, тому що для негативних t вони рівні 0.

Тому $\beta_n(S)=\alpha_1(S)[\alpha(S)]^{n-1}$

β_n підставимо в (3):

$$p_n \div \alpha_1(S)[\alpha(S)]^{n-1}-\alpha_1(S)[\alpha(S)]^n \qquad n\geq 1$$

$$P_n(t)\div\frac{\alpha_1(S)[\alpha(S)]^{n-1}-\alpha_1(S)[\alpha(S)]^n}{S} \qquad (4)$$

Для $n=0$ потрібна окрема формула:

$$P_0(t)=P\{z_1>t\}=1-A_1(t)$$

$$a_1(t)\div\alpha_1(S)$$

$$A_1(t)\div\frac{\alpha_1(S)}{S}$$

$$1\div\frac{1}{S}$$

$$\boxed{P_0(t)\div\frac{1-\alpha_1(S)}{S}} \qquad (5)$$

Вироблююча функція $P(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)x^n$.

Перетворення Лапласа для неї:

$$\Pi(S,x)=\int_0^{\infty}e^{-st}P(t,x)dt$$

Оскільки вироблююча функція розглядається тільки в області збіжності $(|x|<1)$, то можна виробляючу функцію почленно інтегрувати.

Перетворення Лапласа суми дорівнює сумі перетворення Лапласа:

$$\Pi(S,x)=\int_0^{\infty}e^{-st}P(t,x)dt$$

$$\Pi(S,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}e^{-st}P(t,x)dt\right]x^n$$

Перетворення Лапласа суми дорівнює сумі перетворення Лапласа:

$$\Pi(S,x)=\int_0^{\infty}e^{-st}P(t,x)dt$$

$$\Pi(S,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}e^{-st}P(t,x)dt\right]x^n$$

Сюди можна підставити перетворення Лапласа з (4) в (5)

$$\Pi(S,x)=\frac{1-\alpha_1(S)}{S}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_1(S)}{S}\underbrace{\left[\alpha^{n-1}(S)x^n-\alpha^n(S)x^n\right]}_{\text{геометрична прогресія}} \qquad \begin{aligned}a_1&=x(1-\alpha(s))\\ q&=\alpha x\end{aligned}$$

$$\Pi(S,x)=\frac{1-\alpha_1(S)}{S}+\frac{\alpha_1(S)}{S}\left[\frac{x(1-\alpha(S))}{1-x\alpha(S)}\right]=\frac{1-\alpha_1-x\alpha+x\alpha\alpha_1+x\alpha_1-x\alpha\alpha_1}{S[1-x\alpha(S)]}=\frac{(1-\alpha_1)+x(\alpha_1-\alpha)}{S[1-x\alpha]}$$

$$\boxed{\Pi(S,x)=\frac{[(1-\alpha_1(S))]+x[(\alpha_1(S)-\alpha(S))]}{S[1-x\alpha(S)]}}$$

Підсумовуючи: Якщо дані $A(t)$, $A_1(t)$, а треба знайти $P_n(t)$, то ми беремо від $A(t)$ і $A_1(t)$ похідні $a(t)$, $a_1(t)$ для них знаходимо перетворення Лапласа $\alpha(t)$, $\alpha_1(t)$; підставляємо їх у формулу для $\Pi(S,x)$ – перетворення Лапласа для виробляючої функції, по ній відновлюємо оригінал $P(t,x)$ – виробляючу функцію і розкладаємо виробляючу функцію в ряд за ступенями x:

$$P(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}p(t)x^n.$$

Коефіцієнти розкладання – шукані ймовірності.

Якщо потік без запізнювання $A = A_1$, $\alpha = \alpha_1$ в чисельнику друга складова 0, то:

$$\boxed{\Pi(S,x) = \frac{1-\alpha_1(S)}{S[1-x\alpha(S)]}}$$

Приклад:

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\alpha(S) = \frac{\lambda}{S+\lambda}$$

$$\Pi(S,x) = \frac{1-\dfrac{\lambda}{S+\lambda}}{S\left[1-\dfrac{x\lambda}{S+\lambda}\right]} = \frac{1}{S+\lambda-x\lambda}$$

Оригінал - показова функція

$$p(t,x) = e^{-\lambda(1-x)t}$$

Тепер в ряд за ступенями x;

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \Rightarrow P(t,x) = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda x t)^n}{n!}$$

$$P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda x t)^n}{n!}.$$

Т.ч. для того, що б рекурентний потік був пуассонівським, необхідно і достатньо, щоб інтервали між заявками були розподілені по показовому закону.

Квазірекуррентний потік.

Припустимо, що є рекурентний викликаючий потік. Але в кожен викликає момент можливий не один виклик, а в кожен викликаючий момент може надійти випадкове число N викликів і для N задано розподілів ймовірностей.

$P\{N=k\}=f_k$, $k=0,1,2,\ldots$ однаково для всіх викликаючих моментів $\sum_{k=0}^{\infty} f_k = 1$. Позначимо $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$ виробляюча функція цієї послідовності.

$\hat{p}_n(t)$ – ймовірність того, що за $(0,t)$ надійде n викликів.

$$\hat{P}_n(t)=\sum_{m=0}^{\infty} P\{\alpha=m\}\underbrace{\{N_1+N_2+\ldots+N_m=n\}}_{\text{складний розподіл}}$$

α – кількість викликаючи моментів.

$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{P}_n(t)x^n = P(t,\Phi(x))$, де $P(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)x^n$ – виробляюча функція потоку викликаючих моментів, $\hat{P}(t,x)$ – виробляюча функція потоку викликаючих моментів для квазірекуррентного потоку.

Перетворення Лапласу для $P(x,t)$:

$$\prod(x,s)=\int_0^{\infty} e^{-st}P(t,x)dt$$

$$\prod(x,s)=\frac{[1-\alpha_1(s)]+x[\alpha(s)-\alpha_1(s)]}{S[1-x\alpha(s)]}$$

для рекурентного потоку без запізнювання - аналогічно.

Аналогічно знаходиться для квазірекуррентного потоку перетворення Лапласа виробляючої функції.

А саме:

Якщо ми запишемо $\hat{\prod}(x,s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\hat{p}(t,x)dt=\int_0^{\infty} e^{-st}p(\Phi(x),t)dt=\prod(\Phi(x),s)$.

Тобто якщо в перетворенні Лапласа виробляючої функції рекуррентного потоку x підставити $\Phi(x)$, то отримаємо перетворення Лапласа виробляючої функції квазірекуррентного потоку.

$$\hat{\prod}(x,s)=\frac{[1-\alpha_1(s)]+\Phi(x)[\alpha(s)-\alpha_1(s)]}{S[1-\Phi(x)\alpha(s)]}$$

$\alpha_1(S)=\alpha(S)$ – якщо без запізнювання.

Лекція 4

Просіювання потоку

Потік, в якому деякі слова можуть втрачатися, називається просіяним потоком.

Потік викликів ми будемо називати первісним потоком. Залежно від того, скільки втрачається між кожною парою прийнятих викликів, будемо розрізняти потоки.

Кількість втрачених викликів буде регульованою, а не випадковою.

Якщо первинний потік пуассонівський і між кожною парою прийнятих викликів втрачається k викликів, то такий потік називається ***потоком Ерланга*** k***-го порядку.***

$Э_0$ – первісний потік.

У загальному випадку k випадково і для цієї випадкової величини задається розподіл ймовірностей.

Лема.

Якщо первинний потік рекурентний без запізнень, то при будь-якої операції просіювання просіяний потік теж рекурентний без запізнювання. (без доведення)

$A(t) = P\{z_k < t_k\}$ – функція розподілу інтервалів між викликами $\forall k$. $k = 1, 2, \ldots$

Для просіяного потоку $B(t) = p\{\overline{z}_k < t\}$, де $\overline{z}_k$ – інтервал між прийнятими викликами $\overline{z}_k = \overline{t}_k - t_{k-1}$.

Функція розподілу інтервалів характеризує просіяний потік (від k вона теж не залежить)

Завдання: знаючи $A(t)$, знайти $B(t)$ в залежності від операції просіювання.

Операція просіювання

Характеризується розподілом ймовірностей $\{f_k\}$, де f_k – ймовірність того, що викликів втрачається між кожною парою прийнятих.

Оскільки потік рекурентний, то цей розподіл ймовірностей не залежить від того, в які інтервали часу розглядаються втрати.

Будемо характеризувати найпростіший потік послідовностями $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k\}$, що складаються з 0 і 1

$\delta_i = 0$, якщо i-й виклик втрачається.

$\delta_i = 1$, якщо i-й виклик приймається.

Імовірність будь-якої такої послідовності можна визначити знаючи розподіл пропущених викликів.

Зручно розглядати число пропусків до появи першого виклику.

Припустимо, що є тільки одна одиниця в кінці $P\{\underbrace{0,\ldots,0}_{k},1\}$ – до першого отриманого виклику k пропускається $P\{\underbrace{0,\ldots,0}_{k},1\} = f_k$

$f_0 = P\{1\}$ перший надійшов дзвінок, пропущених немає.

$P\{0\} = 1 - f_0$ – ймовірність того, що перший виклик пропускається.

$$P\{00\} + P\{01\} = P\{0\}$$

Тому $P\{00\} = 1 - f_0 - f_1$ і т.д.

$$P\{000\} = P\{00\} - P\{001\} = 1 - f_0 - f_1 - f_2$$

$$P\{\overset{k}{0\ldots0}\} = 1 - f_0 - f_1 - f_2 - \ldots - f_{k-1} = \sum_{j=k}^{\infty} f_j \,,\ \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j = 1\right)$$

Якщо є будь-який набір 0 і 1, його можна розбити на цикли, що складаються або з 0 і 1 одиниці в кінці, або тільки з 0 і тому ці цикли незалежні, то ймовірність послідовності – добуток ймовірностей входять до неї циклів.

$$P\{0011100010\} = f_2 f^2{}_0 f_3 (1 - f_0)$$

Позначимо через N число пропущених викликів. Тоді $B(t) = P\{\bar{z}_1 < t\}$ знайдеться за формулою повної ймовірності, тобто або число втрат – 0 і час до виклику в початковий $< t$, або
$B(t) = p\{\bar{z}_1 < t\} = P\{N = 0\}P\{z_1 < t\} + P\{N = 1\}P\{z_1 + z_2 < t\} + P\{N = 2\}P\{z_1 + z_2 + z_3 < t\} + \ldots =$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} P\{N=n\}P\{\sum_{k=1}^{n+1} P\{z_k<t\}=\sum_{n=0}^{\infty} f_n[A(t)]^{*(n+1)}$$

$$B(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n[A(t)]^{*(n+1)}$$

Якщо про диференціювати

$$b(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n[a(t)]^{*(n+1)}$$

$$a(t)\div\alpha(S);\ \ b(t)\div\beta(S).$$

Так як при згортці оригіналів перетвор. Лапласа перемножуються.

$$\beta(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n[\alpha(S)]^{n+1}.$$

Якщо $F(S)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ – виробляюча функція послідовності, то $\boxed{\beta(t)=\alpha(S)F(\alpha(S))}$.

За цією формулою, знаючи початковий потік і операцію просіювання, можна отримати характеристику просіяного процесу.

За $\beta(S)$ знаходимо $b(t)$, по $b(t)$ – $B(t)$.

Інтенсивність просіяного потоку.

(Середнє число заявок за одиницю часу) Зворотно-пропорційна середньому часу між двома заявками.

Якщо a - інтенсивність потоку, а інтервал між двома заявками має функцію розподілу $A(t)$ і $a(t)=A'(t)$, то інтенсивність зворотно-пропорційна математичному очікуванню.

$$a^{-1}=\int_0^{\infty} ta(t)dt$$

Для просіяного $b^{-1}=\int_0^{\infty} tb(t)dt$.

Якщо $\int_0^{\infty} e^{-St} f(t)dt$ продиферецируємо по S та знайдемо

$$\frac{d}{dS}\int_0^{\infty} e^{-St} f(t)dt/_{S=0}=-\int_0^{\infty} te^{-St}b(t)dt/_{S=0}=-\int_0^{\infty} tf(t)dt$$

Тому для початкового потоку математичне очікування інтервалу часу між заявками:

$$\int_0^\infty ta(t)dt = -\alpha'(0)$$

Аналогічно $\int_0^\infty tb(t)dt = -\beta'(0)$

Але $\beta(S) = \alpha(S)F(\alpha(S))$

$$\beta'(S) = \alpha'(S)F(\alpha(S)) + \alpha'(S)\alpha(S)F'(\alpha(S))$$

$$\beta'(0) = \alpha'(0)\left[F(\alpha(0)) + \alpha(0)F'(\alpha(0))\right]$$

$\alpha'(0) = -a^{-1}$ a – інтенсивність первісного потоку.

$\beta'(0) = -b^{-1}$ b – інтенсивність просіювання.

$\alpha(0) = \int_0^\infty a(t)dt = 1$ (перетворення Лапласу, при $S = 0$)

$$F(\alpha(0)) = F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n = 1 \; (x = 1)$$

$F'(1) =$ математичному очікуванню $= \sum_{n=0}^{\infty} nf_n$.

$$\boxed{b = \frac{a}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} nf_n}} \tag{*}$$

Інтенсивність потоку Ерланга.

$\{f_k\}$ – розподіл ймовірностей числа пропущених заявок.

Потік Ерланга k-го порядку: $f_k = 1$; $f_k = 0$, $n \neq k$.

Початковий потік пуассонівський і значить, час очікування першої заявки в первісному потоці і час між заявками мають одну функцію розподілу з параметром a:

$$A(t) = 1 - e^{-at}$$

a дає інтенсивність початкового потоку.

$$\lambda^{-1} = \int_0^\infty tA'(t)dt = \int_0^\infty tae^{-at}dt = \frac{1}{a}$$

Т.ч. $a = \lambda$.

Інтенсивність потоку Ерланга k-го порядку дорівнює

$$b = \frac{a}{1+k} \text{ з } (*).$$

Лекція №5

Нестаціонарний пуассонівський потік.

Потік володіє властивостями ординарності і відсутності післядії, але він має змінну інтенсивність, тобто змінну щільність.

Для стаціонарного потоку параметр λ – середнє число заявок в одиницю часу.

Середнє число викликів за t $m(t) = \lambda t$.

Якщо $m(t)$ - середнє число заявок, що надійшли від 0 до t, то на будь-якій ділянці часу від t до $t + \Delta t$ середня інтенсивність визначається:

$\lambda_{\text{середнє}} = \dfrac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t}$ і миттєва інтенсивність $\lambda(t) = m'(t)$.

Оскільки властивість ординарності і відсутності післядії зберігаються, то інтенсивність залежить лише від тривалості інтервалу t.

Але якщо через $a = a(t_0, t_0 + t)$ визначимо середнє число заявок на цьому інтервалі, то a_0 буде залежати від t_0

$$a = a(t_0, t_0 + t) = \int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(\tau) d\tau$$

Потік виходить пуассонівський, тобто ймовірність того, що буде n заявок на $(t_0, t_0 + t)$:

$$P(t_0, t_0 + t) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}, \text{ де } a = a(t_0, t).$$

Якщо через $F_{t_0}(t)$ – позначити функцію розподілу очікування однієї заявки на інтервалі $(t_0, t_0 + t)$, то $F_{t_0}(t) = 1 - e^{-a}$, де залежить від t, t_0 через a.

$f_{t_0}(t) = a' e^{-a}$.

Зважаючи на $a = \int\limits_{t_0}^{t_0+t} \lambda(\tau)d\tau$, то $a'(t) = \lambda(t_0 + t)$.

Найпростіший потік з можливою неординарністю.

Найпростіший потік з можливою неординарністю має властивості стаціонарності і відсутністю післядії. Вимоги в такому потоці можуть надходити не по одному, а відразу групами (пакетами). В цьому випадку всі вимоги, які приходять одночасно, об'єднуються в пакети, ймовірність надходження двох або більше числа пакетів за проміжок часу t є величина, нескінченно мала по відношенню до t. Кожен пакет, виходячи з визначення, містить ходячи б одну вимогу.

Можливість надходження k вимог для потоку з можливою неординарністю з урахуванням ймовірності p_m знаходження m вимог в пакеті

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{k} \left[\frac{(\lambda t)^n}{n!} \sum_{\sum\limits_{j=1}^{n} m_j = k} \prod_{j=1}^{n} p_{mj} \right], \text{ при } \sum_{\sum\limits_{j=1}^{n} m_j = k} \prod_{j=1}^{n} p_{mj} = \begin{cases} 1, \textit{якщо } \text{к} = 0, \\ 0, \textit{якщо } \text{к} \geq 1. \end{cases}$$

Найпростіші потоки з можливою післядією.

Потік, що має кінцеве значення параметра і володіє властивостями стаціонарності і ординарності є найпростішим потоком з можливою післядією. Умовна ймовірність надходження деякого числа вимог на заданому проміжку часу t такого потоку обчислюється при припущенні про передісторію потоку (про надходження вимог до цього проміжку часу) і може відрізнятися від безумовної ймовірності того ж події.

Ймовірність надходження вимог k за даний проміжок часу t для потоку з можливою післядією буде виглядати наступним чином

$$P_k(t) = -\lambda \int_0^t (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x))dx$$

Де $\varphi_k(t)$ – функція Пальма-Хінчина.

Функція $\varphi_k(t)$ являє собою ймовірність надходження k вимог за час t за умови, що в початковий момент цього проміжку t надходить хоча б одна (а в силу ординарності потоку рівно одна) вимога (ця початкова вимога не входить в число k вимог за час t).

Показовий закон розподілу часу обслуговування.

Часом обслуговування називається час, що витрачається кожним вузлом обслуговування на одну вимогу.

Час обслуговування характеризує пропускну здатність кожного вузла обслуговування, не пов'язане з оцінкою якості обслуговування і є випадковою величиною.

Це пояснюється неідентичністю вузлів обслуговування і відмінністю в попиті на обслуговування окремих вимог. Наприклад, що надходять на ремонт вагони мають не справності самого різного характеру, потрапляють в різні ремонтні бригади, тому час на обслуговування для різних вагони не буде однаковим.

У багатьох задачах теорії масового обслуговування закон розподілу часу обслуговування передбачається показовим і описується виразом

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

Параметр μ характеризує середню швидкість обслуговування вимог.

Класифікація систем масового обслуговування.

Системи, в яких, з одного боку, виникають масові запити (вимоги) на виконання будь-яких видів послуг, а, з іншого боку, відбувається задоволення цих запитів, називаються системами масового обслуговування.

Система масового обслуговування включає наступні елементи: джерело вимог, вхідний потік вимог, черга, обслуговуючий пристрій (обслуговуючий апарат, канал обслуговування), що виходить потік вимог.

Системи масового обслуговування класифікують за різними ознаками. Однією з ознак є очікування вимоги початку обслуговування. Відповідно до цього ознакою системи поділяються на такі види:

1) системи масового обслуговування з втратами (відмовами);
2) системи масового обслуговування з очікуванням;
3) системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги;
4) системи масового обслуговування з обмеженим часом очікування.

Системи масового обслуговування, у яких вимоги, що надходять в момент, коли всі прилади обслуговування зайняті, отримують відмову і губляться, називаються системами з втратами або відмовами.

Системи масового обслуговування, у яких можлива поява як завгодно довгій черзі вимог до обслуговуючого пристрою, називаються системами з очікуванням.

Системи масового обслуговування, що допускають чергу, але з обмеженим числом місць в ній, називаються системами з обмеженою довжиною черги.
Системи масового обслуговування, що допускають чергу, але з обмеженим терміном перебування кожного вимоги в ній, називаються системами з обмеженим часом очікування.

За кількістю каналів обслуговування СМО діляться на одноканальні і багатоканальні.

За місцем знаходження джерела вимог СМО діляться на розімкнуті, коли джерело знаходиться поза системою, і замкнуті, коли джерело знаходиться в самій системі. До останнього виду належить, наприклад, верстатний ділянку, в якому верстати є джерелом несправностей, а отже, і вимог на їх обслуговування.

Однією з форм класифікації систем масового обслуговування є кодова (символьний) класифікація Д. Кендалла. При цій класифікації характеристику системи записують у вигляді трьох, чотирьох або п'яти символів, наприклад A / B / C, де A - тип розподілу вхідного потоку вимог, B - тип розподілу часу обслуговування, S - число каналів обслуговування.

Для експоненціального розподілу приймають символ M, для будь-якого (довільного) розподілу - символ G. Запис M / M / 3 означає, що вхідний потік вимог пуассоновский (найпростіший), час обслуговування розподілено по експонентному закону, в системі є три канали обслуговування.

Четвертий символ вказує допустиму довжину черги, а п'ятий - порядок відбору (пріоритету) вимог.

Критерії ефективності СМО

При вирішенні завдань, пов'язаних з масовим обслуговуванням, велике значення має правильний вибір критеріїв, що визначають досліджуваний процес. Одна і та ж система обслуговування може характеризуватися з різних точок зору різними критеріями ефективності. Вибір того чи іншого критерію повинен проводитися в кожному конкретному випадку виходячи з тих завдань, які ставляться перед системою. Перерахувати всі критерії, які можуть або могли б бути корисними у всіх завданнях масового обслуговування, важко, тому обмежимося найбільш суттєвими і найбільш часто використовуваними.

Критерії ефективності систем обслуговування з втратами.

1. Імовірність відмови дорівнює ймовірності того, що всі обслуговуючі апарати опиняться зайнятими. Імовірність відмови визначає, в якій мірі дана система обслуговування здатна задовольнити надходить потік вимог. Цей критерій (ймовірність відмови) не пов'язаний з якістю обслуговування всередині системи тих вимог, які були прийняті на

обслуговування. Він дає тільки зовнішню оцінку здатності системи приступити до обслуговування надійшов вимоги.

2. Ступінь завантаження обслуговуючої системи може характеризуватися таким критерієм, як середнє число зайнятих апаратів.
3. Більш повно завантаження системи може характеризуватися законом розподілу кількості зайнятих апаратів.
4. Може бути корисний такий критерій, як середня кількість втрачених вимог за певний проміжок часу.

Критерії ефективності систем обслуговування без втрат

Довжина черги є випадковою величиною. Як характеристики довжини черги можна використовувати її математичне очікування. Перелік критеріїв:

1. Математичне очікування довжини черги.
2. Час очікування початку обслуговування.
3. Закон розподілу початку обслуговування (закон розподілу часу очікування вдається знайти не завжди, в цих випадках доводиться користуватися більш простими критеріями).
4. Середня довжина черги, повна характеристика якої може бути задана законом розподілу довжини черги.
5. Середнє число зайнятих обслуговуючих апаратів (це число - величина випадкова).
6. Імовірність мати більш m одиниць в черзі в момент при заданому початковому стані системи.

Критерії ефективності системи обслуговування змішаного типу

Критерії, що характеризують протікання процесу обслуговування в системах змішаного типу, в основному збігаються з тими, які були перераховані для задач першої і другої груп. Особливі критерії для обслуговування систем змішаного типу такі:

1. Час, витрачений на обслуговування тих вимог, які покинуть систему до закінчення обслуговування.

2. Сумарний час, витрачений усіма апаратами системи.

Часткові критерії в залежності від специфіки досліджуваних конкретних процесів можуть бути отримані з цих основних з урахуванням особливостей кожного процесу.

Лекція 7.

СМО з відмовами. M / M / 1. Стани системи обслуговування

Система обслуговування складається з одного приладу, стан її в кожен момент часу залежить від того, зайнятий прилад або вільний.

Тоді систему можна розглядати як ланцюг Маркова з двох станів: A_0 - вільний, A_1 - зайнятий. Знайти ймовірність переходу з одного стану в інший.

Вважається, що якщо є заявки і одна сходить з обслуговування, то інша негайно надходить. Припустимо, що потік заявок пуассоновский з параметром і обслуговування експоненціальне з параметром b.

Це означає, що ймовірність надходження принаймні однієї заявки за Δt:

$\varphi_1(\Delta t) = a\Delta t + 0(\Delta t)$ а ймовірність надходження принаймні двох заявок: $\psi_1(\Delta t) = 0(\Delta t)$.

Так само ймовірність закінчення хоча б одного обслуговування за Δt:

$\varphi_2(\Delta t) = b(\Delta t) + 0(\Delta t)$, а хоча б двох: $\psi_2(\Delta t) = 0(\Delta t)$.

