MA 332 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Examen de seconde session - août 2018

L'examen dure 1h30. Les calculatrices sont autorisées. Vous pouvez disposer d'une feuille de notes manuscrites (recto et verso). **que vous devez rendre avec votre copie à la fin de l'examen**.

Exercice 1 (Processus de Poisson - 6 points)
Le nombre de personnes qui franchissent une barrière automatique de métro à l'heure de pointe est modélisé par un processus de Poisson. Il arrive une personne toutes les 2 secondes en moyenne. Parmi les personnes certaines fraudent en n'ayant pas de ticket. Le probabilité pour qu'une personne soit un fraudeur est $p = 0.1$.

1. Modéliser séparément le nombre d'arrivées (au temps t) de fraudeurs et de clients en possession d'un titre de transport
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne fraude dans un intervalle d'une minute?
3. Sachant que 200 personnes sont passées en 12 minutes, quel est le nombre moyen de fraudeurs (pendant ces douze minutes)?
4. 60 personnes sont passées en 8 minutes. Quelle est la probabilité que 5 fraudeurs soient passés dans les 5 premières minutes
5. Chaque fraudeur fait perdre 1 euro à la compagnie de transports. Combien la compagnie perd-elle en moyenne à cette barrière en une heure?

Exercice 2 (Chaîne de Markov en temps discret - 7 points)
Un combat de chars oppose trois chars, nommés A, B, et C. Chacun se bat contre les deux autres. Les chars tirent tous en même temps, toutes les 2 secondes, jusqu'à ce qu'ils soient détruits ou que leurs adversaires le soient. Le char A, un modèle plus efficace, atteint sa cible avec une probabilité $\frac{2}{3}$; le char B, un modèle standard, avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et le char C, un modèle moins efficace, avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Dès qu'un char est atteint, il est détruit. Les chars se sont identifiés mutuellement et connaissent leurs

performances respectives. Lorsqu'un char fait face à deux adversaires, il tire sur l'adversaire le plus dangereux.

1. Modéliser le combat par une chaîne de Markov à temps discret. L'état du combat au "round" k est l'ensemble des chars non détruit au début du round k (i.e. avant le tir $k+1$). Donner le graphe et la matrice des probabilités de transition entre états.

2. En supposant que le combat démarre avec les trois chars A, B et C, donner les probabilités pour chacune des issues possibles

3. Calculer la durée moyenne de ce combat

Exercice 3 (File avec impatience - 8 points) On considère une *file avec impatience*, i.e. une file $M/M/1$ dans laquelle un client qui arrive et voit n clients (dans le système) devant lui a une probabilité p_n de s'insérer dans la file (et une probabilité $1 - p_n$ de partir). Dans cet exercice, on considèrera que les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ (avant de décider si ils entrent dans le système). Le temps de service d'un client est une variable aléatoire avec une distribution exponentielle de paramère μ. La probabilité d'entrée effective dans le systèmes pour un nouveau client arrivant vaut

$$p_n := \frac{1}{1+n} \, , \forall n \geq 0$$

où n désigne le nombre de clients déjà dans le système lorsque le nouveau client arrive.

1. Modéliser cette file par une chaîne de Markov à temps continu

2. Calculer la distribution stationnaire de probabilité associée à cette chaîne

3. Calculer le taux effectif d'entrée et le taux moyen de sortie. A partir de ce calcul discuter la stabilité de la file en fonction des valeurs λ et μ

4. calculer le nombre moyen de clients dans le système

5. calculer le temps de séjour moyen d'un client dans le système (lorsqu'il y entre effectivement)

6. les résultats obtenus sont ils les mêmes que pour une file $M/M/\infty$?