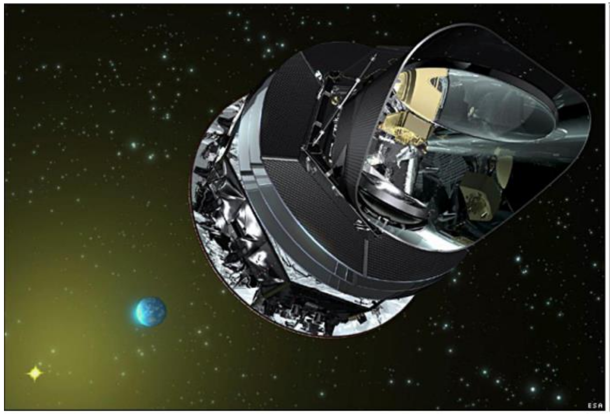
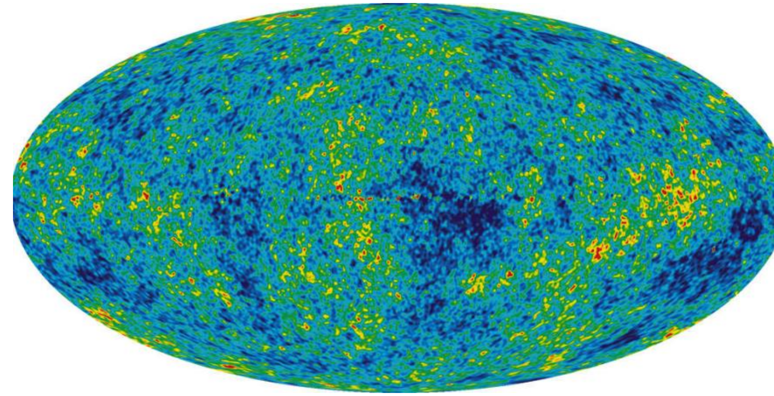
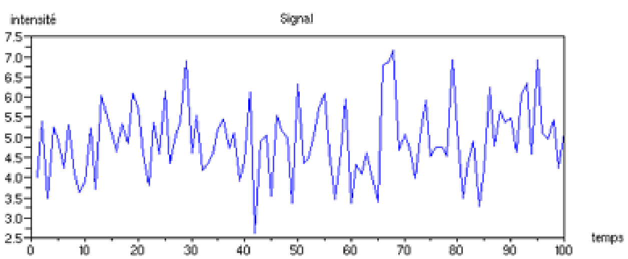


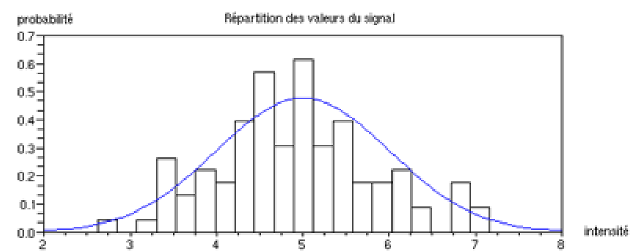
Satellite Planck



Mesure du bruit de fond de l'univers

Traitement du signal
Signaux aléatoires





Grenoble INP ESISAR

Traitement du signal signaux aléatoires

- Rappel de probabilité
- Processus aléatoire (PA), Signal aléatoire (SA), Variable aléatoire (VA)
- Propriétés des signaux aléatoires
- Propriétés des variables aléatoires : continues, discrètes, bidimensionnelles
- Processus aléatoire
- Bruit – formalisme mathématique
- Filtrage d'un processus aléatoire
- Conclusion

Qu'est-ce qu'un signal aléatoire?

Signal déterministe

- Un signal déterministe est décrit par une équation mathématique. La connaissance du signal à l'instant t permet de connaître sa valeur à l'instant t+Δt.
- Par exemple :

  Note de musique : $X(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t)$

  Avec A_0, amplitude du signal, f_0, fréquence du signal.

Signal aléatoire

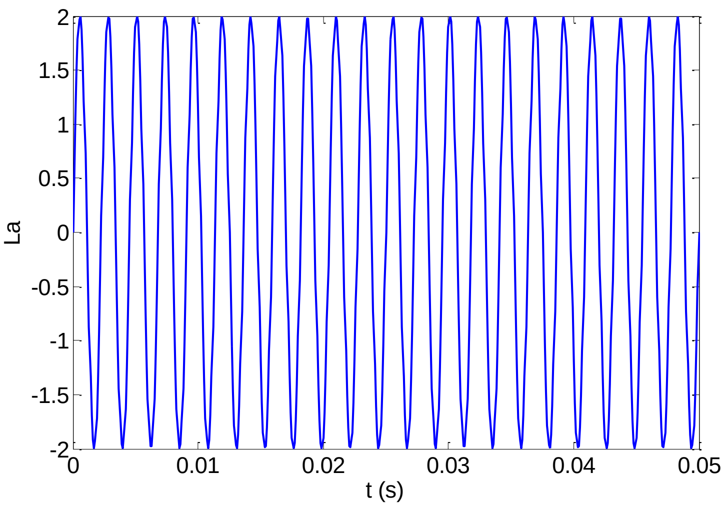
- Signal dont la connaissance à l'instant t ne peut pas être connue à l'instant t+Δt
- Il n'existe donc pas de formulation mathématique « analytique » permettant de décrire le phénomène.

