01-Square Boards(RUS)

9 февраля 2017 г.

1 О вероятности попасть под удар фигуры, поставленной случайным образом на шахматную доску

На шахматную доску случайным образом поставлены две фигуры. С какой вероятностью первая фигура бьёт вторую? В данном документе представлен расчёт этой вероятности для каждой шахматной фигуры как функции от размера доски. Рассмотрены только квадратные доски. Фигуры полагаются поставленными одновременно (обязательно стоят на разных клетках), выбор каждого из полей равновероятен.

Степень (валентность) вершины v графа G - количество рёбер графа G, инцидентных вершине v.

Граф ходов шахматной фигуры (далее Граф) - граф, изображающий все возможные ходы фигуры на шахматной доске - каждая вершина соответствует клетке на доске, а рёбра соответствуют возможным ходам. Тогда валентность вершины Графа - количество полей, которые бьёт фигура, будучи поставленной на соответствующую этой вершине клетку. В целях упрощения речи далее в тексте используется формулировка “клетка имеет валентность”, однако понятно, что валентность имеет не клетка, а соответствующая ей вершина в Графе.

Если событие X может произойти только при выполнении одного из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность $P(X)$ вычисляется по формуле:

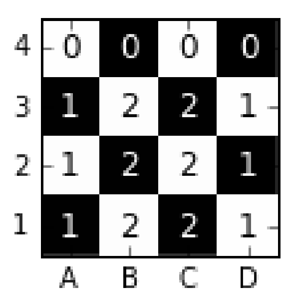
$$P(X) = P(H_1) \cdot P(X|H_1) + P(H_2) \cdot P(X|H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(X|H_n),$$

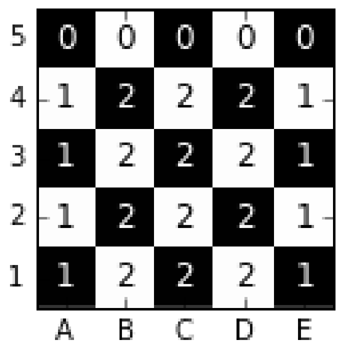
которая называется формулой полной вероятности.

Пусть событие X = «Первая фигура бьёт вторую на доске размера $n \times n$», a - некоторое значение валентности, b - количество клеток, имеющих валентность a, каждая из гипотез H_i = «Первая фигура стоит на клетке с валентностью a_i». Тогда $P(H_i) = \frac{b_i}{n^2}$ в силу классического определения вероятности - это отношение количества исходов, благоприятствующих событию H_i, к количеству всех равновозможных исходов. $P(X|H_i) = \frac{a_i}{n^2-1}$ по той же причине - событию X при условии H_i благоприятствует a_i исходов (вторая фигура стоит под ударом клетки с валентностью a_i),а количество всех равновозможных исходов уменьшилось на единицу, так как одна из клеток уже занята первой фигурой.

1.1 Пешка

Рассмотрим несколько частных случаев в поисках закономерности.





Закономерность очевидна - всегда присутствует горизонталь (верхняя или нижняя - в зависимости от цвета фигуры), с которой пешка не бьёт ни одну клетку - все поля этой горизонтали 0-валентны. Их количество равно n. На крайних вертикалях расположены 1-валентные клетки, которых $2(n-1)$ штук. Все остальные поля - 2-валентны, и расположены они прямоугольником размера $(n-1)\times(n-2)$.

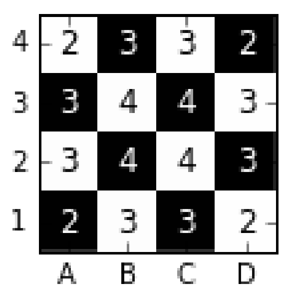
Тогда

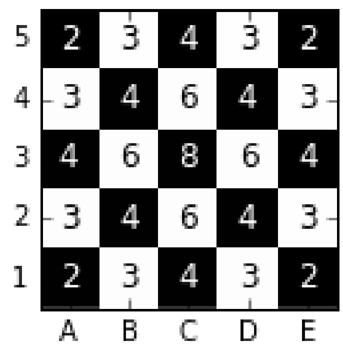
$$P(X_{pawn}) = \frac{n\cdot 0}{n^2(n^2-1)} + \frac{2(n-1)\cdot 1}{n^2(n^2-1)} + \frac{(n-1)(n-2)\cdot 2}{n^2(n^2-1)} = \frac{2(n-1)(1+n-2)}{n^2(n^2-1)} = \frac{2(n-1)^2}{n^2(n^2-1)}.$$

