Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita
Corso di Laurea Magistrale in Informatica

Esame di Teoria dei Tipi

Teoria dei Tipi
Elaborato scritto - Settembre 2020
Eleonora Signor, 1237581

Indice

Capitolo 1

Regole della teoria dei tipi

Lo scopo della teoria dei tipi è offrire un sistema formale in cui derivare, tramite regole e assiomi, giudizi nella forma:

$$A\ type[\Gamma] \qquad A = B\ type[\Gamma] \qquad a \in A\ [\Gamma] \qquad a = b \in A\ [\Gamma]$$

$$+\ ausiliaria \quad \Gamma\ cont$$

L'ultimo giudizio non è necessario, serve esclusivamente per imparare.
Quando si formula una nuova teoria dei tipi è bene impiegare il minor numero possibile di regole strutturali e di formazione di tipi e termini. Tali regole devono essere rivolte all'ottimizzazione e correttezza della teoria. Alcune di queste, come quelle di indebolimento e sostituzione in §1.1.5, sono irrinunciabili, la cui validità è sempre garantita e utilizzate nella derivazione di ogni teoria.

Se la teoria dei tipi è dipendente si ha bisogno di tutti i giudizi. Invece in una teoria dei tipi non dipendente, come quella dei tipi semplici, il giudizio $A = B\ type[\Gamma]$ può venire omesso.

1.1 Regole strutturali

Assioma unico: [ ] cont

Nel calcolo dei sequenti, in logica classica, le derivazioni di giudizio, valide in una teoria dei tipi con solo le regole singoletto, diventano derivazioni di sequenti nella forma $\Gamma \dashv$ A e unico assioma $\varphi \dashv \varphi$.

Di seguito illustro le principali regole di contesto comuni a tutte le teorie dei tipi.

1.1.1 Regole di formazione dei contesti

$$[\ ]\ \mathrm{cont} \qquad \mathrm{dove}\ [\ ] = \varnothing$$

$$\text{F-C)}\ \frac{\mathrm{A\ type}[\Gamma]}{\Gamma,\ \mathrm{x} \in \mathrm{A}}\ \mathrm{x} \in \mathrm{A} \notin \Gamma$$

1.1.2 Regole di assunzione delle variabili

$$\text{var-ass)}\ \frac{\Gamma,\ \mathrm{x} \in \mathrm{A},\ \Delta \qquad \text{cont}}{\mathrm{x} \in [\Gamma,\mathrm{x} \in \mathrm{A},\ \Delta]}$$

1.1.3 Regole strutturali addizionali sull'uguaglianza

L'uguaglianza, in una teoria dei tipi, consiste in una relazione di equivalenza sia fra tipi che fra termini. Sono perciò valide le seguenti regole di uguaglianza tra tipi:

$$ref)\ \frac{A\ type[\Gamma]}{A = A\ type[\Gamma]} \qquad sym)\ \frac{A = B\ type[\Gamma]}{B = A\ type[\Gamma]}$$

$$tra)\ \frac{A = B\ type[\Gamma] \qquad B = C\ type[\Gamma]}{A = C\ type[\Gamma]}$$

E allo stesso modo anche le regole di uguaglianza definizonale/computazionale tra termini:

$$ref)\ \frac{a \in A\ [\Gamma]}{a = a \in A\ [\Gamma]} \qquad sym)\ \frac{a = b \in A\ [\Gamma]}{b = a \in A\ [\Gamma]}$$

$$tra)\ \frac{a = b \in A\ [\Gamma] \qquad b = c \in A\ [\Gamma]}{a = c \in A\ [\Gamma]}$$

1.1.4 Regole di conversione dell'uguaglianza per tipi uguali

L'appartenenza si conserva con l'uguaglianza di termini e tipi. Le regole da aggiungere, in una teoria dei tipi, per garantirlo sono:

$$conv)\ \frac{a \in A\ [\Gamma] \quad A = B\ type[\Gamma]}{a \in B\ [\Gamma]}$$

$$conv - eq)\ \frac{a = b \in A\ [\Gamma] \qquad A = B\ type[\Gamma]}{a = b \in B\ [\Gamma]}$$

1.1.5 Regole di indebolimento e di sostituzione

Indebolimento

$$ind - ty)\ \frac{A\ type[\Gamma] \quad \Gamma, \Delta\ cont}{A\ type[\Gamma, \Delta]} \quad ind - ty - eq)\ \frac{A = B\ type[\Gamma] \quad \Gamma, \Delta\ cont}{A = B\ type[\Gamma, \Delta]}$$

$$ind - te)\ \frac{a \in A\ [\Gamma] \quad \Gamma, \Delta\ cont}{a \in A\ [\Gamma, \Delta]} \quad ind - te)\ \frac{a = b \in A\ [\Gamma] \quad \Gamma, \Delta\ cont}{a = b \in A\ [\Gamma, \Delta]}$$

Sostituzione

$$sub - typ)\ \frac{\begin{array}{c} C(x_1, ..., x_n)\ type[\Gamma, x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n(x_1, ..., x_{n-1})] \\ a_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...a_n \in A_n(a_1, ..., a_{n-1})\ [\Gamma] \end{array}}{C(a_1, ..., a_n)\ type[\Gamma]} \tag{1.1}$$

$$sub - eq - typ)\ \frac{\begin{array}{c} C(x_1, ..., x_n)\ type[\Gamma, x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n(x_1, ..., x_{n-1})] \\ a_1 = b_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...a_n = b_n \in A_n(a_1, ..., a_{n-1})\ [\Gamma] \end{array}}{C(a_1, ..., a_n) = C(b_1, ..., b_n)\ type[\Gamma]} \tag{1.2}$$

$$\begin{array}{c} C(x_1,...,x_n) = D(x_1,...,x_n)\ type[\Gamma, x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n(x_1,...,x_{n-1})] \\ sub-Eqtyp)\ \dfrac{a_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...a_n \in A_n(a_1,...,a_{n-1})\ [\Gamma]}{C(a_1,...,a_n) = D(a_1,...,a_n)\ type[\Gamma]} \end{array} \tag{1.3}$$