Позначимо $\xi(\Delta t)$ - число заявок, що надійшли за Δt. Через $\eta(\Delta t)$- число обслужених заявок. Тоді ζ - число змін у системі:

$\zeta(\Delta t) = \xi(\Delta t) + \eta(\Delta t)$

Ймовірність $P\{\zeta(\Delta t) \geq 2\} = 0(\Delta t)$

$P\{\zeta(\Delta t) = 2\} = 0(\Delta t)$ зважаючи на:

$P\{\zeta(\Delta t) \geq 2\} = 0(\Delta t)[1 - \varphi_2(\Delta t)] + [1 - \varphi_1(\Delta t)]0(\Delta t) + [a\Delta t + 0(\Delta t)] + [b\Delta t + 0(\Delta t)]$

Позначимо:

$$P_{01}(t) = P\{A_1 / A_0\}$$

$$P_{00}(t) = P\{A_0 / A_0\}$$

$$P_{10}(t) = P\{A_0 / A_1\}$$

$$P_{11}(t) = P\{A_1 / A_1\}$$

Достатньо підрахувати P_{00} та P_{11} зважаючи на: $P_{01} = 1 - P_{00}$ та $P_{10} = 1 - P_{11}$.

$$P_{00}(t+\Delta t) = P_{00}(t)P_{00}(\Delta t) + P_{01}(t)P_{01}(\Delta t)$$

$$P_{11}(t+\Delta t) = P_{10}(t)P_{01}(\Delta t) + P_{11}(t)P_{11}(\Delta t) \qquad (1)$$

Знайдемо перехідні ймовірності за Δt, які входять в перші формули:

$p_{00}(\Delta t)$ - або не буде жодної заявки, або буде по щонайменше 2 зміни:

$$p_{00}(\Delta t) = (1 - a\Delta t + 0(\Delta t))(1 - b\Delta t + 0(\Delta t)) + 0(\Delta t) = (1 - a\Delta t - b\Delta t) + 0(\Delta t) \qquad (2)$$

(Раз заявок не буде, то обслуговування теж не буде)

Аналогічно, або не буде змін, або по щонайменше 2 штуки:

$$p_{11}(\Delta t) = p_{00}(\Delta t) = (1 - a\Delta t - b\Delta t) + 0(\Delta t) \qquad (3)$$

$p_{01}(\Delta t)$ – заявок з'явилося на одну більше, ніж обслуговування:

$$p_{01}(\Delta t) = b\Delta t + 0(\Delta t) \qquad (4)$$

Зайнята система стала вільною, p_{10} – обслуговувань на одне більше:

$$p_{10}(\Delta t) = b\Delta t + 0(\Delta t) \qquad (5)$$

Підставимо все це в (1) ($p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t)$):

$$p_{00}(t+\Delta t) = p_{00}(t)(1 - a\Delta t - b\Delta t) + (1 - p_{00}(t))(b\Delta t) + 0(\Delta t)$$

$$p_{00}(t+\Delta t) = (\underbrace{1 - p_{11}(t)}_{p_{01}(t)})a\Delta t + p_{11}(t)(1 - a\Delta t - b\Delta t) + 0(\Delta t) \qquad (6)$$

$$\frac{p_{00}(t+\Delta t) - p_{11}(t)}{\Delta t} = -(a+b)p_{00}(t) + b + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\frac{p_{11}(t+\Delta t) - p_{11}(t)}{\Delta t} = -(a+b)p_{11}(t) + a + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}$$

При $\Delta t \to 0$ дифференцируємо рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_{00}}{dt} = -(a+b)p_{00} + b \\ \dfrac{dp_{11}}{dt} = -(a+b)p_{11} + a \end{cases}$$

Система повинна вирішуватися при початкових умовах:

$p_{00}(0) = p_{11}(0) = 1$

Вільний член в диференціальному рівнянніі – Const, тому частинний розв'язок шукається у вигляді:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{p}_{00}(t) &= A\\ p_{11}(t) &= B\end{aligned}\right\}\begin{cases}-(a+b)A+b=0\\ -(a+b)B+a=0\end{cases}$$

$$A=\frac{b}{\cancel{a}+\cancel{2}b};\ B=\frac{b}{\cancel{2}a+b}$$

Загальне рішення однорідних рівнянь - логарифми. Тому спільне рішення неоднорідних

$$p_{00}(t)=C_1e^{-(a+b)t}+\frac{b}{a+b}$$

$$p_{11}(t)=C_2e^{-(a+b)t}+\frac{b}{a+b}$$

C_1 та C_2 з початкових умов:

$$C_1=1-\frac{b}{a+b}=\frac{a}{a+b}$$

$$C_2=1-\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a+b}$$

$$p_{00}(t)=\frac{e^{-(a+b)t}+b}{a+b}\qquad p_{01}=1-p_{00}$$

$$p_{11}(t)=\frac{e^{-(a+b)t}+a}{a+b}\qquad p_{10}=1-p_{11}.$$

Багатоканальні системи з відмовами.

Системи, в якій число обслуговуючих приладів >1, називаються багатоканальними.

Система має n каналів. Надходить заявка надходить на будь-який вільний прилад; якщо всі прилади зайняті, заявка отримує відмову.

Будемо вважати, що надходить потік заявок пуассонівський з параметром λ, а обслуговування експоненціальне з параметром μ, однаковим для всіх приладів. Стан системи обслуговування описується числом зайнятих в даний момент приладів:

$A_0, A_1, \ldots, A_k$ – можливі стани системи.

A_k - k приладів обслуговування зайнято $0 \le k \le n$.

$p_0(t), p_1(t), \dots, p_k(t)$ – ймовірності цих станів в момент часу t.

$\xi(t)$ – число заявок, що надійшли від 0 до t. (Тому що пуассонівський, все одно за $(0,t)$ або за (t_0, t_0+t)).

$\eta(t)$ – кількість обслуговуваних заявок за той же самий час.

На кожному приладі обслуговування експоненціальне, це означає, що якщо обслуговування вже йде, час, що залишився, має ту ж функцію розподілу, як з початкового моменту часу.

$\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$ - число змін в системі за час $(0,t)$.

За малі проміжки часу Δt:

$$P\{\xi(\Delta t) \ge 1\} = \lambda\Delta t + 0(\Delta t)$$

$$P\{\xi(\Delta t) \ge 2\} = 0(\Delta t)$$

Звідси слідує що $P\{\xi(\Delta t) = 1\} = \lambda\Delta t + 0(\Delta t)$.

$$P\{\xi(\Delta t) = 0\} = 1 - \lambda\Delta t + 0(\Delta t)$$

Аналогічним умовам підпорядковується обслуговування на кожному приладі.

Якщо через $\eta_1(\Delta t), \eta_1(\Delta t), \dots, \eta_n(\Delta t)$ позначити число заявок, що обслуговуються на 1-му, 2-му, -м приладі, то

$$P\{\eta_i(\Delta t) \ge 1\} = \mu\Delta t + 0(\Delta t) \qquad 1 \le i \le n$$

$$P\{\eta_i(\Delta t) = 1\} = \mu\Delta t + 0(\Delta t)$$

$$P\{\eta_i(\Delta t) = 0\} = 1 - \mu\Delta t + 0(\Delta t)$$

$$P\{\eta_i(\Delta t) \ge 2\} = 0(\Delta t)$$

$\eta(t)$ – число обслужених на всіх приладах разом; $P\{\eta(t) = e\}$ визначається біноміальним законом. На e приладах пройшло обслуговування, на $n-e$ не минуло.

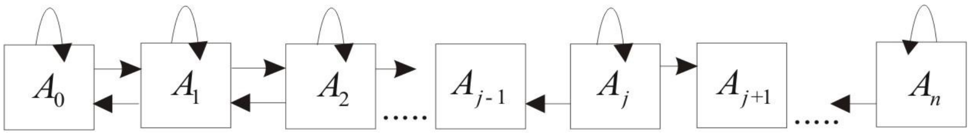
$$P\{\eta(\Delta t) = e\} = C_n^e (\mu\Delta t)^e [1 - \mu(\Delta t)]^{n-e} + 0(\Delta t)$$

$P\{\eta(\Delta t) = 1\} = \underset{C_n}{n}\ \mu\Delta t\ \ ((1-\mu(\Delta t))^{n-e}$ еквівалентно 1 все інше входить в $0(\Delta t)$

$$P\{\eta(\Delta t) \ge 2\} = 0(\Delta t)$$

$$P\{\eta(\Delta t)\geq 1\}=n\mu\Delta t+0(\Delta t)$$
$$P\{\eta(\Delta t)=0\}=1-n\mu\Delta t+0(\Delta t)$$

Звідси: $P\{\xi(\Delta t)\geq 2\}=0(\Delta t)$



Ймовірності переходу з i в j-й стан за час Δt, якщо $|i-j|\geq 2-0(\Delta t)$

$P_{ij}(\Delta t)=0(\Delta t)$ тому що відбулося щонайменше 2 зміни.

З точністю до $0(\Delta t)$ вважаємо, що з стану A_0 можливо або перейти в A, або залишитись на місці.

З $A_j (1\leq j\leq n-1)$ можливо або залишитись на місці, або в A_{j-1}, або в A_{j+1}.

Для A_n знову два можливих переходу.

$P_{ij}(t)$ – знову система дифференцыйних рівнянь, тобто A_0 та A_n – виняткові, для них потрібні окремі рівняння:

$$j=0;\quad P_{i0}(t+\Delta t)=P_{i0}(t)P_{00}(\Delta t)+P_{i1}(t)P_{i0}(\Delta t)+0(\Delta t)$$

$$P_{i0}(t+\Delta t)=P_{i0}(t)\left[1-\lambda\Delta t+0(\Delta t)\right]+P_{i1}(t)\mu\Delta t+0(\Delta t)$$

(P_{00} – вільная система залишилась вільною, тобто заявок не надійшло)

(P_{10} – один канал був зайнятий та відбулося обслуговування)

$$\frac{P_{i0}(t+\Delta t)-P_{i0}(t)}{\Delta t}=-\lambda P_{i0}(t)+\mu P_{01}(t)+\frac{0(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\frac{dP_{i0}(t)}{dt}=-\lambda P_{i0}(t)+\mu P_{01}(t) \qquad (1)$$

$$1\leq j\leq n-1:$$

$$P_{ij}(t+\Delta t)=P_{i,j-1}(t)P_{j-1,j}(\Delta t)+P_{ij}(t)P_{jj}(\Delta t)+P_{i,j+1}(t)P_{j+1,j}(\Delta t)+0(\Delta t)=$$

$$=P_{i,j-1}(t)\lambda\Delta t+P_{ij}(t)(1-\lambda\Delta t)(1-j\mu\Delta t)+P_{i,j+1}(t)(j+1)\mu\Delta t+0(\Delta t)$$

($P_{j-1,j}$ – зайнятих приборів стало на один більше, P_{jj} – не надійшло жодної заявки та жоден канал не звільнився, $P_{j+1,j}$ – один з $j+1$ каналів звільнився)

$\lambda\Delta t\cdot j\mu\Delta t$ – нескінченно мала.

Перенесемо ліворуч $P_{ij}(t)$, розділимо все на Δt та перейдемо до $\lim\limits_{\Delta t\to 0}$:

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = P_{i,j-1}(t) - (\lambda + j\mu)P_{ij}(t) + (j+1)\mu P_{i,j+1}(t) \qquad (2)$$

$$1 \le j \le n-1 \quad j = n:$$

$$P_{in}(t+\Delta t) = P_{i,n-1}(t)P_{n-1,n}(\Delta t) + P_{in}(t)P_{nn}(\Delta t) + 0(\Delta t) =$$

$$= P_{i,n-1}(t)\lambda\Delta t + P_{in}(t)[1 - n\mu\Delta t] + 0(\Delta t)$$

(P_{nn} - жоден з зайнятих каналів не звільнився).

Відповідно цьому:

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lambda P_{i,n-1}(t) - n\mu P_{in}(t)$$

Початкові умови:

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \ne j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Будь-яка система обслуговування з плином часу стає стаціонарною, бо отримана система рівнянь дає ергодичний ланцюг Маркова: встановлюється режим, що не залежить від вихідного стану.

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = P_j \text{ (від } i \text{ не залежить)}$$

Важливі характеристики в сталому режимі. Граничні ймовірності отримані з системи диференціальних рівнянь, якщо самі ймовірності замінити граничними, а похідні замінити нулями - система алгебраїчна для знаходження ймовірностей в стаціонарному режимі:

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ \lambda P_{j-1} - (\lambda + j\mu) + P_j + (j+1)\mu P_{j+1} = 0 \qquad 1 \le j \le n-1 \\ \lambda P_{n-1} + n\mu P_n = 0 \end{cases}$$

Додаткова умова $\sum_{j=0}^{n} P_j = 1$.

При такій додатковій умові система має єдине рішення (з першого рівняння):

$$P_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0$$

Подставляючи $j = 1$, маємо p_1, p_0:

$$P_2 = \frac{(\lambda + \mu)\frac{1}{\mu}P_0 - \lambda P_0}{2\mu} = \frac{\lambda^2}{2\mu^2}P_0$$

Методом математичної індукції доведемо:

$$P_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}P_0$$

Припустимо, що формула вірна для $j-1, j$:

$$P_j = \frac{(\lambda + j\mu)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!} - \lambda\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-1}\frac{1}{(j-1)!}}{(j+1)!\,\mu}P_0 = \frac{(\lambda + j\mu)\lambda^j - \lambda^j \mu j}{\mu^{j+1}(j+1)!}P_0 = \frac{\lambda^{j+1}}{\mu^{j+1}(j+1)!}P_0$$

Що й потрібно було довести.

Позначимо $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$ – відносна щільність потоку заявок, що припадають на середній час обслуговування (***навантаження*** на систему).

$\frac{1}{\mu} = \bar{t}_{\text{обс}}$ – середній час обслуговування.

$\frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{t}_{\text{обс}} = \rho$

Якщо λ – щільність, число заявок за середній час – ρ - середнє число заявок, яке відноситься до середнього часу обслуговування.

Тобто:

$$P_j = \frac{\rho^j}{j!}P_0;\ P_0\sum_{j=0}^{n}\frac{\rho^j}{j!} = 1;\ P_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n}\frac{\rho^j}{j!}}$$

$$\boxed{P_j = \frac{\rho^j}{j!\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}}}$$

Ймовірності стану системи при сталому режимі (***перший розподіл Ерланга***).

До ***основних характеристик якості обслуговування*** розглянутої СМО відносяться:

імовірність відмови $P_{отк}$

$$P_{отк} = P_N = \frac{\rho^N / N!}{\sum_{i=0}^{N} \rho^i / i!};$$

середнє число зайнятих вузлів обслуговування $M_{зан}$

$$M_{зан} = \rho(1 - P_N);$$

середнє число вільних вузлів обслуговування $M_{св}$

$$M_{св} = N - M_{зан}.$$

У системах з відмовами події відмови й обслуговування становлять повну групу подій, звідси

$$P_{отк} + P_{обс} = 1.$$

На підставі наведеного вище виразу відносна, пропускна здатність визначається по формулі

$$Q = P_{обс} = 1 - P_{отк} = 1 - P_N.$$

Абсолютна пропускна здатність СМО з відмовами дорівнює

$$A = \lambda P_{обс}.$$

Коефіцієнт зайнятості вузлів обслуговування визначається відношенням середнього числа зайнятих каналів до загального числа каналів:

$$K_з = \frac{M_{зан}}{N}.$$

Лекція 8.

Система обслуговування одним приладом з обмеженою чергою.

Кожна заявка, що надійшла в систему, змушуючи прилад зайнятим, стає в чергу.

Черга обмежена числом n; заявка застала таку чергу, залишає таку систему.

Стан систем описується числом заявок, що стоять в даний момент в черзі. $n+1$ стан $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, де A_i - i заявок в черзі (n включає ту заявку, яка в даний момент обслуговується).

Система буде повністю описана, якщо знайдемо $p_{ij}(t)$.

Простий однорідний ланцюг Маркова, ймовірності переходу не залежать від того, скільки заявок було обслужено до того:

Чепман-Колмогоров: $p_{ij}(t+\Delta t)=\sum_{r=0}^{n}p_{ir}(t)p_{rj}(\Delta t)$ потік заявок пуассонівський з параметром a, обслуговування експоненціально з параметром b.

$p_{ij}(\Delta t)=0(\Delta t)$ (якщо $|i-j|\ge 2$).

Тому формулу Чепман -Колмогорова можна переписати так:

$$p_{ij}(t+\Delta t)=p_{i,j-1}(t)p_{j-1,j}(\Delta t)+p_{ij}(t)p_{jj}(\Delta t)+p_{i,j+1}(t)p_{j+1,j}(\Delta t)+0(\Delta t)$$

Коли $j=0, j-1$ не має сенсу.

Коли $j=n, j+1$ не має сенсу.

Запишемо окремо рівняння для $j=0, j=n$ та всіх інших

$$\begin{cases} p_{i0}(t+\Delta t)=p_{i1}(t)p_{10}(\Delta t)+p_{i0}(t)p_{00}(\Delta t)+0(\Delta t) \\ 1\le j\le n-1: \\ p_{ij}(t+\Delta t)=p_{i,j-1}(t)p_{j-1,j}(\Delta t)+p_{ij}(t)p_{jj}(\Delta t)+p_{i,j+1}(t)p_{j+1,j}(\Delta t)+0(\Delta t) \\ p_{in}(t+\Delta t)=p_{i,n-1}(t)p_{n-1,n}(\Delta t)+p_{in}(t)p_{nn}(\Delta t)+0(\Delta t) \end{cases} \quad (3)$$

(Ймовірність звільнення системи, коли i заявок в черзі)

$p_{jj}(\Delta t)$ – або жодна з них не надійде і жодна з них не буде обслужена; або буде обслужена і надійде нових заявок однакову кількість:

$$p_{jj}(\Delta t)=(1-a\Delta t-b\Delta t+0(\Delta t))+0(\Delta t)$$

$p_{j-1,j}(\Delta t)$ – кількість заявок в черзі збільшилася на 1 (або 1 надійде і жодна з них не буде обслужена)

$$p_{j-1,j}(\Delta t)=a\Delta t(1-b\Delta t)+0(\Delta t)=a\Delta t+0(\Delta t)$$

$p_{j+1,j}(\Delta t)$ – черга зменшилася на 1

$p_{j+1,j}(\Delta t)=b\Delta t+0(\Delta t)$ (Аналогічно попередньому)

Підставимо ці ймовірності переходу за Δt в (3):

$$\begin{cases} p_{i0}(t+\Delta t) = p_{i0}(t)(1-a\Delta t)\, p_{i1}(t) b\Delta t + 0(\Delta t) \\ 1 \le j \le n-1: \\ p_{ij}(t+\Delta t) = p_{i,j-1}(t) a\Delta t + p_{ij}(t)(1-a\Delta t - b\Delta t) + p_{i,j+1}(t) b\Delta t + 0(\Delta t) \\ p_{in}(t+\Delta t) = p_{i,n-1}(t) a\Delta t + p_{in}(t)(1-b\Delta t) + 0(\Delta t) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{p_{i0}(t+\Delta t) - p_{i0}(t)}{\Delta t} = -ap_{i0}(t) + bp_{i1}(t) + \dfrac{0(\Delta t)}{\Delta t} \\ \dfrac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = p_{i,j-1}(t)a - (a+b)\, p_{ij}(t) + bp_{i,j+1}(t) + \dfrac{0(\Delta t)}{\Delta t} \\ \dfrac{p_{in}(t+\Delta t) - p_{in}(t)}{\Delta t} = p_{i,n-1}(t)a - p_{in}(t)b + \dfrac{0(\Delta t)}{\Delta t} \end{cases}$$

Перейшовши до $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$ отримаємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_{i0}}{dt} = -ap_{i0} + bp_{i1} \\ \dfrac{dp_{ij}}{dt} = ap_{i,j-1} - (a+b)\, p_{ij} + bp_{i,j+1} \quad i \le j \le n-1 \\ \dfrac{dp_{in}}{dt} = ap_{i,n-1} - bp_{in} \end{cases} \tag{5}$$

$\dfrac{a}{b} = \rho$. Розділимо систему (5) на b, з'явиться ліворуч: $\dfrac{1}{b}\dfrac{dp_{ij}(t)}{dt}$; якщо ввести нову змінну $u = bt$, то $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dp}{du}\dfrac{du}{dt}$ і b скоротитися: система (5) перепишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_{i0}}{dt} = -\rho p_{i0} + p_{i1} \\ \dfrac{dp_{ij}}{dt} = \rho p_{i,j-1} - (\rho+1)\, p_{ij} + p_{i,j+1} \\ \dfrac{dp_{in}}{dt} = \rho p_{i,n-1} - p_{in} \end{cases} \tag{6}$$

Це система множин з постійними коефіцієнтами. Матриця системи:

$$A = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 & & \\ \rho & -(\rho+1) & & 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 & & \\ & \rho & -(\rho+1) & 1\ldots\ldots 0 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \rho & -(\rho+1) & 1 & \\ & & & \rho & -1 & \end{pmatrix}.$$

Знайдемо лише формальні ймовірності:

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j^*$$

Якщо ліміт існує, то в (5) всі ймовірності замінюються граничними і похідні замінюються нулями (від не залежить), (5) перейде в систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -\rho p_0^* + p_1 = 0 \\ \rho p_{j-1}^* - (\rho+1)p_j^* + p_{j+1}^* = 0 \qquad i \le j \le n-1 \\ \rho p_{n-1}^* - p_n^* = 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\sum_{j=0}^{n} p_0^* = 1 \text{ (додаткова умова)} \tag{8}$$

З першого рівняння $p_1^* = \rho p_0^*$.

Запишемо рівняння при $j = 1$: знаючи p_0^* та p_1^* знайдемо p_2^*:

$$p_2^* = (\rho+1)p_1^* + \rho p_0^* = p_0^*\left[(\rho+1)\rho - \rho\right] = \rho^2 p_0^*$$

Можливо довести, що

$$p_j^* = \rho^j p_0^*.$$

Скористаємося умовою (8), що б знайти p_0^*

$$\sum_{j=0}^{n} p_j^* = 1 = \sum_{j=0}^{n} \rho^j p_0^* \Rightarrow p_0^* = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n} \rho^j} = \frac{1-\rho}{\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}} \ (\rho \ne 1) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}$$

$$\rho = 1: \ p_j^* = p_0^* = \frac{1}{n+1}.$$

Багатоканальна система масового обслуговування з обмеженою довжиною черги.

Ймовірності станів $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ знаходяться за формулою

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 \text{, де } (k = 1, 2, \dots, \mathrm{N}).$$

Ймовірності станів $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+l}$ знаходяться за формулою

$P_k = \dfrac{\rho^k}{N^{k-N} N!} P_0$ де $(k = N+1, \dots, N+l)$, l – максимальна довжина черги.

Ймовірність P_0 знаходяться за формулою $P_0 = \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{N+l} \frac{\rho^i}{N^{k-N} N!} \right]^{-1}$.

У більшості практичних завдань необхідно дотримуватися відношення $\frac{\rho}{N} < 1$, тоді вираз для P_0 можна переписати в наступному вигляді

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N \cdot N!} \frac{1-(\frac{\rho}{N})^l}{1-\frac{\rho}{N}} \right]^{-1}.$$

До ***основних характеристик якості обслуговування*** розглянутої СМО відносяться:

імовірність відмови $P_{отк}$

$$P_{отк} = P_{N+l} = \frac{\rho^N}{N!} \left(\frac{\rho}{N} \right)^l P_0$$

середнє число зайнятих вузлів обслуговування $M_{зан}$ та коефіцієнт зайнятості

$$M_{зан} = \sum_{k=1}^{N} kP_k + N \sum_{i=1}^{l} P_{N+i}\ ,\ K_з = \frac{M_{зан}}{N}$$

середнє число вільних вузлів обслуговування та коефіцієнт простою

$$M_0 = N - M_{зан};\ \ K_0 = \frac{M_0}{N}.$$

середня довжина черги

$$M_{оч} = \sum_{k=1}^{l} kP_{N+k} = \frac{\rho^N}{N!} P_0 \sum_{k=1}^{l} k \left(\frac{\rho}{N} \right)^k.$$

Лекція 9.
Багатоканальна система з очікуванням

Заявка стає в чергу і чекає. Може чекати до тих пір, поки якийсь канал не звільнитися (час очікування необмежено). Може виявитися, що час очікування обмежено. Може бути і так, що обмеження на кількість заявок, що стоять в черзі.

Якщо заявки чекають обслуговування незалежно від часу очікування, така система називається ***чистою системою з очікуванням***. Якщо обмежено час очікування або обмежена черга, система називається змішаною.

Розглянемо змішану систему з обмеженим часом очікування в черзі.

$T_{\text{очик}}$ – випадкова величина.

В окремому випадку, якщо $T_{\text{очик}} \to 0$, отримуємо систему з відмовами.

Якщо $T_{\text{очик}} \to \infty$ виходить чиста система з очікуванням.

Припустимо, що надходить потік заявок пуассонівський з щільністю λ, обслуговування експоненціально з щільністю μ, система має n каналів.

Припустимо, що час очікування теж розподілено експоненціально з параметром υ

$$P\{T_{\text{очик}} < t\} = 1 - e^{-\upsilon t}$$

Тоді υ - щільність потоку виходів із черги, тобто середня кількість заявок, які йдуть з черги, за одиницю часу, не дочекавшись обслуговування.

$\upsilon = \dfrac{1}{\mathrm{M}T_{\text{очик}}}$ $\quad \mathrm{M}T_{\text{очик}} = \overline{T}_{\text{очик}}$ – середній час очікування.

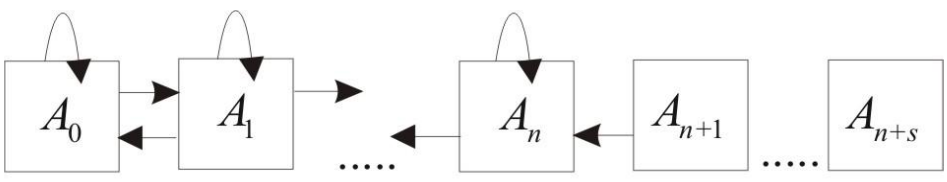
З експоненціально розподілу випливає, що якщо через $\xi(t)$ кількість виходів за t, то $P\{\xi(\Delta t)\} = \upsilon\Delta t + 0(\Delta t)$ – ймовірність того, що принаймні одна заявка піде з черги.

$$P\{\xi(\Delta t) \geq 2\} = 0(\Delta t)$$

Звідси $P\{\xi(\Delta t) = 1\} = \upsilon\Delta t + 0(\Delta t)$.

