ЛЕКЦІЯ 1

Тема: Вступна частина. Визначники 2-го та 3-го порядків.

ПЛАН

1. Визначники 2-го та 3-го порядків.
2. Властивості визначників. Розклад визначників за елементами рядка (стовпця.
3. Визначники n-го порядку та їх обчислення.
4. Формули Крамера.
5. Дослідження систем лінійних рівнянь.

1. Матриця розміром **m** x **n** –це сукупність чисел, розміщених у вигляді прямокутної таблиці, яка має **m** рядків та **n** стовпців.

Матриці позначають великими літерами латинського алфавіту та круглими дужками. Така матриця має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

або $A=\left(a_{ij}\right)m\cdot n,$ $\qquad A=\left\|a_{ij}\right\| m\cdot n$

$$i=1,2\dots m$$
$$j=1,2\dots n$$

Кожен елемент a_{ij} матриці А має два індекси : перший вказує номер рядка, другий –номер стовпця

Якщо **m=n**, то матриця буде квадратною.
n –порядок матриці.

Визначник – це число, яке знаходиться з елементів квадратної матриці за певним правилом.

Якщо квадратна матриця позначена літерою B, то її визначник позначається $|B|$ або ΔB, $\det B$. Друга назва – детермінант.

Визначники 2-го порядку:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

допоміжна діагональ (-)   головна діагональ (+)

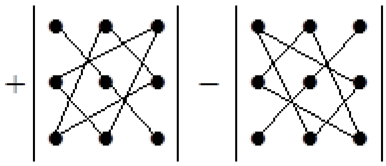
(дорівнює різниці добутків елементів головної та допоміжної діагоналей)

<u>Приклад</u>: $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = -4 - 15 = -19$

<u>Визначники 3-го порядку</u>:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

а) Обчислення за правилом трикутників:



$\downarrow$ головна діагональ (-) $\downarrow$ допоміжна діагональ (+)

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

б) Обчислення за правилом Саріуса:

гол. діаг.   допом. діаг.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| - \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

<u>Приклад</u>: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) \cdot 7 + 1 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 7 - - 4 \cdot 0 \cdot (-2) == 14 + 12 + 9 - 35 = 0$

2. <u>Властивості визначників</u>.

1) Визначник при транспонуванні не змінюється (при заміні рядків на стовпці).

A^T - транспонована матриця

$\Delta A = \Delta A^T$ $\qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 23 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 23$

2) Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які рядки (або стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

3) Якщо визначник має два однакових рядки (або стовпці), то він дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

4) Якщо у визначнику усі елементи одного рядка (або стовпця) помножити на дійсне число k, то визначник зміниться також в k разів

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11 \qquad \begin{vmatrix} 4k & 5k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11k$$

<u>Наслідок 1</u>. Спільний множник усіх елементів будь-якого рядка (або стовпця)

визначника можна винести за знак визначника

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (1-6) = -30$$

<u>Наслідок 2</u>. Якщо усі елементи будь-якого рядка (або стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

5) Визначник, у якого відповідні елементи двох будь-яких рядків (або стовпців) пропорційні, дорівнює нулю.

Доведення випливає з властивостей 3, 4

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

6) Якщо у визначнику елементи будь-якого рядка (або стовпця) є сумою двох доданків, то він дорівнює сумі двох відповідних визначників,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

7) Якщо до всіх елементів будь-якого рядка (або стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (або стовпця) цього визначника, помножені на одне й те ж саме число, то визначник не зміниться

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{cc} \bullet(-3) & \bullet(-2) \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

-16 = -16

Для обчислення визначників порядка n > 3 використовують алгебраїчне доповнення.

<u>Мінором</u> M_{ij} елемента a_{ij} з визначника n-го порядку, називається визначник n-1 порядку, який одержуємо з визначника $|A|$ шляхом викреслювання і-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

<u>Алгебраїчним доповненням</u> A_{ij} визначника називається мінор цього елемента, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

<u>Приклад</u>: Знайти алгебраїчні доповнення до елементів a_{21} та a_{33} визначника $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = M_{33}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = 12 + 1 = 13$$

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5$$

$$A_{21} = -13 \qquad A_{33} = 5$$

<u>Теорема Лапласа</u> (розкладання визначника за елементами будь-якого рядка або стовпця).

Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого рядка (або стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23}$$

3. Для того, щоб обчислити визначник n-го порядку потрібно до нього застосовувати властивість 7 та теорему Лапласа.

Для скорочення обчислень визначника доцільно його розкласти за елементами такого рядка чи стовпця, який містить найбільшу кількість нулів. У такому випадку не треба знаходити алгебраїчні доповнення до елементів, що дорівнюють 0 (добуток 0 на будь-яке алгебраїчне доповнення дорівнює 0). Треба навчитись виконувати еквівалентні перетворення визначника, які дають можливість одержати нулі у деякому рядку або стовпці.

<u>Приклад:</u> Обчислити визначник 4 порядку $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} x(3) & x(-5) \\ & \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 8 & -5 & 14 \\ 0 & -9 & 9 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{41} =$$

$$= 1\cdot(-1)^2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 8 & -5 & 14 \\ -9 & 9 & -12 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 8 & -5 & 14 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(20 - 84 - 96 + 60 - 42 + 64) = 3\cdot(-78) = -234$$

1. Розглянемо систему двох лінійних неоднорідних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

х та у –невідомі,

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ -коефіцієнти при невідомих,

b_1 та b_2 -вільні члени.

-Якщо невідомі системи в 1-му степені, то система називається <u>лінійною</u>

-Якщо хоча б один із вільних членів не дорівнює нулю, то система називається <u>неоднорідною</u>.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \begin{vmatrix} \times (a_{22}) \\ \times (-a_{12}) \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x + \cancel{a_{12}a_{22}y} = b_1 a_{22} \\ -a_{21}a_{12}x - \cancel{a_{22}a_{12}y} = -b_2 a_{12} \end{cases}$$

$$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) \cdot x = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$$

$$x = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

В чисельнику і знаменнику знаходяться визначники 2-го порядку

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

Позначимо $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - <u>головний визначник системи</u>

$\Delta 1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ - <u>допоміжний визначник системи для невідомої x</u>

Тоді $\boxed{x = \frac{\Delta 1}{\Delta}}$

Виключивши із системи невідому x, одержимо, що $y = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

$\Delta 2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ Тоді $\boxed{y = \frac{\Delta 2}{\Delta}}$

Одержані формули для x та y називають <u>формулами Крамера</u>.

<u>Приклад</u>: Розв'язати систему за допомогою формул Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 4y = 5 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -19 \qquad \Delta 2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-19}{-11} = \frac{19}{11} \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{9}{-11} = -\frac{9}{11}$$

<u>Перевірка</u> –підставити в систему значення x та y: $\begin{cases} x = \dfrac{19}{11} \\ y = -\dfrac{9}{11} \end{cases}$

2. Дослідження системи двох лінійних неоднорідних рівнянь з двома невідомими:

1) Якщо $\Delta \neq 0$, то система має 1 розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера.

2) Якщо $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ (або $\Delta_2 \neq 0$), то система не має розв'язків.

3) Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система має нескінченну множину розв'язків. В цьому випадку коефіцієнти при невідомих і вільні члени пропорційні. Значить, одне із рівнянь (довільне) можна відкинути, а рівняння, яке залишилось, розв'язати відносно довільного невідомого.

<u>Приклад</u>: 2x+3y=1 $\qquad$ x=$\dfrac{1-3y}{2}$, де y - $\forall$

2x=1 -3y $\qquad$ (довільне)

Дослідження системи трьох лінійних неоднорідних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

За формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Приклад: $\begin{cases} 2x+4y-3z=0 \\ x+5y+2z=5 \\ 3x+y+3z=9 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 30+24+(-3)-(-45+4+12) = 30+24-3+45-4-12 = 80 \neq 0$$

,

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} -4 & 4 & -3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -60-15+72+135+8-60 = 80,$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 30-27-24+45-36+12 = 0,$$

$$\Delta 3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -5 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 90-4+60+60-10-36 = 160$$

$$x = \frac{80}{80} = 1 \qquad y = \frac{0}{80} = 0 \qquad z = \frac{160}{80} = 2$$

1) Якщо $\Delta \neq 0$, то система має 1 розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера.
2) Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один із $\Delta i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, то система не має розв'язків.
3) Якщо $\Delta = \Delta 1 = \Delta 2 = \Delta 3 = 0$, то система має або нескінченну множину розв'язків, або не має розв'язків.

Система буде мати нескінченну множину розв'язків, якщо одне із рівнянь системи є наслідком двох інших, або ж коефіцієнти при невідомих і вільні члени пропорційні.

Система не буде мати розв'язків, якщо коефіцієнти при відповідних невідомих пропорційні, а вільні члени не пропорційні.

Приклад: $\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ 4x+2y-6z=3 \\ 6x+3y-9z=7 \end{cases}$

$$\Delta = \Delta 1 = \Delta 2 = \Delta 3 = 0$$

Коефіцієнти при невідомих пропорційні, а вільні члени не пропорційні, значить система не має розв'язків (або несумісна).

Приклад $\begin{cases} 5x - y - z = 4 \\ 2x - 3y - 5z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 3 \end{cases}$

$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$$

Перше рівняння є наслідком двох других, значить система має нескінченну множину розв'язків. Тому одне з рівнянь можна відкинути.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - y = 4 + z \; b_1 \\ 3x + 2y = 3 - 4z \; b_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4+z & -1 \\ 3-4z & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2z + 3 - 4z = 11 - 2z$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4+z \\ 3 & 3-4z \end{vmatrix} = 15 - 20z - 12 - 3z = 3 - 23z$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{11-2z}{13} \\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{3-23z}{13} \\ z - \forall \end{cases}$$ Загальний розв'язок

(довільне число)

Знайдемо частковий розв'язок

при z=2: $\begin{cases} x = \dfrac{11-4}{13} = \dfrac{7}{13} \\ y = \dfrac{3-46}{13} = -\dfrac{43}{13} \\ z = 2 \end{cases}$

Додатково: Системи двох лінійних однорідних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

Всі вільні члени =0, значить система однорідна

Така система <u>завжди</u> має нескінченну множину розв'язків. Якщо одне з рівнянь не є наслідком другого, то множину розв'язків знаходять за формулами:

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad y = k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \qquad z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

k- довільне число

<u>Приклад</u>: $\begin{cases} 3x + 5y - 7z = 0 \\ x + \quad + 4z = 0 \end{cases}$

$$x = k\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 20k, \qquad y = k\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19k \qquad z = k\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5k$$

<u>Відповідь</u>: $\begin{cases} x = 20k \\ y = -19k \\ z = -5k \\ k - \forall \end{cases}$

Якщо одне з рівнянь є наслідком другого, то система перетворюється в одне рівняння з трьома невідомими. З цього рівняння одне з невідомих виражають через інші:

<u>Приклад</u>: $\begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ 3x - 12y + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4y - z \\ y - \forall \\ z - \forall \end{cases}$

Питання для самоконтролю

1. Визначники 2-го порядку.
2. Визначники 3-го порядку.
3. Властивості визначників.
4. Розклад визначників за елементами рядка (стовпця).
5. Визначники n-го порядку та їх обчислення.

ЛЕКЦІЯ 2

Тема: Вектори. Добутки векторів.