$$\begin{array}{c} C(x_1,...,x_n) = D(x_1,...,x_n)\ type[\Gamma, x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n(x_1,...,x_{n-1})] \\ sub-eq-Eqtyp)\ \dfrac{a_1 = b_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...a_n = b_n \in A_n(a_1,...,a_{n-1})\ [\Gamma]}{C(a_1,...,a_n) = D(a_1,...,a_n)\ type[\Gamma]} \end{array} \tag{1.4}$$

$$\begin{array}{c} c(x_1,...,x_n) \in C(x_1,...,x_n)\ [\Gamma, x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n(x_1,...,x_{n-1})] \\ sub-ter)\ \dfrac{a_1 in A_1\ type[\Gamma]\ ...a_n \in A_n(a_1,...,a_{n-1})\ [\Gamma]}{c(a_1,...,a_n) \in C(a_1,...,a_n)\ type[\Gamma]} \end{array} \tag{1.5}$$

$$\begin{array}{c} c(x_1,...,x_n) = d(x_1,...,x_n) \in C(x_1,...,x_n)\ [\Gamma, x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n(x_1,...,x_{n-1})] \\ sub-eqter)\ \dfrac{a_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...a_n \in A_n(a_1,...,a_{n-1})\ [\Gamma]}{c(a_1,...,a_n) = d(a_1,...,a_n) \in C(a_1,...,a_n)\ [\Gamma]} \end{array} \tag{1.6}$$

$$\begin{array}{c} c(x_1,...,x_n) \in C(x_1,...,x_n)\ [\Gamma, x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n(x_1,...,x_{n-1})] \\ sub-eq-ter)\ \dfrac{a_1 = b_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...a_n = b_n \in A_n(a_1,...,a_{n-1})\ [\Gamma]}{c(a_1,...,a_n) = c(b_1,...,b_n) \in C(a_1,...,a_n)\ [\Gamma]} \end{array} \tag{1.7}$$

$$\begin{array}{c} c(x_1,...,x_n) = d(x_1,...,x_n) \in C(x_1,...,x_n)\ [\Gamma, x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n(x_1,...,x_{n-1})] \\ sub-eq-eqter)\ \dfrac{a_1 = b_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...a_n = b_n \in A_n(a_1,...,a_{n-1})\ type[\Gamma]}{c(a_1,...,a_n) = d(b_1,...,b_n) \in C(a_1,...,a_n)\ [\Gamma]} \end{array} \tag{1.8}$$

1.1.6 Regole proprie e derivabili

In una teoria formale ci sono due tipi di regole:

- **regole proprie del calcolo**, come lo sono le regole strutturali e quelle del singoletto;
- **regole derivabili**, come le regole di sostituzione, utili per abbreviare le derivazioni.

Una regola r $\frac{J_1,...,J_n}{J}$ è ammissibile in un calcolo t sse i giudizi derivabili in $t+r$ sono gli stessi dei giudizi derivabili in t. Ciò comporta che l'aggiunta di una regola rt non cambia i giudizi che ne possono derivare.
Quando un assioma è ammissibili e derivabile questo coincide con un giudizio derivabile.

1.1.7 Nozione di contesto telescopico

Un giudizio, in teoria dei tipi dipendenti si esprime nella forma

$$A(x_1, ..., x_n)[x_1 \in B_1, ..., x_n \in B_n]$$

e prende il nome di **contesto telescopico**. Questi presenta una dipendenza continua, esemplificata nel seguente giudizio

$$A(x_1, x_2, x_3)\ type[x \in C_1, x_2 \in C(x_1), x_3 \in C(x_1 x_2)..)$$

Inoltre si parla di contesti rigidi, ovvero senza possibilità di scambio. Come appare dall'esempio sotto.
$[x \in Nat, y \in Nat, z \in Mat(x, y)]$ cont $\Rightarrow$ **è derivabile**
$[y \in Nat, x \in Nat, z \in Mat(x, y)]$ cont $\Rightarrow$ **è derivabile**
$[y \in Nat, z \in Mat(x, y), x \in Nat]$ $\Rightarrow$ **non è un contesto**.

Percui non esiste lo scambio arbitrario, si deve porre attenzione alle dipendenza delle assunzioni, che provoca una sostituzione rigida.

1.1.8 Esempi di applicazione

Attenzione all'ordine di sostituzione si deve partire sempre da quello con meno dipendenze.

$$\frac{\mathrm{c} \in [\mathrm{C}, \Gamma] \qquad \mathrm{b} \in [\mathrm{B(c)}, \Gamma] \qquad \mathrm{A(x,y)\ type}[\mathrm{x} \in \mathrm{C},\ \mathrm{y} \in \mathrm{B(x)}]}{\mathrm{A(c,b)\ type}[\Gamma]}$$

$$\frac{\mathrm{c} \in [\mathrm{C},\Gamma] \qquad \mathrm{b} \in [\mathrm{B(c)},\Gamma] \qquad \mathrm{A(x,y)\ type}[\mathrm{x} \in \mathrm{C},\ \mathrm{y} \in \mathrm{B(x)}]}{\mathrm{a(c,b)} \in \mathrm{A(c,b)}\ [\Gamma]}$$

Se si ha un tipo puo' venire usato il giudizio di uguaglianza tra termini e la sostituzione.

$$\frac{\mathrm{A(x)\ type}[\Gamma,\ \mathrm{x} \in \mathrm{C}] \qquad \mathrm{c} = \mathrm{e} \in \mathrm{C}[\Gamma]}{\mathrm{A(c)} = \mathrm{A(e)\ type}[\Gamma]}$$

È dunque fondamentale il concetto di uguaglianza fra tipi. Se considero che ci sia un elemento

$$\frac{\mathrm{a(x)} \in \mathrm{A(x)}\ [\Gamma,\ \mathrm{x} \in \mathrm{C}] \qquad \mathrm{c} = \mathrm{e} \in \mathrm{C}[\Gamma]}{\mathrm{a(c)} = \mathrm{a(e)} \in \mathrm{A(c)}\ [\Gamma]}$$

Per poter affermare che A(e) = A(c) devo poterlo dedurre. Per farlo mi sono indispensabili le **regole di conversione dell'uguaglianza del tipaggio (§1.1.9)**.

