۱۱. حل عددی معادلات دیفرانسیل

محمد صادق اسحاقی

انواع معادلات دیفرانسیل

- ODE ساده
  - Initial Value Problems با مقادیر اولیه
  - Boundary Value Problems با مقادیر مرزی
- PDE پاره‌ای

درجه : توان بزرگترین مشتق موجود در معادلات

$y'^2 + y = e^{-x}$ درجه ۲

$y'' + y'^3 + y^4 = x^4$ درجه ۱

مرتبه : بالاترین مشتق گرفته شده از تابع

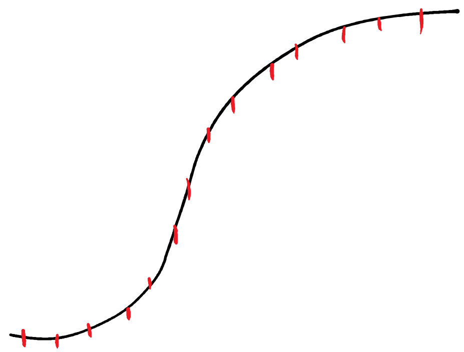
$\frac{dy}{dx} + y^2 = 5x$ مرتبه ۱

$y'' + y'^3 + xy^4 = e^x$ مرتبه ۲

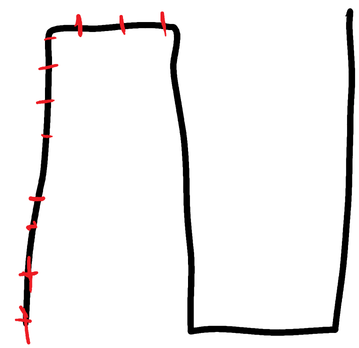
خطی یا غیرخطی بودن

عبارت های غیرخطی: $y^2 ,\ y'^3 ,\ \sqrt{y} ,\ \sqrt{y'} ,\ \sin(y) ,\ e^y ,\ \dots$

مثال عبارت های خطی: $x^2 ,\ x^3 ,\ \frac{1}{x} ,\ \sqrt{x} ,\ e^x ,\ x^2 y ,\ \sin(x) ,\ \ln(x)$



non-stiff



stiff

$y' = f(t, y)$ Explicit صريح

$f(t, y, y') = 0$ Implicit غير صريح

ODE حل معادلات دیفرانسیل

Non-stiff:
- ode45
- ode23
- ode113

Stiff:
- ode15s
- ode23s
- ode23t
- ode23tb

→ Explicit

implicit

ode15i

Bacteria Growth:

$$\frac{dN}{dt} = r.N$$

$$N(t) = N(0)\, e^{rt}$$

$N(0) = 1000$

$r = 0.8$

odefun: $N' = \underbrace{r.N}$

$$y' \underbrace{- 10\, e^{-(t-2)^2/2\sigma^2} + 0.6\, y} = 0$$

$\sigma = 0.075$

$0 < t < 4$

$y(0) = 0.5$

$y' = 10 \ldots \ldots \rightarrow$ odeFun

دستگاه معادلات دیفرانسیل:

$$
\begin{cases}
y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
\vdots \\
y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
y_1' = y_2 \\
y_2' = y_1 y_2 - 2
\end{cases}
\qquad 0 < t < 10
\qquad
\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}
$$

Lokta Equations :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - \beta x y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -y + \delta x y \end{cases}$$

x : جمعیت طعمه

y : جمعیت شکارچی

$\delta = 0.02 \qquad \beta = 0.01$

$0 < t < 15$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \beta x y \\ -y + \delta x y \end{bmatrix}$$

$$P(0) = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Lorenz System

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\[2ex]
\dfrac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\[2ex]
\dfrac{dz}{dt} = xy - \beta z
\end{cases}
$$

$$f = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad f' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\sigma = 10 \qquad \beta = 8/3 \qquad \rho = 28$$

$$f(\cdot) = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Vandepol System

$$\ddot{y} - \mu(1-y^2)\dot{y} + y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 0$$

$$y = y_1 \rightarrow y' = y_1' \rightarrow y_1' = y_2$$

$$y' = y_2 \rightarrow y'' = y_2'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \mu(1-y_1^2)y_2 + y_1 \end{cases}$$

$\mu = 1$

Weissinge Eq.

$$t y^2 (y')^3 - y^3 (y')^2 + t(t^2+1) y' - t^2 y = 0 \qquad f(t, y, y') = 0$$

$$1 < t < t_0$$

$$y(1) = \sqrt{3/2} \qquad \text{ode15i}$$

$$y(t) = \left(t^2 + 1/2\right)^{1/2}$$

Boundary Value Problems (BVPs)

$$y'' = f(t, y, y') \qquad a \leq t \leq b$$

ODE	Bvps
$y(a) = A$	$y(a) = A$
$y'(a) = B$	$y(b) = B$

انتها بازه

$\longrightarrow$ bvp4c , bvp5c

$$\left[\begin{array}{l} y(a) + y(b) = 3 \\ y'(a) + y'(b) = 4 \end{array}\right]$$

bcfun

y_a $\quad$ y_b

$y_a(1) \rightarrow y(a)$ $\quad$ $y_b(1) = y(b)$

$y_a(2) \rightarrow y'(a)$ $\quad$ $y_b(2) = y'(a)$

$y(a) = 3$ $\quad$ $y(b) + y'(b) = 5$

$$\text{res} = \begin{bmatrix} y(a) - 3 \\ y(b) + y'(b) - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_a(1) - 3 \\ y_b(1) + y_b(2) - 5 \end{bmatrix}$$

$$y'' = 0.02y + 1 \qquad y(0) = 10 \qquad y(10) = 100 \qquad 0 < t < 10$$

$$y_1 = y \qquad y_2 = y' \implies \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 0.02y_1 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_a(1) - 10 \\ y_b(1) - 100 \end{bmatrix}$$