  Adaptation des outils mathématiques pour décrire ces phénomènes : Utilisation des paramètres statistiques.

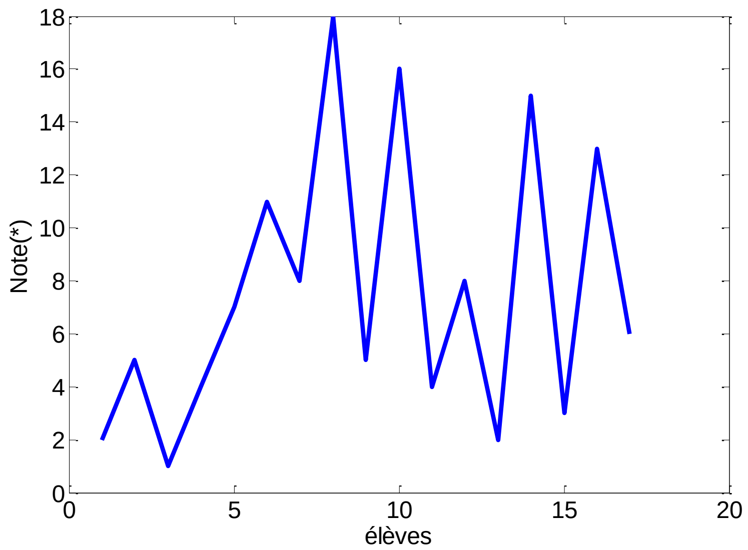
  - Par exemple : les notes de MA369.

Qu’est-ce qu’un signal aléatoire?

Signal déterministe



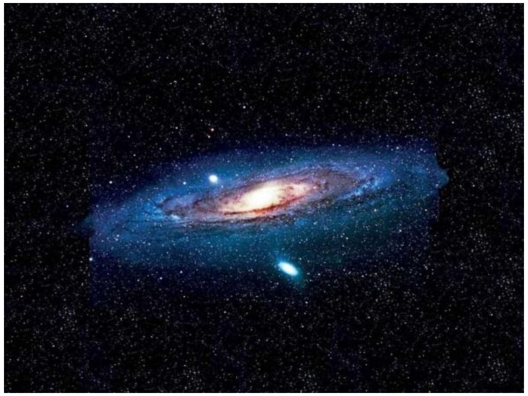
Signal aléatoire



(*) inspiré de faits réels

Pourquoi étudier les signaux aléatoires?

- La majorité des systèmes rencontrés en pratique sont de nature aléatoire
- Cette nature à deux origines :
  - La connaissance de système est incomplète ou le système est trop complexe.



  - Seul un signal aléatoire apporte une information

1 0 1 1 0 0

Rappel sur la théorie des probabilités

On note Ω l'ensemble de tous les événements possibles issus d'une expérience donnée

On note A, B, C, … l'ensemble des événements issue de l'expérience ayant des caractéristiques données

On définit la probabilité de réalisation de A par :

