Exercice 1 Soient U une v.a de loi uniforme sur $[0,1]$ et V une v.a. de loi Exponentielle $Exp(\lambda)$ indépendantes.

1. Calculer $P(U \leq V)$
2. Calculer la loi de $U + V$

Exercice 2
Robert a décroché un rendez vous avec une jeune fille. Celle ci l'attend. Le temps qu'elle patiente avant de partir suit une loi $Exp(\frac{1}{5})$. Robert lui est coincé par les embouteillages. Le temps qu'il met avant de rejoindre le point de rendez vous suit une loi uniforme sur $[1,5]$.

1. calculer la probabilité que Robert ne rate pas son rendez vous
2. Même question si le temps qu'il met pour arriver suit une loi $Exp(\lambda)$

Exercice 3
Soit X une v.a. de loi $N(0,1)$, et Y une v.a discrète de loi :

$$\begin{cases} P(Y=1) = \frac{1}{2} \\ P(Y=-1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On suppose que X et Y sont indépendantes, et on pose $Z = XY$.

1. Calculer la loi de Z
2. Les v.a. Z et X sont elles indépendantes?

Exercice 4
Un prisonnier creuse un tunnel pour s'évader de prison. Le gardien modifie ses rondes et adopte différents parcours afin que les prisonniers ne puissent prévoir avec certitude le temps avant son prochain passage. Une analyse minutieuse des données statistiques (que le prisonnier ignore) permet de conclure que le temps entre deux passages du gardien est une variable aléatoire Z (en minutes) dont la loi est la suivante:

$$P(Z=2) = \frac{1}{2}, \quad P(Z=5) = \frac{1}{3}, \qquad P(Z=7) = \frac{1}{6}$$

Une forte pression psychologique s'exerce sur le prisonnier. On suppose qu'il peut y céder à tout moment avec la même probabilité, indépendemment du temps qu'il a déjà passé à creuser. Le temps T qu'il va creuser suit donc une loi $Exp(\lambda)$. On suppose que Z et T sont indépendantes (le prisonnier et le gardien n'ont pas connaissance des informations qui précèdent). Quelle est la probabilité que le prisonnier soit surpris par le gardien ?

Exercice 5
Robert doit prendre le prochain bus.

1. Robert est à l'arrêt de bus. Le temps d'attente avant que le bus n'arrive suit une loi $Exp(0.2)$. Quelle est la probabilité que Robert attende plus de 10 minutes ?
2. Robert voudrait bien prendre le bus en compagnie de sa jolie voisine, mais celle ci n'est pas encore arrivée. Le temps qu'elle met pour arriver suit une loi $Exp(0.3)$. Quelle est la probabilité que Robert puisse effectuer le voyage avec elle ?

Exercice 6
Soient X, Y deux v.a. indépendantes de densité respectives:

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x} 1_{[0,+\infty[}(x)$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(b)} y^{b-1} e^{-y} 1_{[0,+\infty[}(y)$$

où a et b sont deux réels positifs et $\Gamma(b) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{b-1} dx$. On pose $U = \frac{X}{X+Y}$ et $V = X + Y$.

1. Trouver la loi du couple (U, V)

2. Les v.a. U et V sont elles indépendantes ?

Exercice 7
Soit X et Y deux v.a. indépendantes suivant la loi normale $N(0,1)$.

1. Calculer la loi de $Z = X^2 + Y^2$
2. Calculer $E(Z)$

Exercice 8
Stéphanie doit se rendre à la poste. Le temps qu'elle passe à attendre dans la queue suit une loi $Exp(\lambda_1)$. Le temps qu'elle passe au guichet suit une loi $Exp(\lambda_2)$. Le temps qu'elle doit attendre avant que son téléphone portable sonne suit une loi $Exp(\lambda_3)$. Ces 3 grandeurs sont indépendantes. Calculer la probabilité que le téléphone portable de Stéphanie sonne dans la poste.

Exercice 9
On possède une table, recouverte de lignes parallèles, espacées entre elles de D cm. On y jette une aiguille de longueur l, avec $l \leq D$. On cherche la probabilité que l'aiguille rencontre une ligne.

1. On repère la position de l'aiguille avec les coordonnées suivantes:
   - θ est l'angle formé entre l'aiguille et une perpendiculaire aux lignes.
   - X est la distance entre le milieu de l'aiguille et la ligne parallèle la plus proche.

   Quand l'aiguille coupe t-elle une ligne?
2. Quelles lois suivent θ et X? Sont-elles indépendantes?
3. Trouver la probabilité cherchée.
4. Imaginez une méthode pour calculer π.

Exercice 10
On suppose que des coeurs arrivent à un hopital suivant le processus suivant: Le premier coeur arrive à la date T_1, le deuxieme met un temps T_2 à arriver après que le premier coeur soit arrivé. T_1 et T_2 sont deux v.a. de loi exponentielle $Exp(\mu)$. Deux malades attendent d'être greffés. Le premier coeur va au premier patient, si celui est encore en vie; sinon au second (s'il est encore en vie...). On suppose que leurs durées de vie (qui sont indépendantes) suivent des lois exponentielles de paramètre λ_1 et λ_2. Ces durées de vie sont indépendantes des arrivées des coeurs!

1. Calculer la probabilité que le premier patient soit greffé
2. Calculer la probabilité que le second soit greffé.

Exercice 11
Soient X et Y deux v.a. indépendantes, de loi $Exp(\lambda)$ et $Exp(\alpha)$. Déterminer la densité de $X + Y$.

Exercice 12

1. Montrer qu'il existe c tel que $f(x,y) = c[1 + xy(x^2 - y^2)]1_{[-1,1]}(x)1_{[-1,1]}(y)$ soit une densité de probabilité sur ^{2}.
2. Soit (X,Y) un couple ayant $f(x,y)$ comme densité. Expliciter les lois de X et Y.

Exercice 13
Robert doit se rendre à un rendez-vous avec sa fiancée. Il y a 2 chemins pour aller au lieu de rendez-vous : le chemin A, que Robert prend dans % des cas, et le chemin B, qu'il prend dans les $1 - \alpha$ % restants. S'il prend le chemin A, le temps qu'il met à arriver est un temps de loi $Exp(\lambda_1)$. S'il prend le chemin B, ce temps suit la loi $Exp(\lambda_2)$. *Remarque:* $\alpha \in [0, 100]$

1. On note T le temps que met Robert à arriver au lieu de rdv. Calculez la loi de T.
2. Aujourd'hui, il n'a pas le choix entre les 2 itinéraires. Il prend l'itinéraire A. Sa belle attend pendant une durée aléatoire (indépendante de T) qui suit la loi $Exp(\lambda_3)$. Calculer la probabilité que Robert arrive avant que sa belle ne soit partie.
3. Aujourd'hui, il a le choix entre les 2 itinéraires: on prend $\alpha = \frac{1}{2}$. Sa belle attend pendant une durée aléatoire (indépendante de T) qui suit la loi $Exp(\lambda_3)$. Calculer la probabilité que Robert arrive avant que sa belle ne soit partie.