Якщо в черзі сидить S заявок, то ймовірність того, що одна з них покине чергу, перебувати за біноміальним законом, тобто ймовірність того, що одна з S заявок покине чергу

$$P_S(1) = C_S^1 P\{\xi(\Delta t) = 1\}\left[1 - P\{\xi(\Delta t) = 1\}\right]^{S-1} = S\upsilon\Delta t + 0(\Delta t)$$



A_0 – всі канали вільні.

$A_k (1 \le k \le n) - k$ зайнятих каналів та черги нема.

$A_{n+s} (s \ge 1)$ всі канали зайняті, s заявок у черзі.

Система відрізняється тим від системи з відмовами, що там було кінцевим число станів, а зараз рахункове число станів.

У A_0 можна було потрапити з A_0 або A_1, в A_n то ж саме. У проміжні три можливих попадання.

Тепер A_n не є останнім. Виключно тільки A_0, тобто можна розглядати для A_0 тільки $P_{00}(\Delta t)$, $P_{10}(\Delta t)$; для інших розглядати $P_{j-1,j}(\Delta t)$, $P_{jj}(\Delta t)$, $P_{j+1,j}(\Delta t)$.

Тому для $0 \le j \le n-1$ картина та сама, що і в системі з відмовами. Система диференціальних рівнянь та ж.

$$P_{i0}(t+\Delta t) = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(t) P_{j0}(\Delta t) =$$

$$= P_{i0}(t) P_{00}(\Delta t) + P_{i1}(t) P_{10}(\Delta t) + 0(\Delta t) = P_{i0}(t)\left[1 - \lambda \Delta t + 0(\Delta t)\right] + P_{i1}(t)\left[\mu \Delta t + 0(\Delta t)\right] + 0(\Delta t)$$

$$\frac{dP_{i0}}{dt} = -\lambda P_{i0}(t) + \mu P_{i1}(t) \qquad \text{(а)}$$

$1 \le k \le n-1$ (Черги ще немає)

$$P_{ik}(t+\Delta t) = P_{i,k+1}(t) P_{k-1,k}(\Delta t) + P_{ik}(t) P_{kk}(\Delta t) + P_{i,k+1}(t) P_{k+1,k}(\Delta t) + 0(\Delta t)$$

(надійшла 1 заявка)

$$P_{ik}(t+\Delta t) = P_{i,k-1}(t)\lambda \Delta t + P_{ik}(t)\left[1 - \lambda \Delta t\right]\left[1 - k\mu \Delta t\right] + P_{i,k+1}(t)(k+1)\mu \Delta t + 0(\Delta t)$$

$$\frac{dP_{ik}}{dt} = \lambda P_{i,k-1}(t) - (\lambda + k\mu) P_{ik} + (k+1)\mu P_{i,k+1}(t) \qquad \text{(б)}$$

(а, б) - те саме, що і з відмовами.

Починаючи з n: Розглянемо P_{in}

$$P_{in}(t+\Delta t) = P_{i,n-1}(t) P_{n-1,n}(\Delta t) + P_{in} P_{nn}(\Delta t) + P_{i,n+1}(t) P_{n+1,n}(\Delta t) + 0(\Delta t)$$

$$P_{in}(t+\Delta t) = P_{i,n-1}(t)\lambda \Delta t + P_{in}(t)(1 - \lambda \Delta t - n\mu \Delta t) + P_{i,n-1}(t)\cancel{n\mu \Delta t}(n\mu \Delta t + \upsilon \Delta t) + 0(\Delta t)$$

Одна людина була в черзі, тепер нікого і всі канали зайнято. Або канал звільнився і заявка його зайняла, або заявка пішла не дочекавшись.

$$\frac{dP_{in}}{dt} = P_{i,n-1}\lambda - (\lambda + n\mu) P_{in}(t) + (\upsilon + n\mu) P_{i,n+1}(t) \qquad \text{(в)}$$

Розглянемо $P_{i,n+s}(t+\Delta t)$ – n каналів зайняті, s заявок в черзі.

$$P_{i,n+s}(t+\Delta t)=P_{i,n+s-1}(t)P_{n+s-1,n+s}(\Delta t)+P_{i,n+s}(t)P_{n+s,n+s}(\Delta t)+P_{i,n+s+1}(t)P_{n+s+1,n+s}(\Delta t)+0(\Delta t)=$$

$= \underbrace{P_{i,n+s-1}\lambda\Delta t}_{\text{прибавилась одна заявка в очереди}} + P_{i,n+s}(t)$ (жоден канал не звільнився, жодна заявка не надійшла, жоден з тих, хто сидить в черзі її не покинув) $(1-\lambda\Delta t-n\mu\Delta t-s\upsilon\Delta t)+P_{i,n+s+1}(t)$ (черга зменшилась на одиницю, або один канал звільнився, або людина пішла з черги) $(n\mu\Delta t+(s+1)\upsilon\Delta t)+0(\Delta t)$.

$$\frac{dP_{i,n+1}}{dt}=\lambda P_{i,n+s-1}(t)-(\lambda+n\mu+s\upsilon)P_{i,n+s}(t)+(n\mu+(s+1)\upsilon)P_{i,n+s+1}(t).$$

Рівняння (в) підходить під цю формулу, при $s=0$. Можна його викреслити з системи, рівняння записати для $s\geq 0$.

Тоді в системі встановлюється стаціонарний режим. Всі ймовірності $P_{ik}(t)\to p_k$.

Для них отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, якщо зліва всюди покласти нулі:

$$\begin{cases}\lambda P_0+\mu P_1=0\\ \lambda P_{k-1}-(\lambda+k\mu)P_k+(k+1)\mu P_{k+1}=0 \quad 1\leq k\leq n-1\\ \lambda P_{n+s-1}-(\lambda+n\mu+s\upsilon)P_{n+s}+\left[n\mu+(s+1)\upsilon\right]P_{k+s+1}=0 \quad \mathrm{s}\geq 0\end{cases}$$

З цієї системи можна все ймовірності вивести через p_0, крім того $\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$, з цієї додаткової умови знаходимо p_0.

Для $0\leq k\leq n$ формули ті ж що і для системи з відмовами.

$$p_k=p_0\frac{\lambda^k}{\mu^k k!}$$

Якщо тепер в системі взяти рівняння при $s=0$, ми отримаємо p_{n+1}:

$$\lambda P_{n-1}-(\lambda+n\mu)P_n+\left[n\mu+\upsilon\right]P_{n+1}=0$$

$$p_0\left[\frac{\lambda^n}{\mu^{n-1}(n-1)!}-(\lambda+n\mu)\frac{\lambda^n}{\mu^n n!}\right]+(n\mu+\upsilon)P_{n+1}=0$$

$$-p_0\frac{\lambda^{n+1}}{\mu^n n!}+(n\mu+\upsilon)P_{n+1}=0$$

$$P_{n+1}=\underbrace{p_0\frac{\lambda^n}{\mu^n n!}}_{P_n}\frac{\lambda}{n\mu+\upsilon}.$$

Так само $P_{n+s}=p_n\dfrac{\lambda^s}{(n\mu+\upsilon)(n\mu+2\upsilon)\ldots(n\mu+s\upsilon)}$.

$$P_{n+s}=p_n\frac{\lambda^n}{\mu^n n!}\frac{\lambda^s}{\prod_{k=1}^{s}(n\mu+kv)}$$

Скласти всі ці ймовірності:

$$p_0\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{\mu^k k!}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n+s}}{\mu^n n!\prod_{k=1}^{s}(n\mu+k\upsilon)}\right]=1,$$

$$p_0=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{\mu^k k!}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n+s}}{\mu^n n!\prod_{k=1}^{s}(n\mu+k\upsilon)}\right]^{-1}.$$

Якщо $T_{\text{очик}}\to\infty$:

$$P_{n+s}=\frac{\dfrac{\lambda^s}{(n\mu)^s}\dfrac{\lambda^n}{\mu^n n!}}{\sum_{s=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^{n+s}}{n!\mu^{n+s}n^s}+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\lambda^k}{\mu^k k!}}.$$

Характеристики системи з обмеженим часом очікування:

Середня довжина черги:

$$M_{\text{чер}}=\frac{\rho^N}{N!}P_0\sum_{l=1}^{\infty}l\frac{\lambda^l}{\prod_{i=1}^{l}(N\mu+i\beta)}.$$

Ймовірність відмови:

$$P_{\text{відм}}=\frac{\beta}{\rho}M_{\text{чер}}.$$

Середнє число зайнятих каналів обслуговування і коефіцієнт зайнятості:

$$M_{зайн} = (1-\rho)P_{відм};$$

$$K_з = \frac{M_{зайн}}{N}.$$

Середнє число вільних каналів обслуговування і коефіцієнт простою:

$$M_{віл} = N - M_{зайн};\ K_0 = \frac{M_{зайн}}{N}.$$

Відносна пропускна здатність

$$Q = 1 - P_{відм}.$$

Вимоги до стаціонарності чистих СМО з очікуванням.

При $\rho / N > 1$ спостерігається явище «вибуху» – необмежений ріст середньої довжини черги, тому для стаціонарності СМО повинна виконуватися обмежуюча умова $\rho / N < 1$. Зважаючи на це P_o можливо записати у вигляді

$$P_o = \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)} \right]^{-1}.$$

А стани системи описуються виразами:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_o, \text{ для } \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{N!N^{k-N}} P_o, \text{ для } \quad (k = N+1, \ldots, N+k, \ldots, N+\infty).$$

До ***головних характеристик якості обслуговування чистих СМО з очікуванням*** відносять:

Ймовірність наявності черги $P_{чер}$, тобто ймовірність того, що число вимог в системі більше числа вузлів:

$$P_{чер} = \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)} P_0.$$

Ймовірність зайнятості всіх вузлів системи $P_{зайн}$:

$$P_{зайн} = \frac{\rho^N}{(N-1)!(N-\rho)} P_0 .$$

Середнє число вимог в системі $M_{вим}$:

$$M_{вим} = P_0 \left(\rho \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}(N+1-\rho)}{(N-1)!(N-\rho)^2} \right).$$

Середня довжина черги $M_{чер}$:

$$M_{чер} = \frac{\rho^{N+1} P_0}{(N-1)!(N-\rho)^2} .$$

Середнє число вільних каналів обслуговування $M_{вільн}$:

$$M_{віл} = N - M_{зайн} .$$

Середнє число зайнятих каналів обслуговування $M_{зайн}$:

$$M_{зайн} = \rho .$$

Коефіцієнт простою K_0 і коефіцієнт зайнятості $K_з$ каналів обслуговування системи:

$$K_0 = \frac{M_{вільн}}{N}; \; K_з = \frac{M_{зайн}}{N} .$$

Середній час очікування початку обслуговування $T_{оч}$ для вимог, які надійшли в систему:

$$T_{оч} = \frac{\rho^N}{\mu(N-1)!(N-\rho)^2} P_0 .$$

Загальний час, який проводять в черзі всі вимоги, що надходять в систему за одиницю часу $T_{ооч}$:

$$T_{ооч} = \frac{\rho^{N+1}}{(N-1)!(N-\rho)^2} P_0 .$$

Середній час $T_{вим}$, який вимога проводить в системі обслуговування:

$$T_{вим} = T_{оч} + \mu^{-1}.$$

Сумарний час, який в середньому проводять в системі всі вимоги, що надходять за одиницю часу $T_{свим}$:

$$T_{с.вим} = T_{ооч} + \rho .$$

Зв'язок між середньою довжиною черги та середнім часом очікування має назву формули Літтла та має вигляд

$$M_{чер} = \lambda T_{оч}.$$

Лекція 10

Дисципліни обслуговування. Модель з пріоритетами. Дисципліни обслуговування з пріоритетами, залежними від часу

Дисципліна обслуговування – це спосіб визначення того, яка вимога в черзі має обслуговуватися наступним Рішення може ґрунтуватися на одній з наведених нижче характеристик або на їх сукупності:

1) міра, обумовлена відносним часом надходження розглянутого вимоги в чергу;
2) міра необхідного або отриманого досі часу обслуговування;
3) функція, яка визначає приналежність вимоги до тієї чи іншої групи.

Прикладами дисциплін обслуговування є постійно використовувана модель «перший прийшов - перший обслужений» (FCFS-first came-first served), звана в російськомовній літературі «дисципліна обслуговування в порядку надходження» - ОПН. Наведемо тут список деяких типових дисциплін обслуговування.

ОПН – обслуговування в порядку надходження (FCFS);

ОЗП – обслуговування в зворотному порядку, тобто «останнім надійшло – обслуговується першим» (LCFS);

ПК – першочергове обслуговування вимог з найкоротшою тривалістю обслуговування (SPT / SJE);

ПКД – першочергове обслуговування вимог з найкоротшою тривалістю дообслуговування (SRPT);

ПКС – першочергове обслуговування вимог з найкоротшою середньою тривалістю обслуговування (SEPT);

ПКСД – першочергове обслуговування вимог з найкоротшою середньою тривалістю дообслуговування (SERPT);

ПКОВ – першочергове обслуговування вимог з найкоротшим обов'язковим часом (SIPT).

Основним предметом аналізу різних дисциплін обслуговування вважатимемо ***розрахунок середнього часу очікування вимоги в черзі або середнього часу перебування в системі***.

Припустимо, що вимоги належать одному з P різних пріоритетних класів, які охоплюють індексом p = 1,2,3 ... P. Кожному вимогу, що знаходиться в системі в момент часу t ставиться у відповідність значення деякої пріоритетної функції $q_p(t)$. Чим більше значення цієї функції, тим вище пріоритет вимоги. Всякий раз, коли приймається рішення для вибору вимоги на обслуговування, вибір робиться на користь вимоги з найбільшим значенням пріоритетної функції. У найпростішому випадку в якості пріоритетної функції вибирається просто значення p. У цьому випадку пріоритет вимоги тим більше, чим більший номер класу приналежності воно має. Розглянемо досить загальну модель, засновану на системі M/G/1. Припустимо, що вимоги з пріоритетного класу p утворюють пуассонівський потік з інтенсивністю λ_p вимог в секунду. Час обслуговування кожної вимоги з цього класу вибирається незалежно у відповідність з розподілом з щільністю ймовірності $b_p(x)$ із середнім значенням

$$\overline{x_p} = \int_0^\infty x b_p(x) dx .$$

Введемо наступні визначення:

$$\lambda = \sum_{p=1}^{P} \lambda_p ,$$

$$\bar{x} = \sum_{p=1}^{P} \frac{\lambda_p}{\lambda} \bar{x}_p ,$$

$$\rho_p = \lambda_p \bar{x}_p ,$$

$$\rho = \lambda \bar{x} = \sum_{p=1}^{P} \rho_p .$$

Тут ρ інтерпретується як частка часу, протягом якого сервер зайнятий (ρ<1), а кожен з парціальних коефіцієнтів ρ_p – доля часу протягом якого сервер зайнятий обслуговуванням заявок з пріоритетного класу з номером *p*.

Якщо вимога в процесі обслуговування може бути видалена з сервера і повернута до чергу під час приходу вимоги з більш високим пріоритетом, то кажуть, що система працює з ***абсолютним пріоритетом***, якщо обслуговування будь-якої вимоги, що знаходиться в сервері не може бути перервано, то кажуть що СМО працює з ***відносним пріоритетом***.

Основна модель розрахунку середнього часу очікування

Будемо використовувати далі наступні позначення для середнього значення часу очікування в черзі вимог з пріоритетного класу *p* – W_p, і середнього часу перебування в системі для вимог цього класу – T_p:

$$T_p = W_p + \bar{x}_p .$$

Основну увага будемо приділяти системам з відносним пріоритетом. Розглянемо процес з моменту надходження деякого вимоги з пріоритетного класу *p*. Будемо далі називати цю вимогу міченою. Перша складова часу очікування для міченої вимоги пов'язана з вимогою, яку вона застає в сервері. Ця складова дорівнює залишковому часу обслуговування іншого вимоги. Позначимо тепер і будемо використовувати це позначення і далі, середню затримку міченої вимоги, пов'язану з наявністю іншої вимоги на обслуговуванні W_0. Знаючи розподіл часу між сусідніми надходженнями вхідних вимог для кожного пріоритетного класу, можна завжди обчислити цю величину. У нашому припущенні пуассонівського закону для потоку заявок кожного класу можна записати

$$W_0 = \sum_{i=1}^{P} \rho_i \frac{\overline{x_i^2}}{2\overline{x_i}} = \sum_{i=1}^{P} \frac{\lambda_i \overline{x_i^2}}{2}.$$

Друга складова часу очікування для міченої вимоги визначається тим, що перед міченою вимогою обслуговуються інші вимоги, які мічена вимога застала в черзі. Позначимо далі число вимог з класу i, яке застало в черзі мічена вимога (з класу p) і які обслуговуються перед ним N_{ip}. Середнє значення цього числа буде визначати величину середнього значення цієї складової затримки

$$\sum_{i=1}^{P} \overline{x_i}\,\overline{N_{ip}}$$

Третя складова затримки пов'язана з вимогами, які надійшли після того як прийшла мічена вимога, проте отримали обслуговування раніше неї. Число таких вимог позначимо M_{ip}. Середнє значення цієї складової затримки знаходиться аналогічно і становить

$$\sum_{i=1}^{P} \overline{x_i}\,\overline{M_{ip}}$$

Складаючи все три складові, отримуємо, що середній час очікування в черзі для міченої вимоги визначається формулою

$$(*)\ W_p = W_0 + \sum_{i=1}^{P} \overline{x_i}\,(\overline{N_{ip}} + \overline{M_{ip}}),\ p = 1,2,...P.$$

Очевидно, що незалежно від дисципліни обслуговування число вимог, N_{ip} і M_{ip} в системі не може бути довільним, тому існує певний набір співвідношень, що зв'язує між собою затримки для кожного з пріоритетного класу. Важливість цих співвідношень для СМО дозволяє називати їх ***ЗАКОНАМИ ЗБЕРЕЖЕННЯ***. Основою законів збереження для затримок є той факт, що незакінчена робота в будь-який СМО протягом будь-якого інтервалу часу зайнятості не залежить від порядку обслуговування, якщо система є консервативною (вимоги не зникають всередині системи і сервер не простоює при непорожній черзі).

Розподіл часу очікування суттєво залежить від порядку обслуговування, але якщо дисципліна обслуговування вибирає вимоги незалежно від часу їх обслуговування (або будь-якого заходу, що залежить від часу обслуговування), то розподіл числа вимог і часу очікування в системі інваріантний щодо порядку обслуговування.

Для СМО типу M/G/1 можна показати, що для будь-якої дисципліни обслуговування повинно виконуватися наступна важлива рівність

$$\sum_{p=1}^{P} \rho_p W_p = \begin{cases} \dfrac{\rho W_0}{1-\rho}, & \rho < 1, \\ \infty, & \rho \geq 1. \end{cases}$$

Ця рівність означає, що зважена сума часів очікування ніколи не змінюється, незалежно від того, наскільки складна або майстерно підібрана дисципліна обслуговування. Якщо вдається скоротити затримку для одних вимог, то вона негайно зросте для інших.

Розглянемо тепер ***розрахунок середнього часу очікування для СМО з обслуговуванням в порядку пріоритету, що задається пріоритетною функцією*** $q_p(t) = p$.

Скористаємося формулою для W_p. Виходячи з механізму функціонування, можна відразу виписати

$$\overline{N_{ip}} = 0, \; i = 1,2,\ldots p-1,$$
$$\overline{M_{ip}} = 0, \; i = 1,2,\ldots p.$$

Всі вимоги вищого, ніж у міченого пріоритету будуть обслужені раніше. З формули Літтла число вимог класу i, що знаходяться в черзі, дорівнюватиме:

$$\overline{N_{ip}} = \lambda_i W_i \; ; \; i = p, p+1, p+2, \ldots P.$$

Вимоги більш високопріоритетних класів, що надійшли в систему після міченої вимоги, поки вона знаходиться в черзі, також будуть обслужені перед ним. Так як мічена вимога буде перебувати в черзі в середньому W_p секунд, то число таких вимог дорівнюватиме

$$\overline{M_{ip}} = \lambda_i W_p .$$

Безпосередньо з формули (*) отримуємо:

$$W_p = W_0 + \sum_{i=p}^{P} \overline{x_i} \lambda_i W_i + \sum_{i=p+1}^{P} \overline{x_i} \lambda_i W_p ,$$

$$W_p = \frac{W_0 + \sum_{i=p}^{P} \rho_i W_i}{1 - \sum_{i=p+1}^{P} \rho_i} .$$

Ця система рівнянь може бути вирішена рекуррентно, починаючи з W_1, W_2 і т.д.

$$(**) \ W_p = \frac{W_0}{(1-\sigma_p)(1-\sigma_p)}$$

$$\sigma_p = \sum_{i=p}^{P} \rho_i$$

Отримана формула дозволяє розраховувати характеристики якості обслуговування для всіх пріоритетних класів.

Розглянемо тепер ***систему з абсолютними пріоритетами і обслуговуванням в порядку пріоритету з дообслуговуванням***. Застосуємо підхід повністю аналогічний розглянутому раніше. Середня затримка в системі міченої вимоги також складається з трьох складових: перша складова – це середній час обслуговування, друга – це затримка через обслуговування вимог рівного або вищого пріоритету, які мічена вимога застала в системі. Третя складова середньої затримки міченої вимоги являє собою затримку за рахунок будь-яких вимог, що надходять в систему до покидання міченої вимоги системи і мають строго більший пріоритет. Розписуючи всі ці три складові загального часу перебування в системі, отримаємо

$$T_p = \overline{x_p} + \frac{\sum_{i=p}^{P} \lambda_i \overline{x_i^2} / 2}{1-\sigma_p} + \sum_{i=p+1}^{P} \rho_i T_p = \frac{\overline{x_p}(1-\sigma_p) + \sum \lambda_i \overline{x_i^2} / 2}{(1-\sigma_p)(1-\sigma_{p+1})} .$$

Дисципліни обслуговування з пріоритетами, залежними від часу

На практиці часто зустрічається завдання призначення пріоритетів в залежності від часу надходження заявки. Наприклад, для того, щоб ніякі вимоги не затримувалися в системі дуже довго, незважаючи на загальне навантаження, організують дисципліну обслуговування, при якій чим довше заявка знаходиться в системі, тим її пріоритет стає вище.

Розглянемо пріоритетні функції, лінійно залежать від часу з крутизною наростання, що залежить від номера класу, до якого належить вимога.

Припустимо, що деяка мічена вимога надходить в момент τ і отримує в момент t пріоритет, який визначається значенням пріоритетної функції

$$q_p(t) = (t - \tau) b_p;$$
$$0 \le b_1 \le b_2 \le b_3 \le \ldots \le b_p .$$

Всякий раз, коли сервер готовий до обслуговування нової вимоги він вибирає з черги вимогу з найвищим миттєвим пріоритетом – найбільшим значенням пріоритетної функції. Вимоги з класу з великим значенням p нарощують пріоритет з більшою швидкістю, ніж вимоги з нижчого пріоритетного класу. На рисунку 1 показаний приклад того, як надійшовша пізніше вимога, але з вищого пріоритетного класу, може отримати обслуговування раніше, ніж надійшовша раніше вимога з менш пріоритетного класу. Це станеться, якщо сервер звільниться пізніше моменту t_0. При звільненні сервера до цього моменту, обслуговування отримає перша з надійшовших вимог.

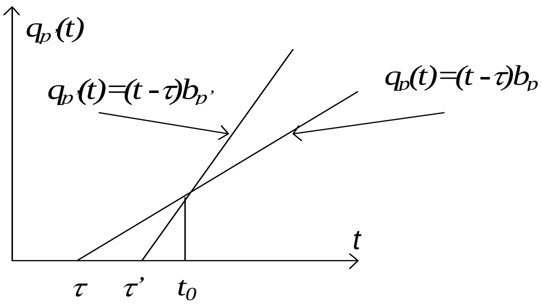


Рис. 1 Взаємодія між пріоритетними функціями для СМО з пріоритетами, залежними від часу

Дослідимо цю систему при експоненційному розподілі часу обслуговування.

Знайдемо середнє число вимог, що надійшли пізніше міченої, з класів з $p \geq i$, які будуть обслужені раніше міченої. Очевидно, що для таких вимог швидкість наростання пріоритетної функції менше швидкості наростання пріоритетної функції міченої вимоги і, отже число таких вимог дорівнює нулю. Тепер визначимо число таких вимог для класів з більшою, ніж у міченої швидкістю наростання пріоритетної функції $p < i$. З розгляду рисунка 1 можна бачити, що затримка міченої вимоги в системі для цього випадку $W_p = t_0 - \tau_i$ пов'язана з інтервалом часу на якому надходять заявки, що випереджають мічене вимога $V_i = \tau_i - \tau$ співвідношенням

$$b_p W_p = b_1 (W_p - V_i).$$

Звідси отримуємо, що цей інтервал дорівнює

$$V_i = W_p (1 - \frac{b_p}{b_i}).$$

Отже, при інтенсивності λ_i вхідного потоку для вимог i-го класу знаходимо середнє число «обганяючих» вимог:

$$\overline{M_{ip}} = \lambda_i V_i = \lambda_i W_p (1 - \frac{b_p}{b_i}); \quad i > p.$$

Розглянемо тепер мічену вимога з класу p, що надходить в момент $\tau=0$ і знаходиться в черзі протягом часу t_p.