1.1.9 Regole di tipaggio

Regole di conversione

$$\frac{c \in C[\Gamma] \qquad C = D\ type[\Gamma]}{C \in D\ [\Gamma]}$$

Se due tipi sono uguali allora hanno gli stessi termini: $C = D \Rightarrow (c \in C \Leftrightarrow c \in D)$. L'uguaglianza fra tipi è per questo simmetrica.
Tuttavia non sempre l'unicità del tipaggio di un termine (il $\Leftrightarrow$) è garantito per ogni teoria. Nei casi trattati dal corso sì, in quanto verrà inteso che $C = D\ type[\Gamma]$ sse due tipi hanno gli stessi elementi (come già accade in *set theory*), ma può non essere sempre vero.

Regole di conversione dell'uguaglianza

$$\frac{c = d \in C[\Gamma] \qquad C = D\ type[\Gamma]}{c = d \in D\ [\Gamma]}$$

Questa regola permette di convertire le uguaglianze nel tipaggio di un termine.

1.2 Il tipo singoletto

Il tipo singoletto risulta essere paradigmatico per gli altri tipi. Per definirlo impiegherò i giudizi nella forma $A\ type[\Gamma]$, $a \in A\ [\Gamma]$ e $a = b \in A\ [\Gamma]$. L'uguaglianza, invece, non verrà coinvolta, in quanto non può essere impiegata per definire un nuovo tipo, è difatti usata solo nelle derivazioni.

Innanzitutto come già visto in §1.1.1 ogni derivazione parte sempre dal contesto vuoto ($\varnothing$).

$$\text{F-C)}\ \frac{\text{A type}[\Gamma]}{\Gamma,\ \text{x} \in \text{A}}\ \text{x} \in \text{A} \notin \Gamma$$

1.2.1 Regola di formazione

$$\text{F-S)}\ \frac{[\Gamma]\ \text{cont}}{N_1\ \text{type}[\Gamma]}$$

La regola F-S Permette di derivare vari giudizi e di dire che cosa è un tipo.

Con l'impiego solo delle regole *F-C* e *F-S* si possono derivare $[x_1 \in N_1 ...\ x_n \in N_1]$ cont e ottenere, così, contesti di una lista arbitraria di variabili diverse appartenenti a N_1, come si vede dall'esempio seguente.

$$\text{F-C)}\ \cfrac{\text{F-S)}\ \cfrac{\text{F-C)}\ \cfrac{[\ ]\ \text{cont}}{[x_1 \in N_1]\ \text{cont}}\ x_1 \in N_1 \notin \varnothing}{N_1\ \text{type}\ [x_1 \in N_1]}}{[x_1 \in N_1,\ x_2 \in N_1]\ \text{cont}}\ x_2 \in N_1 \notin x_1 \in N_1$$

1.2.2 Regole di Introduzione

$$\text{I-S)}\ \frac{[\Gamma]\ \text{cont}}{* \in N_1\ [\Gamma]\ \text{cont}}$$

Sia N_1 in ogni contesto Γ, partendo da contesto $\varnothing$, la regola I-S permette di formare i termini, per mezzo dell'introduzione di un elemento costante $*$ in N_1.

Un esempio diretto della sua applicazione è

$$\text{I-S)}\ \frac{[\ ]\ \text{cont}}{* \in N_1\ (x_1 \in N_1 ... x_n \in N_1)}$$

1.2.3 Regole di Eliminazione

$$\text{E-S)}\ \frac{\text{t} \in N_1\ [\Gamma] \qquad \text{M(z) type}[\Gamma,\ \text{z} \in N_1] \qquad \text{c} \in \text{M}(*)[\Gamma]}{El_{N1}(\text{t, c}) \in \text{M}(*)[\Gamma]}$$

El trattasi di costruttore di funzioni e $M[t] = M(z)[\frac{z}{t}]$.
La regola di eliminazione si può equivalentemente scrivere in un altro modo

$$\text{E-S)}_{dip}\ \frac{\text{M(z) type}[\Gamma,\ \text{z} \in N_1] \qquad \text{c} \in \text{M}(*)[\Gamma]}{El_{N1}(\text{z, c}) \in \text{M(z)}[\Gamma,\ \text{z} \in N_1]}$$

Le regole *E-S)$_{dip}$ + la regole di sostituzione + F-S + I-S* permettono di verificare la validità di *E-S*.

$$\text{sost)}\ \frac{\text{t} \in N_1[\Gamma] \qquad \text{E-S)}_{dip}\ \dfrac{\text{M(z) type}[\Gamma,\ \text{z} \in N_1] \qquad \text{c} \in \text{M}(*)[\Gamma]}{El_{N1}(\text{z, c}) \in \text{M(z)}[\Gamma]}}{El_{N1}(\text{t, c}) \in \text{M(t)}[\Gamma]}$$

Inoltre vale anche il viceversa, da *E-S* si riesce a ottenere *E-S$_{dip}$*.

1.2.4 Regole di Conversione

$$\text{C-S)}\ \frac{\text{M(z) type}[\Gamma,\ \text{z} \in N_1] \qquad \text{c} \in \text{M}(*)[\Gamma]}{El_{N1}(*,\ \text{c}) = \text{c} \in \text{M}(*)[\Gamma]}$$

La conversione rende possibile l'applicazione della regola di eliminazione introducendo delle uguaglianze.

Le regole *(S), (I-S), (E-S)* e *(C-S)* hanno una spiegazione computazionale, e riguardano la compatibilità tra tipi, ma non da caratterizzare il tipo dei tipi.
Inoltre il tipo singoletto non è dipendente.

