Document autorisé : Les tables des lois de probabilité
Calculatrice autorisée.
Le barème est donné à titre indicatif et peut subir éventuellement quelques modifications.
Nom : ....

Prénom : ....

Exercice 1 *(8 points)* QCM : vous cocherez vos réponses sans justification.
2 points par bonne réponse, -0,5 par mauvaise réponse.

1. Soit f une fonction réelle intégrable sur $\mathbb{R}$ et impaire, sa transformée de Fourier est

   - ☐ $TF[f](y) = 0$
   - ☐ $TF[f](y) = -2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi yt)dt$
   - ☐ $TF[f](y) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi yt)dt$
   - ☐ $TF[f](y) = 2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi yt)dt$

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, sa transformée de Fourier est :

   - ☐ $TF[f](y) = \dfrac{1}{(1+2\pi jy)^2}$
   - ☐ $TF[f](y) = \dfrac{1}{1+2\pi jy}$
   - ☐ $TF[f](y) = \dfrac{1}{1+2\pi jy^2}$
   - ☐ $TF[f](y) = \dfrac{1}{1-2\pi jy^2}$

3. On admet que la transformée de Fourier de $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ est la fonction

$$TF[f](y) = \begin{cases} \pi(1-\pi|y|) & \text{si } y \in [-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On en déduit par l'égalité de Parseval que $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^4 dx$ vaut

   - ☐ π
   - ☐ $\dfrac{2}{3}\pi$
   - ☐ $\dfrac{\pi}{2}$
   - ☐ π^2

4. Si $g(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   - ☐ $g * g(x) = g(x)$
   - ☐ $g * g(x) = \begin{cases} ax^2e^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   - ☐ $g * g(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   - ☐ $g * g(x) = \begin{cases} a^2xe^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 2 *8 points*
On considère la fonction $2\pi-$ périodique f définie sur $[0; 2\pi[$ par $f(x) = (x-\pi)^2$

(a) Tracer la courbe de f sur l'intervalle $[-4\pi; 4\pi[$.

(b) Calculer les coefficients de Fourier de f.

(c) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

(d) En déduire les sommes des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 3 8 points
Soit X une variable aléatoire de loi de Rayleigh, c'est à dire de loi continue donnée par la densité :

$$f(x) = \begin{cases} axe^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (intégrale de Gauss)

(a) Calculer la valeur de a.

(b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}X + 4\right)$.
Indication : On fera une intégration par partie et on utilisera la valeur de l'intégrale de Gauss.

(c) Déterminer la fonction de répartition de X.

(d) Déterminer la fonction de répartition ainsi que la densité de $Y = X^2$.

Exercice 4 *4 points*
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 4y(1-x) & \text{si } x \in [0; 1] \text{ et } y \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.

(b) X et Y sont elles indépendantes.

Exercice 5 *5 points*
Un nouveau virus nommé Pietra venant de Corse vient d'apparaitre

(a) A l'annonce de l'arrivée de ce virus les Professeurs Raoul Volfoni et Fernand Naudin souhaite donner leur avis sur la chaîne de télévision MFB. Le temps de parole en mn de Volfoni suit une loi exponentielle de paramètre λ et celui de Naudin suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Quelle est la probabilité que Volfoni parle plus longtemps que Naudin.
Pour l'application numérique, on prendra $\lambda = \frac{1}{10}$, $a = 10$ et $b = 20$.

(b) Le Professeur Raoul Volfoni veut maintenant savoir la proportion de personnes dans sa ville Pasticity qui sont atteintes de ce fameux virus corse Pietra. Il utilise un test CPR fiable à 100%. Combien de personnes doit il tester pour connaitre cette proportion à 0,01 près au risque de 5% sachant que l'on est sûr que moins de 10% de la population est atteinte.

Exercice 6 *5 points*
A la veille d'une élection présidentielle comportant deux candidats, Robert et Brad, on a interrogé 100 électeurs. 58 d'entre eux ont déclaré avoir l'intention de voter pour Robert.

(a) Estimer par intervalle de confiance au niveau 0,95 la proportion d'intention de vote pour Robert.

(b) Peut on en déduire avec une probabilité de 0,95 que Robert sera élu si les intentions ne changent pas.

(c) Avec une même fréquence observée, quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour pouvoir affirmer, avec un niveau de confiance de 0,95, que le candidat Robert sera élu.