1/3.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array} \end{array}$$

a) Demostrar que A es definida positiva

1° es cuadrada?: si es cuadrada

2° es simetrica?: para ello $A = A^T$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$ cambio renglones por columnas

3° cumple que $\bar{x}^T A \bar{x} > 0 \;\; \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ que no sea el $\bar{0}$?

A es una matriz del $\mathbb{R}^{2\times 2}$ entonces debo hacer el producto con un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$.

$$\bar{V} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} \quad \bar{V}^T = \{V_1, V_2\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\{V_1, V_2\}}_{\text{vector } 1\times 2} \underbrace{A}_{2\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \left(V_1 + \tfrac{1}{2}V_2, \tfrac{1}{2}V_1 + \tfrac{1}{3}V_2\right) \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

usando ley asociativa para producto escalar.

$$= V_1\left(V_1 + \tfrac{1}{2}V_2\right) + V_2\left(\tfrac{1}{2}V_1 + \tfrac{1}{3}V_2\right)$$

$$= V_1^2 + \tfrac{1}{2}V_1V_2 + \tfrac{1}{2}V_1V_2 + \tfrac{1}{3}V_2^2 = V_1^2 + \tfrac{1}{3}V_2^2 + V_1V_2$$

$\Rightarrow$ puede $f(V_1, V_2) = V_1^2 + V_1V_2 + \tfrac{1}{3}V_2^2$ tener valores 0 negativos?

completando cuadrado (software)

$$\underbrace{\left(V_1 + \frac{V_2}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{V_2^2}{12}}_{\geq 0} > 0$$

Por lo que se cumple que es mayor que cero (dado que no pueden ser V_1, V_2 ambos cero por hipotesis)

$\Rightarrow$ A es definida positiva

Ejercicio 3 cont.

1º vector unitario de nueva base ortogonal.

$$\hat{U}_1 = \frac{\overline{B_1}}{|B_1|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\langle B_1, B_1 \rangle^{1/2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\left[(B_1^T \, A \, B_1)^{1/2} \right]}$$

→ es igual a 1 si $\bar{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2º Segundo vector unitario (se debe encontrar uno ortogonal al primero)

$$\bar{U}_2 = \bar{B}_2 - \mathrm{Proy}_{\bar{U}_1}(\bar{B}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \mathrm{Proy}_{\bar{U}_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \bar{U}_1, \bar{B}_2 \rangle}{\langle \bar{U}_1, \bar{U}_1 \rangle} \cdot \bar{U}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3 cont.

3º normalizo v_2

$$\hat{v}_2 = \frac{\bar{v}_2}{|\bar{v}_2|} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\langle \bar{v}_2 , \bar{v}_2 \rangle^{1/2}} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

4º compruebo que sean ortogonales mediante propiedad $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 0$ si son ortogonales

$\langle \hat{v}_1 , \hat{v}_2 \rangle = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} , \sqrt{3}\right) A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ es decir $B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$ es una base orto-normal de $\bar{V}$

nota: use software para multiplicación de matrices