1.2.5 Osservazioni sul tipo singoletto

L'eliminatore $\mathrm{El}_{N1}(z, c)$ rappresenta una funzione definita per ricorsione su N_1, difatti in *C-S* si ha che $\mathrm{El}_{N1}(z, c)[\frac{z}{*}] = \mathrm{El}_{N1}(*, c)$.
Supposto che se $* \in N_1[\Gamma]$ in *E-S*, allora per la singola conversione vale che $\mathrm{El}_{N1} = c \in M(*)$. Dunque $\mathrm{El}_{N1}(z, c)$ rappresenta un programma funzionale per ricorsione. Questi è definito su N_1, a partire da $c \in M(*)$, perciò $\mathrm{El}_{N1}(*, c) = c$.
La regola di eliminazione permette di definire un programma funzionale da N_1 a M(z) esclusivamente con $c \in M(*)$, ovvero definendo $*$ come **elemento canonico**. Inoltre non svolge solo il compito di ricorsione, ma anche d'nduzione.

In

$$\frac{t \in N_1[\Gamma]}{t = * \in N_1[\Gamma]}$$

risulta vera l'uguaglianza definizionale?
No, non è vera. La regola di eliminazione consente di dare un valore al termine canonico, permettendo così di attribuire un valore a tutti i possibili termini del singoletto. Ma in generale questo non vale all'interno della teoria. Difatti l'uguaglianza definizionale è diversa da quella matematica e va intesa come computazionale e non proposizionale (come definito in §**??**).

1.3 Sanitary checks rules

Le *Sanitary checks* sono regole strutturali utili per abbreviare le derivazioni. Queste sono derivabili solo se la teoria dei tipi è corretta.

Assumento *T*, come una teoria dei tipi di riferimento, le *sanitary checks* sono le seguenti:

$$\frac{[\Gamma, \Delta]\ \mathrm{cont}}{\Gamma\ \mathrm{cont}}$$

Se $[\Gamma, \Delta]$ cont è derivabile in T allora anche $[\Gamma]$ cont è derivabile in T.

$$\frac{J_1,\ldots,J_n}{J}$$

Se J_i con i = 1,...,n in T sono derivabili allora anche J è derivabile in T.

$$\frac{A\ \mathrm{type}\ [\Gamma]}{\Gamma\ \mathrm{cont}}$$

Se A type $[\Gamma]$ è derivabile in T allora anche Γ cont è derivabile in T.

$$\frac{A = B\ \mathrm{type}\ [\Gamma]}{A\ \mathrm{type}[\Gamma]} \quad \frac{A = B\ \mathrm{type}\ [\Gamma]}{B\ \mathrm{type}[\Gamma]}$$

Se A = B type $[\Gamma]$ è derivabile in T allora anche A type$[\Gamma]$ e B type$[\Gamma]$ sono derivabili in T.

$$\frac{\mathrm{a} \in \mathrm{A}[\Gamma]}{\mathrm{A}\ \mathrm{type}[\Gamma]}$$

Se a $\in$ A[Γ] è derivabile in T allora anche A type[Γ] è derivabile in T.

$$\frac{\mathrm{a} = \mathrm{b} \in \mathrm{A}[\Gamma]}{\mathrm{a} \in \mathrm{A}[\Gamma]} \quad \frac{\mathrm{a} = \mathrm{b} \in \mathrm{A}[\Gamma]}{\mathrm{b} \in \mathrm{A}[\Gamma]}$$

Se a = b $\in$ A[Γ] è derivabile in T allora anche a $\in$ A[Γ] e b $\in$ A[Γ] sono derivabili in T.

1.4 Schema generale

Di seguito illustro uno schema generale, valido per ogni teoria dei tipi, di produzione di regole definenti un tipo, i suoi termini e l'uguaglianza.

1. **Regole di formazione** Identificate con il preambolo F-T, con T teoria dei tipi in esame e t' elemento canonico.
   Tali regole sono del tipo k e rispettano la forma $\frac{[\Gamma]\ \mathrm{cont}}{T\ \mathrm{type}[\Gamma]}$

2. **Regole di introduzione** identificate con il preambolo I-T, con T teoria dei tipi in esame e t' elemento canonico.
   Tali regole consistono nella forma introduttiva degli elementi canonici di T e rispettono la forma $\frac{[\Gamma]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{t'} \in T[\Gamma]}$

3. **Regole di eliminazione** identificate con il preambolo E-T con T teoria dei tipi in esame e t' elemento canonico.
   Tali regole sono definenti E_k, a partire dagli elementi di k a valori in un tipo M(z) type[Γ, z $\in$k]. L'ipotesi valida è che siano dati degli elementi in M(z) sui valori canonici di k. Tali regole sono del tipo k e rispettano la forma $\frac{\mathrm{t} \in T[\Gamma] \qquad \mathrm{M(z)\ type}[\Gamma, \mathrm{z} \in T] \qquad \mathrm{c} \in \mathrm{M(t')}[\Gamma]}{El_T(\mathrm{t}, \mathrm{c}) \in \mathrm{M(t)}[\Gamma]}$

4. **Regole di conversione** identificate con il preambolo C-T, con T teoria dei tipi in esame e t' elemento canonico.
   , che stabilscono che gli eliminatori in (3) sono stabiliti per ricorsione a partire dalle ipotesi. Tali regole sono del tipo k e rispettano la forma $\frac{\mathrm{M(z)\ type}[\Gamma, \mathrm{z} \in T] \qquad \mathrm{c} \in \mathrm{M(t')}[\Gamma]}{\mathrm{El}_T(\mathrm{t'}, \mathrm{c}) = \mathrm{c} \in \mathrm{M(t')}[\Gamma]}$

5. **Regole di uguaglianza** identificate con il preambolo eq-E-T, con T teoria dei tipi in esame e t' elemento canonico. Tali regole stabiliscono che i costruttori di k in (2) e (3) permettono l'uguaglianza definizionale dei termini da cui dipendono. Tali regole sono del tipo k e rispettano la forma $\frac{\mathrm{t} = \mathrm{s} \in \mathrm{N}_1[\Gamma] \qquad \mathrm{M(z)\ type}[\Gamma, \mathrm{z} \in \mathrm{N}_1] \qquad \mathrm{c} = \mathrm{d} \in \mathrm{M(t')}[\Gamma]}{\mathrm{El}_T(\mathrm{t'}, \mathrm{c}) = \mathrm{c} \in \mathrm{M(t')}[\Gamma]}$

Le regole (5) sono implicite in T, ma non ovvie dal punto di vista computazionale.

