– Des variables ayant une valeur prédéterminée nulle :
ces variables nulles sont dites **variables Hors Base** (ou variables exclues)

– Des variables ayant une valeur non nulle :
ce sont les **variables dans la Base** (ou variables retenues).

Pour amorcer l'algorithme du simplexe, il est nécessaire de connaître une solution de base.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 4 : Variables Hors Base & Variables dans la Base

VDB	VHB
x_3	x_1
x_4	x_2
x_5	
x_6	

La solution de base de départ de l'ébéniste consiste à ne rien produire :

$x_1 = x_2 = 0$. Ces variables x_1, x_2 qui sont nulles sont donc **hors-base**.

Dans ce cas, d'après le programme : $x_3 = 300$, $x_4 = 400$, $x_5 = 500$, $x_6 = 700$

Les variables x_3, x_4, x_5, x_6 (non nulles) sont donc **dans la base**.

La valeur de la fonction économique est donc $Z(0, 0) = 7 \times 0 + 5 \times 0 = 0$.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 4 : Variables Hors Base & Variables dans la Base

VDB	VHB
x_3	x_1
x_4	x_2
x_5	
x_6	

On écrit maintenant le tableau initial :

VHB / VDB	x_1	x_2	x_3 •	x_4 •	x_5 •	x_6 •	cste	
x_3	1	0	1	0	0	0	300	$x_1 + x_3 = 300$
x_4	0	1	0	1	0	0	400	$x_2 + x_4 = 400$
x_5	1	1	0	0	1	0	500	$x_1 + x_2 + x_5 = 500$
x_6	2	1	0	0	0	1	700	$2x_1 + x_2 + x_6 = 700$
Z	7	5	0	0	0	0	0	$Z = 7x_1 + 5x_2$

ESGI
école supérieure de génie informatique

CAMPUS SCIENCES-U LYON

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 5 : Première Itération

La solution de base de départ consiste à ne rien produire soit $x_1 = x_2 = 0$. On étudie ensuite, à partir de cette solution, jusqu'à quel niveau on peut porter x_1 ou x_2 conformément aux contraintes de façon à accroître au maximum le profit.

Il se pose le problème du choix de la variable x_1 ou x_2 qui va passer de la valeur 0 à une valeur strictement positive. La variable choisie sera appelée *variable entrante*.

Critère de sélection de la variable entrante : **Règle du plus grand gain marginal**

Fonction économique : $Z(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2$

La sélection portera sur x_1 qui, par unité rapporte le plus

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 5 : Première Itération

On exprime ensuite x_3, x_4, x_5, x_6 et Z en fonction des variables hors-base x_1 et x_2. Puis la variable x_2 reste hors-base donc **nulle**, la variable x_1 entre en base. On reporte alors $x_2 = 0$ dans ce système et on obtient :

$x_1 + x_3 = 300$	=>	$x_3 = 300 - x_1$	=>	$x_3 = 300 - x_1$
$x_2 + x_4 = 400$	=>	$x_4 = 400 - x_2$	=>	$x_4 = 400$
$x_1 + x_2 + x_5 = 500$	=>	$x_5 = 500 - x_1 - x_2$	=>	$x_5 = 500 - x_1$
$2x_1 + x_2 + x_6 = 700$	=>	$x_6 = 700 - 2x_1 - x_2$	=>	$x_6 = 700 - 2x_1$
$Z = 7x_1 + 5x_2$	=>	$Z = 7x_1 + 5x_2$	=>	$Z = 7x_1$

On cherche jusqu'à quel niveau il est possible de porter x_1, de façon compatible avec les contraintes de positivité des x_i.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 5 : Première Itération