Значення функції пріоритету цієї вимоги до моменту надходження на сервер дорівнюватиме $b_p t_p$. При надходженні міченої вимоги воно застає в черзі n_i вимог з класу i. Визначимо тепер середнє число вимог з класу i, які надходять до нульового значення моменту часу, перебувають у нульовий момент ще в черзі і отримують обслуговування раніше міченої вимоги.

$$\overline{N_{ip}} = \int_0^\infty \lambda_i P\left\{ t < w_i(t) \leq (\frac{b_p}{b_p - b_i})t \right\} dt =$$

$$\lambda_i \int_0^\infty \left[1 - P(w_i \leq t)\right] dt - \lambda_i \left[1 - \frac{b_i}{b_p}\right] \int_0^\infty \left[1 - P(w_i \leq y)\right] dy =$$

$$\lambda_i W_i - \lambda_i \left(1 - \frac{b_i}{b_p}\right) W_i = \lambda_i W_i \frac{b_i}{b_p}.$$

При $i > p$ $\overline{N_{ip}} = \lambda_i W_i$.

Підставивши обчислені середні значення для «обганяючих» вимог отримаємо систему лінійних рівнянь для величин затримки міченої вимоги

$$W_p \frac{W_0 + \sum_{i=p}^{P} \rho_i W_i + \sum_{i=1}^{p} \rho_i W_i \dfrac{b_i}{b_p}}{1 - \sum_{i=p+1}^{P} \rho_i \left(1 - \dfrac{b_p}{b_i}\right)}; \quad p = 1,2,3 \ldots P.$$

Роблячи перетворення, можна звести рішення цієї системи рівнянь до рекурсивної формі

$$W_p = \frac{\dfrac{W_0}{1-\rho} - \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i W_i \left(1 - \dfrac{b_i}{b_p}\right)}{1 - \sum_{i=p+1}^{P} \rho_i \left(1 - \dfrac{b_p}{b_i}\right)}; \quad p = 1,2 \ldots, P.$$

Отримана формула є головний результат аналізу дисципліни обслуговування з пріоритетами, залежними від часу.

Лекція 11

Мережі масового обслуговування

Мережа масового обслуговування являє собою сукупність кінцевого числа обслуговуючих вузлів, в яких поширюються заявки, переходячі відповідно до маршрутної матриці з одного вузла в інший. Узел завжди є відкритою СМО (при СМО може бути будь-якого класу). При цьому окремі СМО відображають функціонально самостійні частини реальної системи зв'язку між СМО – структурою системи, а вимоги, що поширюються по ММО, - складові матеріальних потоків (повідомлення (пакети) в комунікаційній мережі, завдання в мультипроцесорних системах, контейнери вантажопотоків та ін.)

Для наглядового представлення ММО використовується граф, вершини якого (вузли) відповідають окремим СМО, а арки відображають зв'язок між вузлами.

Перехід заявок між вузлами відбувається миттєво відповідно до перехідних ймовірностей $p_{ij},\ i,j=\overline{1,N}$ p_{ij} – ймовірність того, що заявка після обслуговування в вузлі *i* перейде в вузол *j*. Природно, якщо вузли безпосередньо не пов'язані між собою, то p_{ij} = 0. Якщо з *i*-го вузла перехід тільки в один який-небудь вузол *j*, то p_{ij} = 1.

ММО класифікують за кількома ознаками:

Мережа називається лінійною якщо інтенсивності потоків заявок у вузлах пов'язані між собою лінійною залежністю

$l_j = a_{ij} l_i$,

де a_{ij} - коефіцієнт пропорційності, або щодо джерела $l_j = a_{ij} l_0$.

Коефіцієнт a_j називають коефіцієнтом передачі, він характеризує частку заявок, що надходять в *j*-й вузол від джерела заявок, або – середнє число проходжень заявкою через даний вузол за час перебування заявки в мережі.

Якщо інтенсивності потоків заявок у вузлах мережі пов'язані нелінійної залежністю (наприклад, $\lambda_j = \sqrt{\alpha_j \lambda_0}$), то ***мережа називається нелінійною***.

Мережа завжди лінійна, якщо в ній заявки не втрачаються і не розмножуються.

Розімкнена мережа – це така відрита мережа, в яку заявки надходять із зовнішнього середовища і йдуть після обслуговування з мережі в зовнішнє середовище. Іншими словами, особливістю розімкнутої ММО (РММО) є наявність одного або декількох незалежних зовнішніх джерел, які генерують заявки, що надходять в мережу, незалежно від того, скільки заявок вже знаходиться в мережі. У будь-який момент часу в РММО може перебувати довільне число заявок (від 0 до N).

У ***замкнутій ММО*** (ЗММО) циркулює фіксоване число заявок, а зовнішнє незалежне джерело відсутнє. Виходячи з фізичних міркувань, в

ЗММО вибирається зовнішня дуга, на якій зазначається псевдонулева точка, відносно якої можуть вимірюватися часові характеристики.

Комбінована мережа – це мережа, в якій постійно циркулює певна кількість заявок і є заявки, що надходять від зовнішніх незалежних джерел.

У ***однорідної мережі*** циркулюють заявки одного класу. І, навпаки, в ***неоднорідній мережі*** можуть бути присутніми заявки кількох класів. Заявки відносяться до різних класів, якщо вони різняться хоча б одним з таких атрибутів:

– законом розподілу тривалості обслуговування в вузлах;

– пріоритетами;

– маршрутами (шляхами руху заявок в мережі).

У ***експоненційній мережі*** тривалості обслуговування у всіх вузлах розподілені за експоненціальним законом, і потоки, що надходять в розімкнену мережу, є найпростішими (пуассоновськими). У всіх інших випадках ***мережа є неекспоненційною.***

Якщо хоча б в одному вузлі здійснюється пріоритетне обслуговування, то це – ***пріоритетна мереж***а. Пріоритет – це ознака, що визначає черговість обслуговування. Якщо обслуговування заявок у вузлах здійснюється в порядку надходження, то така ***мережа безпріорітетна***.

Таким чином, експоненційною будемо називати ММО, що відповідає вимогам:

– вхідні потоки ММО пуассонівськи;
– у всіх N СМО час обслуговування заявок має експонентну функцію розподілу ймовірностей, і заявки обслуговуються в порядку приходу;
– перехід заявки з виходу i-й СМО на вхід j-й є незалежною випадковою подією, що має ймовірність p_{ij}; p_{i0} – ймовірність догляду заявки з СеМО.

Якщо заявки приходять в мережу і йдуть з неї, то мережа називається розімкнутою. Якщо заявки не приходять в мережу і з неї не йдуть, мережа називається замкнутою. Число заявок в замкнутій мережі постійне.

Властивості розімкнутої експоненційної ММО

ММО називають сукупність СМО, в якій заявки з виходів одних СМО можуть надходити на входи інших. Вхідним потоком заявок СМО будемо називати потік заявок, що приходять на вхід окремої СМО із зовнішнього середовища ММО, тобто ні з виходу будь-якої СМО. У загальному випадку число вхідних потоків ММО дорівнює числу СМО.

Розімкнута експоненційна ММО задається наступними параметрами:

1) числом N СМО;

2) числом $K_1,..., K_N$ каналів в СМО 1 ,…, N;

3) матрицею $P = \|p_{ij}\|$ ймовірності передач, $i = 1,…,N$; $j = 0,…, N$;

4) інтенсивностями $I_1,..., I_N$ вхідних потоків заявок;

5) середнім часом обслуговування , $\overline{T}_{\text{обс}1}...\overline{T}_{\text{обс}N}$, заявок в СМО.

Наприклад, ММО (рис. 1) буде задана чисельно наступним чином:

1) N=3;

2) K_1=1; K_2=1; K_3=2;

3)

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cccc} 0{,}1 & 0 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}} \end{array}$$

4) $I_1 = 1$; $I_2 = 0$; $I_3 = 0$;

5) $\overline{T}_{\text{обс}1} = 0{,}07$; $\overline{T}_{\text{обс}2} = 0{,}06$; $\overline{T}_{\text{обс}3} = 0{,}35$.

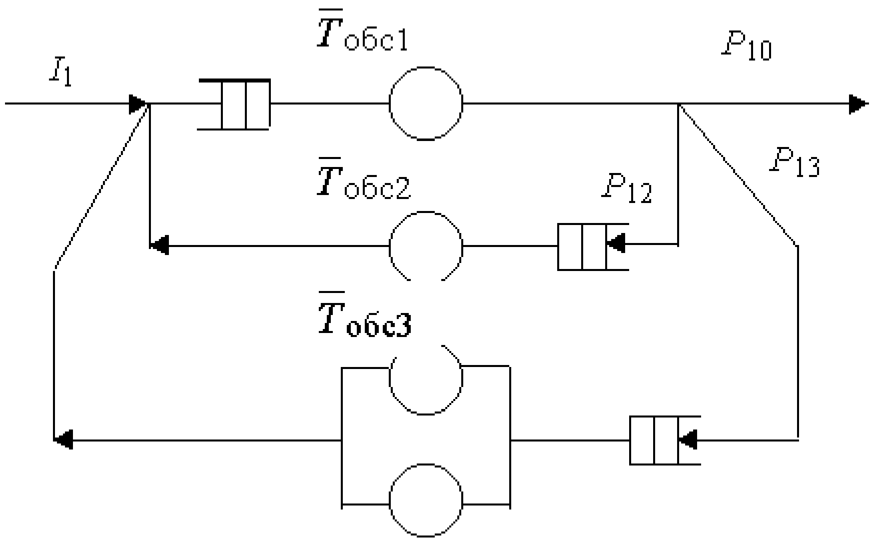


Рис. 1 Мережа масового обслуговування

У експоненційній ММО потік заявок на вході СМО складається з вхідного потоку ММО (можливо, має нульову інтенсивність) і з потоків, що надходять з виходів СМО. Вхідний потік СМО в експоненційній ММО в загальному випадку непуассонівський. Це означає, що СМО в ній в загальному випадку не експоненціальні. Проте досить часто вважають, що СМО поводяться в ній багато в чому як експоненціальні.

Тому для їх розрахунку в заданої ММО досить знайти інтенсивності $l_1,...,l_N$ вхідних потоків СМО.

Знаходження інтенсивностей $l_1,...,l_N$ здійснюється на основі рівнянь балансу мережі з урахуванням простих властивостей злиття і розгалуження потоків.

При злитті n потоків заявок з інтенсивностями $l_1,...,l_N$ утворюється потік, що має інтенсивність $l = l_1+,...,+l_n$. При розгалуженні потоку з інтенсивністю l на n напрямків, ймовірності переходу заявки в які дорівнюють $p_1,..., p_n$, утворюється n потоків с интенсивностями $lp_1,..., lp_n$ відповідно.

У стаціонарній ММО середнє число заявок в будь-який її фіксованої частини постійне. Звідси випливає, що сумарна інтенсивність входячих в цю частину потоків дорівнює сумарній інтенсивності виходячих. ***Запис цього***

закону в математичній формі називається рівнянням балансу. Виділяючи різні частини в ММО і складаючи для них рівняння балансу, можна отримати систему рівнянь, що зв'язує невідомі інтенсивності $l_1,...,l_N$ с відомими $I_1,..,I_N$. Зазвичай при цьому в якості окремих частин ММО виділяють всі СМО. У цьому випадків для N невідомих є N рівнянь. Можна додати до них рівняння балансу для вхідних і вихідних потоків всієї ММО. Тоді вийде N +1 рівняння, і одне з них можна використовувати в якості перевірочного.

Наприклад, баланс інтенсивностей в мережі для рис. 1 можна врахувати, позначаючи інтенсивності на входах і виходах СМО і ММО так, як показано на рис. 2. Застосовуючи властивості злиття і розгалуження потоків, запишемо, що

$$\begin{aligned} l_1 &= I_1 + l_2 + l_3 \\ I_1 &= P_{10} \cdot l_1 \\ l_2 &= P_{12} \cdot l_1 \\ l_3 &= P_{13} \cdot l_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

При

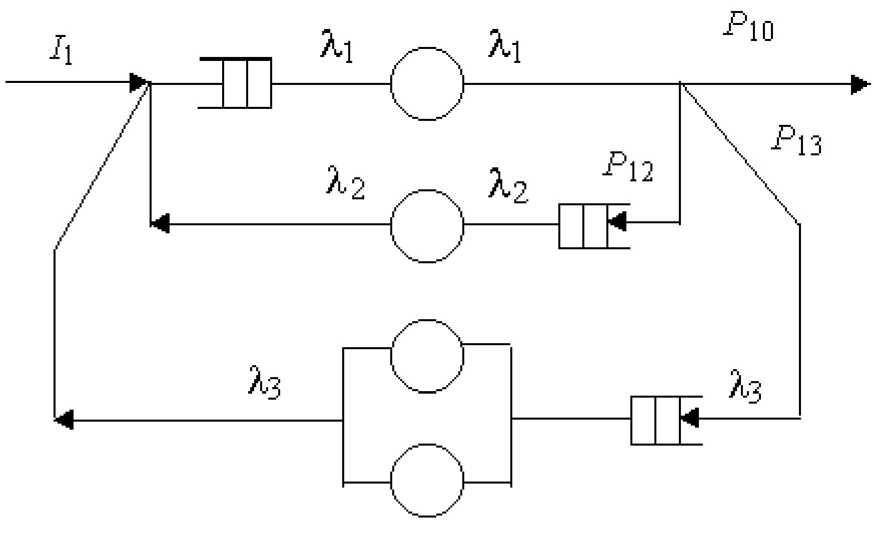


Рис. 2. Баланс інтенсивностей

При відомих I_1=1, p_1=0,1; p_2=0,5; p_3=0,4 з останніх трьох рівнянь отримуємо l_1=10, l_2=5, l_3=4.

Перевірка стаціонарності ММО

ММО стаціонарна, якщо стаціонарні все СМО, тобто якщо

$$\rho_j \le K_j, j = 1,\ldots,N .$$

Розрахунок системних характеристик експоненційних ММО

Характеристики ММО визначаються зазвичай на рівні середніх значень і діляться на локальні і системні. До локальних характеристикам ММО відносяться характеристики всіх входячих до неї СМО. Системні ***характеристики*** відображають властивості мережі в цілому, що розглядається як єдина, неподільна на частини система.

Найбільш важливими системними характеристиками ММО є:

1) ***Середній час перебування в мережі***. Часом перебування в мережі називається час між приходом заявки в мережу і її відходом з мережі.

$$\overline{T}_{\text{пр}} = \frac{1}{I}\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \overline{T}_{\text{пр}j}$$

2) ***Передавальні коефіцієнти*** $\alpha_{ij},\ i,j = \overline{1,N}$. Нехай заявка входить в мережу з *i*-го вхідного потоку. Її маршрут в мережі випадковий, тому випадково і число попадань в *j*-ю СМО за час перебування в мережі. Середнє значення a_{ij} цього числа попадань будемо називати передавальним коефіцієнтом. Він однозначно визначається для будь-яких *i*, *j*, матрицею *P* ймовірностей передач.

Важливе і корисне властивість передавальних коефіцієнтів полягає в наступному. У стаціонарному режимі при будь-яких I_1 +,...,+ I_N для $l_1,\ldots,l_N$ справедливо

$$
\begin{cases}
\lambda_1 = \alpha_{11} I_1 + \alpha_{21} I_2 + \ldots + \alpha_{N1} I_N \\
\lambda_2 = \alpha_{12} I_1 + \alpha_{22} I_2 + \ldots + \alpha_{N2} I_N \\
\quad . \\
\lambda_N = \alpha_{1N} I_1 + \alpha_{2N} I_2 + \ldots + \alpha_{NN} I_N
\end{cases} \qquad (3)
$$

З (3) можна визначити, що при $I_2 = \ldots = I_N = 0$, $I_1 = 1$ має місце

$$
\begin{cases}
\lambda_1 = \alpha_{11} \\
\lambda_2 = \alpha_{12} \\
\quad . \\
\quad . \\
\quad . \\
\lambda_N = \alpha_{1N}
\end{cases}
$$

3) ***Входові середні часи*** $F_1,\ldots,F_N$ ***перебування в мережі***. Величина F_j визначається як середній час перебування в мережі заявки, що надходить з *j*-го вхідного потоку.

$$
F_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} \overline{T}_{\text{пр}j}
$$

4) ***Умовні пропускні спроможності*** $B_1,\ldots,B_N$. Припустимо, що в заданій ММО значення інтенсивності I_j замінено на максимальне значення, при якому мережа ще стаціонарна. Це значення B_j будемо називати умовною пропускною здатністю по входу *j*.

5) ***Абсолютні пропускні спроможності*** A_j. Припустимо, що в заданій ММО інтенсивності всіх вхідних потоків, крім *j*-го, замінені на нульові, а I_j замінена на граничне значення, при якому мережа ще стаціонарна. Це значення A_j будемо називати абсолютною пропускною спроможністю по *j*-му входу.

Якщо $I_j > A_j$, то мережа нестаціонарна, які б не були інтенсивності інших вхідних потоків. Розрахувати A_j можливо з системи нерівностей

$$\begin{cases} I_i \le K_1 / \left(\overline{T}_{\text{обс}1} \alpha_{i1}\right), \\ I_i \le K_2 / \left(\overline{T}_{\text{обс}2} \alpha_{i2}\right), \\ \quad \ldots \\ I_i \le K_N / \left(\overline{T}_{\text{обс}N} \alpha_{iN}\right). \end{cases} \tag{4}$$

З визначення A_j. випливає, що ця величина дорівнює максимальному з значень I_j, що відповідають (4). Отже, A_j дорівнює найменшій з правих частин в (4).

6) ***Запаси*** $D_1,...,D_N$ ***по пропускним здібностям***. Запас $D_j = B_j - J_j,\ j = \overline{1,N}$. Запас D_j показує, наскільки може бути збільшена інтенсивність приходу заявок на j-м вході (при заданих інших) без порушення умови стаціонарності.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт з дисципліни
«ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ»

для студентів напряму 6.0403201 «Інформатика»

Харків 2017

Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни “Теорія масового обслуговування” для студентів напряму 6.0403201 «Інформатика» / Упоряд.: Машталір С.В. – Харків: ХНУРЕ, 2017. – 24 с.

Упорядник С.В. Машталір

Рецензент В.О. Філатов, д-р техн. наук, проф. каф. ШІ ХНУРЕ

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних робіт з дисципліни
"ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ"

для студентів напряму:
6.0403201 "Інформатика "

Упорядник: МАШТАЛІР Сергій Володимирович

Відповідальний випусковий Є.П. Путятін

Редактор Н.А. Крижна

Комп'ютерна верстка О.А. Чурсіна

План 2017 (перше півріччя), поз. 35

Підп. до друку 12.11.07. Формат 60×84 1/16. Спосіб друку – ризографія.

Умов.друк.арк. 1,4. Облік.-вид.арк. 1,3. Тираж 50 прим.

Зам. № 1-35. Ціна договірна.

ХНУРЕ. Україна. 61166 Харків, просп. Леніна, 14

Віддруковано в навчально-науковому
видавничо-поліграфічному центрі ХНУРЕ
61166 Харків, просп. Леніна, 14

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія масового обслуговування (ТМО) допомагає вирішувати завдання, пов'язані з оптимізацією процесів обслуговування в різних областях та є основою проектування й аналізу систем масового обслуговування (СМО). До подібних СМО належать: різного роду ремонтні системи (наприклад, ремонт залізничних вагонів, обслуговування комп'ютерного класу та інші); автотранспортні завдання; інформаційні системи та інше.

Дані методичні вказівки містять шість лабораторних робіт, розрахованих на 24 години.

Перша лабораторна робота призначена для дослідження пуассонівських (найпростіших) потоків вимог, які становлять більшу частину в існуючих СМО. Дослідження проводиться за допомогою моделювання найпростішого потоку для одержання модельного значення інтенсивності поступаючих вимог та порівняння їх із заданою інтенсивністю.

У другій лабораторній роботі досліджується сума двох найпростіших потоків і визначається характеристика результуючого потоку.

Третя лабораторна робота присвячена дослідженню, на основі першого розподілу Ерланга, СМО з відмовами і їхніми характеристиками якості.

У четвертій лабораторній роботі проводиться реальне моделювання процесу обслуговування СМО з відмовами. Потрібно зрівняти між собою значення характеристик якості СМО з відмовами (явними втратами), отримані в результаті моделювання та розраховані за першою формулою Ерланга.

Вивчення другого розподілу Ерланга з найпростішим потоком вимог і характеристик якості СМО з очікуванням проводиться під час виконання п'ятої лабораторної роботи.

Моделювання реального процесу обслуговування для СМО з необмеженою чергою проводиться під час виконання шостої лабораторної роботи, метою якої є порівняння значень характеристик якості, отриманих у результаті моделювання й теоретичного розрахунку.

1 МОДЕЛЮВАННЯ ПУАССОНІВСЬКОГО ПОТОКУ ВИМОГ

1.1 Мета роботи

Мета роботи – вивчити властивості й характеристики пуассонівського (найпростішого) потоку. Порівняти теоретичні та модельні значення отриманих характеристик.

1.2. Короткі теоретичні відомості

Найпростіший потік має такі властивості: стаціонарність, ординарність і відсутність післядії.

Властивість стаціонарності означає, що із часом імовірнісні характеристики потоку не змінюються. Потік можна назвати стаціонарним, якщо для будь-якої кількості k вимог, що надійшли за проміжок часу довжиною $\Delta t,$ ймовірність надходження вимог залежить тільки від величини проміжку та не залежить від його розташування на осі часу:

$$P_k(t, t+\Delta t) = P_k(t_1, t_1+\Delta t) = P_k(\Delta t), \tag{1.1}$$

де $P_k(t)$ – ймовірність надходження k вимог.

Властивість ординарності означає практичну неможливість групового надходження вимог. Тому потік вимог можна назвати ординарним тоді, коли ймовірність надходження двох або більше вимог за будь-який нескінченно малий проміжок часу Δt є величина нескінченно мала, вищого порядку, ніж Δt, тобто

$$P_{k\geq 2}(\Delta t) = o(\Delta t). \tag{1.2}$$

Властивість відсутності післядії означає незалежність імовірнісних характеристик потоку від попередніх подій. Іншими словами, імовірність надходження k вимог у проміжок [t1,t2] залежить від кількості, часу надходження й тривалості обслуговування вимог до моменту t1. Для випадкового потоку без післядії умовна ймовірність надходження вимог у проміжку [t1,t2], обчислена при будь-яких припущеннях про протікання процесу обслуговування вимог до моменту t1, дорівнює безумовній

$$P_i([t_1,t_2])\big|_{t_1} = P_i([t_1,t_2]).$$

(1.3)

До основних характеристик випадкового потоку відносять провідну функцію, параметр та інтенсивність. Провідна функція випадкового потоку $\bar{x}(0,t)$ є математичне очікування кількості вимог у проміжку [0, t). Функція $\bar{x}(0,t)$ – невід’ємна, неубутна, у практичних завданнях теорії розподілу інформації безперервна й приймає тільки кінцеві значення.

Параметр потоку $\lambda(t)$ в момент часу t є межа відношення ймовірності надходження не менше однієї вимоги в проміжку $[t,t+\Delta t]$ до величини цього проміжку Δt при $\Delta t->0$

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{k\ge 1}(t,t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

(1.4)

Параметр потоку визначає щільність імовірності настання спонукаючого моменту в момент t. Визначення параметра рівносильне припущенню, що ймовірність надходження хоча б однієї вимоги в проміжку $[t,t+\Delta t]$ з точністю до нескінченно малої величини пропорційна проміжку та параметру потоку $\lambda(t)$:

$$P_{k\ge 1}(t,t+\Delta t)=\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t). \tag{1.5}$$

Для стаціонарних потоків ймовірність надходження вимог не залежить від часу, тобто, $P_{k\ge 1}(t,t+\Delta t)=P_{k\ge 1}(\Delta t)$, тому параметр стаціонарного потоку постійний. Відповідно одержуємо

$$P_{k\ge 1}(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t).$$

(1.6)

Інтенсивність стаціонарного потоку μ є математичне очікування кількості вимог в одиницю часу.

Якщо інтенсивність характеризує потік вимог, то параметр – потік спонукаючих моментів. Тому завжди $\mu(t) \geq \lambda(t)$, а рівність має місце тільки для ординарних потоків, коли в кожен спонукаючий момент надходить тільки одна вимога.

2.3 Моделювання найпростішого потоку

Для найпростішого потоку вимог довжини проміжків часу між послідовними вимогами потоку $z_i = t_i - t_{i-1} > 0$ розподілені за показовим законом із тим самим параметром λ:

$$P(z<t) = F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

(1.7)

Це твердження дозволяє моделювати найпростіший потік вимог на заданому проміжку часу за допомогою методу Монте-Карло, в основі якого лежить така теорема:

якщо r_i – випадкові числа, рівномірно розподілені на $(0,1)$, то можливе значення x_i одержуваної випадково безперервної величини X з заданою функцією розподілу F(x), що відповідає r_i, є коренем рівняння

$$F(x_i) = r_i. \quad (1.8)$$

Відповідно до цієї теореми для одержання послідовності випадкових значень z_i, розподілених за показовим законом з параметром λ, потрібно для кожного випадкового числа $r_i(0,1)$, генерованого на ПЕОМ датчиком псевдовипадкових чисел, вирішити рівняння

$$1 - e^{-\lambda z_i} = r_i, \quad i = 1, 2, \ldots \quad (1.9)$$

Вирішуючи це рівняння відносно Z_i, маємо

$$z_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-r_i) \qquad (1.10)$$

або

$$z_i = -\frac{1}{\lambda}\ln r_i, \; i = 1, 2, \ldots \qquad (1.11)$$

2.4 Порядок виконання роботи

1. Згенерувати випадкові рівномірно розподілені числа $r_i(0,1)$.