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

m : nombre d'occurrence de A
n : nombre d'épreuve

Rappel sur la théorie des probabilités

Axiomes des probabilités

a. $0 \leq P(A) \leq 1$

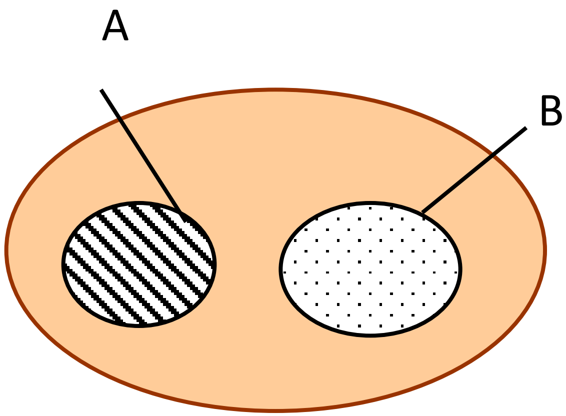
b. $P(\Omega) = 1$

c. Théorème des probabilités totales

si $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ et $A \cap B = 0$

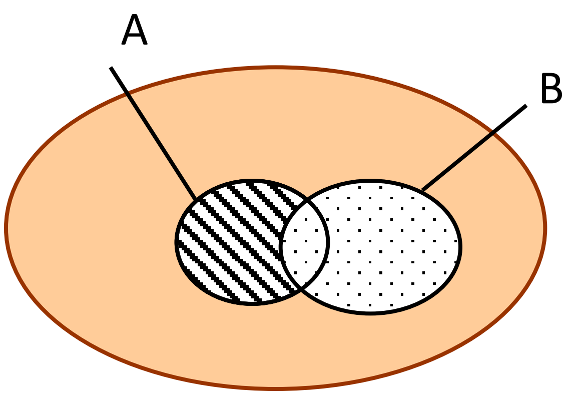
A et B sont dit incompatibles alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



si $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ et $A \cap B \neq 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Rappel sur la théorie des probabilités

Axiomes des probabilités

d. Probabilité conditionnelle

La probabilité conditionnelle P(B/A) est la probabilité d'obtenir l'évènement B lorsque A est réalisé

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{si} \quad P(A) > 0$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad P(A) = 0$$

Formule utile : $P(B \cap A) = P(B/A)P(A) = P(A/B)P(B)$

e. Propriétés :

$$P(\phi) = 0$$

si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Rappel sur la théorie des probabilités

Axiomes des probabilités

f. Indépendance

A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

On a donc

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A) \times P(B)/P(B) = P(A)$$

La réalisation de B n'apporte aucune information sur la réalisation de A

Rappel sur la théorie des probabilités

Axiomes des probabilités

g. Formule développée de Bayes

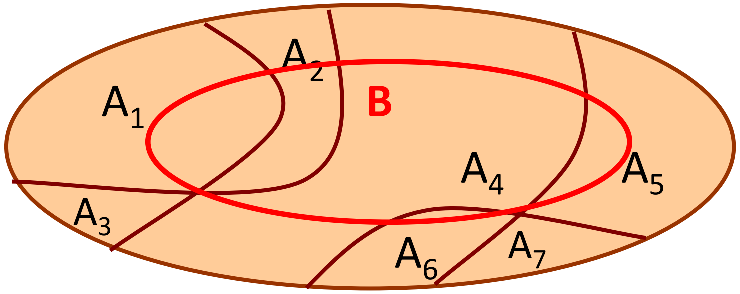
soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des évènements formant une partition de Ω

soit B un évènement quelconque

Alors :

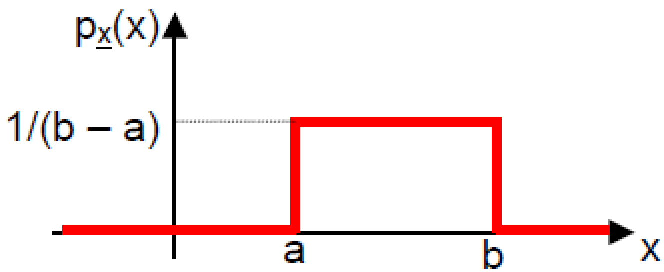
$$P(B) = P(B \cap A_1) \cup P(B \cap A_2) \cup \ldots P(B \cap A_n)$$

$$P(A_i / B) = \frac{P(B \cap A_i) P(A_i)}{P(B / A_1) P(A_1) + \ldots + P(B / A_n) P(A_n)}$$



Loi d'usage courant

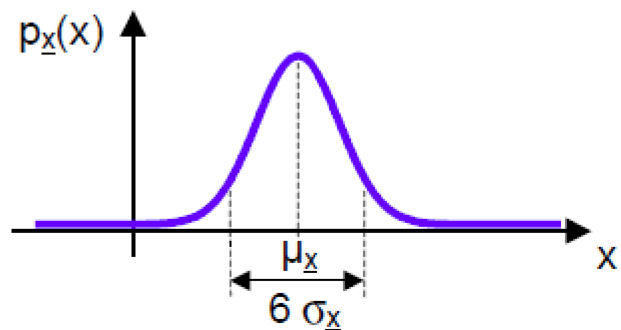
Loi uniforme



$$p_{\underline{x}} = \frac{1}{b-a} \; \forall \, x \; \in \; [a, b]$$

$$p_{\underline{x}} = 0 \text{ sinon}$$

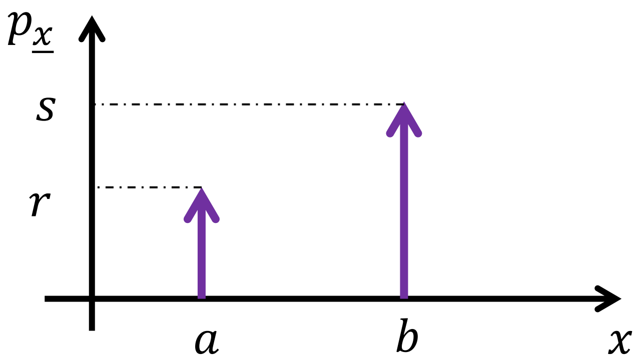
Loi gaussienne (ou loi normale)