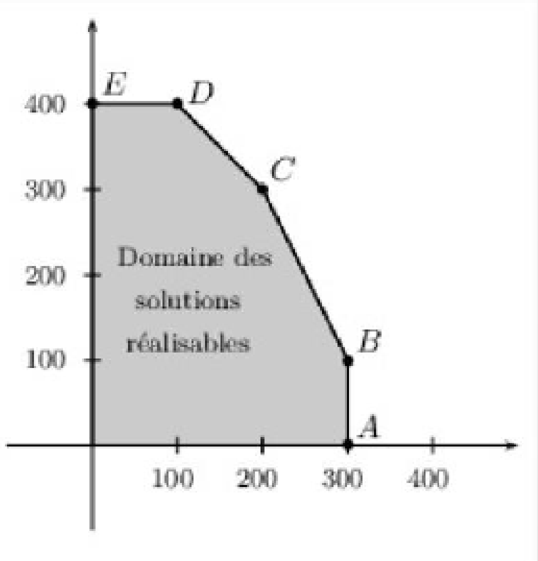
$x_3 = 300 - x_1 \qquad x_1 \leq 300$

$x_4 = 400$

$x_5 = 500 - x_1 \qquad x_1 \leq 500$

$x_6 = 700 - 2x_1 \qquad x_1 \leq 350$

$Z = 7x_1$



La valeur maximale de x1 est donc x1 = 300. On remplace dans le système.

$x_3 = 0 \qquad x_4 = 400$

$x_5 = 200 \qquad x_6 = 100$

$Z(300,0) = 2100$

VDB		VHB
x_1	$\leftrightarrow$	x_3
x_4		x_2
x_5		
x_6		

La variable x_3 est devenue nulle, elle est sortie de la base, x_3 est appelée variable sortante. Les variables x_1 et x_3 ont permuté.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 5 : Première Itération

On exprime le programme standard en fonction des nouvelles variables hors-base x_2, x_3 :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 + x_4 = 400 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 500 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 700 \\ Z = 7x_1 + 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 300 - x_3 \\ x_4 = 400 - x_2 \\ x_5 = 500 - (300 - x_3) - x_2 \\ x_6 = 700 - 2(300 - x_3) - x_2 \\ Z = 7(300 - x_3) + 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 + x_4 = 400 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 200 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100 \end{cases}$$

On exprime ce nouveau programme à l'aide d'un second tableau. Pour l'obtenir, on remplace dans le premier tableau la variable x_3 par la variable x_1 (x_1 et x_3 ont permuté) et ceci dans la colonne **variables dans la base**.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 5 : Première Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 + x_4 = 400 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 200 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100 \end{cases}$$

Pour la fonction économique Z, le coefficient constant 2100 est affecté impérativement du signe **–** et on place –2100.

VHB / VDB	x_1 •	x_2	x_3	x_4 •	x_5 •	x_6 •	cste	
x_1	1	0	1	0	0	0	300	$x_1 + x_3 = 300$
x_4	0	1	0	1	0	0	400	$x_2 + x_4 = 400$
x_5	0	1	-1	0	1	0	200	$x_2 - x_3 + x_5 = 200$
x_6	0	1	-2	0	0	1	100	$x_2 - 2x_3 + x_6 = 100$
Z	0	5	-7	0	0	0	-2100	$Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 6 : Deuxième Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 + x_4 = 400 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 200 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100 \end{cases}$$

Sélection de la variable entrante : $Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100$
On sélectionne x_2. En effet, toute augmentation de x_3 à partir de la valeur 0 provoquerait une diminution de la fonction économique Z.

Sélection de la variable sortante :
La variable x_3 reste hors-base donc nulle, on remplace x_3 par 0 dans le système précédent.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 6 : Deuxième Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 + x_4 = 400 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 200 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100 \end{cases}$$

On obtient : $x_1 = 300$

$x_4 = 400 - x_2$

$x_5 = 200 - x_2$

$x_6 = 100 - x_2$

Les Contraintes de Positivité imposent : $x_2 \leq 400$

$x_2 \leq 200$

$x_2 \leq 100$

ESGI école supérieure de génie informatique

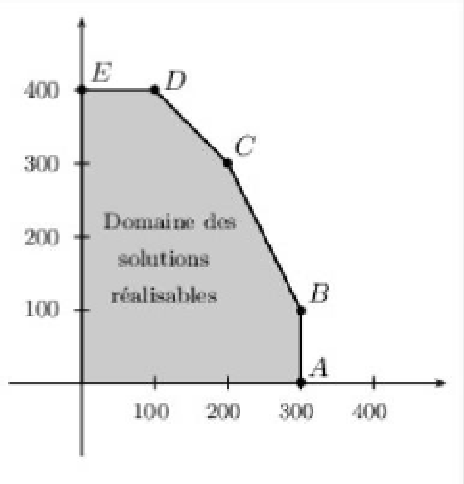
CAMPUS SCIENCES-U LYON

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 6 : Deuxième Itération

$$
\begin{cases}
x_1 + x_3 = 300 \\
x_2 + x_4 = 400 \\
x_2 - x_3 + x_5 = 200 \\
x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\
Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100
\end{cases}
$$



