Hyp | Supongo $\mathbb{R}^3$ es espacio vectorial

ES 3.A.

$$A = \{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \overbrace{\underbrace{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{Z}}_{\text{Enteros positivos negativos y el cero}}}^{Eq1} \}$$

conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$

sea α un escalar $\in \mathbb{R}$.

$\bar{V}_A = (\varepsilon_{1_A}, \varepsilon_{2_A}, \varepsilon_{3_A})$ como es de A cumple condición de que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{Z}$

Entonces $\alpha \bar{V}_A = (\alpha \varepsilon_{1_A}, \alpha \varepsilon_{2_A}, \alpha \varepsilon_{3_A})$ con α escalar de los reales

está claro que para valores no enteros de α, $\alpha \bar{V}_A$ no cumple la condición de Eq1. cada que $\alpha \varepsilon_{1_A}$, $\alpha \varepsilon_{2_A}$, $\alpha \varepsilon_{3_A}$ no serán enteros

entonces no es cerrado para multiplicación y por tanto A no es subespacio vectorial.

H/P | supongo que $\mathbb{R}^3$ es espacio vectorial

Ej 3.B.

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y = z \\ x-y = \frac{1}{2}z \end{array} \right\}$$

es decir el subespacio está compuesto por puntos que cumplen las dos ecuaciones

sol $\begin{cases} x+y = z \\ x-y = 1/2\, z \end{cases}$ es. Eq1 $\begin{cases} x = x \\ y = 1/3 \,.\, x \\ z = 4/3 \,.\, x \end{cases}$ conjunto de puntos que satisfacen esta eq paramétrica de una recta por el origen

es vacío? contiene $\bar{0}$

$\bar{0} = (x=0, y=0, z=0)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \;\; 1/3 \\ z = 0 \;\; 4/3 \end{cases}$ Contiene al punto cero si x se elige igual a cero.

como al menos el espacio contiene al $\bar{0}$ entonces, no es vacío.

Es cerrado para las sumas?

$\bar{v}_1 = (x_1, 1/3\, x_1, 4/3\, x_1)$ cumple Eq1 por eso pertenece a B.

$\bar{v}_2 = (x_2, 1/3\, x_2, 4/3\, x_2)$ cumple Eq1 "

suma componentes

Eq2 $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (x_1+x_2, 1/3(x_1+x_2), 4/3(x_1+x_2))$ esto cumple Eq1?

si $x = x_1 + x_2 \Rightarrow \bar{v}_3 = ((x_1+x_2), 1/3(x_1+x_2), 4/3(x_1+x_2))$

$= \bar{v}_1 + \bar{v}_2$

como se que $\bar{v}_3$ pertenece a B, entonces $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ también

porque cumple eq1

---

es cerrado multiplicación

$\bar{v}_1 = (x_1, 1/3\, x_1, 4/3\, x_1)$ cumple Eq1 por eso pertenece a B.

$\alpha \bar{v}_1 = (\alpha x_1, \alpha\, 1/3 . x_1, \alpha\, 4/3\, x_1)$ siendo α escalar $\in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ cumple Eq1?

si $x = \alpha x_1 \Rightarrow \bar{v}_2 = (\alpha x_1, 1/3 . \alpha x_1, 4/3\, \alpha x_1)$

$= (\alpha x_1, \alpha\, 1/3\, x_1, \alpha\, 4/3\, x_1) = \alpha \bar{v}_1$

como se que $\bar{v}_2$ pertenece a B, entonces $\alpha \bar{v}_1$ también

porque cumple eq1

Rta. $\boxed{\text{Entonces B si es subespacio}}$

Scanned with CamScanner

EJ 3.b Continuación

Como se vio que B estaba definido para puntos sobre una recta en el espacio que pasaba por el origen

entonces la dimension del espacio que contiene a B es $\mathbb{R}^3$ (por hipotesis).

Se puede reescribir la ec de la recta en forma parametrica usando el parametro λ de la forma.

$$\bar{X} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

en donde λ es un escalar
$\bar{X}$ es un punto $\in \mathbb{R}^3$
y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$ es el vector direccion de la recta que llamaré $\bar{G}$

esto nos dice que los puntos del subespacio pueden generarse como combinacion lineal del vector generador $\bar{G}$ siendo los escalares representados por λ.

$\bar{G}$ es a su vez una base de B dado que cada vector de B puede definirse con un unico escalar λ.

luego la dimension de B es 1 dado que solo tiene 1 vector en su base.

Rta: B es subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 y

base $\bar{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \right\}$

Hyp. Supongo que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial

Ej 3.C.

$C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \overset{Eq1}{x^2 + y^2 \leq z} \}$ Volumen en el interior de un paraboloide infinito con eje de simetría en z. (z siempre es positivo)

es vacío contiene a $\bar{0}$

Si $x=0$, $y=0$, $z=0$ $\Rightarrow$ $x^2+y^2-z \leq 0$

$0^2+0^2-0 \leq 0$

$0 \leq 0$

entonces contiene a $\bar{0}$ y C no es vacío y contiene al vector nulo

sea $\bar{V}_1 = (x_1, y_1, z_1) \in C \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 - z_1 \leq 0$.

sea $\bar{V}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in C \Rightarrow x_2^2 + y_2^2 - z_2 \leq 0$.

$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ cumple Eq1?

$(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 - (z_1+z_2) \leq 0$ reemplazo en Eq1.

$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 - z_1 - z_2 \leq 0$

$(x_1^2+y_1^2-z_1) + (x_2^2+y_2^2-z_2) + 2x_1x_2 + 2y_1y_2 \leq 0$

tomando el caso en la frontera (superficie del paraboloide).

$x_1^2+y_1^2-z=0$; $x_2^2+y_2^2-z_2=0$ (dos puntos en superficie)

$2x_1x_2 + 2y_1y_2 \leq 0$ si x_1, x_2, y_1, y_2 son positivos

$\Rightarrow$ no se cumple la desigualdad.

A no es cerrado para la suma. y por tanto no es subespacio vectorial.

contraejemplo $v_1 = (1,1,1)$ y $v_2 = (2,2,8) \Rightarrow v_3 = (3,3,9)$

si sumo dos puntos sobre la frontera el vector que obtengo está fuera de C.

$3^2+3^2-9 = 3^2 \not\leq 0$

Frontera es $x^2+y^2=z$

Rta: C no es subespacio