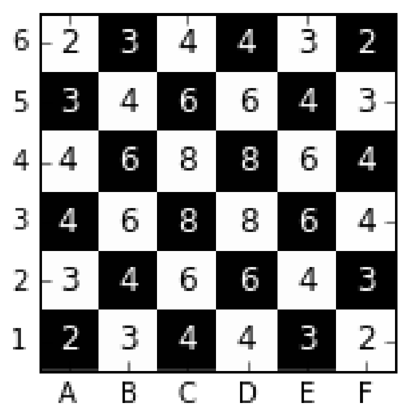
Так как $(n^2-1) = (n+1)(n-1)$,

$$P(X_{pawn}) = \frac{2(n-1)}{n^2(n+1)}.$$

1.2 Конь







Количество 2- и 3-валентных клеток фиксировано при любом $n \geq 4$. Первые расположены в углах, а вторые прилегают к ним по вертикали и горизонтали. Стало быть, количество 2-валентных клеток равно 4, а 3-валентных - 8, вдвое больше. 4-валентные клетки образуют арифметическую прогрессию с начальным элементом 4 и шагом 4 для всех $n \geq 4$ (при увеличении n на единицу с каждой стороны появляется одна 4-валентная клетка). Легко видеть, что рост количества 6-валентных клеток устроен аналогично, однако существуют они только при $n \geq 5$. Таким образом, 4-валентных клеток $4(n-3)$, а 6-валентных клеток - $4(n-4)$ штук. Количество 8-валентных клеток растёт квадратично, к тому же, они существуют только при $n \geq 5$. То есть, их количество - $(n-4)^2$. Итого имеем:

$$P(X_{knight}) = \frac{4 \cdot 2}{n^2(n^2-1)} + \frac{8 \cdot 3}{n^2(n^2-1)} + \frac{4(n-3) \cdot 4}{n^2(n^2-1)} + \frac{4(n-4) \cdot 6}{n^2(n^2-1)} + \frac{(n-4)^2 \cdot 8}{n^2(n^2-1)} =$$

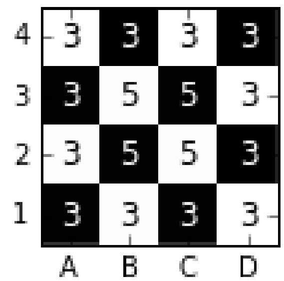
$$= \frac{32 + 24(n-4) + 16(n-3) + 8(n-4)^2}{n^2(n^2-1)} =$$

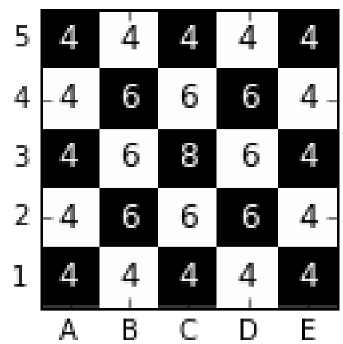
$$= \frac{8(4 + 3(n-4) + 2(n-3) + (n-4)^2)}{n^2(n^2-1)} = \frac{8(4 + 3n - 12 + 2n - 6 + n^2 - 8n + 16)}{n^2(n^2-1)} =$$

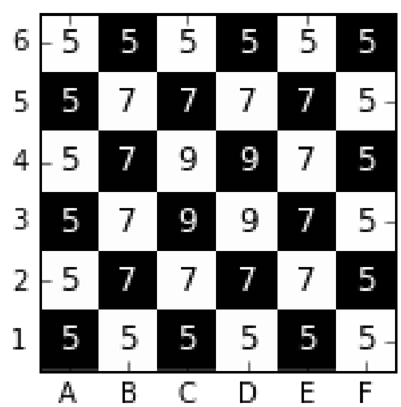
$$\frac{8(n^2 - 3n + 2)}{n^2(n^2-1)} = \frac{8(n-1)(n-2)}{n^2(n^2-1)} = \frac{8(n-2)}{n^2(n+1)}.$$

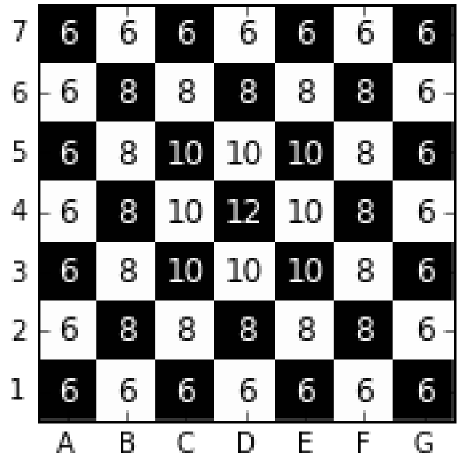
1.3 Офицер

Расположение валентностей для офицера и ферзя практически идентично, за исключением того, что наименьшее значение валентности для ферзя в три раза превышает оное для офицера.