2. Обчислити λ = 10×m/N_n (вимог/хв); де N_n – номер у журналі, m- номер групи.

3. По формулою $Z_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(r_i)$, де i=1, 2, .., одержати Z_i для проміжків між вимогами.

4. На проміжку [T_1 , T_2], T_1 = N+1, T_2 =N+5 хв., одержати послідовність t_k моментів надходження вимог, де $t_k = T_1 + \sum_{i=1}^{k} Z_i$ доти, поки $t_k \le T_2$.

Отримані результати занести в таблицю 1.1.

Таблиця 1.1

r_i	Z_i	t_k
r_1	z_1	t_1
r_2	z_2	t_2
.	.	.

5. Провести статистичну обробку отриманих результатів, для цього розділити заданий інтервал на 25 рівних проміжків довжиною

$$\tau = \frac{T_2 - T_1}{25} \text{ (мін).}$$

Для кожного проміжку визначити x (τ) – кількість вимог, що потрапили в проміжок довжиною τ, занести в таблицю 1.2.

Таблиця 1.2

Номер інтервалу	1	2	. . .	25
$x(\tau)$				

З таблиці 1.2 визначити параметри статистичного розподілу випадкової величини й занести їх у таблицю 1.3.

Таблиця 1.3

$x_k(\tau)$	0	1	2	. . .	k
n_k	n_1	n_2	n_3	. . .	k

$\sum n_k = N$, де n_k – кількість інтервалів, з k вимогами.

6. Визначити модельне значення параметра потоку:

$\overline{a(\tau)} = \frac{1}{N}\sum_k k n_k$ – мат. очікування кількості вимог в k інтервалі, звідси

$$\bar{a} = \bar{\lambda}\tau \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{a}}{\tau}.$$

7. Для заданого (λ) і модельного значення ($\bar{\lambda}$) визначити:

а) імовірність відсутності вимоги $P_0(t)$ за проміжок $t = T_2 - T_1$;

б) імовірність надходження однієї вимоги $P_1(t)$;

в) імовірність надходження чотирьох вимог $P_4(t)$;

г) імовірність надходження не менше п'яти вимог $P_{\geq 5}(t) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$;

г) імовірність надходження менше трьох вимог $P_{<3}(t) = P_0 + P_1 + P_2$;

д) імовірність надходження не більше семи вимог $P_{\leq 7}(t) = P_0 + \ldots + P_7$;

е) імовірність, що проміжок між вимогою z_k $P[\ 0{,}1 < z_k < 0{,}5\ ] = F(0{,}5) - F(0{,}1)$.

8. Висновок.

2.5 Контрольні запитання і завдання

1. За якими властивостями класифікуються випадкові потоки?

2. Дати визначення властивостям: стаціонарність; ординарність; відсутність післядії.

3. Дати визначення числовим характеристикам випадкових потоків: параметр потоку λ; інтенсивність потоку μ; провідна функція потоку.

4. Для яких потоків збігаються значення параметра потоку й інтенсивності: $\lambda = \mu$?

5. За яким законом розподілений проміжок між сусідніми вимогами в найпростішому потоці?

6. За яким законом розподілена випадкова величина, що характеризує кількість вимог найпростішого потоку, що потрапили в деякий проміжок?

2 ПІДСУМОВУВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОТОКІВ

2.1 Мета роботи

Мета роботи – дослідити суму двох найпростіших потоків і визначити характеристики результуючого потоку.

2.2 Короткі теоретичні відомості

Підсумовування й роз'єднання найпростіших потоків

При об'єднанні декількох незалежних найпростіших потоків утворюється найпростіший потік із параметром, рівним сумі параметрів вихідних потоків. При роз'єднанні найпростішого потоку з параметром λ на n напрямків так, що кожна вимога вихідного потоку з імовірністю $P_i\left(\sum_{i=1}^{n} P_i = 1\right)$ надходить на i-і напрямок, потік i-го напрямку також буде найпростішим з параметром λP_i. Ці властивості найпростішого потоку широко використовуються на практиці, оскільки значно спрощують розрахунки стаціонарного устаткування й інформаційних мереж.

Експериментальна перевірка відповідності реального потоку найпростішому

У найпростішому потоці проміжки z між сусідніми вимогами розподілені по показовому (експонентному) закону з параметром λ $p(t) = e^{-\lambda t}$.

Визначимо математичне очікування, дисперсію й середньоквадратичне відхилення проміжку z:

$$M(z) = \int_0^\infty z\,p(z)\,dz = \int_0^\infty z\lambda e^{-\lambda z}\,dz = \frac{1}{\lambda}; \qquad (2.1)$$

$$D(z) = \int_0^\infty (z - M(z))^2 p(z)\,dz = \int_0^\infty \left(z - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda z}\,dz = \frac{1}{\lambda^2}; \qquad (2.2)$$

$$\sigma_z = \sqrt{D_z} = 1/\lambda. \qquad (2.3)$$

Отриманий збіг величин M_z і σ_z характерний для показового розподілу. Ця властивість на практиці використовується як критерій для первісної перевірки відповідності гіпотези про показовий розподіл отриманим статистичним даним.

Інший спосіб перевірки ґрунтується на тому, що кількість вимог найпростішого потоку, що потрапили в інтервал часу t, описується розподілом Пуассона:

$$P_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}. \qquad (2.4)$$

Визначимо математичне очікування M_i і дисперсію D_i кількості вимог за проміжок t:

$$M_i = \sum_{i=1}^{\infty} i P_i(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^r}{r!} = \lambda t;$$

$$D_i = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 P_i(t) - M_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} - (\lambda t)^2 = \lambda t.$$

Збіг математичного очікування й дисперсії кількості вимог за проміжок t означає відповідність реального потоку найпростішому. Припустимо, для деякого реального потоку отримано ряд чисел x_1, x_2, …, x_n, що характеризує кількість вимог, що надходять в n проміжків довжиною t. Звичайно приймають t=15 хв. Розраховуються середнє значення й незміщена оцінка дисперсії величини x:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j / n; \qquad D_x = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2 / (n-1).$$

Залежно від ступеня збігу величин $\bar{x}$ і D_x, робиться висновок про прийнятність моделі найпростішого потоку.

2.3 Порядок виконання роботи

1. Використовуючи методику виконання першої лабораторної роботи, пп. 1–6, промоделювати два найпростіших потоки з $\lambda = 9\frac{m}{N_n}$ й $\lambda = 13\frac{m}{N_n}$, де m – номер групи, Nn – номер за списком. Отримані дані занести в таблицю 2.1.

Таблиця 2.1

Номер інтервалу	1	...	N
$x_1(\tau)$			
$x_2(\tau)$			
x_1+x_2			

2. Одержати сумарний потік, складаючи x(τ) відповідних інтервалів. Побудувати графіки $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x(n)$, де n – номер інтервалу, x_1, x_2, x – кількість викликів, що потрапили в інтервал для I, II і сумарного потоку відповідно.

3. Використовуючи методику п. 7 першої лабораторної роботи, одержати $\lambda_{сум}$ модельне для сумарного потоку x(n).

4. Порівняти отримане значення $\lambda_{сум}$ й $\lambda_1+\lambda_2$.

5. Розрахувати оцінки дисперсії й математичного очікування випадкової величини x(τ) – кількість викликів сумарного потоку, що потрапили в інтервал τ.

6. Висновок.

2.4 Контрольні запитання

1. Який потік утвориться при об'єднанні n найпростіших потоків?

2. Чому дорівнюють параметри потоків, що утворилися при роз'єднанні найпростішого потоку?

3. Який спосіб перевірки відповідності реального потоку найпростішому, використовують:

а) якщо виміряні проміжки між вимогами потоку;

б) якщо підраховано кількість вимог, що потрапили в проміжки рівної довжини.

3 ДОСЛІДЖЕННЯ СМО З ВІДМОВАМИ

3.1 Мета роботи

Мета роботи – дослідити систему масового обслуговування з відмовами і її характеристики якості.

3.2 Короткі теоретичні відомості

N-канальна СМО з відмовами – це система, у якій у момент приходу вимоги всі вузли обслуговування зайняті й вимога одержує відмову й відразу залишає систему. Для такої системи ймовірність усіх станів системи (у сталому режимі) дає перший розподіл Ерланга:

$$P_k = \frac{\rho^k / k!}{\sum_{i=0}^{N} \rho^i / i!},$$

де $\rho = \lambda / \nu$ – навантаження СМО, λ – інтенсивність надходження вимог, ν – інтенсивність обслуговування.

До основних характеристик якості обслуговування розглянутої СМО відносяться:

імовірність відмови $P_{відм}$

$$P_{відм} = P_N = \frac{\rho^N / N!}{\sum_{i=0}^{N} \rho^i / i!};$$

середня кількість зайнятих вузлів обслуговування $M_{зайн}$

$$M_{зайн} = \rho(1 - P_N);$$

середня кількість вільних вузлів обслуговування $M_{вільн}$

$$M_{вільн} = N - M_{зайн}.$$

У системах з відмовами події відмови й обслуговування становлять повну групу подій, звідси

$$P_{відм} + P_{обс} = 1.$$

З наведеного вище виразу відносна, пропускна здатність визначається за формулою

$$Q = P_{обс} = 1 - P_{відм} = 1 - U_1.$$

Абсолютна пропускна здатність СМО з відмовами дорівнює

$$A = \lambda P_{обс}.$$

Коефіцієнт зайнятості вузлів обслуговування визначається відношенням середньої кількості зайнятих каналів до загальної кількості каналів:

$$K_з = \frac{M_{зайн}}{N}.$$

3.3 Порядок виконання роботи

1. Побудувати графік розподілу P_k для *N*-канальної СМО з відмовами, якщо на вхід системи надходить найпростіший потік вимог із інтенсивністю $\lambda = 10\frac{m}{N_n N}$ та обслуговування вимог виконується з інтенсивністю $\nu = 3\frac{m + N_n}{N_n N}$, де m – номер групи, N-кількість каналів обслуговування, Nn – номер за списком. Кількість каналів обслуговування визначається за варіантами з таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

$N_п$,	1,5,9,13,17,21	2,6,10,14,18,22	3,7,11,15,19,23	4,8,12,16,20,24
N	4	5	6	3

Наприклад. Для СМО з відмовами графік розподілу P_k, побудований у системі Mathlab, показаний на рис. 3.1.

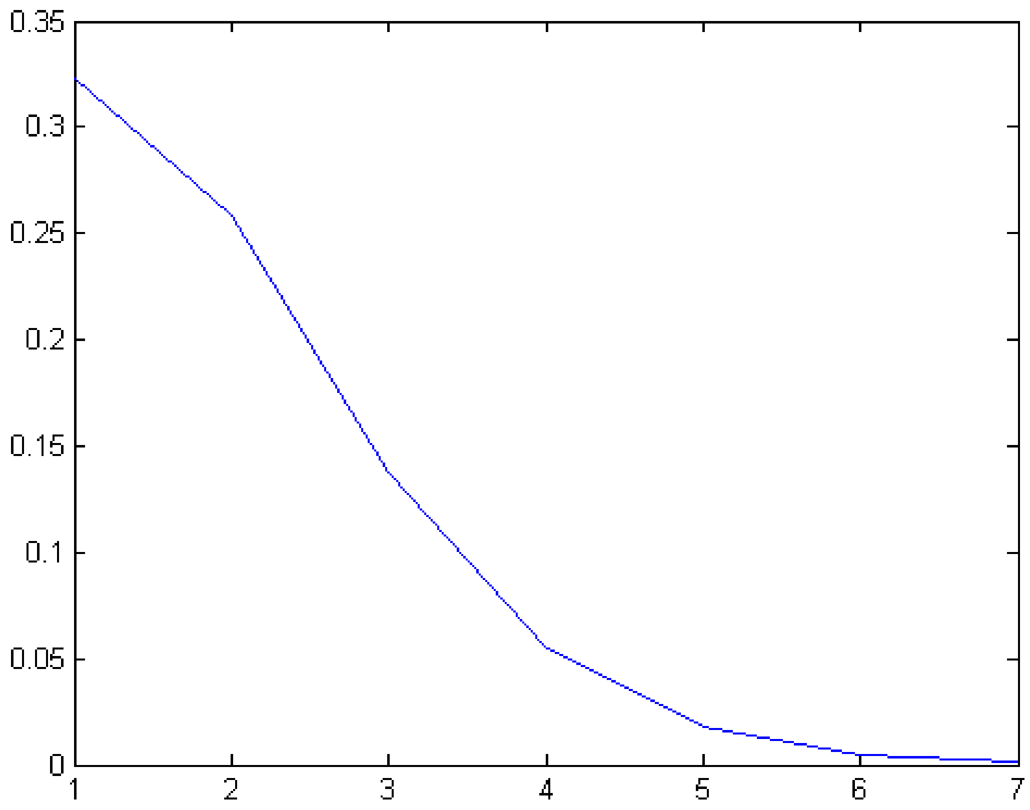


Рисунок 3.1 – Графік імовірностей P_k

2. Визначити характеристики якості обслуговування:

а) імовірність відмови $P_{відм}$;

б) середня кількість зайнятих вузлів $M_{зайн}$;

в) середня кількість вільних вузлів $M_{вільн}$;

г) відносна пропускна здатність Q;

г) абсолютна пропускна здатність А;

д) коефіцієнт зайнятості вузлів Кз.

3. Висновки.

3.4 Контрольні завдання

1. Дати поняття навантаження системи.

2. Дати поняття коефіцієнта зайнятості вузлів.

3. Навести формулу першого розподілу Ерланга.

4. Дати поняття ймовірності відмови.

5. Дати визначення характеристикам якості СМО з відмовами.

4 МОДЕЛЮВАННЯ РЕАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ ОБСЛУГОВУВАННЯ СМО З ВІДМОВАМИ

4.1 Мета роботи

Мета роботи – порівняти значення характеристик якості СМО з явними втратами, отриманими в результаті моделювання й розрахованими за першою формулою Ерланга.

7.2 Моделювання процесу обслуговування в СМО

Функція розподілу проміжку між вимогами $P(z<t)=A(t)$, а функція розподілу тривалості обслуговування $P(\xi<t)=B(t)$. Програма моделювання містить два генератори випадкових величин Z і ξ відповідно до заданих функцій A(t) і B(t), змінні t_0 для зберігання моменту надходження чергової вимоги й t_1, t_2,..., t для зберігання моменту звільнення k-го ($k=\overline{1,N}$) каналу.

Для спрощення пояснень приймемо N=3 і проаналізуємо роботу алгоритму з моменту надходження п'ятої вимоги. Перший генератор формує чергове випадкове число z_5, що відповідає надходженню п'ятої вимоги $t_0=z_1+z_2+z_3+z_4+z_5$. Припустимо, що до моменту t_0 перший канал був зайнятий четвертою вимогою, а другий і третій відповідно другою і третьою. Тоді $t_1=z_1+z_2+z_3+z_4+\xi_4$, $t_2=z_1+z_2+\xi_2$, $t_3=z_1+z_2+z_3+\xi_3$. Кожне із чисел t_1 , t_2, t_3 визначає момент звільнення відповідного каналу.

При послідовному занятті каналів значення t_0 по черзі порівнюється з t_1 , t_2,…, t_N, поки не виявляється комірка з моментом звільнення $t_k<t_0 (k=\overline{1,N})$. Нехай виявиться, що $t_1>t_0$ й $t_2>t_0$, а $t_3<t_0$. Це означає, що до моменту надходження п'ятої вимоги перший і другий канал залишалися зайнятими, а третій уже звільнився й може прийняти на обслуговування п'яту вимогу. Тоді t_3 прирівнюється t_0. Потім генерується випадкове число ξ_5, що визначає тривалість обслуговування п'ятої вимоги й додається до t_3.

Шостий цикл починається з генерації випадкового числа z_6. Як і раніше, $t_0=t_0+z_6$. Потім здійснюється почергове порівняння вмісту нульової комірки із умістом інших комірок. Якщо тепер виявиться, що $t_1 > t_0$, $t_2 > t_0$ і $t_3 > t_0$, то шоста вимога загубиться й на цьому цикл закінчиться.

Для підрахунку кількості $K_{над}$, що надійшли, і загублених $K_{заг}$ вимог використовуються два лічильники. У перший додається одиниця при кожній генерації числа z, а в другий – при кожній втраті вимоги. Відношення $K_{над}$ / $K_{заг}$ дасть по закінченню чергової серії статистичну оцінку втрат вимог.

5.3 Порядок виконання роботи

1 Початкові умови моделювання.

Параметр вступника потоку $\lambda = 10\dfrac{m}{N_n N}$ (викл/хв), де N_n – номер у журналі, m – номер групи, N – кількість каналів.

Середній час обслуговування й кількість каналів визначається варіантом з табл. 4.1.

Таблиця 4.1

$N_п$, вар	1,7,13	2,8,14	3,9,15	4,10,16	5,11,17	6,12,18
N	5	4	6	6	3	5
h,сек	40	55	75	112	33	80

На початку моделювання в системі зайнято два канали.

2 Порядок моделювання

Моделювання здійснювати на інтервалі $[t_1,t_2]$ хв., де $t_1=N_n+1$, $t_2=N_n+200$, а N_n – номер у журналі.

Надходження виклику моделюється аналогічно першій лабораторній роботі, запам'ятовується в масиві змінної $t_{пост}$ і підраховується лічильником $K_{над}$.

Процес обслуговування моделюється за показовим законом розподілу відповідно до виразу

$$\xi = -\frac{1}{\nu}\ln r \ ; \ \nu = \frac{1}{h}.$$

Час звільнення каналу визначається так: $t_{звілі} = t_{пост} + \xi$.

Отриманими даними заповнюється таблиця 4.2.

Таблиця 4.2

r	z	ξ	$t_{пост}$	$T_{звіл}$	Номер каналу
r1	-	ξ_1	-	$t_1 + \xi_1$	1
r2	-	ξ_2	-	$t_2 + \xi_2$	2
r3	z1	ξ_3	tn1	$t_3 + \xi_3$	3
					Втрата

Канали займаються послідовно. Якщо до моменту надходження вимоги зайняті всі канали, то воно губиться й підраховується кількість загублених вимог $K_{заг}$.

3. Визначити модельну ймовірність відмови вимоги:

$$\bar{P}_{відм} = \frac{K_{заг}}{K_{викл}},$$

де $K_{заг}$ – кількість загублених вимог; $K_{викл}$ – загальна кількість вимог.

Визначити $P_{відм}$ за першою формулою Ерланга:

$$P_{відм} = P_N = \frac{\rho^N / N!}{\sum_{k=0}^{N} \rho^k / k!},$$

де $\rho = \lambda h$.

4. Висновки.

5.4 Контрольні завдання

1. Визначити пропускну здатність окремих каналів при:

а) випадковому зайнятті;

б) послідовному зайнятті.

5 ДОСЛІДЖЕННЯ N - КАНАЛЬНОЇ СМО З ОЧІКУВАННЯМ

5.1 Мета роботи

Мета роботи – вивчити систему масового обслуговування з очікуванням й її характеристики.

5.2 Короткі теоретичні відомості

СМО з *N*-каналами обслуговує найпростіший потік вимог. При зайнятості всіх n вузлів обслуговування вимога, що надійшла, ставиться в чергу й обслуговується після деякого очікування. Загальна кількість вимог, що перебувають у системі на обслуговуванні й у черзі, позначимо $k(k=\overline{0,\infty})$ й назвемо станом системи. При $k=\overline{0,N}$ величина k характеризує кількість зайнятих каналів у системі, при $k=\overline{0,\infty}$ кількість зайнятих каналів дорівнює N, а різниця $k-N$ визначає довжину черги. Параметр інтенсивності обслуговування потоку v визначається кількістю зайнятих вузлів, і в першому випадку $k=\overline{0,N}$ залежить від стану системи k, а в другому $k=\overline{N,\infty}$ має постійне значення v.

Введемо поняття завантаження системи ρ, яке дорівнює відношенню інтенсивності вхідного потоку до інтенсивності обслуговування:

$$\rho=\frac{\lambda}{\nu}.$$

Відзначимо, що при інтенсивності поступаючого навантаження ρ, рівного або більшого за кількість вузлів обслуговування системи N, з імовірністю, рівній 1, постійно будуть зайняті всі вузли обслуговування й довжина черги буде нескінченною – явище «вибуху». Тому, щоб система могла функціонувати нормально й черга не росла безмежно, необхідно виконати умову $\rho<N$.

Імовірність того, що система в сталому режимі перебуває в стані k (P_k), визначаємо за формулою (другий розподіл Ерланга)

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{\rho^k}{k!} P_0 & \text{при } k = \overline{0, N} \\ \dfrac{\rho^k}{N^{k-N} N!} P_0 & \text{при } k = \overline{N, \infty} \end{cases},$$

(5.1)

де
$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)}}.$$

До основних характеристик якості обслуговування СМО з очікуванням відносять такі:

Імовірність наявності черги $P_{чер}$ є ймовірність того, що кількість вимог у системі більше кількості вузлів:

$$P_{чер} = \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)} P_0.$$

Імовірність зайнятості всіх вузлів системи $P_{зайн}$

$$P_{зайн} = \frac{\rho^N}{(N-1)!(N-\rho)} P_0.$$

Середня кількість вимог у системі $M_{вим}$

$$M_{вим} = P_0 \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^{k+1}}{k!} + \frac{\rho^{N+1}(N+1-\rho)}{(N-1)!(N-\rho)^2} \right).$$

Середня довжина черги $M_{чер}$

$$M_{чер} = \frac{\rho^{N+1} P_0}{(N-1)!(N-\rho)^2}.$$

Середня кількість вільних вузлів $M_{вільн}$

$$M_{вільн} = P_0 \sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!}(N-k).$$

Середня кількість зайнятих вузлів $M_{зайн}$

$$M_{зайн} = N - M_{вільн}.$$

Середній час очікування початку обслуговування $T_{оч}$ для вимоги, що поступили в систему

$$T_{оч} = \frac{\rho^{N}}{\nu (N-1)!(N-\rho)^{2}} P_0 .$$

Загальний час, що проводять у черзі всі вимоги, що надійшли в систему за одиницю часу, $T_{з.оч}$

$$T_{з.оч} = \frac{\rho^{N+1}}{(N-1)!(N-\rho)^{2}} P_0 .$$

Середній час $T_{вим}$, що вимога проводить у системі обслуговування

$$T_{вим} = T_{оч} + 1/\nu .$$

Сумарний час, що у середньому проводять у системі всі вимоги, що надійшли за одиницю часу, $T_{с.вим}$

$$T_{с.вим} = T_{з.оч} + \rho .$$

5.3 Порядок виконання роботи

1. Побудувати графік імовірності станів P_k від k для N-канальної СМО з очікуванням, якщо на вхід надходить найпростіший потік вимог з інтенсивністю $\lambda = 15\frac{m}{N_п N}$ та обслуговування вимог проводиться з інтенсивністю $\nu = 3\frac{m+N_п}{N_п N}$, де $N_п$ – номер за списком, m – номер групи, N – кількість каналів обслуговування. Кількість каналів обслуговування визначається з таблиці 5.1.

Таблиця 5.1

$N_п$	1,5,9,13,17,21	2,6,10,14,18,22	3,7,11,15,19,23	4,8,12,16,20,24
N	3	4	5	6

Наприклад. Для СМО з очікуванням графік розподілу P_k, побудований у системі MathCad, поданий на рис. 5.1.

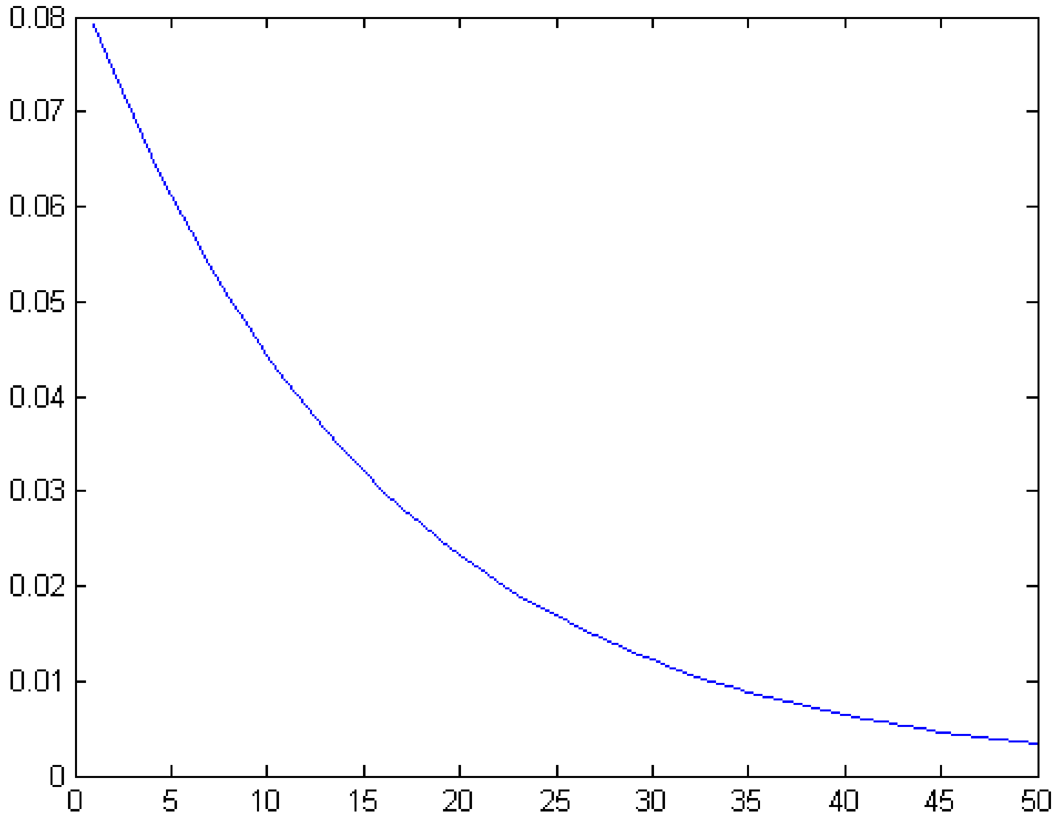


Рисунок 5.1 – Графік імовірностей P_k

2. Визначити характеристики якості обслуговування:

а) імовірність наявності черги P_k;

б) імовірність зайнятості всіх вузлів системи $P_{зайн}$;

в) середню кількість вимог у системі $M_{вим}$;

г) середню довжину черги $M_{чер}$;

ґ) середню кількість вільних вузлів $M_{вільн}$;

д) середню кількість зайнятих вузлів $M_{зайн}$;

е) середній час очікування $T_{оч}$;

є) загальний час перебування вимог у черзі за одиницю часу $T_{з.оч}$;

ж) середній час перебування вимог у системі $T_{вим}$;

з) сумарний час, що проводять всі вимоги в системі за одиницю часу, $T_{с.вим}$.