ПЛАН

1. Лінійні дії з векторами.
2. Скалярний добуток та його властивості.
3. Довжина вектора, кут між векторами, проекції.
4. Розклад вектора за базисом.
5. n-вимірні векторні простори. Лінійна комбінація векторів.
6. Лінійно залежні та лінійно незалежні комбінації векторів. Базисний мінор.
7. Базис. Розклад вектора за даним базисом.
8. Ранг системи векторів

Скалярні величини характеризуються своїм числовим значенням (об’єм, маса, температура…). Векторні* –крім числового значення мають ще й напрям (сила, швидкість…).

*лат. Vector (переносник) ввів у 1848 р. Гамільтон

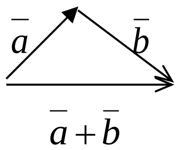
Геометрично векторна величина зображається напрямленим відрізком:

Модуль вектора (його довжина) позначається $|\bar{a}|, a$.

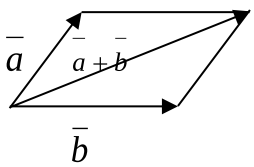
До лінійних дій з векторами належать додавання і віднімання векторів, множення вектора на число.

1) Додавання.

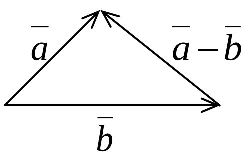
а) правило трикутника



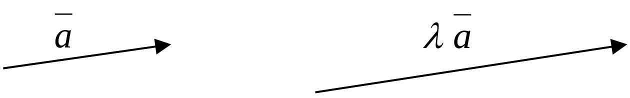
б) правило паралелограма



2) Віднімання



3) Множення вектора на число (скаляр)



$\lambda > 0, \lambda > 1$

Нульовим називається вектор, початок якого збігається з кінцем ($\bar{0}$). Напрям його невизначений, а довжина дорівнює 0.

$$\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$$
$$0 \cdot \bar{a} = 0$$
$$\lambda \cdot \left(\bar{a} + \bar{b}\right) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}$$

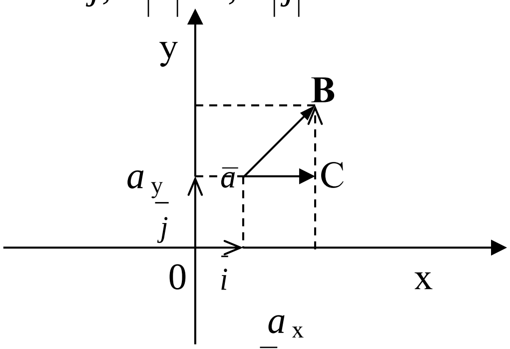
<u>Одиничним</u> називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці.

Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\bar{a}$ називається <u>ортом вектора</u> $\bar{a}$ і позначається $\bar{a}^{\,0}$

$$\bar{a}^{\,0} = \frac{\bar{a}}{\left|\bar{a}\right|} - \text{орт}$$

2. $\bar{i}$ та $\bar{j}$ -одиничні вектори на осях x та y в координатній площині.

$\bar{i} \perp \bar{j}, \quad \left|\bar{i}\right| = 1, \quad \left|\bar{j}\right| = 1$



a_x – проекція $\bar{a}$ на O_x

a_y – проекція $\bar{a}$ на O_y

З $\Delta ABC: \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$

$\overline{AC} = a_x \cdot \bar{i} \qquad \overline{CB} = a_y \cdot \bar{j}$

Напрям $\overline{AC}$ такий же, як і у орта $\bar{i}$, $\overline{BC}$ - у орта $\bar{j}$; довжини:

$\left|\overline{AC}\right| = a_x, \qquad \left|\overline{BC}\right| = a_y$

$\boxed{\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j}}$ - розклад вектора за ортонормованим Базисом на площині

a_x і a_y -координати вектора

$\bar{i}$ і $\bar{j}$ - ортонормований базис на площині.

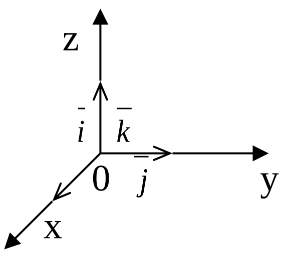
Записують так: $\bar{a}\left(a_x; a_y\right)$

В просторі ортонормований базис утворюють вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$

$\left(\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}, \left|\bar{i}\right| = \left|\bar{j}\right| = \left|\bar{k}\right| = 1\right)$:

$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k},$

$\bar{a}\left(a_x; a_y; a_z\right)$



Якщо задано вектор $\overline{AB}$, де A (x_1; y_1; z_1) –початок вектора , B (x_2; y_2; z_2) – кінець, то $\overline{AB}$ (x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1).

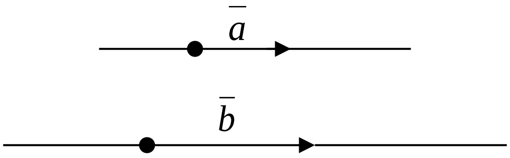
Дії з векторами в координатній формі.

1) $\overline{a} = \overline{b}$, якщо $a_x = b_x; a_y = b_y; a_z = b_z$

2) $\lambda\overline{a}\left(\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\right)$

3) $\overline{a} \pm \overline{b}\left(a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\right)$

Колінеарними називають вектори, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.



$\overline{b} = \lambda\overline{a}$ - умова колінеарності векторів, тобто якщо вектори колінеарні, то один з них можна виразити через другий.

Якщо вектори задані в координатній формі, то відповідні координати їх пропорційні: $\overline{a}\left(a_x; a_y; a_z\right)$ $\overline{b}\left(b_x; b_y; b_z\right)$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Приклад: Чи колінеарні вектори

$\overline{a}$ (-2; 1; -3) і $\overline{b}$ (4; -2; -3) ?

$$\frac{-2}{4} = \frac{1}{-2} = \frac{-3}{-3}$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \neq 1$$

Вектори не колінеарні

Три вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині, або в паралельних площинах.

3. Скалярним добутком двох векторів називається добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right)$$ -число!

Властивості:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$

2) $\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}$

3) $\lambda\overline{a} \cdot \mu\overline{b} = \lambda\mu\left(\overline{a}\,\overline{b}\right)$

4) $\boxed{\overline{a} \cdot \overline{b} = 0 <=> \overline{a} \perp \overline{b}}$

5) $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos\,(\widehat{\bar{a},\bar{a}})=|\bar{a}|^2$, звідки $|\bar{a}|^2=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}$ $\qquad \bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^{\,2}$

$$\boxed{|\bar{a}|=\sqrt{(\bar{a})^2}}$$

Скалярний добуток двох векторів, заданих координатами в прямокутній системі координат, дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат:

$$\bar{a}\,(a_x;a_y;a_z)$$
$$\bar{b}\,(b_x;b_y;b_z)$$
$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$$

4. <u>Довжина вектора в координатній формі:</u>

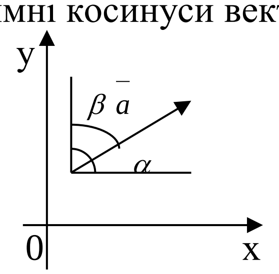
$$\bar{a}\,(a_x;a_y;a_z)$$
$$\bar{a}\cdot\bar{a}=a_x^2+a_y^2+a_z^2$$
$$|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}=\sqrt{(\bar{a})^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

<u>Кут між векторами:</u>

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$$

$$\boxed{\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}}$$

Напрямні косинуси вектора:



$$\bar{a}\,(a_x;a_y;a_z)$$

Напрямними косинусами вектора $\bar{a}$ називаються косинуси кутів, які вектор утворює з осями координат O_x, O_y, O_z відповідно.

Тоді $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\bar{a}|}$ $\qquad \cos\beta=\dfrac{a_y}{|\bar{a}|}$ $\qquad \cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\bar{a}|}$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (сума квадратів напрямних косинусів довільного вектора дорівнює 1).

<u>Приклади:</u>

1) При якому значенні y вектори будуть перпендикулярними?

$\bar{a}$ (5; -4; 8)

$\bar{b}$ (2; y-1; 4)

$\bar{a}\perp\bar{b},\ \textit{якщо}\ \bar{a}\cdot\bar{b}=0$

$\overline{a} \cdot \overline{b} =$10-4 x (y-1)+32=46-4y

46-4y=0, y= $\frac{46}{4} = \frac{23}{2} = 11\frac{1}{2}$

2) вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні, знайти x і z:

$\overline{a}$ (x; 3; -2)

$\overline{b}$ (2; 6; -z)

$\frac{x}{2} = \frac{3}{6} = \frac{-2}{-z}$,

$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{z}$,

$x = 1, \quad z = 4$

n-вимірним вектором називається упорядкована множина n дійсних чисел, які називаються координатами вектора.
n-вимірний вектор можна записати як матрицю-рядок або матрицю-стовпець:

$\overline{a} = (a_1; a_2 \ldots; a_n)$ або $\overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$

Число координат вектора називається розмірністю вектора.

Дії з n-вимірними векторами

1) Порівнюють вектори тільки однієї розмірності.

2) $\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \ldots a_n + b_n)$

3) $\lambda \cdot \overline{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \ldots \lambda a_n)$

4) $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$ або $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$

5) Існує нульовий вектор (всі координати якого дорівнюють 0): $\overline{0}$ =(0; 0; ... 0)

6) Існують одиничні вектори (у яких одна з координат дорівнює 1, а інші 0; довжина одиничного вектора дорівнює 1):

$\overline{e}_1$ =(1; 0; ...0), $\overline{e}_2$ =(0; 1; 0;...0), ... $\overline{e}_n$ =(0; 0; ...1)

7) $\overline{a} + 0 = \overline{a}$

n-вимірним векторним простором називається множина всіх n-вимірних векторів, в якій операції додавання векторів та множення вектора на число визначені, як в пунктах 2 і 3.

Позначається R^n

Зауваження: Простори R^1, R^2, R^3 є окремими випадками простору R^n. Їх можна зобразити геометрично; для n>3 простори R^n геометрично вже уявити не можна, проте вони відіграють важливу роль в науці і техніці.

1) У системі лінійних рівнянь з n невідомими кожне рівняння можна розглядати як (n+1) – вимірний вектор; наприклад перше рівняння: $(a_{11}; a_{12}; \ldots; a_{1n}; b_1)$.

2) Розв’язок системи рівнянь з **n** невідомими є **n**-вимірним вектором.

3) Кожний рядок матриці A_{mn} є n-вимірним вектором, а кожний стовпець m-вимірним. Рядки називаються горизонтальними, а стовпці – вертикальними векторами матриці.

Система n-вимірних векторів

Нехай дана система n-вимірних векторів: $\overline{a}_1; \overline{a}_2; \ldots \overline{a}_k$, і дані скаляри (числа): $\lambda_1; \lambda_2; \ldots \lambda_k$. Нехай

* $\overline{A} = \lambda_1 \cdot \overline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots \lambda_k \cdot \overline{a}_k$ - лінійна комбінація векторів, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ - лінійна комбінація векторів, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ -коефіцієнти лінійної комбінації.

Вираз * визначає розклад вектора $\overline{a}$ за векторами $\overline{a}_1; \overline{a}_2; \ldots \overline{a}_k$.

2. Розглянемо систему з **k** n-вимірних векторів: $\overline{a}_1; \overline{a}_2; \ldots \overline{a}_k$.

Вектори називаються лінійно залежними, якщо хоча б один з них можна лінійно виразити через інші.

Або: якщо лінійна комбінація системи векторів $\lambda_1 \cdot \overline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_k \cdot \overline{a}_k = 0$ рівна нулю за умови, що хоча б один із коефіцієнтів $\lambda_i \; (i = 1, 2, \ldots k)$ не дорівнює нулю, то вектори називаються лінійно залежними.