1.5 Uguaglianza definizionale

Definizione: se P_1 e P_2 programmi

$P_1,\ P_2\colon\ Nat^m \to Nat$ *allora* $P_1 = P_2$ *sse* $\forall\ n_1 ... n_m$ *e* $P_1(n_1...n_m) = P_2(n_1...n_m)$ non è decidibile.

Ovvero le funzioni ricorsive per P_1 e P_2 non sono decidibili. A seguito di ciò non esiste un algoritmo in grado di decidere se due programmi P_1 e P_2 sono estensionalmente (proposizionalemente) uguali o meno.

Risulta però vero il concetto di **ugualianza definizionale**/computazionale (intensionale). Dati $a \in A[\Gamma]$ e $b \in A[\Gamma]$ derivabili, nella nostra teoria T di *Martin-Löf*, esiste un algoritmo H $(a \in A[\Gamma], b \in A[\Gamma]) = \begin{cases} \textbf{sì} \text{ sse } a = b \in A[\Gamma] \text{ è derivabile in } T \\ \textbf{no} \text{ sse } a = b \in A[\Gamma] \text{ non ha derivazione in } T \end{cases}$

Il giudizio $a = b \in A[\Gamma]$ è decidibile, anche con J giuduzio, in teoria dei tipi di *Martin-Löf*, derivabile. Percui con H si scrive: Giudizi di $T \to \{0,1\}$

$H[J] = \begin{cases} \mathbf{1} \text{ sse } J \text{ è derivabile in } T \\ \mathbf{0} \text{ sse } J \text{ non è derivabile in } T \end{cases}$

H lavora come un *proof assistant* (esempio *COQ*).

Definzione: i termini *untyped* sono

$$t = x \mid * \mid El_N 1(t_1,\ t_2)$$

Definizione:

$$\to_1\ \subseteq \text{term x term}$$

$t_1 \to_1 \to\ \equiv t_1$ si riduce in un passo di computazione a t_2. Ecco che esiste una relazione che computa t_1 con t_2.
La relazione viene definita all'interno dei termini con l'uso delle seguenti regole:

- β-rid) $El_{N1}(*,\ t) \to_1 t$
- $red_I)\ \dfrac{t_1 \to t_2}{El_{N1}(t_1,\ c) \to_1 El_{N1}(t_2,\ c)}$ $red_{II})\ \dfrac{c_1 \to c_2}{El_{N1}(t,\ c_1) \to_1 El_{N1}(t,\ c_2)}$
- red_I e red_{II} possono venire simultate da un'unica regola $\dfrac{t_1 \to_1 t_2 \qquad c_1 \to_1 c_2}{El_{N1}(t_1,\ c_1) \to_1 El_{N1}(t_2,\ c_2)}$

β-rid risulta valida per *C-S*, le regole di riduzione red_I e red_{II} per *eq-E-S*.

Definzione:**Teoria di Validità**
Dati $t \in A[\Gamma]$ e $s \in A[\Gamma]$ in T_1 allora $\to_1 s \Rightarrow t = s \in A[\Gamma]$ derivabile in T.

Definizione: t termine *untyped* è in forma normale (in NF) sse non esiste termine s tale che $t \to_1 s$.
Le forme normali sono i valori assumibili dai programmi.

termini	termini in forma canonica	termini non in forma canonica o introduttiva
termini in NF	$*$	x, El_{N1}(x, $*$)
termini non in NF	No per N_1	El_{N1}($*$, x)

Tabella 1.1: Termini a $\rightarrow_1$ di N_1.

I termini non in forma canonica derivano dalle regole di introduzione; invece quelli non in forma canonica vengono introdotte dall'eliminatore.

L'uguaglianza definizionale ha come scopo la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva delle derivazioni.

In N_1 sono vere le seguenti regole di β-red, utili per provare quali termini sono uguali definizionalmente:

- $El_{N1}(*, *) \rightarrow_1 *$
- $El_{N1}(*, x) \rightarrow_1 x$

Per ogni teoria T $\rightarrow_1$ non è deterministica.

Definizione **Riducibilità**
Dati i termini t e s allora **t** ***Red***$_{NF}$ **s** sse s è in NF ed esistono $h_1 ... h_n$ (n>=1) tale che $h_1 \equiv$ t, $h_n \equiv$ s e se n>1 $h_i \rightarrow h_{i+1}$ per i = 1 a n-1.

$$\textbf{t}\ \textbf{\textit{Rid}}_{NF}\ \textbf{s} = \begin{cases} \text{o t} \equiv \text{s e t è in NF} \\ \text{esiste n>1, esistono } h_1 ... h_n \text{ termini tale che t} \equiv h_1 \rightarrow_1 h_2 ... h_n \end{cases}$$

Definizione **Teorema di Confluenza**$\rightarrow_1$ per T computabile
Dato t (termine) e s_1 e s_2 (in NF) tale che **t** ***Red***$_{NF}$ $\mathbf{s_1}$ e **t** ***Red***$_{NF}$ $\mathbf{s_2}$ allora $s_1 \equiv s_2$ (coincide a meno di rinomina di variabile vincolante).
Quando t si riduce s_1 e in s_2 c'e' l'unicità della forma normale.

Definizione **Teorema della forma normale (debole)**
Dato t termine della grammatica esiste s termine in NF tale che **t** ***Red***$_{NF}$ **s**. Allora esistono t $\equiv h_1 \rightarrow_1 ... \rightarrow_1 h_n$ con n>1 se t non è già in NF; oppure t $\equiv$ s se t è già in NF.
Questo significa che è sempre possibile rendere un programma convergente. Ma si può dire di più $\nexists$ programmi che divergono.