$$p_{\underline{x}} = \frac{1}{\sigma_{\underline{x}}\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(-\frac{\left(x-\mu_{\underline{x}}\right)^2}{2{\sigma_{\underline{x}}}^2}\right)$$

Loi d'usage courant

Loi binaire



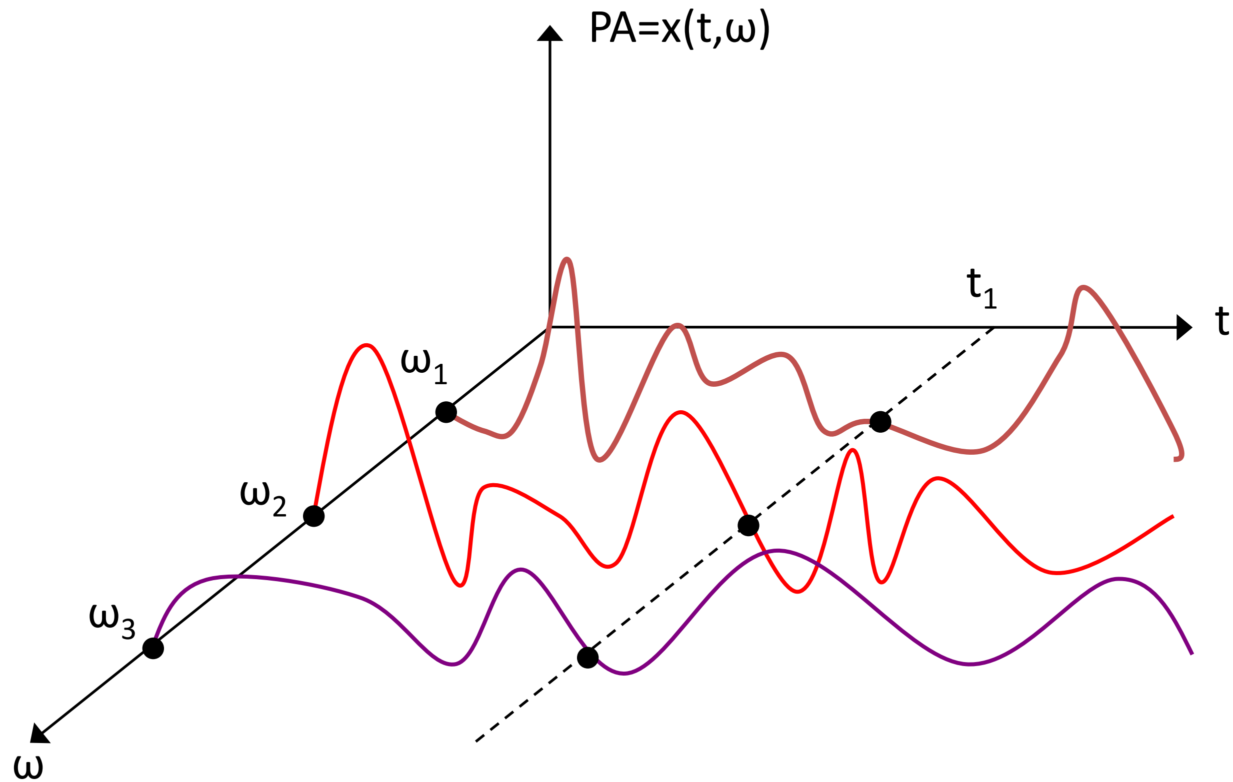
$$p_{\underline{x}} = r \cdot \delta(x-a) + s \cdot \delta(x-b)$$

Comparaison par rapport à un seuil

Processus, signal, variable aléatoire

Processus aléatoire

Un processus aléatoire (PA) est un ensemble de signaux similaires tous générés par le même phénomène.
PA = x(t,ω) avec t, le temps et ω, la réalisation de l'évènement.