3. Висновок.

5.4 Контрольні запитання і завдання

1. Що таке явище «вибуху» у СМО з очікуванням?
2. Визначити ймовірність будь-якого стану системи з очікуванням.
3. Дати поняття стану СМО з очікуванням.

6 МОДЕЛЮВАННЯ РЕАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ ОБСЛУГОВУВАННЯ СМО З НЕОБМЕЖЕНОЮ ЧЕРГОЮ

6.1 Мета роботи

Мета роботи – повівняти значення характеристик якості СМО з необмеженою чергою, отриманих в результаті моделювання й теоретичного розрахунку.

6.2 Моделювання процесу обслуговування в СМО

Задання потоку розподілу проміжку між вимогами здійснюється функцією $P(z<t)=A(t)$, а функцією $P(\xi<t)=B(t)$ розподіляється тривалість обслуговування. У результаті програма моделювання містить два генератори випадкових величин Z і ξ відповідно до заданих функцій A(t) і B(t), змінні t_0 для зберігання моменту надходження чергової вимоги, t_1, t_2,..., t для зберігання моменту звільнення k-го ($k=\overline{1,N}$) каналу й p_1, p_2 ,…,p_∞ для зберігання моменту надходження вимоги у чергу.

Пояснимо процес моделювання на прикладі. Приймемо N=3 і проаналізуємо роботу алгоритму з моменту надходження п'ятої вимоги. Перший генератор формує чергове випадкове число z_5, що відповідає надходженню п'ятої вимоги $t_0=z_1+z_2+z_3+z_4+z_5$. Припустимо, що до моменту t_0 перший канал був зайнятий четвертою вимогою, а другий і третій відповідно другою й третьою, вимоги в накопичувачі відсутні. Тоді $t_1=z_1+z_2+z_3+z_4+\xi_4$, $t_2=z_1+z_2+\xi_2$, $t_3=z_1+z_2+z_3+\xi_3$. Кожне із чисел t_1 , t_2, t_3 визначає момент звільнення відповідного каналу.

При послідовному зайнятті каналів значення t_0 по черзі порівнюється з t_1 , t_2,…, t_N, поки не виявляється комірка з моментом звільнення $t_k<t_0 (k=\overline{1,N})$. Нехай виявиться, що $t_1>t_0$ й $t_2>t_0$, а $t_3<t_0$. Це означає, що до

моменту надходження п'ятої вимоги перший і другий канал залишалися зайнятими, а третій уже звільнився й може прийняти на обслуговування п'яту вимогу, що надійшла. Тоді t_3 прирівнюється t_0. Потім генерується випадкове число ξ_5, що визначає тривалість обслуговування п'ятої вимоги й додається до t_3.

Шостий цикл починається з генерації випадкового числа z_6. Як і раніше, $t_0=t_0+z_6$. Потім здійснюється почергове порівняння вмісту нульової комірки із умістом інших комірок. Якщо виявиться що, $t_1 > t_0$, $t_2 > t_0$ і $t_3 > t_0$, то шоста вимога буде поміщена в накопичувач, $P_1 = t_0$.

Сьомий цикл починається з генерації випадкового числа z_7. Як і колись, $t_0=t_0+z_7$. Оскільки в нас є вимога в накопичувачі, то $P_2 = t_0$. Потім $t_0 = P_1 + z_7$, здійснюється почергове порівняння вмісту нульової комірки із умістом інших комірок. Якщо виявиться, що $t_1 > t_0$, $t_2 < t_0$ і $t_3 > t_0$, то сьома вимога буде поміщена в другий канал, а в накопичувачі відбудеться зрушення $P_1 = P_2$. Далі $t_0 = P_1$, і проводиться повторна перевірка зайнятості каналів. Якщо каналів вільних не виявилося, то вимога залишається в накопичувачі, якщо вони є, то вимога надходить на канал, що звільнився.

Для підрахунку кількості $К_{вим}$, що надійшли і поміщених у накопичувач $К_н$ вимог використовується два лічильники. У перший додається одиниця при кожній генерації числа z, а в другий – при кожному поміщенні вимоги в накопичувач. Відношення $К_{вим}/К_н$ дасть по закінченні чергової серії статистичну оцінку знаходження вимог у накопичувачі.

6.3 Порядок виконання роботи

Початкові умови моделювання.

Параметр поступаючого потоку $\lambda = 12\frac{m}{N_п N}$ (викл/хв), де $N_п$ – номер у журналі.

Середній час обслуговування й кількість каналів визначається за варіантом з табл. 6.1.

Таблиця 6.1

$N_п$ Вар	1, 7,13	2, 8,14	3, 9,15	4, 10,16	5, 11,17	6, 12,18
N	3	6	5	4	4	7
h,сек	45	60	90	60	90	120

На початку моделювання в системі вільні всі канали.

Порядок моделювання

1. Моделювання здійснюється на інтервалі $[t_1,t_2]$ хв., де $t_1=N_n+1$, $t_2=N_n+200$, а N_n – номер у журналі.

Надходження вимоги моделюється аналогічно першій лабораторній роботі, запам'ятовується в масиві змінної $t_{пост}$ і підраховується лічильником $К_{вим}$.

2. Процес обслуговування моделюється за показовим законом розподілу за формулами

$$\xi = -\frac{1}{\nu}\ln r \ ; \ \nu = \frac{1}{h}.$$

Час звільнення каналу визначається так: $t_{звil} = t_{пост} + \xi$.

Канали займаються послідовно. Якщо до моменту надходження вимоги зайняті всі канали, то вимога йде в накопичувач і підраховується кількість надійшовших у накопичувач $К_н$ вимог.

3. Побудувати графіки роботи каналів.

4. Побудувати графік роботи накопичувача.

5. Визначити модельну ймовірність наявності черги

$$\bar{P}_{чер} = \frac{K_н}{K_{вим}},$$

де $K_н$ - кількість вимог у накопичувачі; $K_{вим}$ – загальна кількість вимог.

Визначити $P_{чер}$ по формулі $P_{чер} = \frac{\rho^{N+1}}{N(N-\rho)} P_0,$

де $\rho = \lambda h$,

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N(N-\rho)}}.$$

6. Висновок.

6.4 Контрольні запитання і завдання

1. Указати умову існування сталого режиму.
2. Вивести основні характеристики якості системи.
3. У чому полягає метод Монте-Карло?

Рекомендована література

1. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. – М.: Машиностроение, – 1963. – 235с.

2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение. – 1979. – 363с.

3. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Машиностроение. – 1987. – 323с.

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійних робот з дисципліни

«ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ»

для студентів напряму 6.0403201
«Інформатика»

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою інформатики
Протокол №___
від “___” ______

Харків 2017

ЗМІСТ

ВСТУП

Метою курсу "Теорія масового обслуговування" є знайомство студентів із теорією управління випадковими процесами в системах масового обслуговування. У рамках курсу розглядаються методи моделювання вихідних потоків та різноманітних класів систем масового обслуговування, наприклад, розглядаються методи моделювання Пуассонівського потоку, одноканальні та многоканальні системи масового обслуговування.

За результатом вивчання дисципліни студенти повинні знати принципи побудови систем масового обслуговування, вміти моделювати системи масового обслуговування згідно з вихідними даними системи та характеристиками її функціонування. Для вивчення дисципліни студенти повинні знати та вміти використовувати знання отримані з курсів математичного аналізу та теорії ймовірності, зокрема, Марковскі процеси.

Курс складається з двох змістовних частин: потоки вимог та системи масового обслуговування. Структура курсу: 15 лекційних занять та 6 лабораторних робіт. За допомогою методичних вказівок студенти мають можливість підготуватися до виконання контрольних робіт по кожному зі змістовних модулів.

1. Робоча програма дисципліни

Теми, які розглядаються на лекційних заняттях.

1. Введення до теорії масового обслуговування

Предмет, ціль і задачі курсу. Основні поняття ТМО. Проізводні функції.

2. Теорія потоків

Класифікація потоків. Простий Пуассонівський потік. Модифікації простого потоку. Час обслуговування. Суммування потоків. Рекуррентний потік. Квазірекуррентний потік.

3. Одноканальні системи масового обслуговування

Класифікація систем масового обслуговування (СМО), СМО з відмовами, СМО з обмеженою чергою, СМО з очікуванням, СМО з обмеженим часом очікування, замкнуті СМО, 4. Многоканальні СМО та сеті масового обслуговування, N-канальні СМО з відказами, N-канальні СМО з очікуванням, системи поллінга.

Теми лабораторних робіт:

1. Моделювання Пуассонівського потоку.
2. Сумування та роз`єднання простих потоків.
3. Вивчення та моделювання СМО з відказами.
4. Моделювання реального процесу обслуговування СМО з відказами.
5. Вивчення N – канальної СМО з очікуванням.
6. Моделювання реального процесу обслуговування СМО з необмеженою чергою.

Основна література по дисципліні:

Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. – М. Физматгиз. – 1963. – 236 с.

Вентцель Е.С. Теория вероятностей / 9е издание. – М. Наука – 2003. – 576с.

Боровков А.В. Асимптотические методы теории массового обслуживания. – М. Физматгиз. – 1980. – 381с.

Климов В.И. Стохастические системы обслуживания – М. Физматгиз. – 1966. – 243с.

Оцінювання по дисципліні здійснюється наступним шляхом: студенти отримують 6 оцінок з лабораторних робіт та 2 оцінки по контрольним роботам. Підсумкова оцінка – це сукупність оцінок отриманих протягом часу вивчення дисципліни.

2. ПОТОКИ ВИМОГ

Потоком вимог (подій) називається послідовність однорідних вимог, що з'являються одна за іншою у випадкові моменти часу. Приклади: потік викликів на телефонній станції; прибуття потягів на станцію; потік збоїв ЕОМ; потік заявок на проведення регламентних робіт в обчислювальному центрі і т.п.

Потоки вимог мають такі властивості, як стаціонарність, ординарність і відсутність післядії.

Властивість стаціонарності означає, що з часом імовірнісні характеристики потоку не змінюються. Потік можна назвати стаціонарним, якщо для будь-якого числа k вимог, що надійшли за проміжок часу довжиною Δt, ймовірність надходження вимог залежить тільки від довжини проміжку і не залежить від його розташування на осі часу.

Властивість ординарності означає практичну неможливість групового надходження вимог. Тому потік вимог можна назвати ординарним тоді, коли ймовірність надходження двох або більше вимог за будь-який нескінченно малий проміжок часу Δt є величина нескінченно мала більш високого порядку, ніж Δt.

Властивість відсутності післядії означає незалежність імовірнісних характеристик потоку від попередніх подій. Іншими словами, ймовірність надходження k вимог у проміжок $[t_1, t_2]$ не залежить від числа, часу надходження і тривалості обслуговування вимог до моменту t_1.

До основних характеристик випадкового потоку відносять провідну функцію та інтенсивність.

Провідна функція випадкового потоку $\bar{x}(0,t)$ є математичним очікуванням числа вимог у проміжку $[0, t)$. Функція $\bar{x}(0,t)$ – невід’ємна, неспадна та у практичних задачах теорії розподілу інформації неперервна та приймає тільки кінцеві значення.

Інтенсивністю λ потоку подій називається середнє число (математичне очікування числа) подій, що приходиться на одиницю часу. Для стаціонарного потоку $\lambda = const$; для нестаціонарного потоку інтенсивність у загальному випадку залежить від часу: $\lambda = \lambda(t)$

Розрізняють багато видів потоків вимог, але ми розглянемо найбільш розповсюджені, а саме найпростіші потоки та їх модифікації, потоки Пальма і потоки Ерланга.

2.1 Найпростіші потоки. Якщо потік вимог має властивості стаціонарності, ординарності і відсутності післядії, то такий потік називається найпростішим (або пуассонівским) потоком вимог.

Ймовірність надходження k вимог за проміжок часу t у пуассонівському потоці визначається виразом

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Інтервал часу T між двома сусідніми подіями найпростішого потоку має показовий розподіл

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \ \textit{(при t>0)},$$

де $\lambda = 1/\grave{I}\ \left[\grave{O}\right]$ - величина, зворотна середньому значенню інтервалу *T*.

Математичне очікування, дисперсія і середнє квадратичне відхилення проміжку *T*:

$$M = \int_0^\infty tp(t)dt = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt = 1/\lambda,$$

$$D = \int_0^\infty t^2 p(t)dt - M^2 z = \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t}dt - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2,$$

$$\sigma = \sqrt{D} = 1/\lambda.$$

Отриманий збіг величин *M* і σ характерний для показового розподілу. Ця властивість на практиці використовується як критерій для первісної перевірки відповідності гіпотези про показовий розподіл отриманим статистичним даним.

ПРИКЛАД. По шосе повз спостерігача рухається в одному напрямку найпростіший потік машин. Відомо, що ймовірність відсутності машин протягом 5 хвилин дорівнює 0,5. Потрібно знайти ймовірність того, що за 10 хвилин повз спостерігача проїде не більше двох машин.

Розв'язання. Приймемо за одиницю часу 5 хв. У задачі потрібно знайти

$$P_{\le 2}(2) = P_0(2) + P_1(2) + P_2(2) = e^{-\lambda 2} + \frac{(2\lambda)}{1!} e^{-\lambda 2} + \frac{(2\lambda)^2}{2!} e^{-\lambda 2}.$$

З умови випливає $P_0(1) = 0{,}5$, тобто $e^{-\lambda} = 0{,}5$, отже, $\lambda = \ln 2$. Таким чином, у попереднє рівняння підставляємо λ і отримаємо $P_{\le 2}(2) = 0{,}84$.

2.2 Найпростіший потік з можливою нестаціонарністю. Найпростішим потоком з можливою нестаціонарністю (нестаціонарним найпростішим потоком) є потік, що володіє властивостями ординарності, відсутністю післядії та має в кожен момент часу t кінцеве миттєве значення параметра $\lambda(t)$.

Миттєва інтенсивність нестаціонарного найпростішого потоку $\lambda(t)$ визначається як границя відношення середнього числа подій, що відбулися за елементарний інтервал часу $(t, t+\Delta t)$, до довжини Δt цього інтервалу, коли $\Delta t \to 0$. Середнє число подій, що виникають в інтервалі часу τ, який слідує безпосередньо за моментом t_0, дорівнює $\Lambda(t_0, t) = \int\limits_{t_0}^{t_{0+\tau}} \lambda(t)dt$. Якщо потік подій стаціонарний, то $\Lambda(t_0, \tau) = \Lambda(\tau) = \lambda\tau$.

Тоді ймовірність виникнення k вимог для розглянутого виду потоку буде

$$P_k(t_0, \tau) = \frac{(\Lambda(t_0, \tau))^k}{k!} e^{-\Lambda(t_0, \tau)} .$$

ПРИКЛАД. Розглянемо найпростіший потік з нестаціонарним параметром, що змінюється за законом $\lambda(t) = 1 + 0{,}5\sin(6\pi t)$. Параметр є періодичним, його період дорівнює 1/3. Знайти ймовірність відсутності вимог на відрізку [1,5].

Розв'язання. Довжина відрізка дорівнює 4. Обчислимо середнє число подій, що виникають в інтервалі часу $\tau = 4$

$$\Lambda(1,4) = \int_{1}^{5} (1 + 0,5\sin(6\pi z))dz = 4, \text{ тоді } P_0(1,4) = e^{-4} = 0,0183.$$

2.3 Найпростіший потік з можливою неординарністю. Найпростіший потік з можливою неординарністю має властивості стаціонарності і відсутності післядії. Вимоги в такому потоці можуть надходити не по одному, а відразу групами (пакетами). У цьому випадку усі вимоги, що приходять одночасно, поєднуються в пакети, ймовірність надходження двох чи більше пакетів за проміжок часу *t* є величина, нескінченно мала стосовно *t*. Кожен пакет, виходячи з визначення, містить хоча б одну вимогу.

Ймовірність надходження *k* вимог для потоку з можливою неординарністю з урахуванням ймовірності p_m перебування *m* вимог у пакеті

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{k} \left[\frac{(\lambda t)^n}{n!} \sum_{\sum_{j=1}^{n} m_j = k} \prod_{j=1}^{n} p_{mj} \right],$$ при

$$\sum_{\sum_{j=1}^{n} m_j = k} \prod_{j=1}^{n} p_{mj} = \begin{cases} 1, \text{ÿêù î} \;\; \text{ê} = 0, \\ 0, \text{ÿêù î} \;\; \text{ê} \geq 1. \end{cases}$$

2.4 Найпростіші потоки з можливою післядією. Потік, що має кінцеве значення параметра і володіє властивостями стаціонарності й ординарності є найпростішим потоком з можливою післядією. Умовна ймовірність надходження деякого числа вимог на заданий проміжок часу *t* такого потоку обчислюється за допомогою припущення про передісторію потоку (про надходження вимог до цього проміжку часу) і може відрізнятися від безумовної ймовірності тієї ж події.

Ймовірність надходження вимог k за даний проміжок часу t для потоку з можливою післядією має наступний вигляд

$$P_k(t) = -\lambda \int_0^t (\phi_k(x) - \phi_{k-1}(x))dx,$$

де $\phi_k(t)$ – функція Пальма-Хінчина.

Функція $\phi_k(t)$ являє собою ймовірність надходження k вимог за час t при умові, що в початковий момент цього проміжку t надійде хоча б одна (а в силу ординарності потоку рівно одна) вимога (ця початкова вимога не входить у число k вимог за час t).

2.5 Потоки Пальма. Ординарний потік подій називається потоком Пальма (або рекурентним потоком, чи потоком з обмеженою післядією), якщо інтервали часу $T_1, T_2, \ldots$ між послідовними подіями являють собою незалежні, однаково розподілені випадкові величини.

У зв'язку з рівністю розподілів $T_1, T_2, \ldots$ потік Пальма завжди стаціонарний. Найпростіший потік є частковим випадком потоку Пальма; у ньому інтервали між подіями розподілені по показовому закону.

2.6 Потоки Ерланга. Потоком Ерланга *n-го* порядку називається потік подій, що виходить «проріджуванням» найпростішого потоку, коли зберігається кожна *n-а* точка (подія) у потоці, а всі проміжні відкидаються.

Інтервал часу між двома сусідніми подіями в потоці Ерланга *n-го* порядку являє собою суму n незалежних випадкових величин $T_1, T_2, \ldots, \grave{O}_n$, що мають показовий розподіл з параметром λ:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i \ .$$

Закон розподілу випадкової величини T називається законом Ерланга *n-го* порядку і має щільність

$$f_n(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)}e^{-\lambda t} \text{ (при } t>0).$$

Математичне очікування, дисперсія і середнє квадратичне відхилення випадкової величини T відповідно рівні:

$$m_t=n/\lambda\ ;\ D_t=n/\lambda^2;\ \sigma_t=\sqrt{n/\lambda}\,.$$

Для потоків Ерланга n-го порядку ймовірність надходження k вимог за проміжок часу t дорівнює

$$P_k(t)=e^{-\lambda t}\sum_{l=(n+1)(k-1)}^{(n+1)(k+1)}\frac{(\lambda t)^l}{l!}(1-\left|\frac{l}{n+1}-k\right|), \text{ для } k>0.$$

При k=0

$$P_0(t)=e^{-\lambda t}\sum_{l=0}^{n+1}\frac{(\lambda t)^l}{l!}(1-\frac{l}{n+1})\,.$$

2.7 Сумування і роз'єднання найпростіших потоків. При об'єднанні декількох незалежних найпростіших потоків утвориться також найпростіший потік з параметром, рівним сумі параметрів вихідних потоків. При роз'єднанні вхідного найпростішого потоку з λ параметром на n напрямків так, що кожна вимога вихідного потоку з ймовірністю p_i $(\sum_{i=1}^{n}p_i=1)$ надходить *на* і-й напрямок, потік і-го напрямку також буде найпростішим з параметром λp_i. Ці властивості найпростішого потоку широко використовуються на практиці, оскільки значно спрощують розрахунки стаціонарного устаткування та інформаційних мереж.

2.8 Показовий закон розподілу часу обслуговування. Часом обслуговування називається час, витрачений кожним вузлом обслуговування на одну вимогу.

Час обслуговування характеризує пропускну здатність кожного вузла обслуговування, не пов'язаного з оцінкою якості обслуговування і є випадковою величиною.

Це пояснюється неідентичністю вузлів обслуговування і розходженням у попиті на обслуговування окремих вимог. Наприклад, вагони, що надійшли на ремонт, мають несправності різноманітного характеру, потрапляють у різні ремонтні бригади, тому час на обслуговування для різних вагонів не буде однаковим.

У багатьох задачах теорії масового обслуговування закон розподілу часу обслуговування передбачається показовим і описується виразом

$$F(t)=1-e^{-\mu t}.$$

Параметр μ характеризує середню швидкість обслуговування вимог.

2.9 ЗАВДАННЯ №1

1. Дано пуассонівський потік з параметром 2 хв$^{-1}$. Знайти ймовірність того, що довжина інтервалу між сусідніми вимогами складає від 1 до 2 хвилин.

2. Виконується накладення («суперпозиція») двох найпростіших потоків з інтенсивностями λ_1 і λ_2. Чи буде потік, що вийшов у результаті накладення, найпростішим, і якщо так, то з якою інтенсивністю?

3. Виконується випадкове проріджування найпростішого потоку подій з інтенсивністю λ; кожна подія, незалежно від інших, з ймовірністю p зберігається в потоці, а з ймовірністю *1-p* викидається. Яким буде потік, отриманий в результаті проріджування найпростішого потоку?

4. Потік машин, що їдуть по шосе в одному напрямку, являє собою найпростіший потік з інтенсивністю 2 машини в хвилину. Людина виходить на шосе, щоб зупинити першу зустрічну машину, яка їде в даному напрямку. Знайти закон розподілу часу *T*, протягом якого їй доведеться чекати машину; визначити математичне очікування і середнє квадратичне відхилення.

5. Потік машин, що їдуть по шосе в одному напрямку, являє собою найпростіший потік з інтенсивністю 4 машини в хвилину. Шосе має розгалуження в два напрямки. Ймовірність руху машин у першому напрямку дорівнює 0,12, а в другому – 0,88. Визначити інтенсивності руху автомобілів в обох напрямках.

6. Розглянемо найпростіший потік з нестаціонарним параметром, що змінюється по закону $\lambda(t) = 1 + 0,5\cos(6\pi t)$. Параметр є періодичним, його період дорівнює 1/3. Знайти ймовірність відсутності вимог на відрізку [1;9].

7. Комп'ютерний клас з'єднаний з каналом Інтернет через 10-канальний концентратор. Інтенсивності передачі даних по кожному з 10 каналів дорівнюють відповідно 540 біт/с, 120 біт/с, 40 біт/с, 170 біт/с, 350

біт/с, 60 біт/с, 742 біт/с, 153 біт/с, 500 біт/с, 100 біт/с. Потік даних підкоряється пуассонівському закону розподілу. Визначити інтенсивність передачі даних в каналі Інтернет.

8. Розглянемо найпростіший потік з нестаціонарним параметром, що змінюється за законом $\lambda(t) = 1 + 0,5\sin(6\pi t)$. Параметр є періодичним, його період дорівнює 1/4. Знайти ймовірність надходження однієї, двох і трьох вимог.

9. Для найпростішого потоку з нестаціонарним параметром, обумовленим рівністю $\lambda(t) = 3 + 2^{-t}$, знайти ймовірність надходження двох вимог на проміжку часу [3;8].

10. По залізниці повз спостерігача рухається в одному напрямку найпростіший потік потягів. Відомо, що ймовірність відсутності потягів протягом 10 хвилин дорівнює 0,8. Потрібно знайти ймовірність того, що за 20 хв повз спостерігача пройде не більше трьох потягів.

11. Виконується випадкове проріджування найпростішого потоку подій з інтенсивністю $\lambda = 4$; кожна подія, незалежно від інших, з ймовірністю *p=0,6* зберігається в потоці, а з ймовірністю *1-p* відкидається. Яким буде потік, отриманий в результаті проріджування найпростішого потоку?

12. Розглянемо найпростіший потік з нестаціонарним параметром, що змінюється за законом $\lambda(t) = 2 + 0,5\sin(4\pi t)$. Параметр є періодичним, його період дорівнює 1/3. Знайти ймовірність відсутності вимог на відрізку [1;5].