Вектори називаються лінійно незалежними, якщо ні один із векторів не можна лінійно виразити через інші.

Або: Вектори називаються лінійно незалежними, якщо їх лінійна комбінація дорівнює нулю тільки за умови, що всі $\lambda_i = 0 \; (i = 1, 2, \ldots k)$.

Приклад: Чи будуть вектори лінійно залежними: $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$?

Складемо лінійну комбінацію цих векторів і знайдемо, при яких значеннях λ_i лінійна комбінація дорівнює 0.

$$\lambda_1 \cdot \overline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{a}_2 + \lambda_3 \cdot \overline{a}_3 = 0$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 \end{pmatrix}$ - в правій частині одержаної рівності нульовий вектор, значить його координати повинні дорівнювати 0.

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = -5\lambda_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -5\lambda_3 & 1 \end{vmatrix} = -10\lambda_3 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5\lambda_3 \end{vmatrix} = -5\lambda_3$$

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10\lambda_3}{5} = -2\lambda_3 \qquad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5\lambda_3}{5} = -\lambda_3$$

$$\lambda_1 = -2\lambda_3, \quad \lambda_2 = -\lambda_3, \; де\, \lambda_3 - \forall \quad (\lambda_3 \neq 0)$$

Система має нескінченну множину розв'язків за умови $\lambda_3 - \forall, \quad \lambda_3 \neq 0$, значить дані вектори лінійно залежні.

$\bar{a}_3 = 2\bar{a}_1 + \bar{a}_2$

3. Нехай дана система n-вимірних векторів: $\bar{a}_1; \bar{a}_2; \ldots \bar{a}_k$

Рангом системи n-вимірних векторів називається число, яке дорівнює найбільшому числу лінійно незалежних векторів.

Базисом системи векторів називається впорядкована сукупність найбільшого числа лінійно незалежних векторів цієї системи.

Значить, ранг системи векторів дорівнює числу векторів, які утворюють базис.

В одній і ті й же системі векторів може бути декілька базисів, але кількість базисних векторів в кожному базисі одна й та ж.

Щоб знайти базис системи векторів записують матрицю з координат цих векторів, записаних у вигляді матриці-стовпця. Знаходять ранг матриці, який буде дорівнювати рангу системи векторів, а базисними векторами будуть вектори, які відповідають базисним стовпцям матриці.

Базисом n-вимірного векторного простору R^n називається довільна впорядкована система з **n** лінійно незалежних векторів.

Якщо система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$ є базисом n-вимірного векторного простору R^n, то довільний вектор цього простору можна подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів:

** $\bar{a} = \alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{a}_n$, де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ - координати $\bar{a}$ в базисі $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$

Вираз ** називається розкладом вектора $\bar{a}$ за даним базисом.

$\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$

Система n-вимірних векторів в R^n, яка складається більше, ніж з **n** векторів, завжди лінійно залежна!

В двомірному просторі базис має 2 вектори ($\bar{i}$ та $\bar{j}$), а система більше 2-х векторів завжди лінійно залежна.

Система більш, ніж 3-х векторів, в тривимірному просторі також лінійно залежна.

Розклад вектора за даним базисом

Нехай дана система **n** векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$. Потрібно перевірити, чи утворює дана система базис, і розкласти вектор $\bar{a}$ за даним базисом.

1) Вектор $\overline{a}$ подамо у вигляді лінійної комбінації векторів $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots \overline{a_n}$; коефіцієнти лінійної комбінації являються координатами $\overline{a}$, який потрібно знайти, тому позначимо їх $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots \overline{x_n}$:

$$\overline{a} = x_1 \cdot \overline{a_1} + x_2 \cdot \overline{a_2} + \dots + x_n \cdot \overline{a_n} \quad (1)$$

2) В рівності (1) замість $\overline{a}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots \overline{a_n}$ запишемо стовпці їх координат.

3) Виконавши дії над одержаною рівністю у вигляді матриць, одержимо систему **n** рівнянь з **n** невідомими, яку розв'язуємо методом Жордана-Гаусса.

- Якщо система має 1 розв'язок, то $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots \overline{a_n}$ утворюють базис і вектор $\overline{a}$ єдиним способом може бути розкладений за цим базисом.
- Якщо система рівнянь має безліч розв'язків або несумісна, то вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots \overline{a_n}$ базис не утворюють.

Зауваження: Довільний n-вимірний векторний простір має базис, який утворює система одиничних **n**-вимірних векторів:

$\overline{e_1}$ = (1; 0; 0;...0) $\qquad$ $\overline{e_2}$ = (0; 1; 0;...0)

$\overline{e_3}$ = (0; 0; 1;...0) $\qquad$ ... $\qquad$ $\overline{e_n}$ = (0; 0; 0;...1)

В тривимірному просторі такими були вектори $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Приклад: чи утворюють вектори $\overline{a}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_4}$ базис і якщо утворюють , то розкласти $\overline{a}$ за цим базисом:

$\overline{a_1}$ = (1; 0; 1; 0) $\qquad$ $\overline{a_2}$ = (2; 1; -1; 2) $\qquad$ $\overline{a_3}$ = (-1; 1; 2; -1)

$\overline{a_4}$ = (0; 1; 1; 1) $\qquad$ $\overline{a}$ = (2; 2; 2; 1)

Розкласти вектор за даним базисом –значить записати його як лінійну комбінацію базисних векторів.

$$\overline{a} = x_1 \cdot \overline{a_1} + x_2 \cdot \overline{a_2} + x_3 \cdot \overline{a_3} + x_4 \cdot \overline{a_4} \qquad x_i - ?$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\bullet(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\bullet(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right):2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)\bullet(2)\bullet(-1)\bullet(-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right):(-3) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)\bullet(2)\bullet(-3)$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 & \bar{a} \end{array} \end{array}$$

Всі стовпці основної матриці базисні, значить система має 1 розв’язок, а значить вектор $\bar{a}$ можна єдиним способом розкласти за даним базисом. Всі чотири вектори утворюють базис.

$x_1=1$, $x_2=1$ $x_3=1$ $x_4=0$

В новому базисі вектор $\bar{a}$ має координати: $\bar{a}=(1; 1; 1; 0)$.

$\bar{a}=\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3$

Питання для самоконтролю

1. Лінійні дії з векторами.
2. Скалярний добуток та його властивості.
3. Довжина вектора, кут між векторами, проекції.
4. Розклад вектора за базисом.
5. n-вимірні векторні простори.
6. Лінійна комбінація векторів.
7. Лінійно залежні та лінійно незалежні комбінації векторів.
8. Базисний мінор.
9. Базис.
10. Розклад вектора за даним базисом.
11. Ранг системи векторів

ЛЕКЦІЯ 3,4

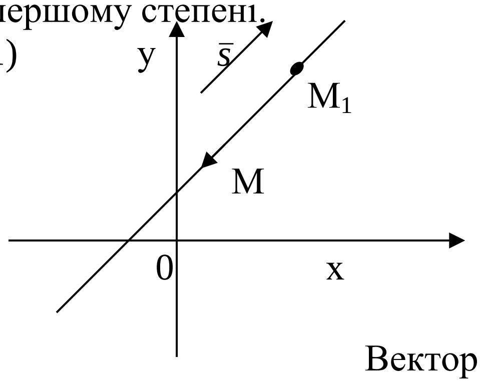
Тема: Площина. Пряма у просторі.

ПЛАН

1. Різні види рівнянь прямої на площині.
2. Кут між двома прямими.
3. Відстань від точки до прямої.
4. Рівняння площини в R^3.
5. Взаємне розташування площин.
6. Рівняння прямої в R^3.
7. Взаємне розташування прямих, прямої та площини.

1. Точка на площині характеризується двома координатами: абсцисою та ординатою (M (x; y)). Рівняння прямої містять координати x та y у першому степені.

1)



Нехай дана пряма на площині.
M_1 (x_1; y_1) – фіксована точка прямої.
M (x; y) – довільна точка прямої (змінна)

Вектор $\bar{s}$ = (m; n) паралельний прямій.

Потрібно за цими даними скласти рівняння прямої.

Вектори $\bar{s}$ і $\overline{M_1M}$ колінеарні, значить їх координати пропорційні.

$\overline{M_1M}$ = (x-x_1; y-y_1)

Умова колінеарності:

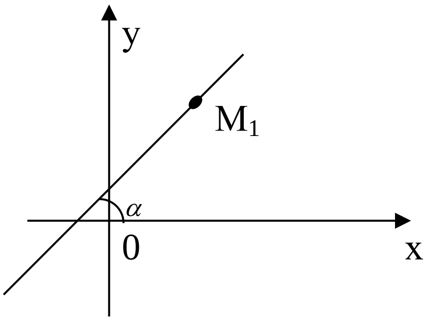
$$\boxed{\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}}$$ Канонічне рівняння прямої на площині

2) Перетворимо одержане рівняння прямої:

$$y-y_1=\frac{n}{m}(x-x_1)$$

Відношення $\frac{n}{m}$ називають кутовим коефіцієнтом прямої $\frac{n}{m}$=k

$\boxed{y - y_1 = k \cdot (x - x_1)}$ Рівняння прямої, яка проходить через т. М в напрямі (напрям вказує k)



α - кут нахилу прямої до осі абсцис

$k = tg\, \alpha$

k>0 – кут гострий, k<0 – тупий

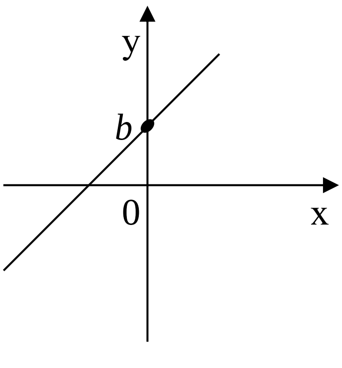
3) Перетворимо одержане рівняння:

$y - y_1 = kx - kx_1$

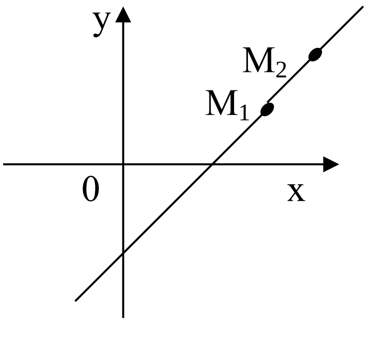
$y = kx + \underbrace{y_1 - kx_1}_{число}$ $\qquad$ $\underline{y_1 - kx_1 = b}$

$\boxed{y = kx + b}$ Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

b – ордината точки, в якій пряма перетинає вісь O_y



4) Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.



$M_1\ (x_1;\ y_1)$

$M_2\ (x_2;\ y_2)$

Запишемо рівняння прямої:

$y - y_1 = к\ (x - x_1)$

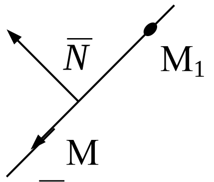
$y_2 - y_1 = к\ (x_2 - x_1)$

Так як $M_2\ (x_2;\ y_2)$ лежить на прямій, то її координати задовольняють рівнянню прямої, тому замість x і y можна підставити координати т. M_2 .