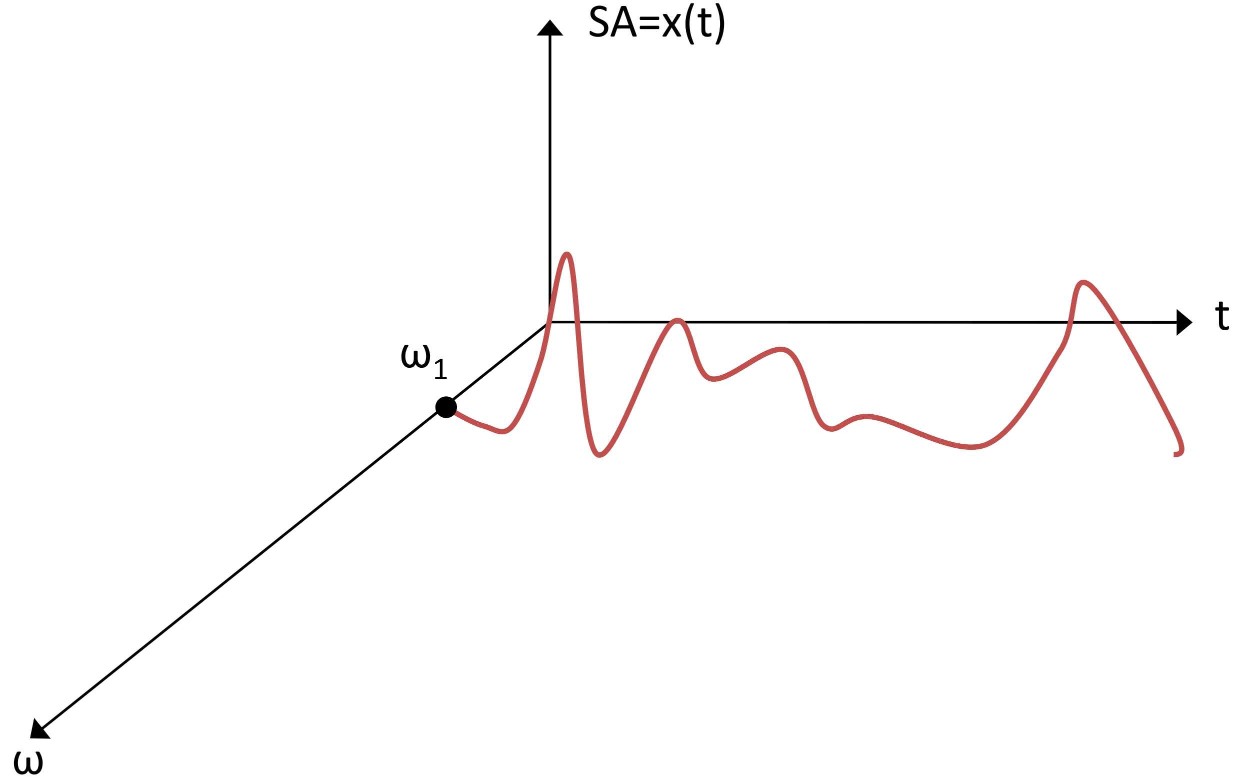


Processus, signal, variable aléatoire

Signal aléatoire

Pour une réalisation ω_i donnée, nous obtenons un signal aléatoire (SA) dépendant du temps t : SA = $x(t,\omega_i)$