13. Дано пуассонівський потік з параметром 1 хв$^{-1}$. Знайти ймовірність того, що довжина інтервалу між сусідніми вимогами складає від 2 до 4 хвилин.

14. Потік машин, що їдуть по шосе в одному напрямку, являє собою найпростіший потік з інтенсивністю 8 машин в хвилину. Шосе має розгалуження в три напрямки. Ймовірність руху машин у першому

напрямку дорівнює 0,12, у другому - 0,68, у третьому – 20. Визначити інтенсивності руху автомобілів у всіх напрямках.

15. Потік машин, що їдуть по шосе в одному напрямку, являє собою найпростіший потік з інтенсивністю 6 машин в хвилину. Людина виходить на шосе, щоб зупинити першу зустрічну машину, яка їде в даному напрямку. Знайти закон розподілу часу *T*, який їй доведеться чекати; визначити його математичне очікування і середнє квадратичне відхилення.

16. Для найпростішого потоку з нестаціонарним параметром, обумовленим рівністю $\lambda(t) = 7 - 5^{-t}$, знайти ймовірність надходження двох вимог на проміжку часу [1;10].

17. У пункт поточного оздоблювального ремонту вагонів надходять вимоги на ремонт. Потік вимог можна вважати найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 0,307$. Знайти ймовірність того, що за годину не надійде ні однієї вимоги (вагона) на ремонт.

18. Час обслуговування для апаратів деякої системи масового обслуговування розподілено по показовому закону $F(t) = 1 - e^{-1,5t}$, де t - час у хвилинах. Знайти ймовірність того, що обслуговування триватиме не більше 15 хв.

19. Для найпростішого потоку з нестаціонарним параметром, обумовленим рівністю $\lambda(t) = 3 + 2^{-2t}$, знайти ймовірність надходження двох вимог на проміжку часу [2;6].

20. У пункт поточного оздоблювального ремонту вагонів надходить вимога на ремонт. Потік вимог можна вважати найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 0,517$. Знайти імовірність того, що за годину надійде одна вимога (вагон) на ремонт.

21. Час обслуговування для апаратів деякої системи масового обслуговування розподілено по показовому закону $F(t) = 1 - e^{-0,5t}$, де t - час у хвилинах. Знайти ймовірність того, що обслуговування триватиме не більше 5 хв.

22. Виконується випадкове проріджування найпростішого потоку подій з інтенсивністю $\lambda = 0,7$; кожна подія, незалежно від інших, з імовірністю *p=0,75* зберігається в потоці, а з імовірністю *1-p* викидається. Яким буде потік, що виходить у результаті проріджування найпростішого потоку?

23. Виконується розбиття випадкового найпростішого потоку подій з інтенсивністю $\lambda = 4,9$ на три потоки. Імовірності влучення подій у той чи інший потік відповідно дорівнюють $p_1=0,2$, $p_2=0,54$, $p_3=0,26$. Визначити інтенсивності кожного потоку, що вийшов, у результаті розбиття.

24. Час обслуговування для апаратів деякої системи масового обслуговування розподілено по показовому закону $F(t) = 4 - e^{-1,6t}$, де t - час у хвилинах. Знайти ймовірність того, що обслуговування триватиме не більше 8 хв.

25. У пункт поточного оздоблювального ремонту вагонів надходять вимоги на ремонт. Потік вимог можна вважати найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 0,617$. Знайти імовірність того, що за годину надійде одна вимога (вагон) на ремонт.

26. Виконується розбиття випадкового найпростішого потоку подій з інтенсивністю $\lambda = 1,6$ на 2 потоки. Імовірності влучення подій у той чи інший потік відповідно дорівнюють $p_1=0,44$, $p_2=0,56$. Визначити інтенсивності кожного отриманого в результаті розбиття потоку.

27. Комп'ютерний клас з’єднаний з каналом Інтернет через 5-канальний концентратор. Інтенсивності передачі даних по кожному з 10 каналів дорівнюють відповідно 541 біт/с, 110 біт/с, 44 біт/с, 171 біт/с, 356 біт/с. Потік даних підкоряться пуассонівському закону розподілу. Визначити інтенсивність передачі даних в каналі Інтернет.

28. Розглянемо найпростіший потік з нестаціонарним параметром, що змінюється за законом $\lambda(t) = 2 + 0,5\sin(4\pi t)$. Параметр є періодичним,

його період дорівнює 1/3. Знайти імовірність відсутності вимог на відрізку [4;9].

29. На вокзал прибуває пуассонівський потік потягів, у середньому 2 потяги за 5 хвилин. Знайти імовірність того, що за 15 хвилин прибудуть 3 потяги.

30. Час обслуговування для апаратів деякої системи масового обслуговування розподілено по показовому закону $F(t)=1-e^{-4,5t}$, де t - час у хвилинах. Знайти імовірність того, що обслуговування триватиме не більше 20 хв.

3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

3.1 Класифікація систем масового обслуговування. Більшість задач на залізничному транспорті пов'язані з системами масового обслуговування.

Системи, у яких, з одного боку, виникають масові запити (вимоги) на виконання будь-яких видів послуг, а, з іншого боку, відбувається задоволення цих запитів, називаються системами масового обслуговування.

Система масового обслуговування включає наступні елементи: джерело вимог, вхідний потік вимог, чергу, обслуговуючий пристрій (обслуговуючий апарат, канал обслуговування), вихідний потік вимог.

Системи масового обслуговування класифікують по різних ознаках. Одною з ознак є очікування вимоги початку обслуговування. Відповідно до цієї ознаки системи діляться на наступні види:

1) системи масового обслуговування з втратами (відмовами);

2) системи масового обслуговування з очікуванням;

3) системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги;

4) системи масового обслуговування з обмеженим часом очікування.

Системи масового обслуговування, у яких вимоги, що надходять у момент, коли всі прилади обслуговування зайняті, одержують відмову і губляться, називаються системами з втратами чи відмовами.

Системи масового обслуговування, у яких можлива поява скільки завгодно довгої черги вимог до обслуговуючого пристрою, називаються системами з очікуванням.

Системи масового обслуговування, що допускають чергу, але мають обмежене число місць, називаються системами з обмеженою довжиною черги.

Системи масового обслуговування, що допускають чергу, але мають обмежений термін перебування кожної вимоги, називаються системами з обмеженим часом очікування.

По кількості каналів обслуговування СМО поділяються на одноканальні та багатоканальні.

За місцем перебування джерела вимог СМО поділяються на розімкнуті, коли джерело знаходиться поза системою, і замкнуті, коли джерело знаходиться в самій системі. До останнього виду відноситься, наприклад, верстатна ділянка, в якій верстати є джерелом несправностей, а отже, і вимог на їхнє обслуговування.

Однією з форм класифікації систем масового обслуговування є кодова (символьна) класифікація Д. Кендалла. При цій класифікації характеристику системи записують у вигляді трьох, чотирьох чи п'яти символів, наприклад A | B | S, де A — тип розподілу вхідного потоку вимог, У — тип розподілу часу обслуговування, S — число каналів обслуговування.

Для експонентного розподілу приймають символ M, для кожного (довільного) розподілу – символ G. Запис M | M | 3 означає, що вхідний потік вимог пуассонівський (найпростіший), час обслуговування розподілений по експонентному закону, система має три канали обслуговування.

Четвертий символ вказує припустиму довжину черги, а п'ятий — порядок добору (пріоритету) вимог.

3.2 Рівняння Колмогорова для ймовірностей станів. Системи, що представляються у вигляді неперервного ланцюга Маркова, звичайно досліджують за допомогою рівняння Колмогорова для ймовірностей станів.

Щільністю ймовірності переходу λ_{ij} із стану S_i у стан S_j називається границя відношення ймовірності цього переходу за час Δt до довжини проміжку Δt, коли останній прагне до нуля:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},$$

де $P_{ij}(\Delta t)$ - ймовірність того, що система, що знаходилася в момент t у стані S_i, за час Δt перейде в стан S_j.

Неперервний ланцюг Маркова називається однорідним, якщо щільність ймовірностей λ_{ij} не залежить від часу t, у протилежному випадку він називається неоднорідним.

Для однорідних Марковських неперервних ланцюгів, що характеризують процеси загибелі і розмноження, рівняння Колмогорова мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&\frac{dP_0}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dP_i}{dt} = -\lambda_{i-1,i}P_{i-1}(t) - (\lambda_{i,i-1} + \lambda_{i,i+1})P_i(t) + \lambda_{i+1,i}P_{i+1}(t) \qquad ,\\
&(i = 1, 2, \ldots, n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

де $P_i(t)$ – ймовірність стану S_i, коли в системі знаходиться i вимог у момент часу t; $n+1$- загальне число можливих станів $S_0, S_1, \ldots, S_n$..

При гіпотезі про стаціонарний режим роботи системи (ймовірності станів не залежать від часу) рівняння Колмогорова приймають вигляд:

$$\begin{aligned}
&-\lambda_{01}P_0 + \lambda_{10}P_1 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_{i-1,i}P_{i-1} - (\lambda_{i,i+1} + \lambda_{i,i+1})P_i + \lambda_{i+1,i}P_{i+1} = 0,\\
&(i = 1, 2, \ldots, n).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

У більшості практичних задач виявляється допустимою гіпотеза про стаціонарний режим роботи системи. Тому можуть бути використані рівняння Колмогорова другого виду.

Математичні моделі систем масового обслуговування, що приводяться нижче, відповідають рівнянням Колмогорова для стаціонарного режиму роботи системи при умовах найпростішого потоку вхідних вимог і експонентного закону розподілу часу обслуговування.

3.3 Система масового обслуговування з відмовами. СМО з відмовами – це така система, у якій прийняті для обслуговування вимоги, у випадку зайнятості всіх каналів обслуговування, відразу залишають її.

Ймовірності станів системи визначаються з виразу

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0,$$

де $k = 1, 2, \ldots, N$, N – загальне число каналів; $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ - навантаження; λ - інтенсивність вхідного потоку вимог, μ - інтенсивність (продуктивність) одного каналу (приладу) обслуговування, а ймовірність відсутності вимог P_0 визначається з виразу $P_0 = \left[\sum\limits_{i=0}^{N} \dfrac{\rho^i}{i!} \right]^{-1}$.

До основних характеристик якості обслуговування розглянутої СМО відносяться:

Ймовірність відмови $P_{відм} = P_N = \dfrac{\rho^N / N!}{\sum\limits_{i=0}^{N} \rho^i / i!}$.

Середнє число зайнятих вузлів обслуговування $M_{зайн} = \rho(1 - P_N)$.

Середнє число вільних вузлів обслуговування $M_{вільн} = N - M_{зайн}$.

У системах з відмовами події відмови та обслуговування складають повну групу подій, звідси

$$P_{відм} + P_{обс} = 1.$$

Відносна пропускна здатність визначається за формулою

$$Q = P_{обс} = 1 - P_{відм} = 1 - P_N.$$

Абсолютна пропускна здатність СМО з відмовами дорівнює

$$A = \lambda P_{обс}.$$

Коефіцієнт зайнятості вузлів обслуговування визначається відношенням середнього числа зайнятих каналів до загального числа каналів

$$K_{\text{ç}} = \frac{M_{\text{çàéí}}}{N}\,.$$

ПРИКЛАД. В обчислювальний центр колективного користування з трьома ЕОМ надходять замовлення від підприємств на обчислювальні роботи. Якщо працюють усі три ЕОМ, то замовлення, що надходить знову, не приймається, і підприємство змушене звернутися в інший обчислювальний центр. Нехай середній час роботи з одним замовленням складає 3 години. Інтенсивність потоку заявок 0,25 г$^{-1}$. Знайти ймовірність відмови і середнє число зайнятих ЕОМ.

Маємо: m=3, λ=0,25 г$^{-1}$, $\bar{t}_{\text{îáñ}}$=3 г. Знаходимо:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{\text{îáñ}} = 3 \cdot 0,25 = 0,75\,,$$

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{3} \frac{\rho^i}{i!}\right]^{-1} = \left[1 + 0,75 + \frac{0,75^2}{2!} + \frac{0,75^3}{3!}\right]^{-1} = [2,1]^{-1}\,,$$

$$\text{Ð}_{\text{â³äì}} = \frac{\rho^N}{N!} P_0 = \frac{0,75^3}{3!} \cdot \frac{1}{2,1} = 0,033\,,$$

$$M_{\text{çàéí}} = \rho(1 - P_N) = 0,75(1 - 0,033) = 0,72525\,.$$

Таким чином, $\text{Ð}_{\text{â³äì}} = 0,033;\ M_{\text{çàéí}} = 0,72525$ ЭВМ.

3.4 Система масового обслуговування з обмеженою довжиною черги. СМО з обмеженою довжиною черги – це така система, в якій вимоги, що потрапляють на обслуговування, залишають систему, якщо зайняті всі канали обслуговування, і в накопичувачі зайняті всі місця.

Ймовірності станів $S_0, S_1, \ldots, S_N$ знаходяться за формулами

$$\text{Ð}_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \text{ де } (k = 1, 2, \ldots, \mathrm{N})\,.$$

Ймовірності станів $S_{N+1,} S_{N+2,\ldots,} S_{N+l}$ визначаються за допомогою формули

$$P_k = \frac{\rho^k}{N^{k-N} N!} P_0\,, \text{ де } (k = N+1, \ldots, N+l)\,,$$

l – максимальна довжина черги.

Ймовірність P_0 знаходять по формулі $P_0 = \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{N+l} \frac{\rho^i}{N^{k-N} N!} \right]^{-1}$.

В більшості практичних задач повинно виконуватися співвідношення $\frac{\rho}{N} < 1$, тоді вираз для P_0 можна переписати в наступному вигляді

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N \cdot N!} \frac{1-(\frac{\rho}{N})^l}{1-\frac{\rho}{N}} \right]^{-1}.$$

Ймовірність відмови в обслуговуванні визначається з виразу

$$P_{\text{â³äì}} = P_{N+l} = \frac{\rho^N}{N!} \left(\frac{\rho}{N} \right)^l P_0.$$

Середнє число каналів, зайнятих в обслуговуванні, і коефіцієнт зайнятості визначають:

$$M_{\text{çàéí}} = \sum_{k=1}^{N} k P_k + N \sum_{i=1}^{l} P_{N+i}; \quad K_{\text{ç}} = \frac{M_{\text{çàéí}}}{N}.$$

Середнє число вільних апаратів і коефіцієнт простою визначають:

$$M_0 = N - M_{\text{çàéí}}; \quad K_0 = \frac{M_0}{N}.$$

Середня довжина черги визначається за допомогою виразу:

$$M_{\text{÷åð}} = \sum_{k=1}^{l} k P_{N+k} = \frac{\rho^N}{N!} P_0 \sum_{k=1}^{l} k \left(\frac{\rho}{N} \right)^k.$$

ПРИКЛАД. На автозаправній станції установлені три колонки для подачі бензину. Біля станції знаходиться майданчик на три машини для їх очікування в черзі. На станцію приїжджає в середньому дві машини за хвилину. Середній час заправки однієї машини 1хв. Потрібно визначити ймовірність відмови і середню довжину черги.

Маємо: *N=3*, *l=3*, *λ=2хв⁻¹*, $\bar{\text{Ò}}_{\text{îáñ}} = 1хв$, $\mu = 1/\overline{\text{Ò}}_{\text{îáñ}} = 1\text{õâ}^{-1}$. Знаходимо: $\rho = \lambda/\mu = 2/1 = 2$, $\rho/N = 2/3$, тоді

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{N}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{p^{N+1}}{N\cdot N!}\frac{1-(\rho/N)^l}{1-\rho/N}\right]^{-1} = \left[1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{3\cdot 3!}\cdot\frac{1-(2/3)^3}{1-2/3}\right]^{-1} \approx 0{,}122$$

,

$$P_{\text{â³äì}} = P_{N+l} = \frac{\rho^{N+1}}{N^l\cdot N!}P_0 = (\frac{\rho}{N})^l\frac{p^N}{N!}P_0 = (2/3)^3\frac{2^3}{3!}\cdot 0{,}122 = 0{,}048,$$

$$M_{\text{÷åð}} = \frac{P_0\rho^N}{N!}\sum_{i=1}^{l} i(\frac{\rho}{N})^i = \frac{0{,}122\cdot 2^3}{3!}\left[2/3+2(2/3)^2+3\cdot(2/3)^3\right] = 0{,}35.$$

Таким чином, $P_{\text{â³äì}} = 0{,}048$, $M_{\text{÷åð}} = 0{,}35$ машини.

3.5 Система масового обслуговування з очікуванням. СМО з очікуванням аналогічна системі масового обслуговування з обмеженою довжиною черги при умові, що границя черги рухається в безкінечність.

Ймовірність станів СМО з очікуванням знаходять по формулам:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!}P_o\text{, для}\quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{N!N^{k-N}}P_o\text{, для}\quad (k = N+1, \ldots, N+k, \ldots, N+\infty).$$

При $\rho/N > 1$ спостерігається явище «вибуху» – необмежений ріст середньої довжини черги, тому для визначення P_o повинна виконуватися обмежуюча умова $\rho/N < 1$, та з урахуванням її запишемо вираз:

$$P_o = \left[\sum_{k=0}^{N}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)}\right]^{-1}.$$

До головних характеристик якості обслуговування СМО з очікуванням відносять:

Ймовірність наявності черги $P_{чер}$, тобто ймовірність того, що число вимог в системі більше числа вузлів:

$$P_{\text{чер}} = \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)} P_0 .$$

Ймовірність зайнятості всіх вузлів системи $P_{\text{зайн}}$:

$$P_{\text{зайн}} = \frac{\rho^{N}}{(N-1)!(N-\rho)} P_0 .$$

Середнє число вимог в системі $M_{\text{вим}}$:

$$M_{\text{вим}} = P_0 \left(\rho \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}(N+1-\rho)}{(N-1)!(N-\rho)^2} \right).$$

Середня довжина черги $M_{\text{чер}}$:

$$M_{\text{чер}} = \frac{\rho^{N+1} P_0}{(N-1)!(N-\rho)^2} .$$

Середнє число вільних каналів обслуговування $M_{\text{вільн}}$:

$$M_{\text{вільн}} = P_0 \sum_{k=1}^{N} k \frac{\rho^k}{(N-k)!} .$$

Середнє число зайнятих каналів обслуговування $M_{\text{зайн}}$:

$$M_{\text{зайн}} = N - M_{\text{св}} .$$

Коефіцієнт простою K_0 і коефіцієнт зайнятості $K_з$ каналів обслуговування системи:

$$K_0 = \frac{M_{\text{вільн}}}{N};\ K_{з} = \frac{M_{\text{зайн}}}{N} .$$

Середній час очікування початку обслуговування $T_{оч}$ для вимог, які надійшли в систему:

$$T_{\text{оч}} = \frac{\rho^{N}}{\mu(N-1)!(N-\rho)^2} P_0 .$$

Загальний час, який проводять в черзі всі вимоги, що надходять в систему за одиницю часу $T_{ooч}$:

$$T_{\text{ооч}} = \frac{\rho^{N+1}}{(N-1)!(N-\rho)^2} P_0 .$$

Середній час $T_{вим}$, який вимога проводить в системі обслуговування:

$$T_{\text{вим}} = T_{\text{оч}} + \mu^{-1} .$$

Сумарний час, який в середньому проводять в системі всі вимоги, що надходять за одиницю часу $T_{свим}$:

$$T_{свим} = T_{оч} + \rho .$$

ПРИКЛАД. В порту є дві пристані для розвантаження вантажних судів. Інтенсивність потоку суден рівна 0,8 суден на добу. Середній час розгрузки одного судна становить 2 доби. Вважається, що черга очікування розгрузки суден може бути необмеженої довжини.

Знайти середній час перебування судна в порту.

Маємо: $m=2$, $\lambda=0{,}8\ сут^{-1}$, $\mu = 1/\overline{T_{обс}} = 0{,}5 сут^{-1}$, $\rho = \lambda/\mu = 0{,}8/0{,}5 = 1{,}6$.

Знаходимо:

$$P_o = \left[\sum_{k=0}^{N}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{1{,}6}{1!} + \frac{1{,}6^2}{2!} + \frac{1{,}6^3}{2!(2-1{,}6)}\right]^{-1} = 0{,}11;$$

$$M_{чер} = \frac{P_0\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\cdot\frac{1}{(1-\rho/m)^2} = \frac{0{,}11\cdot 1{,}6^3}{2\cdot 2\cdot(1-0{,}8)^2} = 2{,}8;$$

$$\overline{T_{оч}} = M_{чер}/\lambda = 3{,}5.$$

Маємо, $\overline{T}_{оч} = 3{,}5$ діб.

3.6 Система масового обслуговування з обмеженим часом очікування. В системах масового обслуговування з обмеженим часом очікування час очікування в черзі кожної вимоги обмежено випадковою величиною $t_{оч}$, середнє значення якого $\overline{t_{оч}}$.

Величина, обернена середньому часу очікування, означає середню кількість вимог, які залишають чергу за одиницю часу, викликане появою в черзі однієї вимоги: $\nu = 1/\overline{t_{оч}}$.

При наявності в черзі k вимог інтенсивність потоку, що залишають чергу вимог становить $k\nu$.

Для подальшого розгляду СМО з обмеженим часом очікування введемо новий параметр $\beta = \dfrac{\nu}{\mu}$, що позначає середнє число вимог, які залишають систему не обслугованими, що приходяться на середню швидкість обслуговування вимог.

Формули для визначення ймовірності станів такої системи мають вигляд:

$$P_k = \frac{\rho_k}{k!} P_0 \text{, при } k = 1, 2, \ldots, N \text{;}$$

$$P_k = \frac{\rho^N}{N!} \cdot \frac{\lambda^l}{\prod\limits_{i=1}^{l} (N + i\beta)} P_0 \text{, при } i = N + 1, \ldots, N + l, \ldots,$$

де $\prod\limits_{i=1}^{l} (N + i\beta)$ - добуток співмножників $N + i\beta$.

Ймовірність P_0 визначають по формулі

$$P_0 = \left[\sum_{k=1}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^N}{N!} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^l}{\prod\limits_{i=1}^{l} (N + i\beta)} \right]^{-1}.$$

В практичних задачах суму безкінечного ряду порахувати досить просто, так як члени ряду швидко спадають з зростанням номера.

Середня довжина черги:

$$M_{\text{÷åð}} = \frac{\rho^N}{N!} P_0 \sum_{l=1}^{\infty} l \frac{\lambda^l}{\prod\limits_{i=1}^{l} (N + i\beta)}.$$

Ймовірність відмови:

$$P_{\text{â³äì}} = \frac{\beta}{\rho} M_{\text{÷åð}}.$$

Середнє число зайнятих каналів обслуговування і коефіцієнт зайнятості:

$$M_{\text{çàéí}} = \sum_{k}^{N} kP_k + N\sum_{l=1}^{\infty} P_{N+l};$$

$$K_{\text{ç}} = \frac{M_{\text{çàéí}}}{N}.$$

Середнє число вільних каналів обслуговування і коефіцієнт простою:

$$M_{\text{â³ë}} = N - M_{\text{çàéí}};\ K_0 = \frac{M_{\text{çàéí}}}{N}.$$

Відносна пропускна здатність

$$Q = 1 - P_{\text{â³äì}}.$$

ПРИКЛАД. На пункті хімчистки знаходиться три апарата для чистки. Інтенсивність потоку відвідувачів λ=6 чоловік за годину. Інтенсивність обслуговування клієнтів одним апаратом μ=3 чоловік за годину. Середня кількість відвідувачів, які залишають чергу, не дочекавшись обслуговування, ν=1 чоловік за годину. Знайти абсолютну пропускну здатність пункту.

Маємо: $m=3$, $\lambda=6$, $\mu=3$, $\nu=1$. Знаходимо: $ð = \lambda/\mu = 6/3 = 2$,

$$Ð_0 = \left[1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^3}{3!} \times \left(\frac{6}{3\cdot 3+1} + \frac{6^2}{(3\cdot 3+2\cdot 1)}\right)\right]^{-1} = 0{,}13.$$

Ймовірність зайнятості всіх приладів дорівнює $Ð_{\text{çàéí}} = 1 - Ð_0 = 0{,}87$. Тоді абсолютна пропускна здатність може бути отримана як добуток: $À = NÐ_{\text{çàéí}} = 3\cdot 0{,}87 = 2{,}61$. Таким чином, A = 2,61 чоловік за годину.

3.7 Замкнуті системи масового обслуговування. В замкнутих системах масового обслуговування джерело вимог знаходиться в середині системи, і інтенсивність потоку вимог залежить від стану самої системи.

Частіше всього потоком вимог в такій системі являється потік несправностей від деякої групи працюючих приладів. Нехай є m працюючих приладів, які можуть виходити із робочого стану за рахунок несправностей.

Є також N приладів (каналів) обслуговуючих ці вимоги. Такими каналами можуть виступати і люди. Звичайно вважають, що $N < m$.

Позначимо через S_0 стан, при якому всі прилади працюють, а прилади обслуговування не зайняті; S_1 - стан, при якому один прилад вийшов із робочого стану і обслуговується одним приладом обслуговування; S_N — N приладів не працюють і всі прилади зайняті обслуговуванням; S_m - всі прилади не працюють, із них N обслуговуються и m - N чекають обслуговування.