Видно, что эквивалентные клетки располагаются по периметрам образованных ими концентрических квадратов, при чём валентность возрастает с шагом 2 по мере приближения к центру. Поскольку при чётных n в центре доски расположены 4 поля с максимальной валентностью, а при нечётных - одно, случаи чётных и нечётных n представляется удобным рассмотреть раздельно.

1.3.1 Чётные n

Каково количество различных значений валентности, а также их величина? Наименьшее значение равно $(n-1)$, так как это количество клеток на диагонали минус клетка, на которой стоит сама фигура. Наибольшее значение - $(n-1)+(n-2)=(2n-3)$, так как оно больше наименьшего значения на количество клеток, расположенных на диагонали квадрата со стороной $(n-1)$ минус клетка, на которой стоит сама фигура.

Пусть s - количество шагов размера 2, которое требуется совершить для перехода от значения $(n-1)$ к значению $(2n-3)$. Тогда

$$n-1+2s=2n-3,$$

$$2s=2n-3-n+1=n-2 \Rightarrow s=\frac{n-2}{2}.$$

Так как n - чётное, $s \in \mathbb{Z}$.

Однако ввиду того, что один шаг совершается между двумя разными значениями, количество различных значений валентности на единицу больше количества шагов, требующихся для перехода от минимального до максимального. В таком случае имеем $\frac{n-2}{2}+1=\frac{n}{2}-1+1=\frac{n}{2}$. Итого, на доске со стороной n содержится $\frac{n}{2}$ клеток с различными значениями валентности - $\frac{n}{2}$ концентрических квадратов.

В каком количестве представлено каждое из значений? Количество элементов, расположенных по периметру образованного клетками квадрата со стороной λ, равно учетверённой стороне минус четыре угловые клетки, которые оказываются учтёнными дважды. Тогда количество клеток с одноимённым значением валентности равно $4\lambda-4=4(\lambda-1)$, где λ изменяется с шагом 2 в пределах от 2 (центральный квадрат) до n (внешний).

При этом от λ зависит не только количество значений валентности, но и их величина - она увеличивается на λ по мере приближения к центру доски. Таким образом, имея наименьшее значение валентности, встречающееся на доске, а также количество концентрических квадратов, нетрудно составить зависимую от λ сумму $P(X^{even}_{bishop})=\sum P(H_i)\cdot P(X|H_i)$. Однако удобнее суммировать по индексу, который изменяется с шагом 1, потому заменим $k=\frac{\lambda}{2}$. Теперь можно записать:

$$P(X_{bishop}^{even}) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{4(n+1-2k)\cdot(n-3+2k)}{n^2(n^2-1)} = \frac{4}{n^2(n^2-1)} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} n^2 - 3n + 2kn + n - 3 + 2k - 2kn + 6k - 4k^2 =$$

$$= \frac{4}{n^2(n^2-1)} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} n^2 - 2n - 3 + 8k - 4k^2.$$

Вынесем первые три слагаемых за знак суммы, так как они не зависят от k, умножив их на $\frac{n}{2}$ - количество раз, которое они встречаются в сумме:

$$P(X_{bishop}^{even}) = \frac{4}{n^2(n^2-1)} \left[\frac{n}{2}(n^2-2n-3) + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} 8k - 4k^2\right]$$

Рассмотрим отдельно выражение под знаком суммы.

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} 8k - 4k^2 = 8\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k - 4\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k^2.$$

Обозначим $S_1 = 8\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k$, $S_2 = 4\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k^2$.