La valeur prise par x2 est donc x2 = 100

x1 = 300
x4 = 400−x2 => x4 = 300
x5 = 200−x2 => x5 = 100
x6 = 100−x2 => x6 = 0

VDB	VHB
x_1	x_3
x_2	x_6
x_4	
x_5	

La variable sortante est donc x6.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 6 : Deuxième Itération

On exprime le programme standard en fonction des nouvelles variables hors-base *x*3, *x*6 :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 + x_4 = 400 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 500 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 700 \\ Z = 7x_1 + 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 300 - x_3 \\ x_2 = 700 - 2(300 - x_3) - x_6 = 100 + 2x_3 - x_6 \\ x_4 = 400 - (100 + 2x_3 - x_6) \\ x_5 = 500 - (300 - x_3) - (100 + 2x_3 - x_6) \\ Z = 7(300 - x_3) + 5(100 + 2x_3 - x_6) \end{cases}$$

On arrive au nouveau programme :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ 2x_3 + x_4 - x_6 = 300 \\ x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ Z = 2600 + 3x_3 - 5x_6 \end{cases}$$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 6 : Deuxième Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ 2x_3 + x_4 - x_6 = 300 \\ x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ Z = 2600 + 3x_3 - 5x_6 \end{cases}$$

On prend la colonne des variables dans la base du second tableau et on y remplace *x6* par *x2* (ces deux variables permutent). Pour la fonction économique *Z*, le coefficient constant 2600 est affecté du signe – et on place –2600.

VDB \ VHB	x_1 •	x_2 •	x_3	x_4 •	x_5 •	x_6	cste	
x_1	1	0	1	0	0	0	300	$x_1 + x_3 = 300$
x_4	0	0	2	1	0	-1	300	$2x_3 + x_4 - x_6 = 300$
x_5	0	0	1	0	1	-1	100	$x_3 + x_5 - x_6 = 100$
x_2	0	1	-2	0	0	1	100	$x_2 - 2x_3 + x_6 = 100$
Z	0	0	3	0	0	-5	-2600	$Z = 3x_3 - 5x_6 + 2600$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 7 : Troisième Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ 2x_3 + x_4 - x_6 = 300 \\ x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ Z = 2600 + 3x_3 - 5x_6 \end{cases}$$

Sélection de la variable entrante : $Z = 3x_3 - 5x_6 + 2600$

On sélectionne x_3. En effet, toute augmentation de x_6 à partir de la valeur 0 provoquerait une diminution de la fonction économique Z.

Sélection de la variable sortante :

La variable x_6 reste hors-base donc nulle, on remplace x_6 par 0 dans le système précédent.

ESGI école supérieure de génie informatique

CAMPUS SCIENCES-U LYON

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 7 : Troisième Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ 2x_3 + x_4 - x_6 = 300 \\ x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ Z = 2600 + 3x_3 - 5x_6 \end{cases}$$

On obtient :

$x_1 = 300 - x_3$

$x_2 = 100 + 2x_3$

$x_4 = 300 - 2x_3$

$x_5 = 100 - x_3$

Les Contraintes de Positivité imposent :

$x_3 \leq 300$

$x_3 \leq 150$

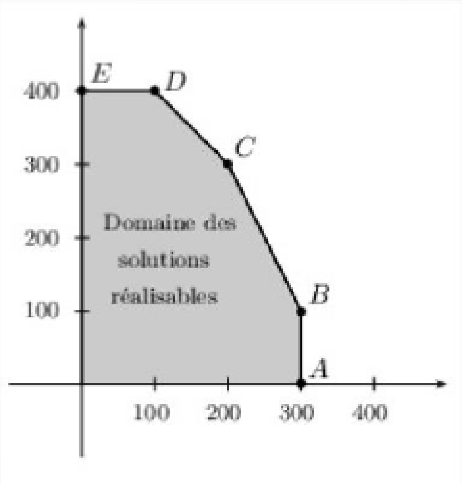
$x_3 \leq 100$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 7 : Troisième Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ 2x_3 + x_4 - x_6 = 300 \\ x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ Z = 2600 + 3x_3 - 5x_6 \end{cases}$$