Definizione **Teorema della forma normale (forte)**
Per ogni termine t, l'albero dei cammini di riduzione di t è ben formato (ovvero $\nexists$ un cammino di riduzioni $\rightarrow_1$ infinito).
Dato t $\in$ A[Γ] derivabile in T

$$\text{NF}(t_1) \equiv \begin{cases} \textbf{t} \text{ se t è in NF} \\ \textbf{s} \text{ se } \textbf{\textit{t}}\ \textbf{\textit{Red}}_{NF}\ \textbf{\textit{s}} \end{cases}$$

Dunque se t non è in NF per il teorema normale comunque esiste una riduzione in NF.

Dati a $\in$ A[Γ] e b $\in$ A[Γ] giudizi derivabili in T_i allora a = b $\in$ A[Γ] sse NF(a) $\equiv$ NF(b) sse

1. a e b sono in NF e quindi a $\equiv$ b
2. a non in NF, b in NF e **a *Red*$_{NF}$ b**
3. a in NF, b non in NF e **b *Red*$_{NF}$ a**
4. nè a nè b sono in NF, allora esiste s in NF tale che **a *Red*$_{NF}$ s** e **b *Red*$_{NF}$ s**

Dai punti elencanti sopra trova validità la relazione
a *Red*$_{NF}$ NF(a) allora a = NF(a) $\in$ A[Γ] è derivabile (la forma normale è uguale al termine stesso).

1.6 Esercizi

1.6.1 Tipo singoletto

1 Data

$$\text{E-N}_{1prog})\ \frac{\mathrm{M(w)\ type\ [\Gamma,\ w \in N_1]} \qquad \mathrm{d \in M(*)\ type[\Gamma]}}{\mathrm{El}_{N1}\mathrm{(w,\ d) \in M(w)\ type[\Gamma,\ w \in N_1]}}$$

dimostrare che in T_1 la regola *E-N*$_1$*prog* è derivabile. Al fine di ciò basta mostrare che se i giudizi premessa sono derivabili, allora lo è anche il giudizio di conclusione.

Soluzione

Per una maggiore comprensione delle derivazioni, ho ritenuto opportuno, ove necessario, spezzare l'albero in più parti.

$$\text{E-S}\ \frac{\text{var}\ \dfrac{\text{s-checks}\ \dfrac{\dfrac{}{\mathrm{M(w)\ type[\Gamma,\ w \in N_1]}}}{\mathrm{[\Gamma,\ w \in N_1]\ cont}}}{\mathrm{w \in N_1[\Gamma,\ w \in N_1]}} \qquad \dfrac{}{\mathrm{M(z)\ type[\Gamma,\ z \in N_1,\ w \in N_1]}} \qquad \dfrac{}{\mathrm{d \in M(*)[\Gamma,\ w \in N_1]}}}{\mathrm{El}_{N1}\mathrm{(w,\ d) \in M(w)[\Gamma,\ w \in N_1]}}$$

$$\text{sub-typ}\ \frac{\text{ind-ty}\ \dfrac{\dfrac{}{\mathrm{M(w)\ type[\Gamma,\ w \in N_1]}} \qquad \text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{s-checks}\ \dfrac{\dfrac{}{\mathrm{M(w)\ type[\Gamma,\ w \in N_1]}}}{\mathrm{[\Gamma,\ w \in N_1]\ cont}}}{\mathrm{N_1\ type[\Gamma,\ w \in N_1]}}}{\mathrm{[\Gamma,\ z \in N_1,\ w \in} N_1\mathrm{]\ cont}}\ \mathrm{(z \in N_1) \notin \Gamma}}{\mathrm{M(w)\ type[\Gamma,\ z \in N_1,\ w \in} N_1\mathrm{]}} \qquad \text{var}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{s-checks}\ \dfrac{\dfrac{}{\mathrm{M(w)\ type[\Gamma,\ w \in N_1]}}}{\mathrm{[\Gamma,\ w \in N_1]\ cont}}}{\mathrm{N_1\ type\ [\Gamma,\ w \in N_1]}}}{\mathrm{[\Gamma,\ z \in N_1,\ w \in N_1]\ cont}}\ \mathrm{(z \in N_1) \notin \Gamma}}{\mathrm{z \in} N_1\mathrm{[\Gamma,\ z \in} N_1\mathrm{,\ w \in N_1]}}}{\mathrm{M(z)\ type[\Gamma,\ z \in N_1,\ w \in N_1]}}$$

Assumo che le premesse di *E-N*$_1$*prog* (*M(w) type [*Γ*,w* $\in$ *N*$_1$*]* e *d* $\in$ *M(*$*$*)[*Γ*]*) siano valide, pèrciò è valido, dalla prova sopra, anche il giudizio di conclusione *El*$_{N1}$*(w, d)* $\in$ *M(w)[*Γ*, w* $\in$ *N*$_1$*]*, di conseguenza derivabile in T_1.

2. Dimostrare che la regola *E-S* è derivabile in una teoria dei tipi T_1, in cui si è rimpiazziata la regola di eliminazione *E-S* con la regola *E-N_1prog*, aggiungendovi le regole di indebolimento, sostituzione e di *sanitary checks*.

$$\text{E-N}_{1prog})\ \frac{\text{M(w) type } [\Gamma,\ \text{w} \in \text{N}_1] \qquad \text{d} \in \text{M}(*)[\Gamma]}{\text{El}_{N1}(\text{w, d}) \in \text{M(w)}[\Gamma,\ \text{w} \in \text{N}_1]}$$

$$\text{E-S})\ \frac{\text{t`} \in \text{N}_1[\sum] \qquad \text{M(w) type } [\Gamma,\ \text{w} \in \text{N}_1] \qquad \text{d`} \in \text{M}(*)[\sum]}{\text{El}_{N1}(\text{t`, d`}) \in \text{M(t`)}[\Gamma]}$$

Soluzione

Idea: parto dalla regola di eliminazione E-S, vi applico la regola di sostituzione sub-typ giungendo così alle premessi di E-N_{1prog}

$$\text{sub-typ}\ \frac{\dfrac{}{\text{t'} \in \text{N}_1[\Gamma]} \qquad \text{E-N}_{1prog}\ \dfrac{\dfrac{}{\text{M(w) type } [\Gamma,\ \text{w} \in \text{N}_1]} \qquad \dfrac{}{\text{d} \in \text{D}(*)[\Gamma]}}{\text{El}_{N1}(\text{w, d'}) \in \text{M(w)}[\Gamma,\ \text{w} \in \text{N}_1]}}{\text{El}_{N1}(\text{t', d'}) \in \text{M(t')}[\Gamma]}$$

Assumo che siano valide per costruzione le premesse di *E-N_{1prog}* (come dimostro nell'esercizio 2) e di *E-S*.