S_1 - это умноженная на 8 сумма первых $\frac{n}{2}$ натуральных чисел, которая есть сумма первых $\frac{n}{2}$ членов арифметической прогрессии, поэтому

$$S_1 = 8\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}{2} = 4\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1) = 2n(\frac{n}{2}+1) = \frac{2n^2}{2} + 2n = n^2 + 2n = n(n+2).$$

S_2 - это умноженная на 4 сумма квадратов первых $\frac{n}{2}$ натуральных чисел, поэтому

$$S_2 = 4\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)(2\frac{n}{2}+1)}{6} = \frac{n(n+2)(n+1)}{6}.$$

$$S_1 - S_2 = n(n+2) - \frac{n(n+2)(n+1)}{6} = n(n+2)(1 - \frac{(n+1)}{6}) = \frac{n(n+2)(6-n-1)}{6} = \frac{n(n+2)(-n+5)}{6} = -\frac{n(n+2)(n-5)}{6}.$$

Тогда

$$P(X_{bishop}^{even}) = \frac{4}{n^2(n^2-1)} \left[\frac{n}{2}(n^2-2n-3) - \frac{n(n+2)(n-5)}{6}\right] = \frac{4}{n^2(n^2-1)} \left[\frac{n(3n^2-6n-9)}{6} - \frac{n(n+2)(n-5)}{6}\right] =$$

$$= \frac{4n}{6n^2(n^2-1)}(3n^2 - 6n - 9 - n^2 + 5n - 2n + 10) = \frac{2}{3n(n^2-1)}(2n^2-3n+1) = \frac{2(2n-1)(n-1)}{3n(n^2-1)} = \frac{2(2n-1)}{3n(n+1)}.$$

1.3.2 Нечётные n

Каково количество различных значений валентности? Наименьшее значение равно $(n-1)$ из тех же рассуждений, что и для чётных n. Наибольшее значение, очевидно, равно удвоенному наименьшему - $(n-1)+(n-1) = 2(n-1)$.

Пусть s - количество шагов размера 2, которое требуется совершить для перехода от значения $(n-1)$ к значению $2(n-1)$. Тогда

$$n - 1 + 2s = 2n - 2,$$

$$2s = 2n - 2 - n + 1 = n - 1 \Rightarrow s = \frac{n-1}{2}.$$

Так как n - нечётное, $s \in \mathbb{Z}$. Итого имеем $\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$ клеток с различными значениями валентности.

В каком количестве представлено каждое из значений? Рассуждения для чётных и нечётных n идентичны, за исключением того, что выражение $4(\lambda-1)$ равно нулю при $\lambda=1$ (в центральной клетке доски). По этой причине слагаемое $P(H_{\frac{n+1}{2}})\cdot P(X|H_{\frac{n+1}{2}})$ должно быть вынесено за знак общей суммы, а индекс суммирования будет принимать на единицу меньше значений: $\frac{n+1}{2}-1=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}-1=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}-1=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}=\frac{n-1}{2}$.

Тогда можно записать:

$$P(X^{odd}_{bishop})=\frac{1\cdot 2(n-1)}{n^2(n^2-1)}+\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{4(n+1-2k)\cdot(n-3+2k)}{n^2(n^2-1)}.$$

Легко видеть, что выражение под знаком суммы отличается от $P(X^{even}_{bishop})$ только верхней границей суммирования. Следовательно, аналогично предыдущим выкладкам можно обозначить: $S_1=8\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}k$, $S_2=4\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}k^2$.

$$S_1=8\frac{\frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}+1)}{2}=4\frac{n-1}{2}(\frac{n+1}{2})=(n-1)(n+1).$$

$$S_2=4\frac{\frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}+1)(2\frac{n-1}{2}+1)}{6}=4\frac{\frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}+1)(2\frac{n-1}{2}+1)}{6}=\frac{(n-1)(\frac{n+1}{2})n}{3}=\frac{(n-1)(n+1)n}{6}.$$

$$S_1-S_2=(n-1)(n+1)-\frac{(n-1)(n+1)n}{6}=(n-1)(n+1)(1-\frac{n}{6})=\frac{(n-1)(n+1)(6-n)}{6}=-\frac{(n-1)(n+1)(n-6)}{6}.$$

Тогда

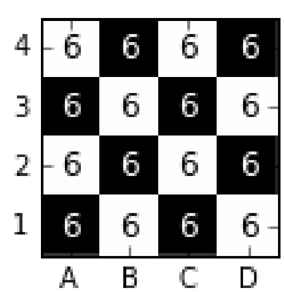
$$P(X^{odd}_{bishop})=\frac{2(n-1)}{n^2(n^2-1)}+\frac{4}{n^2(n^2-1)}\,[\frac{n-1}{2}(n^2-2n-3)-\frac{(n-1)(n+1)(n-6)}{6}]=$$