Розділимо обидві частини рівнянь і одержимо:

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$ Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

5) Загальне рівняння прямої



$\overline{N}=(A;\,B)\perp$ прямій

$\overline{N}\perp\overline{M_1M}$ $\qquad\qquad$ $\overline{N}\cdot\overline{M_1M}=0$

$\overline{M_1M}=(x-x_1;\,y-y_1)$

$A\cdot(x-x_1)+B\cdot(y-y_1)=0$

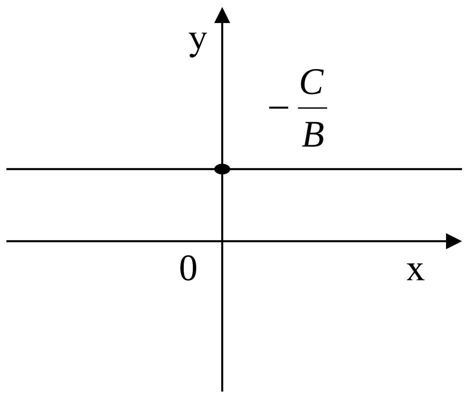
$Ax+By-\underbrace{Ax_1-By_1}_{\text{число}}=0$

позначимо C

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$ Загальне рівняння прямої, де A і B – координати <u>нормального вектора</u> прямої, C – вільний член

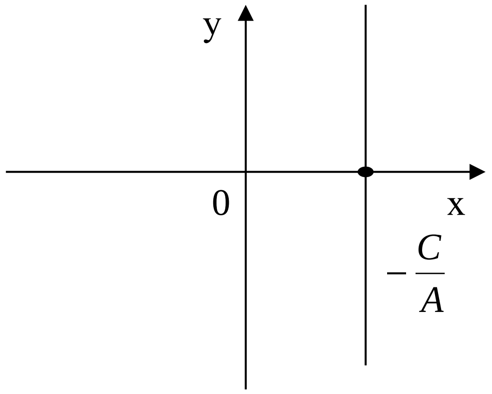
Дослідження загального рівняння прямої

а) Нехай A=0, By+C=0 – пряма, паралельна осі O_x



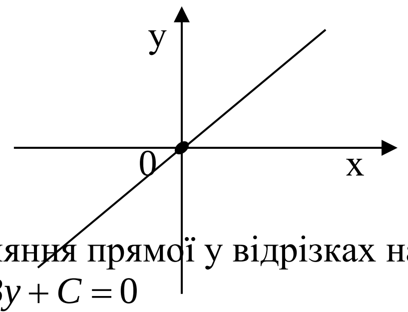
$$y=-\frac{C}{B}$$

б) Нехай B=0, Ax+C=0 – пряма, паралельна осі O_y



$$x=-\frac{C}{A}$$

в) C=0, Ax+By=0 – пряма, проходить через початок координат



6) Рівняння прямої у відрізках на осях.

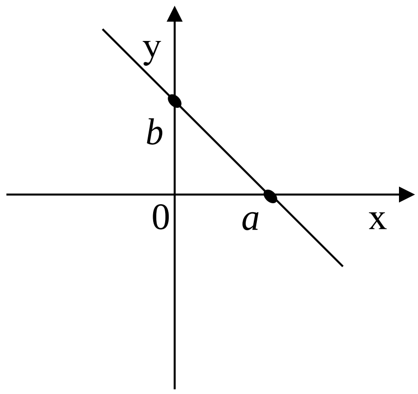
$Ax + By + C = 0$

$Ax + By = -C$

$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$

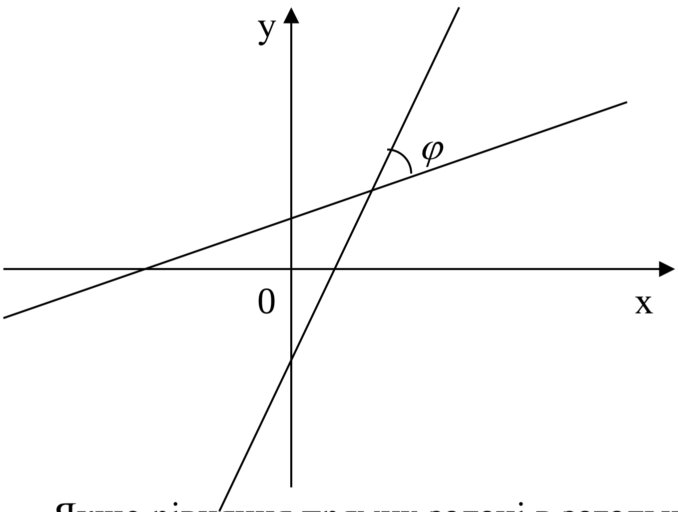
$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$ $\qquad -\frac{C}{A} = a, \quad -\frac{C}{B} = b$

$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$ Рівняння прямої у відрізках на осях



a і b - відрізки, які віднімає пряма на осях O_x та O_y

2. Нехай дані рівняння двох прямих: $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$

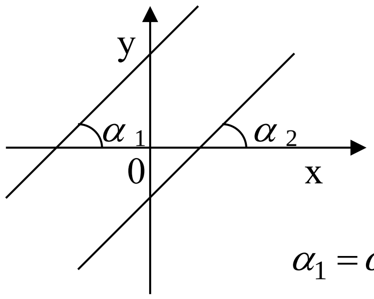


$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Якщо рівняння прямих задані в загальному вигляді Ax+By+C=0, то

Кутовий коефіцієнт $\boxed{k = -\dfrac{A}{B}}$

<u>Умова паралельності прямих</u>

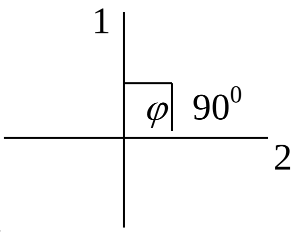


$\alpha_1 = \alpha_2$, значить

$tg\,\alpha_1 = tg\,\alpha_2$

$\boxed{k_1 = k_2}$

<u>Умова перпендикулярності прямих</u>

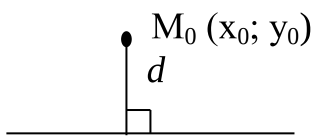


$tg\,\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ $\qquad$ $tg\,90^0 = \infty$ (не існує)

$$1 + k_1 k_2 = 0$$

$$\boxed{k_1 \cdot k_2 = -1 \quad або \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$

3.



Нехай пряма задана рівнянням

Ax+By+C=0

M_0 (x_0; y_0) – точка, яка не лежить на цій прямій.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

<u>Приклади:</u>

1) Записати рівняння прямої, яка проходить через точку М (-1; 2) перпендикулярно прямій 2x-y+1=0

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$$

$y-2=k\cdot(x+1)$

$k=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2}$

$y-2=-\frac{1}{2}\cdot(x+1)$

$2y-4=-x-1$

$x+2y-3=0$

2) Загальне рівняння прямої записати у відрізках на осях і побудувати пряму:

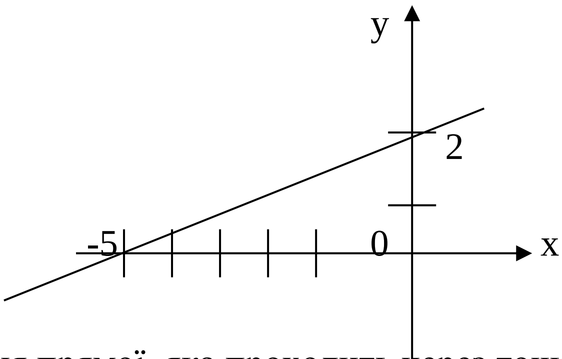
$2x-5y+10=0$

$2x-5y=-10$

$\frac{2x}{-10}-\frac{5y}{-10}=1$

$\frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1$

$a=-5 \quad b=2$



3) Записати рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 (-2;5), M_2 (3;5)

$\frac{y-5}{5-5}=\frac{x+2}{3+2}$

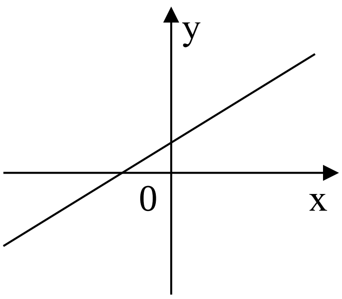
$\frac{y-5}{0}=\frac{x+2}{5}$

$(y-5)\cdot 5=0\cdot(x+2)$

$y-5=0$ - пряма, паралельна осі O_x

<u>Додатково:</u> Побудова система нерівностей.

Довільна пряма ділить площину на дві півплощини Ax+By+C=0



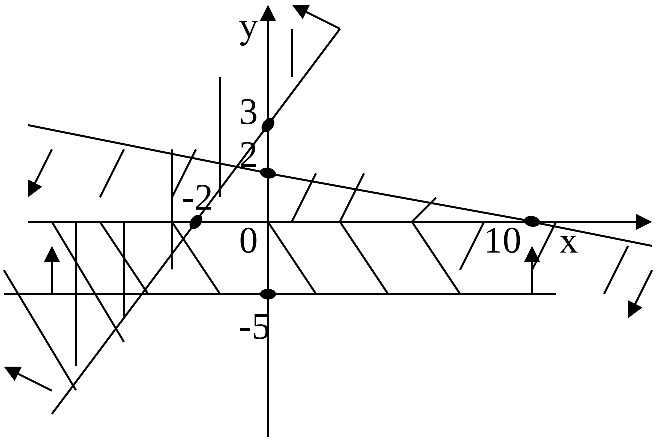
$Ax+By+C\geq 0$ або $Ax+By+C\leq 0$ – ці нерівності, описують множину точок, які належать одній із півплощин

Для того, щоб побудувати шукану півплощину , потрібно:

1) побудувати пряму Ax+By+C=0;

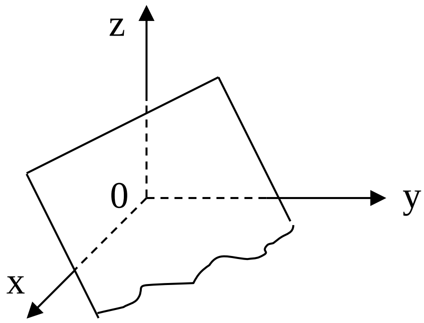
2) з довільної півплощини вибрати точку з відомими координатами і ці координати підставити в нерівність. Якщо зміст нерівності зберігся, то нерівність описує ту півплощину, з якої була вибрана точка. Якщо зміст нерівності не зберігся, то нерівність описує другу півплощину.

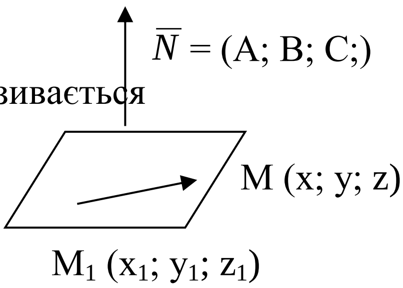
$$\begin{cases} 3x-2y+6\le 0 & (1) \\ x+5y-10\le 0 & (2) \\ y\ge -6 \end{cases}$$



4. Рівняння площини в просторі містить змінні x, y та z в першому степені

Розглянемо, який вид має рівняння площини. Нехай M_1 (x_1; y_1; z_1) – фіксована точка площини, M (x; y; z) – довільна точка площини (змінна)





Заданий вектор $\overline{N}$ = (A; B; C;) перпендикулярний площині. Він називається нормальним вектором площини.

