Esercizi finali

1) Sia T_1 la teoria dei tipi definita del tipo singoletto con le regole strutturali, definite all'interno di *"Esame di Teoria dei Tipi"*, incluse quelle di sostituzione e indebolimento. Allora stabilire se i seguenti termini sono tipabili come termini del tipo singoletto, secondo T_1 e quali sono uguali definizionalmente.

- $\mathrm{El}_{N1}(*, *)$
- $\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x}, *)$
- $\mathrm{El}_{N1}(*, \mathrm{y})$
- $\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$
- $\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{El}_{N1}(*, \mathrm{y}), \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x}, *))$

Soluzione

1

$$\text{E-S}\ \dfrac{\text{I-S}\ \dfrac{[\,]\ \text{cont}}{* \in \mathrm{N1}[\,]} \qquad \text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\,]\ \text{cont}}{\mathrm{N}_1\ \text{type}[\,]}\quad (\mathrm{z} \in \mathrm{N}_1) \notin [\,]}{\mathrm{z} \in \mathrm{N}_1\ \text{cont}}}{\mathrm{N}_1\ \text{type}[\mathrm{z} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \text{I-S}\ \dfrac{[\,]\ \text{cont}}{* \in \mathrm{N}_1[\,]}}{\mathrm{El}_{N1}(*, *) \in N_1[\,]}$$

Applicando la β N_1-*red* allora $\mathrm{El}_{N1}(*, *) \rightarrow_1 *$
$\mathrm{El}_{N1}(*, *)$ è uguale definizionalmente.

2

$$\text{E-S}\ \dfrac{\text{var}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\,]\ \text{cont}}{\mathrm{N}_1\ \text{type}[\,]}\quad (\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1) \notin [\,]}{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1\ \text{cont}}}{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\,]\ \text{cont}}{\mathrm{N}_1\ \text{type}\ [\,]}\quad (\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1) \notin [\,]}{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1\ \text{cont}}}{\mathrm{N}_1\ \text{type}[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]}\quad (\mathrm{z} \in \mathrm{N}_1) \notin \mathrm{x} \in \mathrm{N}_1}{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1,\ \mathrm{z} \in \mathrm{N}_1\ \text{cont}}}{\mathrm{N}_1\ \text{type}[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1,\ \mathrm{z} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \text{I-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\,]\ \text{cont}}{\mathrm{N}_1\ \text{type}[\,]}\quad (\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1) \notin [\,]}{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1\ \text{cont}}}{* \in \mathrm{N}_1[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]}}{\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x}, *) \in \mathrm{N}_1[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]}$$

Applicando la β N_1-*red* allora $\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x}, *) \nrightarrow_1$
$\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x}, *)$ non è uguale definizionalmente.

3

$$\text{E-S}\ \dfrac{\text{I-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\,]\ \text{cont}}{\mathrm{N}_1\ \text{type}[\,]}\quad (\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1) \notin [\,]}{\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1\ \text{cont}}}{* \in \mathrm{N}_1[\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\,]\ \text{cont}}{\mathrm{N}_1\ \text{type}[\,]}\quad (\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1) \notin [\,]}{\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1\ \text{cont}}}{\mathrm{N}_1\ \text{type}[\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1]}\quad (\mathrm{z} \in \mathrm{N}_1) \notin \mathrm{y} \in \mathrm{N}_1}{\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1,\ \mathrm{z} \in \mathrm{N}_1\ \text{cont}}}{\mathrm{N}_1\ \text{type}[\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1,\ \mathrm{z} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \text{var}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\,]\ \text{cont}}{\mathrm{N}_1\ \text{type}[\,]}\quad (\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1) \notin [\,]}{\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1\ \text{cont}}}{\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1[\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1]}}{\mathrm{El}_{N1}(*, \mathrm{y}) \in \mathrm{N}_1[\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1]}$$

Applicando la β N_1-*red* allora $\mathrm{El}_{N1}(*, y) \to_1$ y
$\mathrm{El}_{N1}(*, y)$ è uguale definizionalmente.