3 Costruire l'albero dei cammini di passi di riduzione possibili fino a un termine in NF, ovvero non ulteriormente riducibile rispetto alla relazione del termine $\rightarrow_1$ del termine.

$$\text{El}_{N1}(\text{El}_{N1}(*,*),\ \text{El}_{N1}(*,\text{x}))$$

Soluzione

Idea: uso un albero di derivazione per mostrare ogni passo derivazione di ogni cammino.

β-red:
$El_{N1}(*, *) \rightarrow_1 *$
$El_{N1}(*, x) \rightarrow_1 x$

$$\text{red}_I\ \frac{\beta\ \text{N}_1\ \text{red}\ \dfrac{\beta\ \text{N}_1\ \text{red}\ \dfrac{\text{x}}{\text{El}_{N1}(*,\text{x})} \qquad \dfrac{\text{x}}{\text{El}_{N1}(*,\text{x})}\ \beta\ \text{N}_1\ \text{red}}{\text{El}_{NI}(*,\ \text{El}_{N1}(*,\text{x}))}\ \text{red}_{II} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{x}}{\text{El}_{N1}(*,\text{x})}\ \beta\ \text{N}_1\ \text{red}}{\text{El}_{N1}(\text{El}_{N1}(*,*),\ \text{x})}\ \text{red}_I}{\text{El}_{N1}(\text{El}_{N1}(*,*),\ \text{El}_{N1}(*,\text{x}))}\ \text{red}_{II}$$

4 Sia T_1 la teoria dei tipi definita del tipo singoletto con le regole strutturali, definite in questo capitolo, incluse quelle di sostituzione e indebolimento. Allora stabilire se i seguenti termini sono tipabili come termini del tipo singoletto, secondo T_1 e quali sono uguali definizionalmente.

- $\text{El}_{N1}(*, *)$

- $\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x}, *)$
- $\mathrm{El}_{N1}(*, \mathrm{y})$
- $\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$
- $\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{El}_{N1}(*, \mathrm{y}), \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x}, *))$

Soluzione

1

$$\text{E-S}\ \dfrac{\text{I-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{* \in \mathrm{N1}[\ ]} \qquad \text{I-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\ ]}}{[\mathrm{z} \in \mathrm{N}_1]\ \mathrm{cont}}\ (\mathrm{z} \in \mathrm{N}_1) \notin [\ ]}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\mathrm{z} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \text{I-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{* \in \mathrm{N}_1[\ ]}}{\mathrm{El}_{N1}(*, *) \in N_1[\ ]}$$

Applicando la β N_1*red* allora $\mathrm{El}_{N1}(*, *) \to_1 *$
$\mathrm{El}_{N1}(*, *)$ è uguale definizionalmente.

2

$$\text{E-S}\ \dfrac{\text{I-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\ ]}}{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\ (\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1) \notin [\ ]}{* \in \mathrm{N}_1[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}\ [\ ]}}{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\ (\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1) \notin [\ ]}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]}}{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1,\ \mathrm{z} \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\ (\mathrm{z} \in \mathrm{N}_1) \notin (\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1)}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1,\ \mathrm{z} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \text{var}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\ ]}}{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\ (\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1) \notin [\ ]}{\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]}}{\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x}, *) \in \mathrm{N}_1[\mathrm{x} \in \mathrm{N}_1]}$$

Applicando la β N_1*red* allora $\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x}, *) \not\to_1$
$\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x}, *)$ non è uguale definizionalmente.

3

$$\text{E-S}\ \dfrac{\text{I-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\ ]}}{\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\ (\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1) \notin [\ ]}{* \in \mathrm{N}_1[\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\ ]}}{\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\ (\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1) \notin [\ ]}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1]}}{\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1,\ \mathrm{z} \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\ (\mathrm{z} \in \mathrm{N}_1) \notin \mathrm{y} \in \mathrm{N}_1}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1,\ \mathrm{z} \in \mathrm{N}_1]} \qquad \text{var}\ \dfrac{\text{F-c}\ \dfrac{\text{F-S}\ \dfrac{[\ ]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\ ]}}{\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\ (\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1) \notin [\ ]}{\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1[\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1]}}{\mathrm{El}_{N1}(*, \mathrm{y}) \in \mathrm{N}_1[\mathrm{y} \in \mathrm{N}_1]}$$

Applicando la β N_1*red* allora $\mathrm{El}_{N1}(*, \mathrm{y}) \to_1 \mathrm{y}$
$\mathrm{El}_{N1}(*, \mathrm{y})$ è uguale definizionalmente.

4

$$
\text{E-S}\;\dfrac{
\text{var}\;\dfrac{\text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{\text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{[\,]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}\ [\,]}}{x \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(x \in \mathrm{N}_1) \notin [\,]}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[x \in \mathrm{N}_1]}}{x \in \mathrm{N}_1,\ y \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(y \in \mathrm{N}_1) \notin x \in \mathrm{N}_1}{x \in \mathrm{N}_1[x \in \mathrm{N}_1,\ y \in \mathrm{N}_1]}
\quad
\text{F-S}\;\dfrac{\text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{\text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{\text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{[\,]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\,]}}{x \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(x \in \mathrm{N}_1) \notin [\,]}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[x \in \mathrm{N}_1]}}{x \in \mathrm{N}_1,\ y \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(y \in \mathrm{N}_1) \notin (x \in \mathrm{N}_1)}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[x \in \mathrm{N}_1,\ y \in \mathrm{N}_1]}}{x \in \mathrm{N}_1,\ y \in \mathrm{N}_1,\ z \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(z \in \mathrm{N}_1) \notin (x \in \mathrm{N}_1,\ y \in \mathrm{N}_1)}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[x \in \mathrm{N}_1,\ y \in \mathrm{N}_1,\ z \in \mathrm{N}_1]}
\quad
\text{var}\;\dfrac{\text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{\text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{[\,]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}\ [\,]}}{x \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(x \in \mathrm{N}_1) \notin [\,]}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[x \in \mathrm{N}_1]}}{x \in \mathrm{N}_1,\ y \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(y \in \mathrm{N}_1) \notin x \in \mathrm{N}_1}{y \in \mathrm{N}_1[x \in \mathrm{N}_1,\ y \in \mathrm{N}_1]}
}{\mathrm{El}_{N1}(x,\ y) \in \mathrm{N}_1[x \in \mathrm{N}_1,\ y \in \mathrm{N}_1]}
$$