$\overline{M_1M}$ = (x-x_1; y-y_1; z-z_1)

$\overline{N} \perp \overline{M_1M} \Rightarrow \quad \overline{N}\cdot\overline{M_1M}=0$

$$\boxed{A\cdot(x-x_1)+B\cdot(y-y_1)+C\cdot(z-z_1)=0}$$

Рівняння площини, яка проходить через задану т. M_1

Загальне рівняння площини

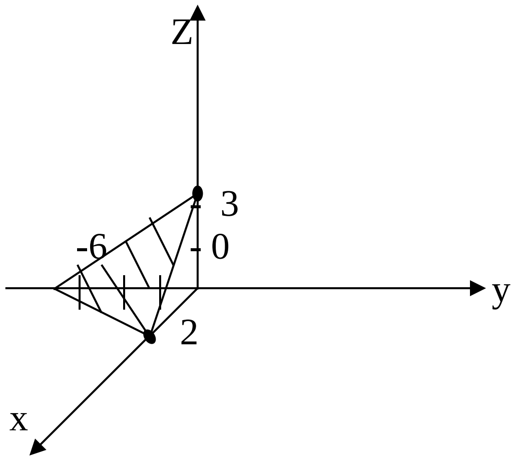
$$Ax + By + Cz - \underbrace{Ax_1 - By_1 - Cz_1}_{число\ D} = 0 \qquad D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$$

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

D - вільний член

Для того, щоб побудувати площину в системі координат, потрібно знайти точки перетину її з осями координат.

<u>Приклад</u>: Побудувати площину 3x-y+2z-6=0



1) при x=0, y=0 2z=6
z=3

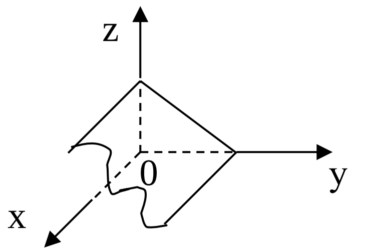
2) при x=0, z=0 3x=6
x=2

3) при x=0, z=0 –y=-6
y=-6

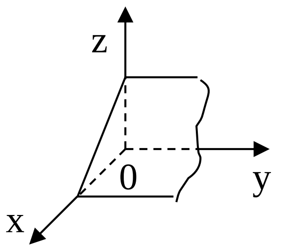
Дослідження загального рівняння площини.

$Ax + By + Cz + D = 0$

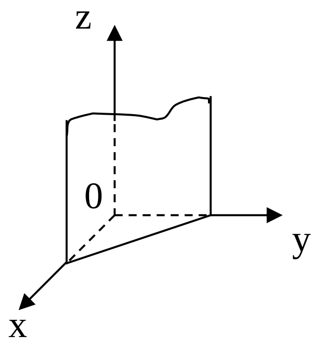
1) $A = 0,\quad By + Cz + D = 0$
площина | | O_x



2) $B = 0,\quad Ax + Cz + D = 0$
площина | | O_y

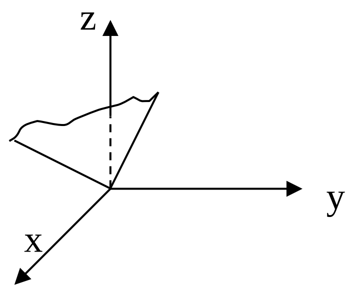


3) $C = 0,\quad Ax + By + D = 0$
площина | | O_z



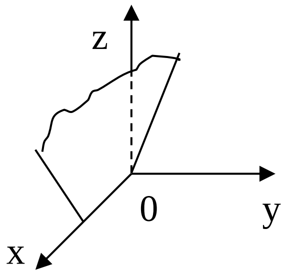
4) $D=0, \quad Ax+By+Cz=0$

площина проходить через початок координат



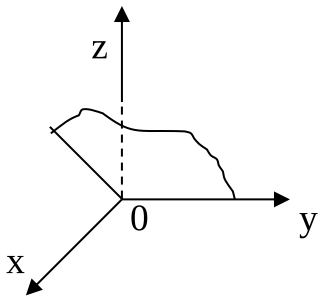
5) $A=D=0, \quad By+Cz=0$

площина проходить через вісь Ox



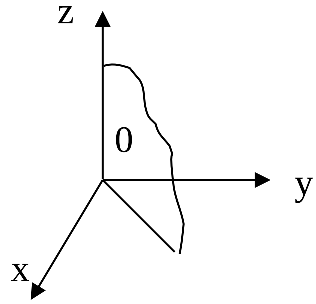
6) $B=D=0, \quad Ax+Cz=0$

площина проходить через вісь Oy



7) $C=D=0, \quad Ax+By=0$

площина проходить через вісь Oz



8)

$$\left.\begin{array}{r} A=0, B=0, \quad C\neq 0, D\neq 0 \quad Cz+D=0 \\ z=-\dfrac{D}{C} \\ B=0, C=0, \quad A\neq 0, D\neq 0 \quad Ax+D=0 \\ x=-\dfrac{D}{A} \\ A=0, C=0, B\neq 0, D\neq 0 \quad By+D=0 \\ y=-\dfrac{D}{A} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \textit{площини паралельні} \\ \textit{відповідно} \\ \textit{площинам} \\ Oxy, \\ Oyz, \\ Oxz \end{array}$$

9)

$$\left.\begin{array}{lll} A=B=D=0, & Cz=0, & z=0 \\ B=C=D=0, & Ax=0, & x=0 \\ A=C=D=0, & By=0, & y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \textit{площини збігаються} \\ \textit{відповідно} \\ \textit{з } Oxy, Oyz, Oxz \end{array}$$

Рівняння площини у відрізках на осях.

$$Ax+By+Cz+D=0$$

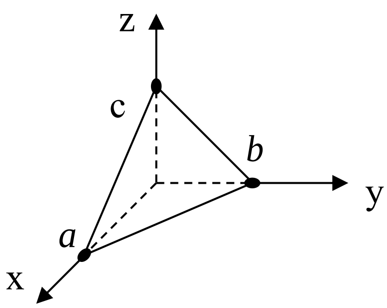
$$Ax+By+Cz-D \quad :(-D)$$

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1$$

$$\frac{X}{-\frac{D}{A}}+\frac{Y}{-\frac{D}{B}}+\frac{Z}{-\frac{D}{C}}=1 \qquad -\frac{D}{A}=a, \quad -\frac{D}{B}=b, \quad -\frac{D}{C}=c$$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

a, b, c-відрізки, які відтинає площина на осях Ox, Oy, Oz
відповідно

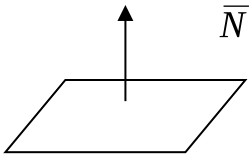


5. Площини можуть бути паралельними.

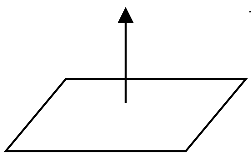
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

$\overline{N}_1=(A_1;B_1;C_1)$



$\overline{N}_2=(A_2; B_2; C_2)$



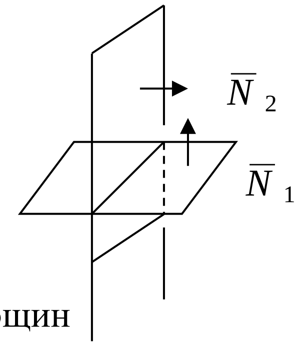
Якщо площини паралельні, то їх нормальні вектори колінеарні.

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}}$$

- умова паралельності площин

2) Площини можуть бути перпендикулярними.

$\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2$

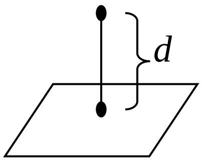


$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$ - умова перпендикулярності площин

3) Кут між площинами обчислюється як косинус кута між $\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

4) Відстань від точки до площини.



$M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ Ax+By+Cz+D=0 - площина

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

6. Довільна пряма в просторі розглядається як пряма перетину двох площин, тому рівняння прямої в загальному вигляді задається як система рівнянь площин: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Канонічне рівняння прямої.

$\overline{S}$ =(m; n; p)

$\overline{S} \,||\, \overline{M_1M}$ $\overline{M_1M}$ =(x-x$_1$; y-y$_1$; z-z$_1$)

$M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ $M\ (x;\ y;\ z)$

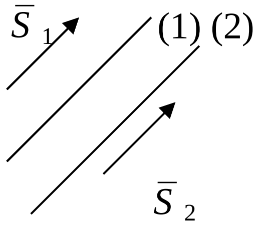
$$\boxed{\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}}$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

$M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ $M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

7. Взаємне розташування прямих.

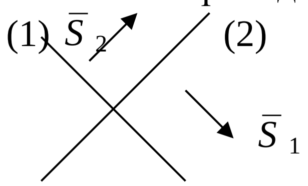


$\bar{S}_1=(m_1; n_1; p_1)$, $\bar{S}_2=(m_2; n_2; p_2)$

Якщо прямі паралельні, то їх напрямні вектори колінеарні

$\boxed{\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}}$ - умова паралельності прямих

Перпендикулярні.



$\bar{S}_1 \perp \bar{S}_2$

$\boxed{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0}$ - умова перпендикулярності прямих

3) Кут між двома прямими дорівнює куту між їхніми напрямними векторами $\bar{S}_1$ і $\bar{S}_2$.

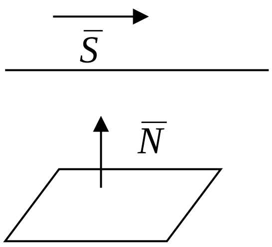
$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

<u>Взаємне розташування прямої та площини</u>.

$\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ - пряма

$Ax+By+Cz+D=0$ - площина

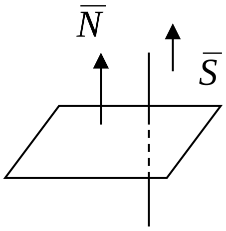
1) Паралельні.



$\bar{N}\perp\bar{S}$

$\boxed{Am+Bn+Cp=0}$ - умова паралельності прямої і площини

2) Перпендикулярні. $\bar{N}\parallel\bar{S}$



$\boxed{\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}}$ - умова перпендикулярності прямої і площини

Питання для самоконтролю

1. Різні види рівнянь прямої на площині.
2. Кут між двома прямими.
3. Відстань від точки до прямої.
4. Рівняння площини в R^3.
5. Взаємне розташування площин.
6. Рівняння прямої в R^3.
7. Взаємне розташування прямих, прямої та площини.

ЛЕКЦІЯ 5

<u>Тема</u>: Криві та поверхні 2-го порядку.

ПЛАН

1. Криві 2-го порядку.
2. Поверхні 2-го порядку.

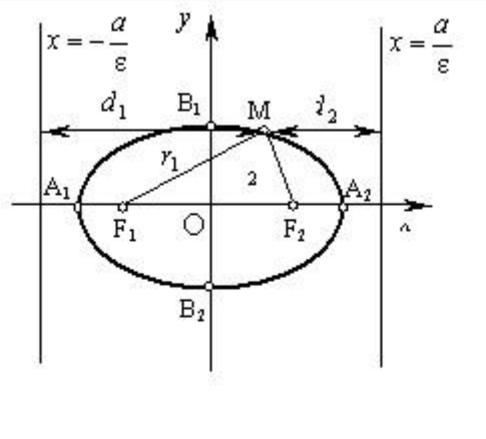
1. ***Лінією (кривою) другого порядку*** називають множину точок площини, координати яких задовольняють рівняння $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$,

де хоча б одне з чисел a,b,c відмінне від нуля.

До ліній другого порядку належать коло, еліпс, гіпербола і парабола.

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки цієї ж площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу). Координати точок кола задовольняють рівняння $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

У випадку, коли центр кола розташований у початку координат ($a=b=0$), рівняння набуває канонічного вигляду $x^2+y^2=R^2$.



Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини (***фокусів***) є величина стала і більша ніж відстань між фокусами.

Розглянемо на площині точки F_1,F_2 – фокуси еліпса. Розташуємо координатні осі так, щоб вісь *Ox* проходила через ці точки, а вісь *Oy* проходила через середину відрізку F_1F_2 перпендикулярно до *Ox*.

Позначимо відстань між фокусами $F_1,F_2=2c$, а суму відстаней від довільної точки еліпсу до фокусів $2a, \quad 2a>2c$. Тоді фокуси матимуть координати $F_1(-c,0),F_2(c,0)$.