4

$$\text{E-S}\ \dfrac{\text{var}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{N_1\ \mathrm{type}\ [\ ]}}{x \in N_1\ \mathrm{cont}}\ (x \in N_1) \notin [\ ]}{N_1\ \mathrm{type}[x \in N_1]}}{x \in N_1,\ y \in N_1\ \mathrm{cont}}\ \begin{matrix}(y \in N_1)\\ \notin x \in N_1\end{matrix}}{x \in N_1[x \in N_1,\ y \in N_1]} \qquad \text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{N_1\ \mathrm{type}[\ ]}}{x \in N_1\ \mathrm{cont}}\ (x \in N_1) \notin [\ ]}{N_1\ \mathrm{type}[x \in N_1]}}{x \in N_1,\ y \in N_1\ \mathrm{cont}}\ \begin{matrix}(y \in N_1)\\ \notin (x \in N_1)\end{matrix}}{N_1\ \mathrm{type}[x \in N_1,\ y \in N_1]}}{x \in N_1,\ y \in N_1,\ z \in N_1\ \mathrm{cont}}\ \begin{matrix}(z \in N_1) \notin\\ (x \in N_1,\ y \in N_1)\end{matrix}}{N_1\ \mathrm{type}[x \in N_1,\ y \in N_1,\ z \in N_1]} \qquad \text{var}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{N_1\ \mathrm{type}\ [\ ]}}{x \in N_1\ \mathrm{cont}}\ (x \in N_1) \notin [\ ]}{N_1\ \mathrm{type}[x \in N_1]}}{x \in N_1,\ y \in N_1\ \mathrm{cont}}\ \begin{matrix}(y \in N_1)\\ \notin x \in N_1\end{matrix}}{y \in N_1[x \in N_1,\ y \in N_1]}}{\mathrm{El}_{N1}(x, y) \in N_1[x \in N_1,\ y \in N_1]}$$

Applicando la β N_1-*red* allora $\mathrm{El}_{N1}(x, y) \not\twoheadrightarrow_1$
$\mathrm{El}_{N1}(x, y)$ non è uguale definizionalmente.

5

$$\text{E-S}\ \dfrac{\dfrac{\mathbf{5}_A}{\mathrm{El}_{N1}(*, y) \in N_1[y \in N_1,\ x \in N_1]} \qquad \dfrac{\mathbf{5}_B}{N_1\ \mathrm{type}[y \in N_1,\ x \in N_1,\ z \in N_1]} \qquad \dfrac{\mathbf{5}_C}{\mathrm{El}_{N1}(x, *) \in N_1[y \in N_1,\ x \in N_1]}}{\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{El}_{N1}(*, y),\ \mathrm{El}_{N1}(x, *)) \in N_1[y \in N_1,\ x \in N_1]}$$

5_A

$$\text{ind-te}\ \dfrac{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathrm{El}_{N1}(*, y) \in N_1[y \in N_1]} \qquad \text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{N_1\ \mathrm{type}[\ ]}}{y \in N_1\ \mathrm{cont}}\ (y \in N_1) \notin [\ ]}{N_1\ \mathrm{type}[y \in N_1]}}{y \in N_1,\ x \in N_1\ \mathrm{cont}}\ (x \in N_1) \notin y \in N_1}{\mathrm{El}_{N1}(*, y) \in N_1[y \in N_1,\ x \in N_1]}$$

5_B

$$\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{N_1\ \mathrm{type}[\ ]}}{y \in N_1\ \mathrm{cont}}\ (y \in N_1) \notin [\ ]}{N_1\ \mathrm{type}[y \in N_1]}}{y \in N_1,\ x \in N_1\ \mathrm{cont}}\ (x \in N_1) \notin y \in N_1}{N_1\ \mathrm{type}[y \in N_1,\ x \in N_1]}}{y \in N_1,\ x \in N_1,\ z \in N_1\ \mathrm{cont}}\ (z \in N_1) \notin (y \in N_1,\ x \in N_1)}{N_1\ \mathrm{type}[y \in N_1,\ x \in N_1,\ z \in N_1]}$$

$\mathbf{5}_C$

$$\text{ex-te}\ \dfrac{\text{ind-te}\ \dfrac{\dfrac{\mathbf{2}}{\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x},\ *) \in \mathrm{N}_1[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}\ [\ ]}}{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\ (\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1) \notin [\ ]}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]}}{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1,\ \mathrm{y} \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\ (\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1) \notin \mathrm{x} \in \mathrm{N}_1}{\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x},\ *) \in \mathrm{N}_1[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1,\ \mathrm{y} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}\ [\ ]}}{\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{count}}\ (\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1) \notin [\ ]}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1]}}{\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1,\ \mathrm{x} \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\ (\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1) \notin \mathrm{y} \in \mathrm{N}_1}{\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x},\ *) \in \mathrm{N}_1[\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1,\ \mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]}$$

Per le premesse $El_{N1}(*,\ y) \in N_1[y \in N_1]$ e $El_{N1}(x,\ *) \in N_1[x \in N_1]$ ho già dimostrato sopra (in 3 e 2) la loro tipabilità per il tipo singoletto.
Applicando la red_I e β N_1-*red* allora $\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{El}_{N1}(*,\ \mathrm{y}),\ \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x},\ *)) \to_1 \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{y},\ \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x},\ *))$.
Più nel dettaglio la riduzione è la seguente

$$\mathrm{red}_I\ \dfrac{\beta\ \mathrm{N}_1\text{-red}\ \dfrac{}{\mathrm{El}_{N1}(*,\ \mathrm{y}) \to_1 \mathrm{y}}}{\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{El}_{N1}(*,\ \mathrm{y}),\ \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x},\ *)) \to_1 \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{y},\ \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x},\ *))}$$

$\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{El}_{N1}(*,\ \mathrm{y}),\ \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x},\ *))$ è uguale definizionalmente.