La valeur prise par x3 est donc x3 = 100

On obtient : $x_1 = 300 - x_3 = 200$

$x_2 = 100 + 2x_3 = 300$

$x_4 = 300 - 2x_3 = 100$

$x_5 = 100 - x_3 = 0$

VDB		VHB
x_3	$\leftrightarrow$	x_5
x_1		x_6
x_2		
x_4		

La variable sortante est donc x5. Les variables x_3 et x_5 ont permuté.
Cette itération conduit au sommet $C(200, 300)$.
La fonction économique vaut $Z = 2900$.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 7 : Troisième Itération

On exprime les variables dans la base en fonction des variables hors-base *x*5 et *x*6.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ 2x_3 + x_4 - x_6 = 300 \\ x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ Z = 2600 + 3x_3 - 5x_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 100 - x_5 + x_6 \\ x_1 = 300 - (100 - x_5 + x_6) = 200 + x_5 - x_6 \\ x_2 = 100 + 2(100 - x_5 + x_6) = 300 - 2x_5 + x_6 \\ x_4 = 300 - 2(100 - x_5 + x_6) = 100 + 2x_5 - x_6 \\ Z = 2600 + 3(100 - x_5 + x_6) = 2900 - 3x_5 - 2x_6 \end{cases}$$

On arrive au nouveau programme :

$$\begin{cases} x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ x_1 - x_5 + x_6 = 200 \\ x_2 + 2x_5 - x_6 = 300 \\ x_4 - 2x_5 + x_6 = 100 \\ Z = 2900 - 3x_5 - 2x_6 \end{cases}$$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 7 : Troisième Itération

$$\begin{cases} x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ x_1 - x_5 + x_6 = 200 \\ x_2 + 2x_5 - x_6 = 300 \\ x_4 - 2x_5 + x_6 = 100 \\ Z = 2900 - 3x_5 - 2x_6 \end{cases}$$

On prend la colonne des variables dans la base du second tableau et on y remplace $x5$ par $x3$ (ces deux variables permutent). Pour la fonction économique Z, le coefficient constant 2900 est affecté du signe – et on place −2900.

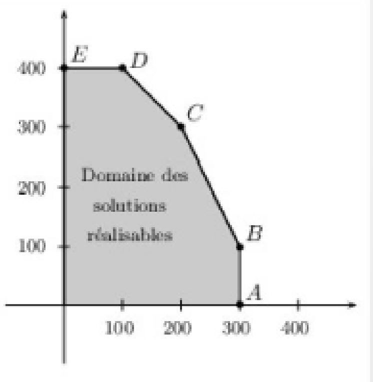
VHB / VDB	x_1 •	x_2 •	x_3 •	x_4 •	x_5	x_6	cste	
x_1	1	0	0	0	−1	1	200	$x_1 - x_5 + x_6 = 200$
x_4	0	0	0	1	−2	1	100	$x_4 - 2x_5 + x_6 = 100$
x_3	0	0	1	0	1	−1	100	$x_3 + x_5 - x_6 = 100$
x_2	0	1	0	0	2	−1	300	$x_2 + 2x_5 - x_6 = 300$
Z	0	0	0	0	−3	−2	−2900	$Z = 2900 - 3x_5 - 2x_6$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 7 : Troisième Itération

$$\begin{cases} x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ x_1 - x_5 + x_6 = 200 \\ x_2 + 2x_5 - x_6 = 300 \\ x_4 - 2x_5 + x_6 = 100 \\ Z = 2900 - 3x_5 - 2x_6 \end{cases}$$



Conclusion : $Z = 2900 - 3x_5 - 2x_6$

x_5 et x_6 sont hors-base donc nulles <u>mais</u> toute augmentation de x_5 ou x_6 entraîne une diminution de Z. Il n'est plus possible d'améliorer la fonction économique, la solution ($x_1 = 200$, $x_2 = 300$) est la solution optimale.

On interprète les résultats de la manière suivante :

$x_1 = 200$ bureaux de modèle luxe
$x_2 = 300$ bureaux de modèle standard
$x_3 = 100$, il reste une possibilité de fabriquer 100 bureaux de modèle luxe
$x_4 = 100$, il reste une possibilité de fabriquer 100 bureaux de modèle standard
$x_5 = 0$, tout le bois disponible est utilisé
$x_6 = 0$, tout le temps disponible est utilisé
Z est maximum et vaut 2900.

ESGI
école supérieure de génie informatique

CAMPUS SCIENCES-U LYON