Домашнее задание №6

Егор Щербин

22 ноября 2017 г.

Задача 1.

$p(x, y) = \frac{1}{\pi}$

Для $y \notin (-1, 1)$ $P(\xi_2 = y) = 0$, поэтому такой случай не рассматриваем.

Для $y \in (-1, 1)$ прямая $\xi_2 = y$ пересекается с единичным кругом по отрезку $[(-\sqrt{1-y^2}, y); (\sqrt{1-y^2}, y)]$. Следовательно, $p_{\xi_2}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} p(x, y)dx = \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}dx = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$, и $p_{\xi_1|\xi_2}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_{\xi_2}(y)} = \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}$.

Поскольку при $-1 < y < 1$ ξ_1 распределена равномерно на отрезке от $-\sqrt{1-y^2}$ до $\sqrt{1-y^2}$, и матожидание у такого распределения равно 0, то условное матожидание $\mathrm{E}(\xi_1|\xi_2 = y) = 0$.

Задача 2.

Пусть $R = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, тогда из равномерности распределения (ξ_1, ξ_2) в единичном круге следует, что $F_R(r) = P(R < r) = \frac{\pi r^2}{\pi \cdot 1^2} = r^2 \Rightarrow p_R(r) = (r^2)' = 2r$ для $0 < r < 1$, ведь событие $\{R < r\}$ отвечает кругу с радиусом r. По формуле полной вероятности, $F_\eta(x) = P(\eta < x) = \int\limits_0^1 P(\eta < x|R = r)p_R(r)dr = \int\limits_0^1 2r(1 - e^{-rx})dr$ для $x > 0$. Этот интеграл берется с помощью интегирования по частям (или вольфрама) и равен $1 - \frac{2(1 - e^{-x}(x+1))}{x^2}$.

Задача 7.

Найдем распределение η: по независимости β_1 и β_2 получаем, что $P(\eta > x) = P(\beta_1 > x, \beta_2 > x) = P(\beta_1 > x) \cdot P(\beta_2 > x) = e^{-x} \cdot e^{-x} = e^{-2x}$, следовательно, $\eta \sim EXP(2)$.

Матожидание случайной величины, распределенной равномерно от 0 до a равно $\frac{a}{2}$, а дисперсия — $\frac{a^2}{12}$ следовательно, условное матожидание ξ равно $\mathrm{E}(\xi|\eta) = \frac{\eta}{2}$, а условная дисперсия — $\mathrm{D}(\xi|\eta) = \frac{\eta^2}{12}$. По основному дисперсионному тождеству, $\mathrm{D}\,\xi =$

$$\mathrm{E}(\mathrm{D}(\xi|\eta)) + \mathrm{D}(\mathrm{E}(\xi|\eta)) \;=\; \mathrm{E}\,\frac{\eta^2}{12} + \mathrm{D}\,\frac{\eta}{2} \;=\; \frac{1}{12}\,\mathrm{E}\,\eta^2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{D}\,\eta \;=\; \frac{1}{12}(\mathrm{D}\,\eta + (\mathrm{E}\,\eta)^2) + \frac{1}{4}\,\mathrm{D}\,\eta \;=\; \frac{1}{12}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{48}$$