За означенням довільна точка $M(x,y)$ належить еліпсу тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

.

Піднесемо двічі до квадрату ліву і праву частини цього рівняння, маємо

$$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^2(a^2-c^2)$$

Позначимо різницю $a^2-c^2=b^2$.

Тоді

$$x^2b^2+y^2a^2=a^2b^2$$ або $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Останнє рівняння є канонічним рівнянням еліпса.

Величини $A_1A_2=2a$ та $B_1B_2=2b$ називають відповідно ***великою*** та ***малою осями*** еліпса.

Якщо $a=b$, то рівняння набуває вигляду $x^2+y^2=a^2$.

Тобто коло є частинним випадком еліпса, у якого фокуси збігаються в одну точку – центр.

Міру відхилення еліпса від кола характеризує величи-на $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $0\le\varepsilon<1$, яку називають ***ексцентриситетом*** еліпса.

Відрізки F_1M і F_2M називають ***фокальними радіусами*** точки M:

$$r_1=F_1M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$ і $$r_2=F_2M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

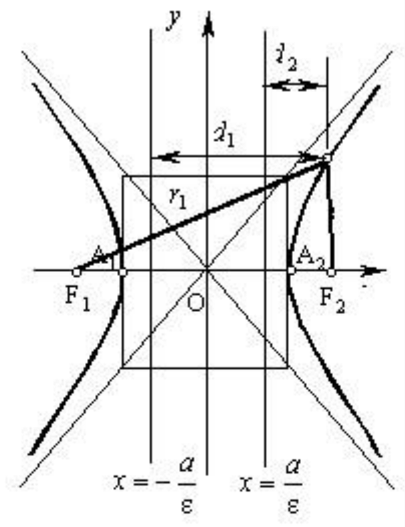
Прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{a^2}{c}$ називають ***директрисами*** еліп-са. Оскільки $0\le\varepsilon<1$, то $\frac{a^2}{c}>a$, тобто директриси еліпса лежать поза ним.

Для директрис має місце наступне твердження.

Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки до відповідних директрис є стала величина , що дорівнює ексцентриситету еліпса, тобто

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon.$$

Гіперболою називають множину всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох заданих точок цієї площини (фокусів) є величина стала і менша відстані між фокусами.



Позначимо відстань між фокусами $F_1F_2 = 2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів $2a, \quad 2a < 2c$. Тоді фокуси матимуть координати $F_1(-c,0)$ та $F_2(c,0)$.

За означенням довільна точка $M(x, y)$ належить гіперболі тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Після перетворень, дістаємо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

, де $b^2 = c^2 - a^2$.

Гіпербола складається з двох віток і має дві асимптоти

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

.

Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називають ***дійсною віссю*** гіперболи, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ ***уявною віссю***.

Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

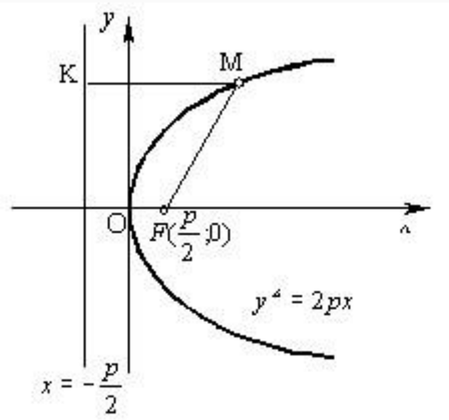
також визначає гіперболу, яку називають ***спряженою*** до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ексцентриситет гіперболи визначають як відношення фокальної відстані гіперболи до довжини її дійсної осі

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, $\varepsilon > 1$.

Прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\dfrac{a^2}{c}$, де a – дійсна піввісь гіперболи називають директрисами гіперболи. Вони мають ту саму властивість, що і диркетриси еліпса:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$



Параболою називають множину всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

Запишемо рівняння параболи.

Нехай на площині задано фокус F і директрису таким чином, що відстань між ними дорівнює p. Розташуємо вісь *Ox* так, щоб вона проходила через фокус перпендикулярно до директриси, а вісь *Oy* ділила навпіл відстань між фокусом і директрисою.

Тоді фокус має координати $F(\frac{p}{2}, 0)$, а рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$.

Довільна точка $M(x, y)$ належить параболі тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$MB = MF$, де

$MB = x + \dfrac{p}{2}$, $MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$.

Звідси

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2},$$

або після перетворень канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px$$

.

Вісь симетрії параболи називають ***віссю параболи***. Точку перетину параболи з віссю називають ***вершиною*** параболи, а число p, яке дорівнює відстані між фокусом і параболою називають ***параметром параболи***.

Параметр p характеризує ширину області, яку обмежує парабола (чим більше p, тим ширша парабола).

Поверхнею другого порядку називають множину точок, координати яких задовольняють рівняння

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0$$

,

де хоча б один з коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля. Таке рівняння називають ***загальним рівнянням поверхні другого порядку***.

Як геометричний об'єкт поверхня другого порядку не зміниться при переході від однієї системи координат до іншої. Існує система координат, в якій рівняння поверхні має найпростіший (***канонічний***) вигляд.

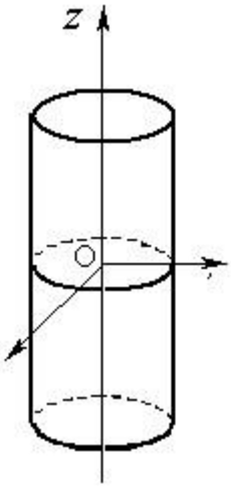
До поверхонь другого порядку відносять циліндричні, конічні поверхні, поверхні обертання, сферу, еліпсоїд, однопорожнинний та двохпорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди.

Циліндричною поверхнею називають поверхню, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напрямну). Найчастіше розглядають такі циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в координатній площині, а твірні паралельні осі, що перпендикулярна до цієї площини. Наприклад, рівняння

$$f(x, y) = 0$$

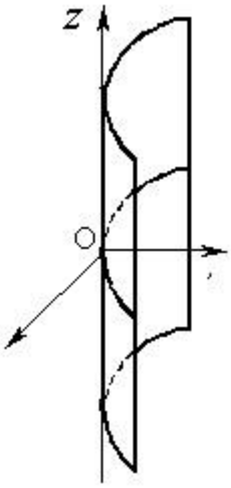
описує циліндричну поверхню з напрямними в площині XOY і твірними, паралельними осі Oz.

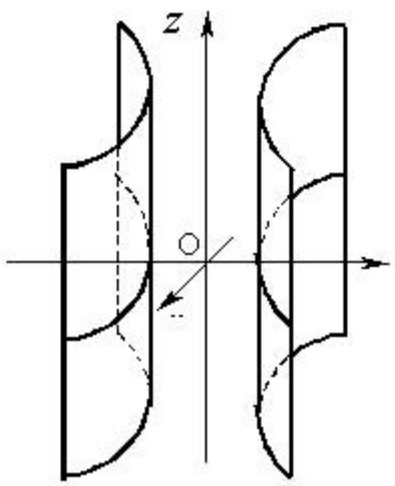
Циліндричні поверхні, напрямними яких є криві другого порядку, називають ***циліндричними поверхнями другого порядку***.



Канонічним рівнянням ***кругового циліндра*** є рівняння $x^2 + y^2 = R^2$.

У випадку $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2$ циліндр називають ***еліптичним***.





У випадку $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = R^2$ –***гіперболічним*** циліндром.

Рівняння $y^2 = 2px$ описує ***параболічний*** циліндр.

Поверхнею, утвореною обертанням заданої плоскої кривої l навколо заданої прямої (осі), розташованої в площині кривої l, називають ***поверхнею обертання***.

Щоб дістати рівняння поверхні обертання навколо координатної осі необхідно в рівнянні кривої l залишити без змін координату, що відповідає осі обертання, а другу координату замінити на корінь квадратний з суми квадратів двох інших координат, взятий зі знаком “+” або “ –“.

Приклад 1.

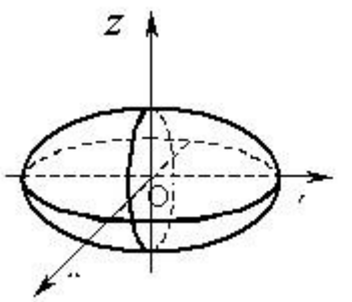
Знайти ріняння поверхні обертання еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ навколо осі Ox.

Розв’язання.

Осі обертання відповідає координата *x*, отже її залишимо без змін, а координату y замінимо на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ і підставимо у рівняння еліпса

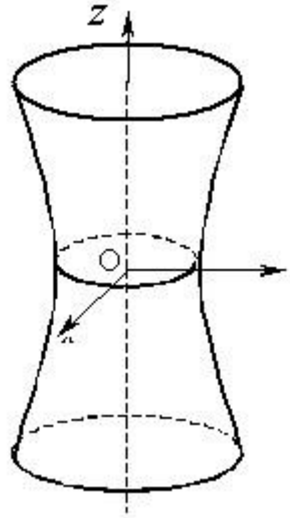
$$x^2 + 4(y^2 + z^2) = 4.$$

Звідси маємо рівняння еліпсоїда обертання



$$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1.$$

Канонічне рівняння ***трьохвісного еліпсоїда***



$$\frac{x^2}{a_2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

.

Результатом обертання гіперболи

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

навколо осі *Oz* є поверхня, яку називають ***однопорожнинним гіперболоїдом обертання***. Його рівняння

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

.

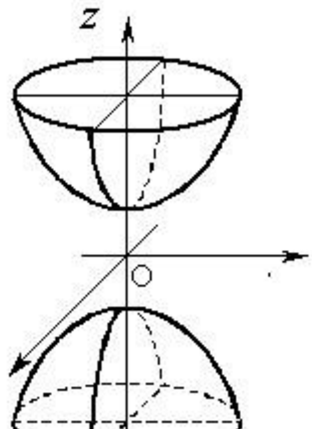
Однопорожнинним гіперболоїдом називають поверхню, яку описує рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

.

Результатом обертання гіперболи

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

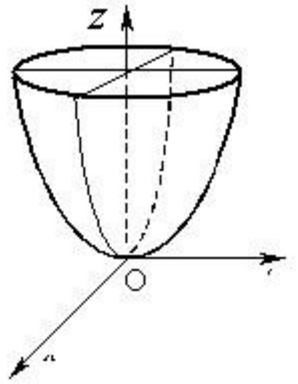


навколо осі *Oy* є поверхня, яку називають ***двопорожнинним гіперболоїдом обертання***. Його рівняння

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

Двопорожнинним гіперболоїдом називають поверхню, яку описує рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$
.



Параболоїдом обертання називають поверхню, яку утворено обертанням параболи

$$y^2=2pz$$

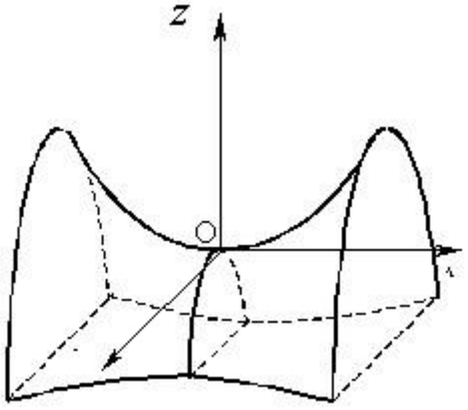
Навколо осі *Oz*. Його рівняння

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{p^2}=2z$$
.

