Exercice 1 On tente d'organiser le planning des entretiens de recrutement à un concours. On a constaté que 10% des personnes convoquées ne viennent pas à l'entretien. 250 personnes ont été convoquées pour les entretiens.

1. On note X le nombre de personnes effectivement présentes pour passer l'entretien. Calculer la loi (exacte) de X.
2. Calculer, de façon approchée, $P(X \leq 230)$
3. Pendant une journée d'entretiens, il y a 10 jurys, qui peuvent interroger chacun 12 candidats. Combien faut il convoquer de candidats pour être sûr à 90% que tous puissent passer devant un jury ?

Exercice 2 Le surbooking est une pratique employée par les compagnies aeriennes qui consiste à vendre plus de billets qu'il n'y a de places dans l'avion, car on a constaté que 15% des personnes qui ont réservé une place ne viennent pas. Or une place non occupée coûte très cher...

1. Sur un vol de 100 places, la compagnie accepte 120 réservations. Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 90 personnes présentes?
2. Sur un vol de 100 places, combien peut on accepter de réservations si on veut être sûr à 90% qu'il n' y ait pas de clients insatisfaits?

Exercice 3 On veut estimer le pourcentage p de réponses positives à un référendum. On fait donc un sondage parmi n individus, et on pose F_n = fréquence de réponses positives observée dans ce sondage. On cherche n_0, le plus petit entier n tel que la probabilité que F_n diffère de p de plus de α soit inférieure à $c \in]0;1[$. Calculez n_0 si on prend $c = 0.05$, $\alpha = 0.01$ dans les deux cas suivants:

1. Si on sait que $p \in]0; 0.3[$
2. Si on ne sait rien sur p !

Exercice 4
On considère la fréquence relative f d'apparition du résultat "pile" au cours de 10^8 jets d'une pièce équilibrée. Que peut-on dire de la probabilité que cette fréquence relative f s'écarte de $1/2$ de plus de un millième?

Exercice 5
La proportion de pièces défectueuses produites par une machine est de $p = 0.02$. Les pièces produites sont emballées par boîte de 100. Lors d'un contrôle de qualité, une boîte est choisie au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'elle ne contienne aucune pièce défectueuse?
2. Quelle est la probabilité qu'elle ne contienne pas plus de deux pièces défectueuses?
3. Comparer les résultats exacts et ceux obtenus par une approximation par variable de Poisson.

Exercice 6
Le standard téléphonique d'une entreprise desservant 1000 postes téléphoniques comprend 50 lignes. Aux heures de pointe, sur une durée d'une heure, chacun de ces postes seraient occupés en moyennes 2,5 minutes si tout le trafic pouvait s'écouler. Déterminer la probabilité de saturation de l'ensemble des lignes à un instant quelconque d'une heure de pointe.

Exercice 7
La distribution de Pareto de paramètres $\alpha > 0$ et $x_0 > 0$ est caractérisée par la densité de probabilité :

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si} \quad x \geq x_0 \\ 0 & \text{si} \quad x < x_0 \end{cases}$$

Le paramètre x_0 étant connu, calculer l'estimation par maximum de vraisemblance de α à partir d'un échantillon aléatoire et simple $(x_1, \ldots, x_n)$.

Exercice 8
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

On dispose d'un échantillon $x_1,\ x_2,\ ..., x_n$.
Déterminer l'estimateur de λ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 9
Robert cherche l'école qui l'accueillera à la rentrée prochaine. Il visite l'une d'entre elles lors d'une journée portes ouvertes, et se demande quelle est la proportion p de filles dans cette école (un de ses critères de choix). Il aperçoit en tout 110 élèves de l'école, et parmi eux 21 filles. Donner une estimation ponctuelle de p, puis une estimation par intervalle, au seuil de confiance de 95 %.

Exercice 10 On dispose d'une balance à affichage digital. Malheureusement , il y a un décalage au niveau de l'affichage, quand on pèse une masse de 1 kg, le cadran n'indique pas 1000, mais une autre valeur. Le poids indiqué quand on pose une masse de 1 kg suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ où m est inconnu.
On pèse 10 fois de suite une masse de 1 kg, et on obtient :

$$982,\ 998,\ 977,\ 978,\ 981,\ 989,\ 971,\ 994,\ 969,\ 980.$$

1. Donner au niveau de confiance de 95%, un intervalle de confiance de m lorsque σ est connu, et $\sigma = 5$.
2. Donner au niveau de confiance de 95%, un intervalle de confiance de m lorsque σ est inconnu.

Exercice 11 On a réalisé une étude portant sur les temps de transmissions de fichiers informatiques à travers un réseau. On obtient le tableau:

12.7	13.4	14.5	11.7	10.6	11.4	12.2	13.7	14.1	13.3	12.6	12.2
11.3	12.5	12.3	13.7	15.1	13.7	12.5	14.4	12.5	13.3	14.5	13.3
12.5	13.3	12.5	10.7	10.5	12.4	11.9	12	13.5	14.1		

1. Calculer la moyenne et la variance empirique de cet échantillon.
2. Donner une estimation ponctuelle de μ et σ^2
3. Donner un intervalle de confiance pour la moyenne μ au seuil de confiance de 95%