2) Definire $\mathbf{w + 2 \in Nat[w \in Nat]}$, ove 2 è l'abbreviazione del termine ottenuto applicando $\mathbf{2 \equiv succ(succ(0))}$.

Soluzione

La ricorsione la faccio su w, usando lo schema di ricorsione primitiva, vale che $\mathrm{w} + 2 \equiv \mathrm{El}_{Nat}(\mathrm{w},\ 2,\ (\mathrm{x,y}).\mathrm{succ}(\mathrm{y}))$.

$$\text{E-Nat}_{dip}\ \dfrac{\text{F-Nat}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-Nat}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{Nat\ type}[\ ]}}{\mathrm{w} \in \mathrm{Nat\ cont}}\ (\mathrm{w} \in \mathrm{Nat}) \notin [\ ]}{\mathrm{Nat\ type}[\mathrm{w} \in \mathrm{Nat}]} \qquad \text{I}_2\text{-Nat}\ \dfrac{\text{I}_2\text{-Nat}\ \dfrac{\text{I}_1\text{-Nat}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{0 \in \mathrm{Nat}[\ ]}}{1 \in \mathrm{Nat}[\ ]}}{2 \in \mathrm{Nat}[\ ]} \qquad \text{I}_2\text{-Nat}_{prog}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-Nat}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{Nat\ type}\ [\ ]}}{\mathrm{x} \in \mathrm{Nat\ cont}}\ (\mathrm{x} \in \mathrm{Nat}) \notin [\ ]}{\mathrm{succ}(\mathrm{y}) \in \mathrm{Nat}[\mathrm{x} \in \mathrm{Nat},\ \mathrm{y} \in \mathrm{Nat}]}}{\mathrm{El}_{Nat}(\mathrm{w},\ 2,\ (\mathrm{x,y}).\mathrm{succ}(\mathrm{y})) \in \mathrm{Nat}[\mathrm{w} \in \mathrm{Nat}]}$$

Dimostrazione di correttezza di $El_{Nat}(w,\ 2,\ (x,y).succ(y)) \in Nat[w \in Nat]$

- $\mathrm{El}_{Nat}(0,\ 2,\ (\mathrm{x,y}).\mathrm{succ}(\mathrm{y})) \to_1 2$ per β_{1Nat}-*red*
- $\mathrm{El}_{Nat}(\mathrm{succ}(\mathrm{m}),\ 2,\ (\mathrm{x,y}).\mathrm{succ}(\mathrm{y})) \to_1 \mathrm{succ}(\mathrm{El}_{Nat}(\mathrm{m},\ 2,\ (\mathrm{x,y}).\mathrm{succ}(\mathrm{y})))$ per β_{2Nat}-*red* $\Rightarrow$ per $\mathrm{m} = 0 \equiv \mathrm{succ}(\mathrm{El}_{Nat}(0,\ 2,\ (\mathrm{x,y}).\mathrm{succ}(\mathrm{y}))) \to_1 \mathrm{succ}(2) \in \mathrm{Nat} = 3$ (dal punto precedente).

4) Si dimostri che esiste un *proof-term* pf del tipo

$$\mathbf{pf \in Id(N_1,x,*)[x \in N_1]}$$

Soluzione

$\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{z,c}) \equiv \mathrm{pf} \equiv \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x,x.id}(*))$
$\mathrm{M(z)} \equiv \mathrm{Id}(\mathrm{N}_1,\mathrm{x},*)$
$\mathrm{c} \in \mathrm{M}(*)[\Gamma] \equiv \mathrm{id}(*) \in \mathrm{Id}(\mathrm{N}_1,*,*)[\ ]$

$$\text{E-S}_{dip}\ \dfrac{\text{F-Id}\ \dfrac{\dfrac{}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \dfrac{}{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \dfrac{}{* \in \mathrm{N}_1[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]}}{\mathrm{Id}(\mathrm{N}_1,\mathrm{x},*)\mathrm{type}[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \text{I-Id}\ \dfrac{\text{I-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{* \in \mathrm{N}_1[\ ]}}{\mathrm{id}(*) \in \mathrm{Id}(\mathrm{N}_1,*,*)[\ ]}}{\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x},\mathrm{x.id}(*)) \in \mathrm{Id}(\mathrm{N}_1,\mathrm{x},*)[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]}$$