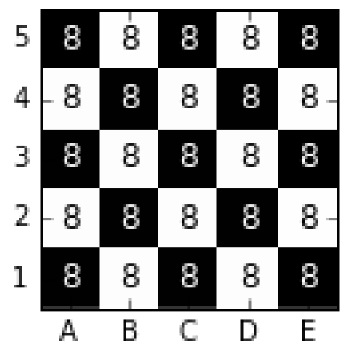
$$=\frac{2}{n^2(n+1)}+\frac{4(n-1)}{n^2(n^2-1)}[\frac{3n^2-6n-9}{6}-\frac{(n+1)(n-6)}{6}]=\frac{2}{n^2(n+1)}+\frac{4}{6n^2(n+1)}(3n^2-6n-9-n^2+6n-n+6)=$$

$$=\frac{2}{n^2(n+1)}+\frac{4}{6n^2(n+1)}(2n^2-n-3)=\frac{12+8n^2-4n-12}{6n^2(n+1)}=\frac{4n(2n-1)}{6n^2(n+1)}=\frac{2(2n-1)}{3n(n+1)}.$$

Как видно, чётность доски не влияет на рассматриваемую вероятность: $P(X^{even}_{bishop})=P(X^{odd}_{bishop})=P(X_{bishop})=\frac{2(2n-1)}{3n(n+1)}$.

1.4 Ладья

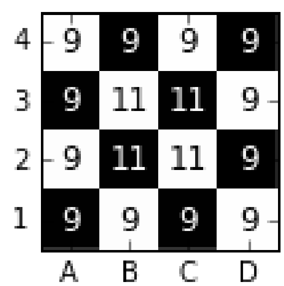


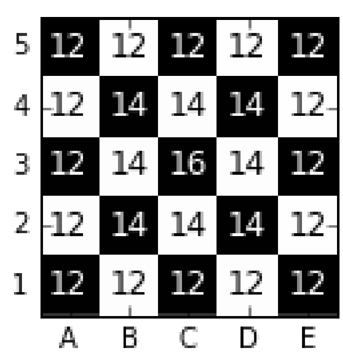


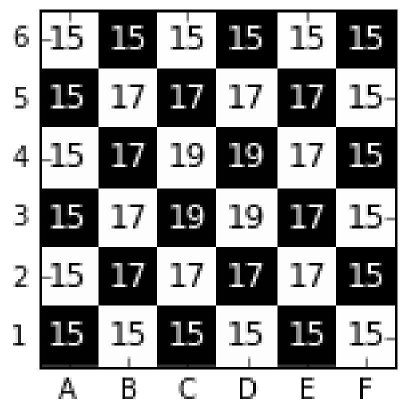
Известная особенность ладьи - независимо от расположения на доске, она всегда контролирует постоянное количество полей, а именно $2(n-1)$ - это сумма полей по горизонтали и вертикали минус поле, на котором стоит сама ладья.

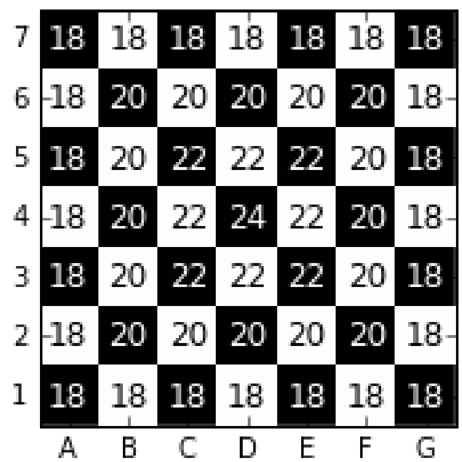
$$P(X_{rook}) = \frac{n^2 \cdot 2(n-1)}{n^2(n^2-1)} = \frac{2}{(n+1)}.$$

1.5 Ферзь





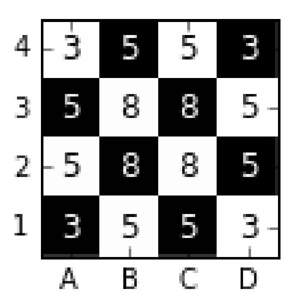


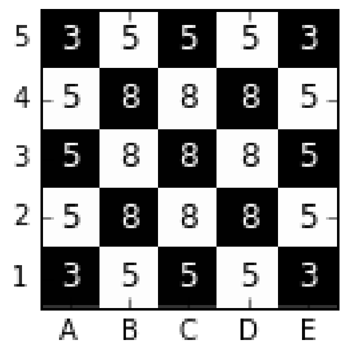


Поскольку ферзь сочетает в себе возможности офицера и ладьи, выражение для него может быть получено как сумма выражений для этих фигур:

$$P(X_{queen}) = \frac{2(2n-1)}{3n(n+1)} + \frac{2}{n+1} = \frac{2(2n-1)+6n}{3n(n+1)} = \frac{4n-2+6n}{3n(n+1)} = \frac{10n-2}{3n(n+1)} = \frac{2(5n-1)}{3n(n+1)}.$$

