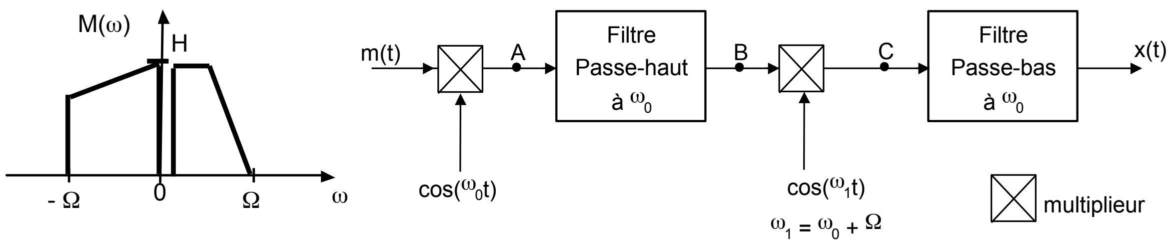
REPONDRE SUR DES FEUILLES SEPAREES POUR CHAQUE EXERCICE

EXERCICE I : *Cryptage d'un signal (6 pts)*

Dans cet exercice, on utilisera un axe gradué en pulsation. Sans démonstration, rappeler :

1) Quel est le spectre X(ω) d'une fonction $x(t) = cos(\omega_0.t)$, avec $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$?
2) Quel est le spectre du produit de 2 fonctions du temps : x(t).y(t) en fonction des spectres X(ω) et $Y(\omega)$?
3) Quel est l'effet du produit de convolution d'une fonction X(ω) par une distribution $\delta(\omega - \omega_0)$: $X(\omega) * \delta(\omega - \omega_0)$? Donner un exemple simple à l'aide d'un schéma.

On traite le signal m(t) (de spectre M(ω), d'amplitude maximale H) avec le montage suivant, dans lequel $\omega_0 >> \Omega$ et les filtres sont idéaux :



4) Représenter **les spectres** des signaux en A, B, C et **en sortie** (signal x(t)) en faisant bien apparaître l'**amplitude** maximale des différents spectres ainsi que les pulsations importantes (autour desquelles sont centrés les spectres ET où commencent et terminent les spectres dessinés).

5) Calculer **le rapport** entre l'énergie, E_x, du signal de sortie x(t) et l'énergie, E_m, du signal entrant m(t) en indiquant quelle théorème/égalité importante vous utilisez.

6) Qu'est **devenue** l'énergie manquante ?

REPONDRE SUR DES FEUILLES SEPAREES POUR CHAQUE EXERCICE

EXERCICE II : *Décomposition en série de Fourier d'une fonction rectangle (7 pts)*

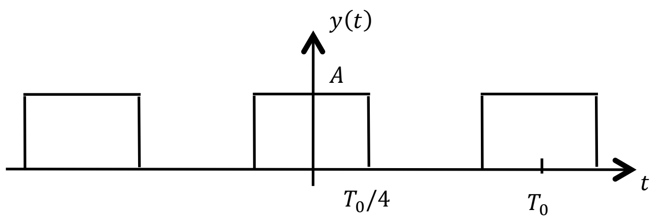
On pourra utiliser le résultat suivant : $TF\left(rect\left(\frac{t}{T}\right)\right) = T.sinc(\pi f T)$

On rappelle certaines propriétés et définitions :

- Le peigne de Dirac : $\delta_T(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - n.T)$ et sa TF : $TF\left(\delta_T(t)\right) = \frac{1}{T}.\delta_{\frac{1}{T}}(f)$
- Multiplication par une distribution de Dirac : $f(x).\delta(x - x_0) = f(x_0).\delta(x - x_0)$
- Série de Fourier d'une fonction $x(t)$ périodique $(T = 1/F)$: $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n.e^{j2\pi.n.F.t}$
- Spectre d'une fonction $x(t)$ périodique $(T = 1/F)$: $X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n.\delta(f - n.F)$

1/ Démontrer que la transformée de Fourier d'une fonction retardée dont le module au carré est sommable équivaut à une modulation dans l'espace des fréquences de son spectre : $TF\left(x(t - t_0)\right) = e^{-j2\pi f t_0}.X(f)$ où $TF\left(x(t)\right) = X(f)$.

Soit la fonction rectangle *périodique* $y(t)$ de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$ et d'amplitude A :

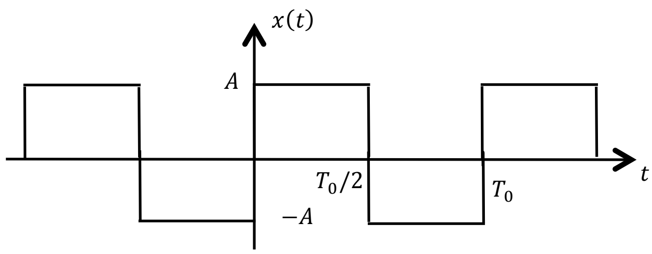


2/ Montrer en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier et du produit de convolution que le spectre $Y(f)$ de la fonction $y(t)$ peut s'exprimer ainsi : $Y(f) = \frac{A}{2}.sinc\left(\frac{\pi}{2} f T_0\right).\delta_{f_0}(f)$

3/ En déduire que les coefficients complexes de Fourier de la fonction $y(t)$ sont :

$$y_n = \begin{cases} A/2, & si\ n = 0 \\ \frac{A}{\pi}.\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}, & si\ n\ impair \\ 0, & sinon \end{cases}$$

Soit la fonction rectangle *périodique* $x(t)$ de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$ et d'amplitude 2A :



4/ Calculer directement si c'est possible son énergie E_x et sa puissance P_x.

5/ Exprimer simplement la fonction $x(t)$ en fonction d'une translation de $y(t)$ et des paramètres $A\ et\ T_0$.

6/ En déduire que le spectre de la fonction $x(t)$ est $X(f) = 2.e^{-j\frac{\pi}{2} f T_0}.Y(f) - A.\delta(f)$

7/ Puis *en déduire* que les coefficients complexes de Fourier de la fonction $x(t)$ sont :

$$x_n = \begin{cases} -j.\frac{2A}{\pi.n}, & si\ n\ impair \\ 0, & sinon \end{cases}$$

8/ En calculant la puissance P_x d'une autre manière, déduire la valeur que prend la limite de la série de terme $1/n^2$ pour n impair et positif.