Еліптичним параболоїдом називають поверхню, рівняння якої

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad p,q>0$$
.

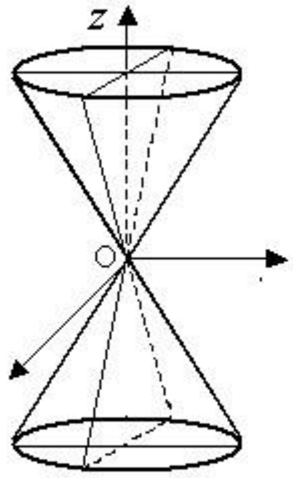
Гіперболічним параболоїдом називають поверхню, рівняння якої



$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p,q > 0$$

Цю поверхню ще називають ***сідлоподібною поверхнею***.

Конічною поверхнею називають поверхню, утворену множиною прямих, що проходять через задану точку (вершину) P і перетинають задану лінію l (напрямну). Кожну з прямих, що утворюють конічну поверхню називають ***твірною***.



Прикладом конічної поверхні є конус. Його канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

У випадку $a = b = c$ маємо ***прямий круговий конус***

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

ЛЕКЦІЯ 6

Тема: Дії над матрицями. Обернена матриця. Ранг матриці.

ПЛАН

1. Поняття матриці.
2. Дії з матрицями, властивості.
3. Обернена матриця.
4. Розв'язування матричних рівнянь
   $A \cdot X = B, \quad X \cdot A = B, \quad A \cdot X \cdot B = C$
5. Розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці.
6. Ранг матриці.
7. Методи обчислення рангу.
8. Теорема Кронекера-Капеллі.

1. Матрицею* розміром m x n називають сукупність чисел, розміщених у вигляді прямокутної таблиці, яка має **m** рядків та **n** стовпців.
*(поняття матриці вперше ввели англійські математики Гамільтон і Келі)

Матриці позначають великими літерами латинського алфавіту та круглими дужками. Така матриця має вигляд:

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

або $A = \left(a_{ij}\right) m \times n, \qquad A = \left\| a_{ij} \right\| m \times n$

$$i = 1, 2, \dots m$$
$$j = 1, 2, \dots n$$

Кожен елемент a_{ij} матриці A має два індекси: перший вказує номер рядка, другий –номер стовпця.

*матриці широко використовуються в плануванні виробництва та транспортних перевезень. Вони дозволяють розробляти різні варіанти плану, полегшують дослідження залежності між різними економічними показниками

За формою матриці можуть бути прямокутними (m≠n), квадратними (m=n), матриця-рядок (у якої всього один рядок), матриця-стовпець (у якої всього один стовпець).

$$A_{41}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{41}\end{pmatrix} \qquad B_{13}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\end{pmatrix}$$

2. <u>Дії з матрицями</u>:

Порівнювати матриці можна одного розміру. Матриці рівні тоді, коли рівні їх відповідні елементи.

$$A_{mn}=B_{mn} \qquad a_{11}=b_{11} \qquad a_{12}=b_{12}\ldots$$

1) <u>Транспонувати</u> матрицю –значить замінити її рядки стовпцями або навпаки.

$$A_{23}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}, \qquad A^{T}{}_{23}=A_{32}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\a_{12} & a_{22}\\a_{13} & a_{23}\end{pmatrix}$$

2) <u>Додавати (віднімати)</u> можна матриці одного розміру. Щоб додати дві матриці , потрібно додати їх відповідні елементи.

$$A_{23}+B_{23}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\\a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23}\end{pmatrix}$$

3) Добуток матриці на число:

щоб помножити матрицю на число , потрібно кожний елемент її помножити на це число

$$A_{22}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \qquad \lambda\cdot A_{22}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\\lambda a_{21} & \lambda a_{22}\end{pmatrix}$$

З цього випливає, що за знак матриці можна виносити спільний множник всіх елементів.

<u>Приклад</u>: Виконати дії:

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\-4 & 5 & 0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-2 & -4 & 1\\3 & -8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\-4 & 5 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 12 & -3\\-9 & 24 & -12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 13 & 0\\-13 & 29 & -12\end{pmatrix}$$

<u>Діагональною матрицею</u> називається квадратна матриця, в якої всі елементи, крім елементів, які знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

$$A_{діаг.}=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0\\0 & a_{22} & 0\\0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}$$

<u>Одиничною матрицею</u> називається діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Нульовою матрицею називається матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю.

4) Добуток матриць

Матриці можна перемножати тоді, коли число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці

$$A_{mn}\cdot B_{nk}=C_{mk}$$

(такі матриці називаються узгодженими)

Правило множення рядка на стовпець:

11 $\oplus$

Схема: $\begin{pmatrix}\bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet\end{pmatrix}$

Щоб визначити елементи c_{ij}, потрібно кожний елемент і-го рядка першої матриці помножити на відповідні елементи j-го стовпця другої матриці і результати (добутки) додати.

Приклад: $\underset{A_{14}}{\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}}\cdot\underset{B_{42}}{\begin{pmatrix}3 & 8\\ -1 & 9\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}}=C_{12}$

$$C_{12}=\begin{pmatrix}-6-1+0+4 & -16+9+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -3\end{pmatrix}$$

2) $\underset{A_{51}}{\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 4\\ 8\\ 10\end{pmatrix}}\cdot\underset{B_{15}}{\begin{pmatrix}5 & 3 & -2 & 6 & 1\end{pmatrix}}=C_{55}$

$$C_{55}=\begin{pmatrix} -10 & -6 & 4 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 12 & -8 & 24 & 4 \\ 40 & 24 & -16 & 48 & 8 \\ 50 & 30 & -20 & 60 & 10 \end{pmatrix}$$

Властивості додавання:

1) A+B=B+A (комутативність)
2) A+(B+C)=(A+B)+C (асоціативність)
3) A+0=A (роль 0 матриці як числа 0)
4) $\alpha\cdot(\beta A)=(\alpha\beta)\cdot A$
5) $\alpha\cdot$(A+B)=$\alpha\cdot$A+$\alpha\cdot$B
6) $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$

Властивості множення:

1) $A\cdot B\neq B\cdot A$ (іноді $B\cdot A$ не має змісту),
Якщо $A\cdot B=B\cdot A$, то такі матриці називаються переставними
2) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ розподільний закон множення відносно додавання
3) $\lambda\cdot A\cdot\mu\cdot B=\lambda\mu\cdot(AB)$
4) $ABC=(AB)\cdot C=A\cdot(BC)$
5) $E\cdot A=A\cdot E$ (роль Е матриці як числа 1)

Приклад: Знайти добуток:

$$\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

3. Якщо в квадратній матриці всі елементи a_{ij} замінити на відповідні алгебраїчні доповнення A_{ij}, потом транспонувати матрицю, то одержимо матрицю, яка називається приєднаною:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=A^*$$

Визначником (детермінантом) квадратної матриці А називається визначник, елементами якого є елементи матриці:

$$\det \cdot A_{33} = |A_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{число!}$$

Квадратна матриця називаються <u>виродженою</u> (<u>особливою</u>), якщо її визначник дорівнює нулю.

Квадратна матриця називається <u>невиродженою</u> (<u>неособливою</u>), якщо її визначник не дорівнює нулю.

3. Аналогічно поняттю оберненого числа в теорії чисел вводиться в лінійній алгебрі <u>поняття оберненої матриці</u>, але тільки для <u>квадратних матриць</u>.

Нехай дана квадратна матриця:

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матриця A^{-1} називається <u>оберненою</u> до матриці А якщо при множенні цієї матриці на дану як справа так і зліва одержуємо одиничну матрицю Е:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

<u>Обернена матриця існує тільки для невиродженої матриці.</u>

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}$$

$$\det A = |A| \neq 0$$

<u>Приклад</u>: Знайти обернену матрицю для матриці А:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -20 + 12 - 45 - 8 = -61 \neq 0$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -1$

$$A^{-1} = \frac{1}{-61} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -8 & -11 \\ 1 & -13 & 5 \\ -15 & 12 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{61} & \frac{8}{61} & \frac{11}{61} \\ -\frac{1}{61} & \frac{13}{61} & -\frac{5}{61} \\ -\frac{15}{61} & -\frac{12}{61} & \frac{14}{61} \end{pmatrix}$$

<u>Перевірка</u>: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -8 & 11 \\ 1 & -13 & 5 \\ -15 & 12 & -14 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{61} \cdot \begin{pmatrix} -61 & 0 & 0 \\ 0 & -61 & 0 \\ 0 & 0 & -61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. <u>AX=B</u>, де A і B-задані матриці,
X –невідома матриця

Помножимо обидві частини рівняння зліва на матрицю A^{-1}.

$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B$, тобто $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

так як $E \cdot X = X$

Приклад: $\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} \cdot X = \underset{B}{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}$

$A \cdot X = B$

$X = A^{-1} \cdot B$

Знайдемо A^{-1}:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

$A_{11} = 3$ $\qquad$ $A_{21} = -4$

$A_{12} = -1$ $\qquad$ $A_{22} = -2$

$$A^{-1} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Тоді: $X = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

<u>Перевірка</u>: $\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 20 & -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

<u>Відповідь</u>: $X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} & -\frac{6}{5} \\ \frac{9}{10} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

б) $\underline{X \cdot A = B}$

$$X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{E} = B \cdot A^{-1}$$

$$\boxed{X = B \cdot A^{-1}}$$

в) $\underline{A \cdot X \cdot B = C}$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{E} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}$$

4. Нехай дана система лінійних неоднорідних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

основна матриця системи

Дану систему можна записати за допомогою введених позначень:

$$A \cdot X = B$$

Звідси $X = A^{-1} \cdot B$

Метод розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці можна використовувати тоді, коли матриця А невироджена.

Приклад: Розв'язати систему за допомогою оберненої матриці:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 9 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3y + 4z = 11 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$A \cdot X = B$, звідси $X = A^{-1} \cdot B$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 47 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{47} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 20 & -2 \\ -8 & 4 & 9 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$X=\frac{1}{47}\cdot\begin{pmatrix}7 & 20 & -2\\ -8 & 4 & 9\\ 6 & -3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\ 5\\ 11\end{pmatrix}=\frac{1}{47}\cdot\begin{pmatrix}141\\ 47\\ 94\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

x=3, y=1, z=2

<u>Перевірка</u>: $\begin{cases}3-2+8=9\\ 6+1-2=5\\ 3+8=11\end{cases}$ $\begin{cases}9=9\\ 5=5\\ 11=11\end{cases}$

<u>Відповідь</u>: x=3, y=1, z=2

<u>Приклад</u>: $\begin{cases}7x-y+z=0\\ 2x+4y-z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$

система лінійних однорідних рівнянь

$$A=\begin{pmatrix}7 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$AX=B,\quad X=A^{-1}\cdot B$$

$$\det A=\begin{vmatrix}7 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=28+2+1-(4-7-2)=36\neq 0$$

Так як $\det A\neq 0$, то система має 1 розв’язок (x=0, y=0, z=0).

Якби $\det A=0$, то система мала б нескінченну множину розв’язків.

1. <u>Мінором</u> матриці A_{mn} k-го порядку називається визначник k-го порядку, який складається з елементів, що знаходяться на перетині будь-яких **<u>k</u>** рядків та **<u>k</u>** стовпців.

Обираючи різними способами **<u>k</u>** рядків та **<u>k</u>** стовпців, одержимо деяку кількість мінорів k-го порядку.

Матриця має мінори будь-якого порядку: від першого (елементи матриці –мінори 1-го порядку) до найменшого із чисел **<u>m</u>** та **<u>n</u>** .