Ймовірність станів замкнутої системи визначається наступними залежностями:

$$P_k = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(m-j)}{k!}\rho^k P_0 \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

$$P_k = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(m-j)}{N!N^{k-N}}\rho^k P_0 \quad (k = N+1, N+2, \dots, m),$$

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{N}\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(m-j)}{k!}\rho^k + \sum_{k=N+1}^{m}\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(m-j)}{N!N^{k-N}}\rho^k\right]^{-1}.$$

Середня довжина черги:

$$M_{чер} = \sum_{k=N+1}^{m}\frac{(k-N)m!}{N^{k-N}N!(m-k)!}\rho^k P_0.$$

Коефіцієнт простою вимог в СМО:

$$K_{пр} = \frac{M_{чер}}{m}.$$

Середнє число вимог в СМО:

$$M = \left(\sum_{k=1}^{N} k C_m^k \rho^k + \sum_{k=N+1}^{m} k\frac{m!}{N^{k-N}N!(m-k)!}\rho^k\right)P_0,$$

де C_m^k - коефіцієнт бінома Ньютона.

Середнє число вільних каналів і коефіцієнт простою каналів K_0:

$$M_{\text{â³ë}} = \sum_{k=0}^{N} (N-k) C_m^k \rho^k P_0 \,; \; K_0 = \frac{M_{\text{â³ë}}}{N}.$$

Ймовірність зайнятості каналів обслуговування:

$$P_{\text{ç}} = 1 - \text{Ð}_0.$$

Абсолютна пропускна здатність:

$$\text{À} = \mu \text{Ð}_{\text{ç}}.$$

ПРИКЛАД. Робітник обслуговує групу із трьох станків. Кожний станок зупиняється в середньому два рази за годину. Процес налагоджування займає в середньому 10 хв. Визначити абсолютну пропускну здатність налагоджування робочих станків.

Маємо: n=1, m=3, λ=2, $T_{обс}$=1/6, μ=6. Знаходимо: $\rho = \lambda / \mu = 1/3$,

$$P_0 = \left[1 + m\rho + \frac{m(m-1)}{1!1^1}\rho^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1!1^2}\rho^3 \right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 2 \cdot (1/3)^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1/3)^3 \right]^{-1} = 0{,}346.$$

Визначаємо ймовірність того, що робітник буде зайнятий обслуговуванням:

$$P_{\text{ç}} = 1 - \text{Ð}_0 = 1 - 0{,}346 = 0{,}654.$$

Якщо робітник зайнятий обслуговуванням, то він обслуговує 6 станків за годину. Таким чином, абсолютна здатність знаходиться як добуток:

$$\text{À} = \mu \text{Ð}_{\text{ç}} = 6 \cdot 0{,}654 = 4.$$

Тобто, A=4 станки за годину.

3.8 ЗАВДАННЯ №2

1. В довідковій службі вокзалу залізничної дороги стоїть телефон з п'ятьма каналами. Вхідний виклик отримує відмову тоді, коли всі канали зайняті. Нехай середній час зайнятості одного каналу становить 1 хвилину. Інтенсивність вхідних викликів становить 0,1 хв$^{-1}$. Потрібно знайти ймовірність відмови і відносну пропускну здатність.

2. На залізничній станції знаходяться три каси для продажу квитків на потяги далекого слідування. Коли всі каси зайняті, пасажири стають в чергу. Довжина черги не може перевищувати 50 чоловік. Середній час обслуговування в одній касі становить 5 хвилин. Пасажири прибувають на станцію для купівлі квитків в середньому по два чоловіки за хвилину. Знайти ймовірність відмови і загальну кількість людей (вимог), які знаходяться в системі.

3. Для умови задачі 1 знайти ймовірність обслуговування виклику, а також ймовірність надходження одного виклику.

4. На залізничній станції маємо п'ять колій для обслуговування залізничних потягів, які прибули. Інтенсивність прибуття залізничних потягів дорівнює 15 потягів за годину. Середній час обслуговування одного потяга 20 хвилин. Вважають, що черга очікування обслуговування потягів може бути необмеженої довжини. Знайти ймовірність зайнятості всіх п'яти колій залізничної станції, середній час обслуговування потяга.

5. Програміст обслуговує комп'ютерний центр із 50 комп'ютерів . В середньому комп'ютер дає збій 0,05 годин$^{-1}$. Процес налагодження займає в середньому 45 хвилин. Визначити абсолютну пропускну здатність налагодження комп'ютерів програмістом.

6. В локомотивному депо обслуговується 100000 залізничних вагонів. Кожен вагон в середньому підлягає ремонту один раз в два роки. На ремонт вагона затрачається в середньому 5 днів. Знайти ймовірність того, що депо зайнято обслуговуванням вагонів.

7. Сервіс-центр займається посередницькою діяльністю по продажу залізничних квитків і здійснює частину своєї діяльності по трьом телефонним лініям. В середньому в сервіс-центр надходить 75 дзвінків за годину. Середня тривалість обслуговування кожного дзвінка становить 2 хвилини. Визначити ймовірність того, що жоден канал не зайнятий, а також ймовірність відмови.

8. Викладач приймає екзамен у групи студентів із 23 чоловік, які прийшли на протязі однієї хвилини. Час прийняття екзамену у одного студента в середньому становить 20 хв. Студенти, що очікують здачу екзамену, знаходяться в черзі. Визначити середню тривалість очікування студентів здачі екзамену.

9. Для умови задачі 7 визначити ймовірність зайнятості одного і двох каналів телефонної лінії.

10. В вагоні-ресторані інтенсивність обслуговування клієнтів в середньому становить 20 чоловік за годину. Обслуговуванням клієнтів займаються два офіціанти, при цьому середня тривалість обслуговування одного клієнта становить 10 хвилин. Середня кількість клієнтів, що залишили чергу, не дочекавшись обслуговування, становить 2 чоловіки за годину. Визначити абсолютну пропускну здатність вагону-ресторану.

11. Для умови задачі 7 визначити абсолютну пропускну здатність сервісного центра.

12. В читальний зал національної бібліотеки, яка має 30 місць, приходять відвідувачі з інтенсивністю 20 чоловік за годину. Тривалість прибуття кожного відвідувача в середньому становить 2 години. Визначити ймовірність відмови відвідувачу в читальному залі і середнє число зайнятих місць.

13. Абонентський відділ бібліотеки обслуговує 3 бібліотекаря. Тривалість обслуговування одним бібліотекарем читача в середньому становить 5 хвилин. Інтенсивність відвідування читачами бібліотеки становить 4 чоловіки за хвилину. Якщо в момент приходу читача всі

бібліотекарі зайняті, то він стає в чергу. Потрібно визначити середнє число читачів, які чекають початку обслуговування і час їх перебування в черзі.

14. Потік завдань в 4-процесорному комп'ютері являється найпростішим з інтенсивністю 1000 завдань за хвилину. Середній час виконання завдання кожним процесором становить 3 секунди. Якщо при надходженні завдання всі процесори зайняті, то завдання переміщається в чергу (черга необмежена). Потрібно визначити середню довжину черги і середнє число зайнятих процесорів.

15. В комп'ютерному класі установлений один принтер, швидкість друку якого в середньому становить 2 сторінки за хвилину. Друк починається відразу після надходження файлу на порт принтера. Середня тривалість між надходженнями файлів на принтер становить 1 хвилину. Якщо в момент надходження файлу на друк принтер зайнятий, то завдання розміщуються в необмежену чергу. Потрібно визначити середню довжину черги і загальну тривалість перебування файлів в черзі, якщо кожний файл в середньому містить 5 сторінок.

16. На базу даних (БД) сервера залізничної дороги надходить 10 запитів в секунду. Середній час обробки кожного запиту становить 1 секунду. Запит, який надходить в момент обробки попереднього запита, стає в чергу. Визначити ймовірність наявності черги і сумарний час, який проведуть запити до обслуговування.

17. На залізничній станції розташований готель, в якому є 20 місць. Відвідувач в випадку зайнятості місць переходить в інший готель. Середня тривалість зняття готелю клієнтом становить 8 годин . Інтенсивність потоку надходження клієнтів становить 5 чоловік за годину. Визначити ймовірність відмови і абсолютну пропускну здатність даного готелю.

18. На телефонній станції залізничної дороги є три лінії. Виклик, який поступає, коли всі лінії зайняті, отримує відмову. Потік викликів являється пуассонівським з інтенсивністю 0,5 викликів на хвилину. Тривалість обслуговування розподілено по експонентному закону і в

середньому тривалість розмови становить 3 хвилини. Знайти ймовірність відмови, відносну і абсолютну пропускні здатності і долі вільного часу, які приходяться в середньому на кожну лінію.

19. Чотириканальний концентратор має буфер ємністю 10 Мб. Пакети даних надходять на концентратор з інтенсивністю 51 пакетів у секунду. Пакети, що надійшли в момент, коли зайняті всі канали, стають в чергу в буфері обміну, якщо він зайнятий – одержують відмову. Середня швидкість одного каналу 256 Кб в секунду. Визначити абсолютну пропускну здатність каналу концентратора при середньому розмірі пакета 2 Кб.

20. Два робітники обслуговують групу із чотирьох верстатів. Зупинка робочого верстата відбувається в середньому через 30 хвилин. Час роботи й час налагодження розподілений за експонентним законом. Знайти середню частку вільного часу для кожного робітника й середній час роботи верстата.

21. Для умови завдання 19 визначити ймовірність відмови передачі пакета й середнє число вільних каналів концентратора, якщо середній розмір повідомлення становить 5 Кб.

22. Розглянемо дві поряд розташовані телефонні кабіни, загальна черга перед якими не буває більше трьох чоловік («зайві» йдуть до інших кабін). Потік людей, що бажають зателефонувати, є найпростішим і має інтенсивність 15 чоловік у годину. Час, проведений людьми в кабіні, розподілено за експонентним законом і становить в середньому 3 хвилини. Знайти середню частку часу, коли вільна одна кабіна; ймовірність того, що людина піде шукати іншу кабіну.

23. Для умови завдання 20 знайти задані характеристики системи, у якій два робітники завжди обслуговують верстат разом, причому з подвійною інтенсивністю.

24. У буфеті залізничної станції обслуговують клієнтів два продавці. Інтенсивність обслуговування одним продавцем становить 0,5 чоловік за хвилину. Відвідувачі приходять у буфет із середнім інтервалом в 1 хвилину.

Якщо в момент приходу клієнта всі продавці зайняті, клієнт стає в чергу, що не може перевищувати 5 чоловік. Відвідувач, що не потрапив у чергу, іде в інший буфет. Визначити ймовірність відмови відвідувачеві в обслуговуванні і середній час очікування в черзі.

25. Залізничний пропускний митний пункт складається із трьох ліній огляду. Час огляду одного поїзда на лінії огляду в середньому становить 4 години. Інтенсивність складів, що прибувають, становить 2 склади в годину. У випадку зайнятості всіх ліній огляду прибулий склад ставиться на запасний шлях. Визначити абсолютну пропускну здатність митного пункту й середній час простою ліній огляду.

26. Залізнична сортувальна гірка, на яку подається найпростіший потік складів з інтенсивністю 2 склади в годину, являє собою СМО з необмеженою чергою. Час обслуговування (розпуску) складу на гірці має показовий розподіл із середнім значенням часу 20 хв. Знайти середнє число складів в черзі, середній час перебування складу в СМО, середній час перебування складу в черзі.

27. Автозаправна станція (АЗС) має дві колонки. Майданчик біля неї дозволяє одночасне очікування не більше чотирьох машин. Потік машин, що прибуває на станцію, найпростіший з інтенсивністю 1 машина у хвилину. Час обслуговування автомашини розподілено за показовим законом із середнім значенням 2 хвилини. Знайти для АЗС фінальні ймовірності стану для 1, 2, 3 та 4-х машин, абсолютну пропускну здатність і ймовірність відмови в обслуговуванні.

28. Є двоканальна найпростіша СМО з відмовами. На її вхід надходить потік заявок з інтенсивністю 4 заявки в годину. Середній час обслуговування однієї заявки 0,8 г. Кожна обслугована заявка приносить дохід 4 гривні. Зміст кожного каналу обходиться 2 грн. в годину. Вирішити: вигідно чи не вигідно в економічних відносинах збільшити число каналів СМО до трьох, якщо дохід від заявок перебуває в співвідношенні $D=Ac$, де c – дохід від обслугованої заявки, A – абсолютна пропускна здатність СМО.

29. У стоматологічному кабінеті три крісла, а в коридорі є три стільці для очікування прийому. Потік клієнтів розподілений за найпростішим законом з інтенсивністю 12 клієнтів в годину. Час обслуговування клієнта розподілено показово із середнім значенням 20 хвилин. Якщо всі три стільці в коридорі зайняті, клієнти в чергу не стають. Визначити середнє число клієнтів, що обслуговуються кабінетом за годину, середню частку обслугованих клієнтів із прийшовши та середній час, що клієнт проведе в коридорі та в кабінеті.

30. Квиткову касу з одним віконцем представимо як СМО з необмеженою чергою. Каса продає квитки в пункти А і В; пасажирів, що бажають купити квиток у пункт А, приходить в середньому троє за 20 хвилин, а в пункт В – двоє за 20 хвилин. Потік пасажирів можна вважати найпростішим. Касир у середньому обслуговує трьох пасажирів за 10 хвилин. Час обслуговування розподілений за показовим законом. Установити, чи існують фінальні ймовірності станів СМО, і якщо так – обчислити перші три з них. Знайти середнє число заявок у СМО, середній час перебування заявки в системі й середнє число заявок у черзі.

31. Залізнична каса має два віконця, у кожному з яких продаються квитки у два пункти: Москву й Петербург. Продаж квитків в обидва напрямки однаковий по інтенсивності, що дорівнює 0,45 пасажирів у хвилину. Середній час обслуговування пасажира (продажу йому квитка) 2 хвилини. Надійшла раціоналізаторська пропозиція: для зменшення черг (в інтересах пасажирів) зробити обидві каси спеціалізованими. У першій продавати квитки тільки в Петербург, а в другий – тільки в Москву. Вважати всі потоки подій найпростішими. Потрібно перевірити розумність цієї пропозиції.

32. Розглядається найпростіша двоканальна СМО з «нетерплячими» заявками. Інтенсивність потоку заявок 3 заявки за годину; середній час обслуговування однієї заявки 1 година; середній термін, протягом якого заявка «терпляче» коштує в черзі, дорівнює 0,5 г. Підрахувати фінальні

ймовірності станів, обмежуючись тими, які не менше 0,001. Знайти відносні й абсолютну пропускні здатності.

33. Ремонтний майстер обслуговує групу з 8-ми касових автоматів із продажу квитків у приміські поїзди. Спостереження показали, що в середньому автомат вимагає втручання майстра один раз в 2 г. Потік вимог на ремонт – найпростіший. Усунення несправностей в автоматі займає в середньому 6 хв., причому час ремонту є величина випадкова, розподілена за показовим законом. Визначити коефіцієнт простою майстра й середню довжину черги автоматів на обслуговування.

34. АТС має 6 ліній зв'язку. Потік вимог на переговори – найпростіший з інтенсивністю один виклик у хвилину. Середній час переговорів – 3 хв. Закон розподілу часу показовий. Визначити ймовірність відмови й коефіцієнт завантаження ліній зв'язку.

35. На станції метро 5 касових апаратів. Зі спостережень установили, що до цих п'яти апаратів підходять в середньому 60 чоловік за хвилину. Час обслуговування будемо вважати розподіленим за показовим законом, із середнім часом обслуговування 4 сек. Знайти ймовірність того, що всі апарати вільні, та середнє число людей, що перебувають біля апаратів.

36. У камеру схову вокзалу, що складається з 5-ти секцій, надходить найпростіший потік вимог у середньому 2 вимоги у хвилину. Час обслуговування розподілений за показовим законом і становить в середньому 2 хвилини. Час очікування в черзі становить в середньому 4 хвилини й розподілено за показовим законом. Визначити середню довжину черги, середнє число зайнятих секцій і відносну пропускну здатність системи.

37. У залізничній поліклініці в кабінеті флюорографії проходять прийом в середньому 2 чоловіка за хвилину. Час прийому розподілений за показовим законом. Потік відвідувачів найпростіший з інтенсивністю 5 чоловік за хвилину. Черга відвідувачів, які очікують прийом, не обмежена. Визначити середню довжину черги й абсолютну пропускну здатність кабінету флюорографії.

38. Залізнична сортувальна гірка, на яку подається найпростіший потік складів з інтенсивністю 2 склади за годину, являє собою СМО з необмеженою чергою. Час обслуговування (розпуску) складу на гірці має показовий розподіл із середнім значенням часу 15 хв. Знайти середнє число складів в черзі, середній час перебування складу в черзі, а також абсолютну пропускну здатність сортувальної гірки.

39. На базу даних (БД) сервера залізниці надходить 10 запитів в секунду. Середній час обробки кожного запиту становить 1 секунду. Запит, що надійшов у момент обробки попереднього запиту, стає в чергу. Визначити ймовірність наявності черги, ймовірність відсутності запиту й коефіцієнт завантаження сервера.

3.9 ЗАВДАННЯ №3

Побудувати графік розподілу P_k для N-канальної СМО з відмовами, якщо на вхід системи надходить найпростіший потік вимог з інтенсивністю $\lambda = 10\frac{m}{N_n N}$ та обслуговування вимог виконується з інтенсивністю $v = 5\frac{m}{N_n N}$, де m-остання цифра року (якщо вона дорівнює 0, то підставляємо 10), N – кількість каналів обслуговування, N_n –номер за списком. Число каналів обслуговування визначається за таблицею 1.

ПРИКЛАД. Для СМО з відмовами графік розподілу $P_{k,}$ побудований в системі MathCad, зображений на мал. 1.

$\lambda := 8 \qquad \nu := 5 \qquad N := 7$

$$\rho := \frac{\lambda}{\nu} \qquad \rho = 1.6$$

$$P0 := \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{\rho^i}{i!}\right)^{-1} \qquad P0 = 0.202$$

$k := 1..N$

$$P(k) := \frac{\rho^k}{k!} \cdot P0$$

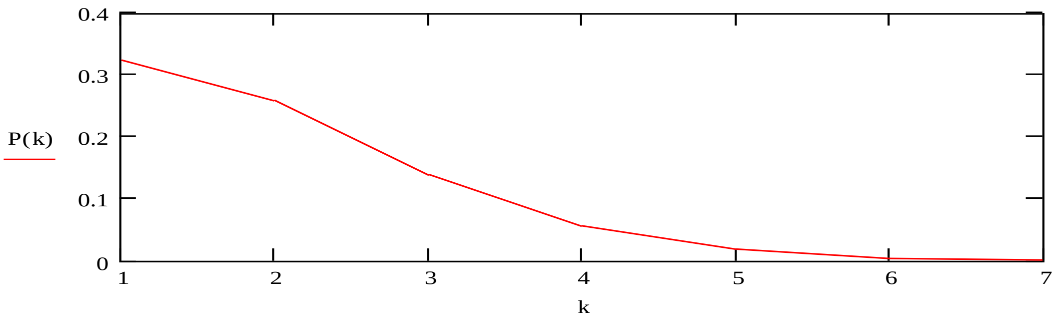


Рис. 1. Графік ймовірностей P_k

Визначити характеристики якості обслуговування для СМО з відмовами:

1. Ймовірність відмови $P_{від}$.
2. Середнє число зайнятих вузлів $M_{зайн}$.
3. Середнє число вільних вузлів $M_{віл}$.
4. Відносну пропускну здатність Q.
5. Абсолютну пропускну здатність A.
6. Коефіцієнт зайнятості вузлів $Кз$.

3.10 ЗАВДАННЯ №4

Побудувати графік ймовірності станів P_k, для N-канальної СМО з очікуванням, якщо на вхід надходить найпростіший потік вимог з інтенсивністю $\lambda = 15\dfrac{m}{N_n N}$ та обслуговування вимог виконується з інтенсивністю $\nu = 5\dfrac{m}{N_n N}$, де N_n – номер за списком, m – остання цифра року (якщо вона дорівнює 0, то підставляємо 10), N – число каналів обслуговування. Число каналів обслуговування визначається за таблицею 1.

ПРИКЛАД. Для СМО з очікуванням графік розподілу P_k, побудований в системі MathCad, зображений на мал. 2.

$\lambda := 30 \quad \nu := 4 \quad N := 8$

$$\rho := \frac{\lambda}{\nu} \qquad \rho = 7.5$$

$$P0 := \left[\sum_{i=0}^{N} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{N+1}}{N! \cdot (N-\rho)}\right]^{-1} \qquad P0 = 2.032 \times 10^{-4}$$

$k := 1..50$

$$P(k) := \frac{\rho^k}{N! \cdot N^{k-N}} \cdot P0$$

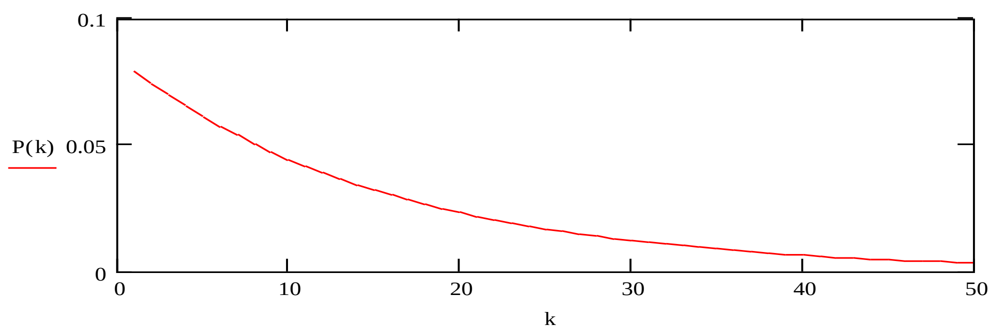


Рис. 2. Графік ймовірностей P_k

Визначити характеристики якості обслуговування.

1. Ймовірність наявності черги P_k.
2. Ймовірність зайнятості всіх вузлів системи $P_{зайн}$.
3. Середнє число вимог у системі $M_{вим}$.

4. Середню довжину черги $M_{чер}$.

5. Середнє число вільних вузлів $M_{віл}$.

6. Середнє число зайнятих вузлів $M_{зайн}$.

7. Середній час очікування $T_{оч}$.

8. Загальний час перебування вимог у черзі за одиницю часу $T_{ооч}$.

9. Середній час перебування вимоги в системі $T_{вим}$.

10. Сумарний час, що проводять всі вимоги за одиницю часу $T_{свим}$.

11. Абсолютну пропускну здатність A.

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Контрольні питання до екзамену

«Теорія масового обслуговування»

підготовки бакалавра
спеціальності 122 «Коп'ютерні науки» спеціалізацій «Інформатика» та «Інформаційно-комунікаційні технології» та спеціальності 6.040302 «Інформатика».

Електронний документ

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою ІНФ
Протокол № 1
від 31.08.2017

кафедрою РТІКС
Протокол № 1
від 31.08.2017

Харків 2017 р.

Контрольні питання до екзамену:

38. Найпростіший потік. Вивід формули, по якій розподілені прихожі заявки.
39. Характеристики найпростішого потоку, співвідношення інтенсивності й параметра, математичне очікування, дисперсія.
40. Найпростіший потік з можливою нестаціонарністю. Визначення й основні особливості.
41. Найпростіший потік з можливою неординарністю. Визначення й основні особливості.
42. Найпростіші потоки з можливою післядією. Визначення й основні особливості.
43. Рекурентні потоки без запізнювання. Визначення й основні особливості (формули).
44. Квазірекурентні потоки без запізнювання**.** Визначення й основні особливості (формули).
45. Потік Ерланга. Закон Ерланга.
46. Просівання потоку. Операція просівання.
47. Виробляючі функції. Розподіл імовірності. Хвости розподілу ймовірностей.
48. Рекурентні потоки із запізнюванням. Визначення й основні особливості (формули).
49. Квазірекуріентні потоки із запізнюванням**.** Визначення й основні особливості (формули).
50. Інтенсивність просіяного потоку. Інтенсивність потоку Ерланга.
51. Операція просівання. Особливості застосування для потоку Ерланга.
52. Навести загальні характеристики для СМО.
53. Операція компанірування. Композиція.
54. Класифікація систем масового обслуговування. Класифікація Кендала.
55. Рівняння Колмогорова для ймовірностей станів.
56. Критерії ефективності СМО. Їхньої різниці для різного виду систем.

57. Одноканальні системи масового обслуговування з відмовами. Імовірності станів, характеристики системи.
58. Одноканальні системи масового обслуговування з очікуванням. Імовірності станів, характеристики системи.
59. Одноканальні системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги. Імовірності станів, характеристики системи.
60. Одноканальні системи масового обслуговування з обмеженим часом очікування. Імовірності станів, характеристики системи.
61. Замкнуті системи масового обслуговування. Імовірності станів, характеристики системи.
62. Багатоканальні системи масового обслуговування з відмовами. Імовірності станів, характеристики системи.
63. Багатоканальні системи масового обслуговування з очікуванням. Імовірності станів, характеристики системи.
64. Багатоканальні системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги. Імовірності станів, характеристики системи.
65. Мережі масового обслуговування. Класифікація.
66. Експонентні мережі масового обслуговування. Принцип роботи, умови стабільності.
67. Системи множинного доступу. Принцип роботи, умови стабільності.
68. Системи поллінга. Принцип роботи, умови стабільності.
69. Застосування методу Монте-Карло для моделювання систем масового обслуговування.
70. Час обслуговування заявки. Загальні принципи.
71. Види дисциплін обслуговування при обслуговуванні із пріоритетом.
72. Опис роботи систем з відносним пріоритетом. Пріоритети, що будуються лінійно.
73. Опис роботи систем з абсолютним пріоритетом.
74. Опис роботи систем з відносним пріоритетом. Пріоритети, що задають пріоритетними функціями.