MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Processus de Poisson
Séance de TD du 26 mars 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 1 de la séance de TD consacrée aux processus de Poisson. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 1

Robert est un grand romantique. Pour conquérir le coeur de Stéphanie il a décidé de sortir le grand jeu et de l'emmener contempler les étoiles filantes. Pour préparer sa sortie, et par commodité, il décide de modéliser le processus d'apparition des étoiles filantes par un processus de Poisson, $N(t)$ (comptant le nombre d'étoiles filantes apparues entre le début de l'observation et le temps t, exprimé en minutes), de paramètre λ. Lors d'une observation préparatoire, la veille du jour j, il a compté 30 étoiles filantes entre 22h00 et 23h00. Il décide donc de tenter sa chance le lendemain, à la même heure.

1. Calculez le temps moyen que Stéphanie et Robert attendront entre 2 étoiles filantes. En déduire λ
2. Ce qui est capital se dit Robert c'est qu'il y ait tout de suite des étoiles, sinon elle va s'impatienter. Calculez la probabilité qu'il y ait une étoile dans les 5 premières minutes.
3. Calculer la probabilité que la première étoile apparaisse avant 22h06
4. Calculez la probabilité pour que la dixième étoile arrive après 23 heures
5. Stéphanie est jolie mais pas très romantique; elle voudra partir si au bout de 10 minutes il n'y a pas d'étoiles. calculez la probabilité de ce (sinistre) évènement

6. Sachant que 20 étoiles sont apparues dans la première heure, calculez la probabilité qu'exactement 10 étoiles sont apparues dans le deuxième quart d'heure.

Correction de l'Exercice 1

1. Les temps inter-arrivées sont des variables aléatoires indépendantes de distributions exponentielles

$$T_n \sim \text{Exp}(\lambda),\ \forall n \geq 1$$

L'espérance d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ est :

$$E\left(T_n\right) = \frac{1}{\lambda}$$

L'estimation par maximum de vraisemblance[1] du paramètre λ vaut :

$$\hat{\lambda} = \frac{N(T)}{T} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}\ \left[\min^{-1}\right]$$

La durée moyenne entre les apparitions de deux étoiles filantes successives est donc

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = 2\ [\min]$$

ce qui était bien sûr prévisible dès l'énoncé du problème ...

2. Il est possibilité d'évaluer de nombreuses probabilités relatives à un processus de Poisson de deux manières différentes :

   (i) en les formulant comme des probabilités sur les instants d'arrivées et la durée des intervalles inter-arrivées, faisant intervenir des calculs sur des variables aléatoires continues (loi Gamma, loi uniforme ou loi exponentielle)

   (ii) en les formulant comme des probabilités sur le nombre d'arrivéess sur des intervalles connus, faisant intervenir dans ce cas des calculs sur des variables aléatoires discrètes (loi de Poisson ou loi binomiale)

[1]On peut montrer qu'il s'agit de l'estimation non biaisée de variance minimum, connaissant les instants d'arrivées t_i pour $i \in \{1, \ldots, N\}$ de chacune des N étoiles filantes sur $[0, T]$

La première méthode consiste ici à calculer :

$$P(T_1 \leq 5) \quad = \quad \int_0^5 \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]\Big|_{t=0}^{t=5} = 1 - e^{-\frac{5}{2}}$$

Tandis que la deuxième méthode consiste à calculer :

$$\begin{aligned} P(N(5) \geq 1) &= 1 - P(N(5) < 1) \\ &= 1 - \left.\frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!}\right|_{t=5} \\ &= 1 - e^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on obtient bien sûr la même réponse $1 - e^{-\frac{5}{2}} \simeq 0.918..$!

3. C'est la même question que la précédente. On a par exemple :

$$P(T_1 \leq 6) \quad = \quad \int_0^6 \lambda e^{-\lambda t}\, dt = e^{-3} \simeq 0.95..$$

4. Avec la première méthode, on obtient

$$\begin{aligned} P(A(10) \geq 60) &= 1 - P(A(10) < 60) \\ &= \int_0^6 \frac{(\lambda t)\, 9 \lambda e^{-\lambda t}}{9!}\, dt \end{aligned} \tag{1}$$

qui nécessite 9 intégrations par parties successives. En utilisant la deuxième méthode, on obtient :

$$\begin{aligned} P(N(60) < 10) &= \sum_{k=0}^{9} \frac{(\lambda 60)^k}{k!} e^{-\lambda 60} \\ &= \sum_{k=0}^{9} \frac{30^k}{k!} e^{-30} \simeq 0.712..\, 10^{-5} \end{aligned}$$

qui doit nécessairement être le même résultat que (1), mais nécessite beaucoup moins de calcul!

5. On a par exemple :

$$P(N(10) = 0) \quad = \quad \frac{(\lambda 10)^0}{0!} e^{-\lambda 10} = e^{-5}$$

6. On peut ici utiliser le fait que le nombre total d'arrivées $N(60) = 20$ sur l'intervalle $[0, 60]$ est connu. Dans ce cas, on sait que les instants

d'arrivées A_n sont des variables aléatoires indépendantes distribuées de manière uniforme sur $[0, 60]$, c'est-à-dire selon la loi uniforme :

$$f_{A_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{60} & \text{si } t \in [0, 60] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La probabilité que 10 étoiles arrivent dans l'intervalle $[15, 30]$ (et que les autres arrivent en dehors de cet intervalle) vaut donc

$$P = C_{20}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \simeq .0099..$$

où

$$C_{20}^{10} = \left(\begin{array}{c} 20 \\ 10 \end{array} \right) = \frac{20!}{10!10!}$$

est le nombre de choix possibles pour les 10 étoiles (parmi 20) qui arrivent dans le deuxième quart d'heure et

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

est la probabilité, pour l'un de ces choix possibles, que les 10 étoiles choisies arrivent pendant le deuxième quart d'heure.