Приклад: $A_{34}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2 & 0\\ 5 & 7 & -8 & 10\\ 3 & -5 & 6 & -1\end{pmatrix}$

$$M_2=\begin{vmatrix}7 & 10\\ -5 & -1\end{vmatrix}$$

6. Рангом матриці А (rang A або r (A)) називається найбільший порядок її мінорів, відмінних від нуля.

Властивості:

1) Ранг існує для будь-якої матриці A_{mn}, причому $0\le r(A)\le \min(m,n)$.

2) r (A) =0 тоді і тільки тоді, коли A=0.

3) Для квадратної матриці n-го порядку ранг дорівнює **n** тоді і тільки тоді, коли матриця невироджена (тобто її визначник не дорівнює 0).

Якщо rang A=r, то любий мінор r-го порядку не рівний 0 називається базисним мінором. Базисних мінорів для матриці може бути декілька.

Якщо rang A=r, то любий мінор k-го порядку дорівнює 0, якщо k > r

7. Ранг матриці простіше всього знайти за допомогою елементарних (еквівалентних) перетворень:

1) перестановка місцями рядків (стовпців) матриці;

2) множення (ділення) всіх елементів любого рядка (стовпця) на будь яке число $\lambda\neq 0$;

3) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне й те саме число;

4) викреслювання (відкидання) нульового рядка (стовпця) (не обов'язково).

Застосовуючи ці перетворення, в результаті одержують еквівалентні матриці, ранги яких однакові:

A~B => rang A = rang B

-За їх допомогою матрицю зводять до матриці, у якої нижче головної діагоналі всі елементи нулі. Тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від 0.

$$A_{34}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\qquad \text{rang}\,(A_{34})=3$$

(матриця має вигляд "східців", її ще називають "трикутною" або "трапецевидною")

-Другий метод знаходження ранга матриці: за допомогою елементарних перетворень в кожному рядку і в кожному стовпчику матриці одержати не більше одного, не рівного нулю, елемента. В такій матриці ненульові рядки і стовпці називаються базисними рядками і стовпцями. Тоді ранг такої матриці дорівнює числу базисних рядків (стовпців).

Приклад: Знайти rang A:

$$A_{46}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}x(-1) \quad x(-2)\\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -1 & 3 & 3 & -2\end{pmatrix}\sim$$

x (-2)

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -1 & 3 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ x(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ x(-1)\\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B$$

нульові рядки і стовпці викреслюються

Ненульових стовпців (рядків) 3, значить rang B=3, тому і rang A=3.

Мінор, складений з невикреслених елементів (тобто мінор, який складається з елементів базисних рядків і стовпців) називається базисним мінором.

$$M_3(B)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0 \qquad M_3(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$$

3. Розглянемо систему **m** лінійних рівнянь з **n** невідомими:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \quad\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots a_{mn}x_n=b_n\end{cases}$$

Основна матриця системи –це матриця, елементами якої є коефіцієнти при невідомих:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Розширена матриця системи –це матриця основна, до якої дописано матрицю-стовпець вільних членів:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Розв’язком системи називається множина дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, підстановка яких у систему замість невідомих $x_1, x_2, \dots x_n$, перетворює кожне рівняння системи у тотожність.

Система називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв’язок. Сумісна система називається визначеною, якщо вона має єдиний розв’язок, і невизначеною, якщо вона має більше одного розв’язку (значить вона має нескінченну множину розв’язків).

Система, що не має розв’язку, називається несумісною.

8.Теорема Кронекера –Капеллі*

(критерій сумісності системи)

*Кронекер –німецький математик, Капеллі –італійський

Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці: rang A=rang $\tilde{A}$.

1) Для сумісної системи:

а) Якщо rang A=rang $\tilde{A}$ = n, де n –число невідомих системи, то система має один розв’язок.

б) Якщо rang A=rang $\tilde{A}$ < n, то система має нескінченну множину розв’язків.

2) Якщо rang A < rang $\tilde{A}$, то система несумісна.

Питання для самоконтролю

1. Поняття матриці.
2. Застосування матриці в економіці.
3. Дії з матрицями, властивості.
4. Обернена матриця.
5. Розв’язування матричних рівнянь $A \cdot X = B, \quad X \cdot A = B, \quad A \cdot X \cdot B = C$
6. Розв’язування систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці.
7. Ранг матриці.
8. Методи обчислення рангу.
9. Теорема Кронекера - Капеллі.

ЛЕКЦІЯ 7

Тема: Системи лінійних рівнянь.

ПЛАН

1. Метод Гаусса* розв'язування систем лінійних рівнянь (інформативно)
2. Метод Жордана –Гаусса.
3. Загальний та частинний розв'язки систем лінійних рівнянь

* Карл Фрідріх Гаусс (1777-1855) –видатний німецький математик, астроном, фізик, геодезист.

1. Нехай дана система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Суть метода Гаусса полягає в тому, що шляхом елементарних перетворень систему треба привести до трикутного вигляду (або трапецевидного (східчастого) вигляду): перше рівняння системи буде містити всі невідомі, крім першого; третє –всі невідомі, крім першого і другого і т.д.:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}'x_2 + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2' \\ \quad \ldots \\ \qquad\qquad a_{mn}'x_n = b_m' \end{cases}$$

Якщо система рівнянь буде мати один розв'язок, то останнє рівняння буде містити тільки одне останнє невідоме; якщо безліч розв'язків, то крім останнього невідомого останнє рівняння буде містити ще хоча б одне невідоме.

Зворотній хід методу Гаусса: із останнього рівняння знайдемо x_n (у випадку 1 розв'язку) або одне із невідомих через послідуючі (у випадку безлічі розв'язків); підставляючи знайдене значення в передостаннє рівняння, знайдемо x_{n-1} і т.д.

Елементарні перетворення системи

1) Множення (ділення) довільного рівняння системи на число, відмінне від 0.
2) Додавання до обох частин одного з рівнянь системи відповідних частин другого рівняння, помножених на одне й те ж саме відмінне від 0 число.

В результаті елементарних перетворень одержимо еквівалентну даній систему. Еквівалентними (рівносильними) називаються системи, якщо вони мають одні й ті ж розв'язки.

Якщо для даної системи лінійних рівнянь записати розширену матрицю, то після виконання елементарних перетворень по методу Гаусса одержують рівними нулю елементи, що лежать нижче головної діагоналі.

2. Застосовуючи еквівалентні перетворення до системи лінійних рівнянь, можна одержати кожне із рівнянь в такому вигляді, коли кожне із рівнянь містить тільки одне (всі вони різні). Якщо розглядати розширену матрицю системи, то в цьому випадку рівними нулю будуть не тільки елементи, що лежать нижче головної діагоналі, а й ті елементи , що лежать вище головної діагоналі. В цьому заключається метод Жордана*-Гаусса.

* Каміль Жордан (1838-1922) –французький математик

В процесі елементарних перетворень системи можуть бути такі випадки:

1) Одержимо рівняння: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots 0 \cdot x_n = 0$

Таке рівняння викидається із системи і система буде містити менше число рівнянь.

2) Одержимо рівняння $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots 0 \cdot x_n = b$, де $b \neq 0 \left(0 = b \neq 0\,?\,!\right)$. В цьому випадку система несумісна (розв'язків немає).

Зауваження: Так як елементарні перетворення виконуються над рівняннями системи, то в розширеній матриці їх потрібно застосовувати тільки до рядків.

Мета перетворень: в кожному рядку вибрати ведучий елемент; а в кожному стовпці одержати нулі, крім ведучого елемента.

Невідомі, які відповідають базисним стовпцям матриці називаються базисними, а інші невідомі називаються вільними (у випадку, коли система має безліч розв'язків).

3. Загальним розв'язком системи лінійних рівнянь (у випадку безлічі розв'язків) називається розв'язок, в якому базисні невідомі виражені через вільні невідомі.

Частинними розв'язками системи називаються розв'язки, в яких вільні невідомі дорівнюють яким-небудь числам.

До частинних розв'язків належать:

-базисний (якщо усі вільні невідомі дорівнюють 0);

-фундаментальний (якщо одну вільну невідому прирівняти до 1, а інші до 0) (кількість фундаментальних розв'язків залежить від кількості вільних невідомих);

-невід'ємний базисний розв'язок –опорний

Якщо в результаті перетворень матриці одержимо число базисних стовпців рівне числу невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо число базисних стовпців менше числа невідомих, то система має безліч розв'язків.

Приклад 1: Розв’язати систему методом Жордана-Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 \qquad - 5x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 4 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -4 & 3 \\ 4 & -3 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -5 & 2 & -6 & 4 \end{array}\right) \quad x(-1) \quad x(-2) \quad \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

~ одержали 4 рядки одинакові –це значить, що в системі буде 4 однакових рівняння, тому 3 з них можна відкинути, тобто в матриці можна викреслити 3 рядки.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) x(3) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 10 & -5 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{array}\right)$$

Базисних стовпців 2 (третій і четвертий), а невідомих 5. Так як число базисних стовпців менше числа невідомих, то система буде мати нескінченну множину розв’язків.

x_3, x_4 –базисні невідомі

x_1, x_2, x_5 -вільні невідомі

Знайдемо загальний розв’язок системи:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_5 = 2 \\ 10x_1 - 5x_2 + x_4 - 8x_5 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 2 - 3x_1 + 2x_2 + 2x_5 \\ x_4 = 7 - 10x_1 + 5x_2 + 8x_5 \end{cases}, \text{ де } x_1, x_2, x_5 - \forall$$

$$x \text{ загал.} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2-3x_1+2x_2+2x_5 \\ 7-10x_1+5x_{2_5}+8x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad x_1, x_2, x_5 - \forall$$

Знайдемо частинний розв'язок:

нехай $x_1=1$, $x_2=3$, $x_5=-1$, тоді

$$x \text{ част.} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо базисний розв'язок $x_1=x_2==x_5=0$

$$X \text{ баз.} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Приклад 2:</u> $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3+x_4=2 \\ x_1-3x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_1+6x_2-6x_3+2x_4=5 \\ 3x_1 \quad -2x_3 \quad =3 \end{cases}$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -6 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \; x(-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) => 0 = 4?!$$

не має змісту

<u>Відповідь:</u> розв'язків немає

Приклад 3: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 \qquad - 3x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 7 \\ \quad 3x_2 - x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -7 \end{array}\right) x(-2) \quad x(-3) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 5 & -6 & -1 & -15 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -23 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -7 \end{array}\right) x(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 & -13 \\ 0 & 10 & -14 & 0 & -38 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -23 \\ 0 & -2 & 7 & 0 & 16 \end{array}\right) :(2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 & -13 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & -19 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -23 \\ 0 & -2 & 7 & 0 & 16 \end{array}\right) x(2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 13 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -23 \\ 0 & -2 & 7 & 0 & 16 \end{array}\right) x(-3) \quad x(-5) \quad x(2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -26 & 0 & -52 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & -43 & 1 & -88 \\ 0 & 0 & 21 & 0 & 42 \end{array}\right) :(21) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -26 & 0 & -52 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & -43 & 1 & -88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) x(26) \quad x(-7) \quad x(43) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Всі стовпці основної матриці базисні, значить всі невідомі базисні, система має 1 розв’язок:

$x_1 = 0$

$x_2 = -1$

$x_3 = 2$

$x_4 = -2$

Питання для самоконтролю

1. Метод Гаусса* розв’язування систем лінійних рівнянь (інформативно)
2. Метод Жордана –Гаусса.
3. Загальний розв’язок систем лінійних рівнянь.
4. Частинний розв’язок систем лінійних рівнянь.