ⓐ $x^{(k)} = A\, x^{(k-1)}$ Ejercicio quiz 3.2 $k = 1, 2, 3$ .. $x^{(0)} = [1, 1]^T$

si: $x^{(k)} = \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(k-1)} = \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix}$

Luego $\begin{matrix} 1^{\circ} \\ 2^{\circ} \end{matrix} \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} f_k + a_{12} f_{k-1} \\ a_{21} f_k + a_{22} f_{k-1} \end{pmatrix}$

dado que se fue fibonacci en forma nomatrical es $f_{(k+1)} = f_k + f_{k-1}$

$\Rightarrow a_{11} = 1 \quad a_{12} = 1.$

Por otro lado si ..

$a_{21} = 1$ y $a_{22} = 0$

entonces la 2° ecuacion queda

$f_k = f_k$

lo que dice que f_k es independiente y a partir del cual aplicando la ecuacion 1° se obtiene f_{k+1}.

si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

se puede escribir fibonacci en forma matricial.

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix}$$

ó $x^{(k)} = A \cdot x^{(k-1)}$

ⓑ Puedo obtener autovalores y autovectores de A haciendo.

$\det(A - \lambda I) = 0$

haciendo esta sencilla pero ardua cuenta en software obtengo que los Autovalores son

$\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$ que son distintos

luego reemplazando los valores de autovalores en $A\bar{x} = \lambda \bar{x}$ queda $A\bar{V}_1 = \lambda_1 \bar{V}_1$ y $A\bar{V}_2 = \lambda_2 \bar{V}_1$ (sistemas determinados 2 ecuaciones y dos incognitas)

resolviendo la cuenta en software queda $\bar{V}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{V}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Para definir si es diagonalizable debo comprobar si llega a forma Diagonal (D) haciendo $S^{-1} A S = D$ donde S es una matriz de la misma dimension que A, y S tiene inversa y es la matriz de Autovectores columna

Ejercicio: Ma3.2.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = D$$

hago multiplicacion de matrices en software

se observa que D es una matriz diagonal.

luego puedo escribir A como $A = S.D.S^{-1}$

(c) si $x^{(0)} = [1,1]^T$ $x^{(k)} = A.x^{(k-1)}$ $k = 1, 2, \ldots$

$$x^{(1)} = A.x^{(1-1)} = A.x^{(0)}.$$

$$x^{(2)} = A.x^{(2-1)} = A.x^{(1)} = A.A.x(0)$$

$\Rightarrow$ aplicando induccion.

$$x^{(k)} = A^k.x^{(0)} = (S.D^k.S^{-1}).x^{(0)}$$

Por propiedad de potencia de matrices diagonalizables

$$x^{(k)} = \underset{2\times2}{\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} . \underset{2\times2}{\begin{pmatrix} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^k & 0 \\ 0 & \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^k \end{pmatrix}} . \underset{2\times2}{\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} . \underset{2\times1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

esta forma permite calcular cualquier valor de la serie a partir de su valor inicial y el calculo de potencias en escalares.

Scanned with CamScanner