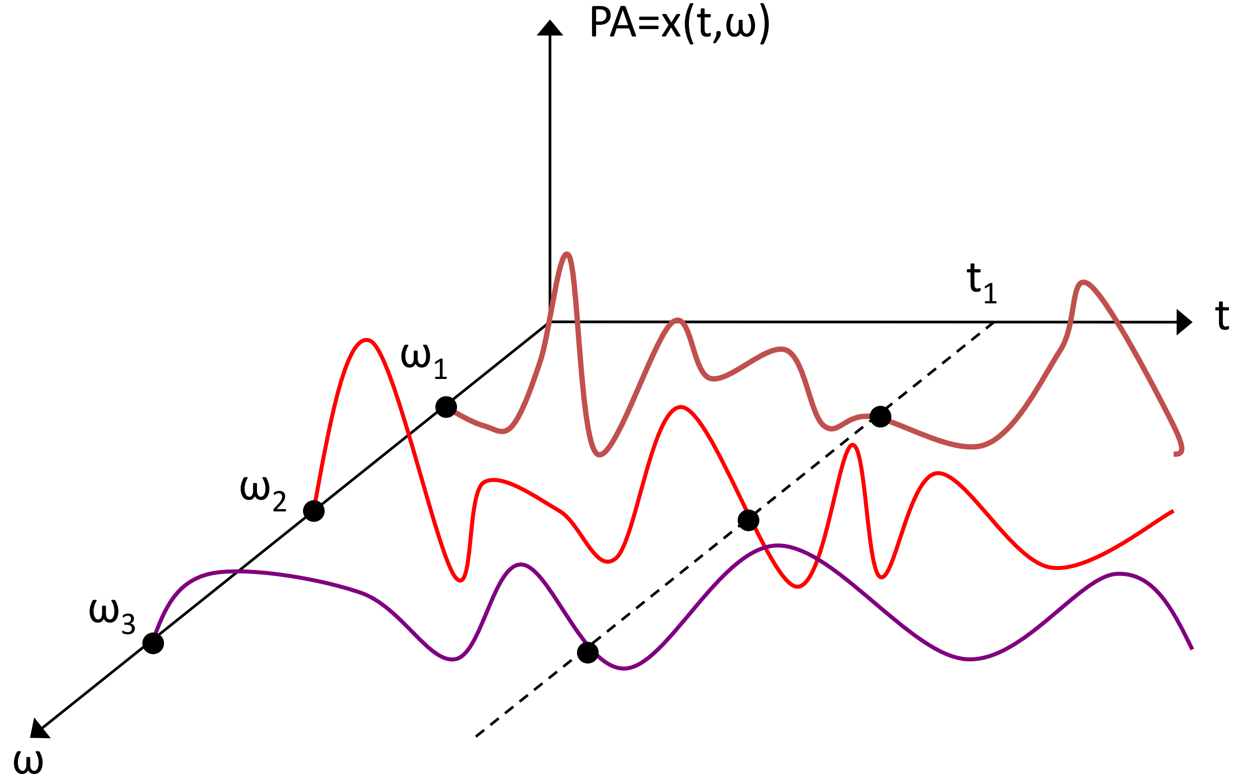
Un signal aléatoire est une réalisation particulière d'un processus aléatoire



Processus, signal, variable aléatoire

Variable aléatoire

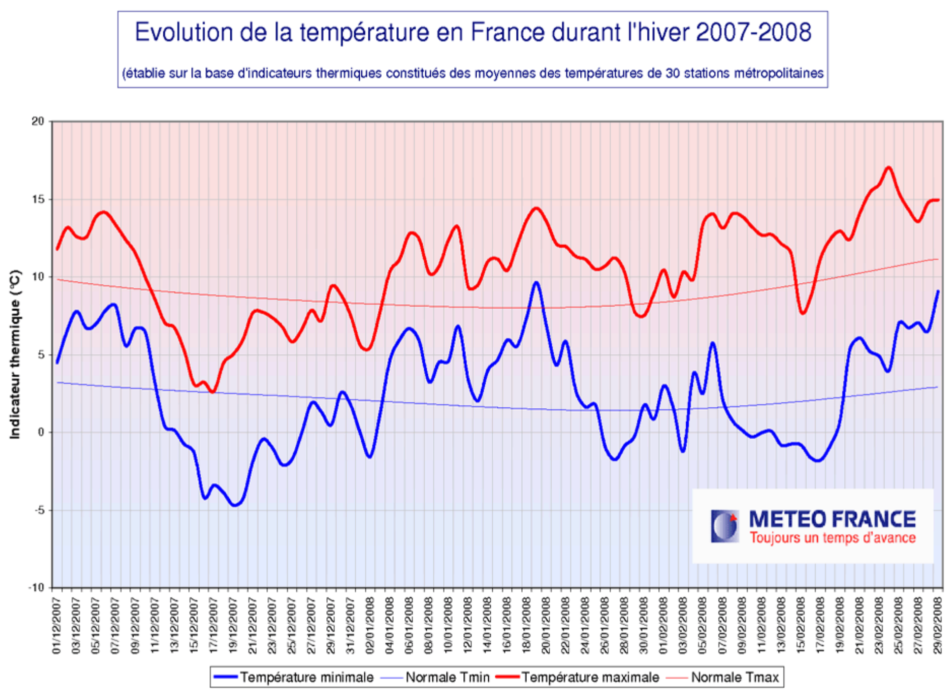
Pour un temps t_i donné, nous obtenons une variable aléatoire (VA) dépendant de la réalisation de l'événement : VA = $x(t_i,\omega)$



Processus, signal, variable aléatoire

Exemple

Processus : Température en hiver en France
Signal aléatoire : Évolution de la température durant l'hiver en France en 2007-2008
Variable aléatoire : Évolution de la température le premier jour de l'hiver.