Applicando la β $N_1 red$ allora $\mathrm{El}_{N1}(x,\ y) \not\twoheadrightarrow_1$ $\mathrm{El}_{N1}(*,\ y)$ non è uguale definizionalmente.

5

$$
\text{E-S}\;\dfrac{\dfrac{}{\mathrm{El}_{N1}(*,\ y) \in \mathrm{N}_1[y \in \mathrm{N}_1,\ x \in \mathrm{N}_1]} \quad \dfrac{}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[y \in \mathrm{N}_1,\ x \in \mathrm{N}_1,\ z \in \mathrm{N}_1]} \quad \dfrac{}{\mathrm{El}_{N1}(x,\ *) \in \mathrm{N}_1[y \in \mathrm{N}_1,\ x \in \mathrm{N}_1]}}{\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{El}_{N1}(*,\ y),\ \mathrm{El}_{N1}(x,\ *)) \in \mathrm{N}_1[y \in \mathrm{N}_1,\ x \in \mathrm{N}_1]}
$$

$$
\text{ind-te}\;\dfrac{\dfrac{}{\mathrm{El}_{N1}(*,\ y) \in \mathrm{N}_1[y \in \mathrm{N}_1]} \quad \text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{\text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{[\,]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\,]}}{y \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(y \in \mathrm{N}_1) \notin [\,]}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[y \in \mathrm{N}_1]}}{y \in \mathrm{N}_1,\ x \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(x \in \mathrm{N}_1) \notin (y \in \mathrm{N}_1)}{\mathrm{El}_{N1}(*,\ y) \in \mathrm{N}_1[y \in \mathrm{N}_1,\ x \in \mathrm{N}_1]}
$$

$$
\text{F-S}\;\dfrac{\text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{\text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{\text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{[\,]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[\,]}}{y \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(y \in \mathrm{N}_1) \notin [\,]}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[y \in \mathrm{N}_1]}}{y \in \mathrm{N}_1,\ x \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(x \in \mathrm{N}_1) \notin (y \in \mathrm{N}_1)}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[y \in \mathrm{N}_1,\ x \in \mathrm{N}_1]}}{y \in \mathrm{N}_1,\ x \in \mathrm{N}_1,\ z \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(z \in \mathrm{N}_1) \notin (y \in \mathrm{N}_1,\ x \in \mathrm{N}_1)}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[y \in \mathrm{N}_1,\ x \in \mathrm{N}_1,\ z \in \mathrm{N}_1]}
$$

$$
\text{ex-te}\;\dfrac{\text{ind-te}\;\dfrac{\dfrac{}{\mathrm{El}_{N1}(x,\ *) \in \mathrm{N}_1[x \in \mathrm{N}_1]} \quad \text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{\text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{[\,]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}\ [\,]}}{x \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(x \in \mathrm{N}_1) \notin [\,]}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[x \in \mathrm{N}_1]}}{x \in \mathrm{N}_1,\ y \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(y \in \mathrm{N}_1) \notin x \in \mathrm{N}_1}{\mathrm{El}_{N1}(x,\ *) \in \mathrm{N}_1[x \in \mathrm{N}_1,\ y \in \mathrm{N}_1]} \quad \text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{\text{F-c}\;\dfrac{\text{F-S}\;\dfrac{[\,]\ \mathrm{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}\ [\,]}}{y \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{count}}\;(y \in \mathrm{N}_1) \notin y \in [\,]}{\mathrm{N}_1\ \mathrm{type}[y \in \mathrm{N}_1]}}{y \in \mathrm{N}_1,\ x \in \mathrm{N}_1\ \mathrm{cont}}\;(x \in \mathrm{N}_1) \notin y \in \mathrm{N}_1}{\mathrm{El}_{N1}(x,\ *) \in \mathrm{N}_1[y \in \mathrm{N}_1,\ x \in \mathrm{N}_1]}
$$

Per i giudizi conclusione $\mathrm{El}_{N1}(*,\ y) \in \mathrm{N}_1[y \in \mathrm{N}_1]$ e $\mathrm{El}_{N1}(x,\ *) \in \mathrm{N}_1[x \in \mathrm{N}_1]$ ho già dimostrato sopra (in 3 e 2) la loro tipabilità per il tipo singoletto.
Applicando la red_I e β $N_1 red$ allora $\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{El}_{N1}(*,\ y),\ \mathrm{El}_{N1}(x,\ *)) \to_1 \mathrm{El}_{N1}(y,\ \mathrm{El}_{N1}(x,\ *))$.
Più nel dettaglio la riduzione è la seguente

$$
\mathrm{red}_I \, \dfrac{\beta\ \mathrm{N}_1\mathrm{red}\ \dfrac{}{\mathrm{El}_{N1}(*,\ \mathrm{y}) \to_1 \mathrm{y}}}{\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{El}_{N1}(*,\ \mathrm{y}),\ \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x},\ *)) \to_1 \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{y},\ \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x},\ *))}
$$

$\mathrm{El}_{N1}(\mathrm{El}_{N1}(*,\ \mathrm{y}),\ \mathrm{El}_{N1}(\mathrm{x},\ *))$ è uguale definizionalmente.