1.6 Король



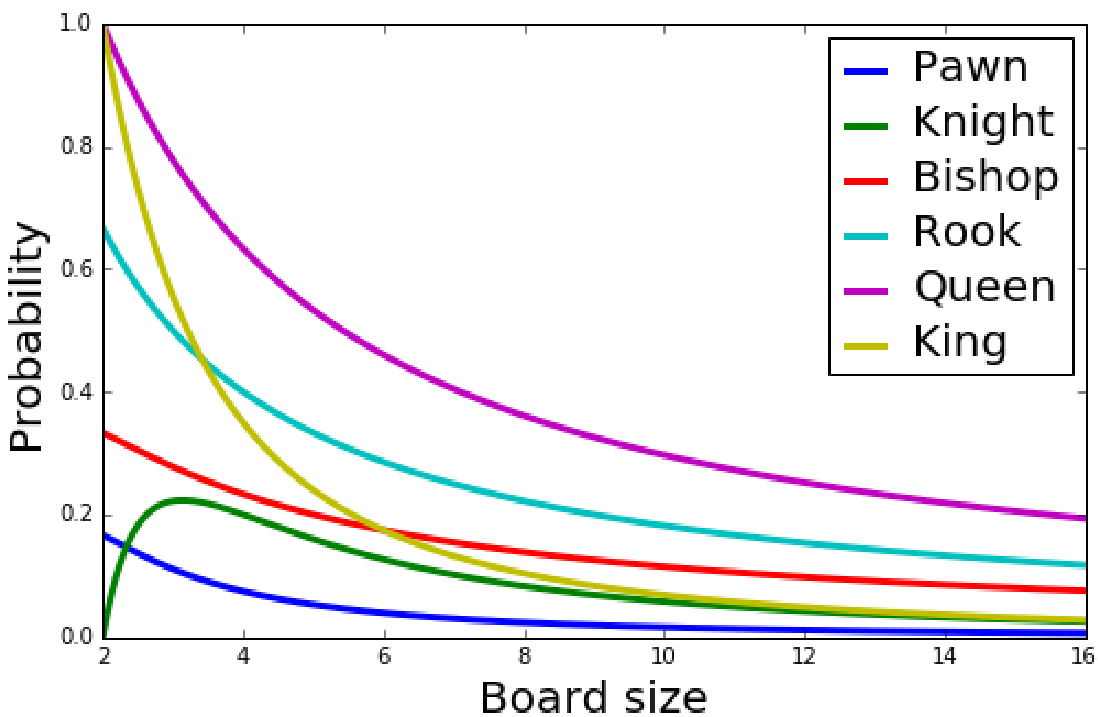


Видно, что края доски, за исключением 3-валентных углов, 5-валентны, а всё оставшееся пространство 8-валентно. Ввиду того, что краёв 4, а 5-валентных клеток на одном краю $(n-2)$ штук, имеем:

$$P(X_{king}) = \frac{4\cdot 3}{n^2(n^2-1)} + \frac{4(n-2)\cdot 5}{n^2(n^2-1)} + \frac{(n-2)^2\cdot 8}{n^2(n^2-1)} = \frac{12+20(n-2)+8(n-2)^2}{n^2(n^2-1)} = \frac{4(3+5(n-2)+2(n-2)^2)}{n^2(n^2-1)} =$$

$$= \frac{4(3+5n-10+2(n^2-4n+4))}{n^2(n^2-1)} = \frac{4(3+5n-10+2n^2-8n+8)}{n^2(n^2-1)} = \frac{4(2n^2-3n+1)}{n^2(n^2-1)} = \frac{4(2n-1)(n-1)}{n^2(n^2-1)} = \frac{4(2n-1)}{n^2(n+1)}.$$

График, отображающий зависимость вероятности от размера доски, представлен как функция действительного переменного в целях наглядности.



Ссылка на оригинальный ноутбук: https://github.com/esimonov/chess_prob/blob/master/01-Square%20Boards(RUS).ipynb