Processus, signal, variable aléatoire

Exemple

Processus : transmission d'un signal de fréquence $f_0 \in \mathbb{R}^{+*}$

$$X(t,\omega) = \mathrm{A} \cdot sin\left(2\pi f_0 t + \underline{\varphi}(\omega)\right)$$

Avec f_0 *et* A des constantes finis et ω ∈ Ω

$\underline{\varphi}(\omega)$, phase aléatoire uniformément distribuée sur [0, 2π]

Signal aléatoire : $X(t,\omega_1) = \mathrm{A} \cdot sin\left(2\pi f_0 t + \underline{\varphi}(\omega_1)\right)$

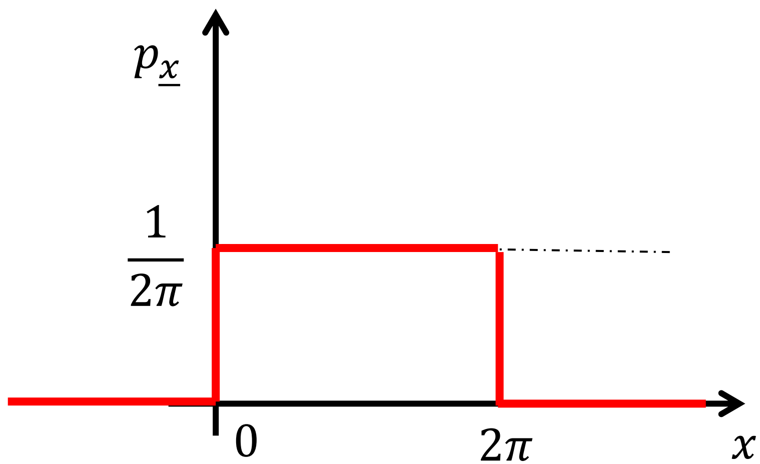
Variable aléatoire : $X(t_1,\omega) = \mathrm{A} \cdot sin\left(2\pi f_0 t_1 + \underline{\varphi}(\omega)\right)$

Cet exemple illustre le cas pratique d'une transmission sans fil d'un signal. Selon l'état du canal de transmission, la phase du signal peut varier même si à l'émission celle-ci reste constante.

Processus, signal, variable aléatoire

Exemple

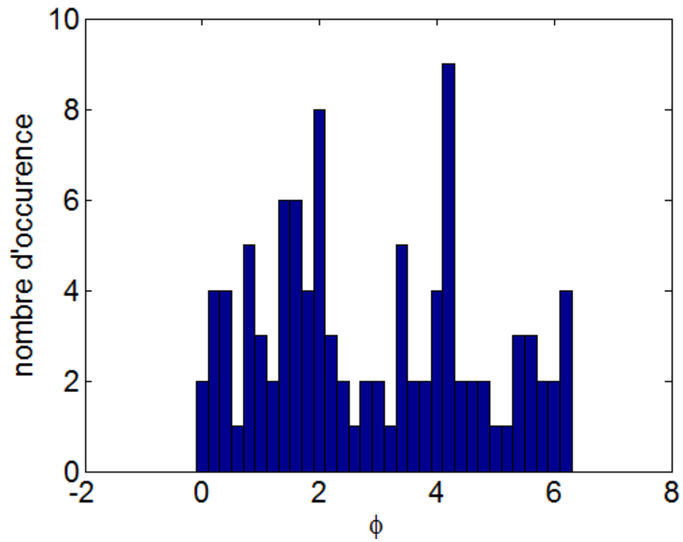
La phase est uniformément distribuée entre 0 et 2π.
Elle suit donc une loi uniforme :



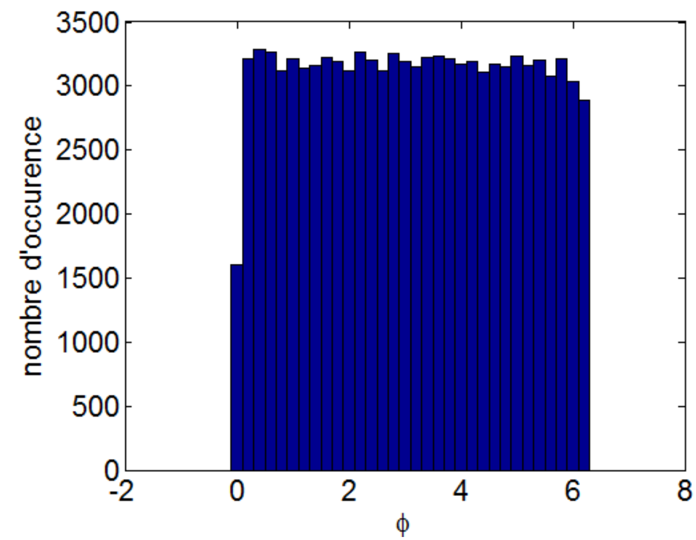
Processus, signal, variable aléatoire

Exemple

$\underline{\varphi}(\omega)$, phase aléatoire uniformément distribuée sur [0, 2π]



N = 100



N = 100000

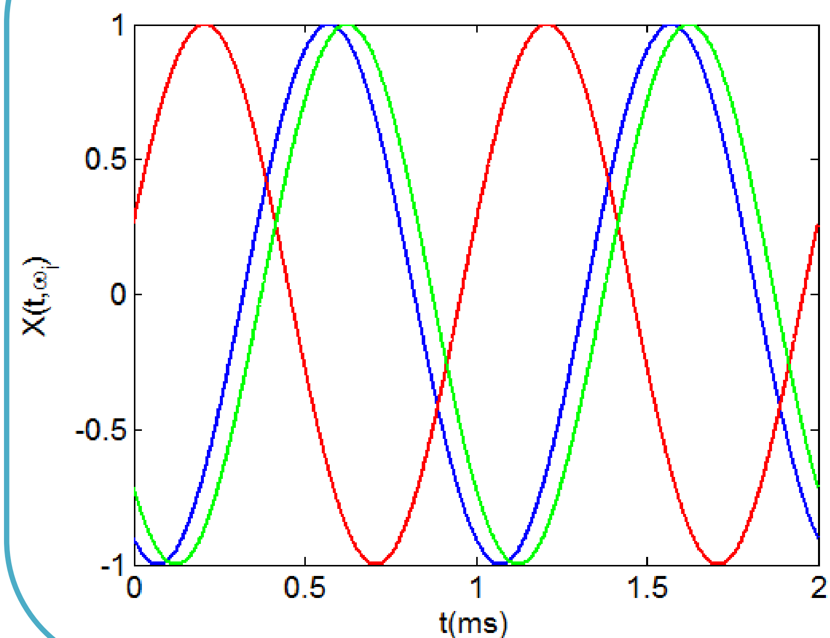
Matlab

```
phi=rand(1,100)*2*pi; % vecteur [1,100]
% rand : nombre uniformément réparti entre 0 et 1
Figure; hist(phi)
%affichage sous forme d'histogramme
```

Processus, signal, variable aléatoire

Exemple

Signal aléatoire $X(t,\omega_i) = \mathrm{A} \cdot sin\left(2\pi f_0 t + \underline{\varphi}(\omega_i)\right)$



Signal aléatoire X pour trois réalisations du processus.
Nous pouvons observer le changement de phase du signal

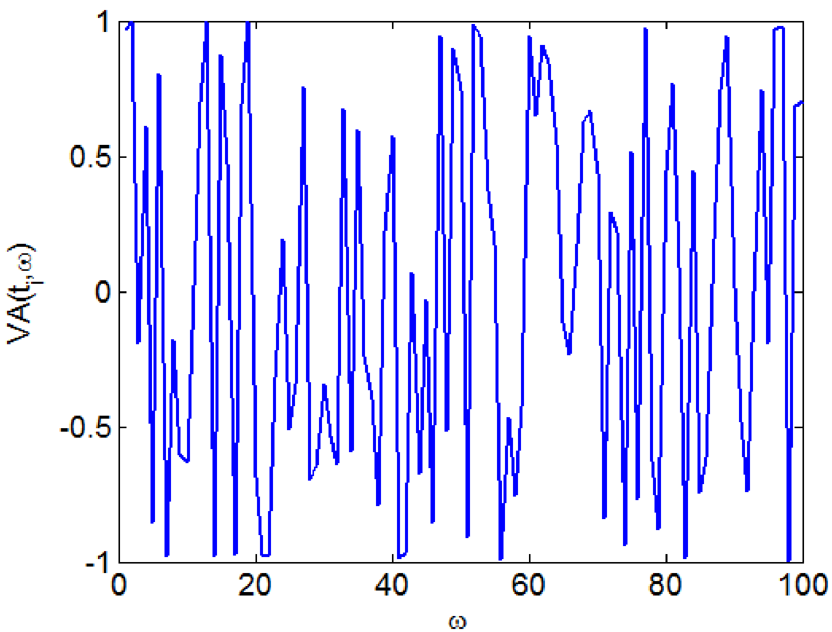
Matlab

```
t=[0:1/(N*f0):2/f0]; % vecteur temps
X1=A*sin(2*pi*f0*t+phi(1)); %signal aléatoire pour ω1
X2=A*sin(2*pi*f0*t+phi(2)); %signal aléatoire pour ω2
X3=A*sin(2*pi*f0*t+phi(3)); %signal aléatoire pour ω3
```

Processus, signal, variable aléatoire

Exemple

Variable aléatoire $X(t_1, \omega) = \mathrm{A} \cdot sin\left(2\pi f_0 t_1 + \underline{\varphi}(\omega)\right)$



Variable aléatoire X à l'instant t_1
Nous pouvons observer le caractère aléatoire de la variation de phase.

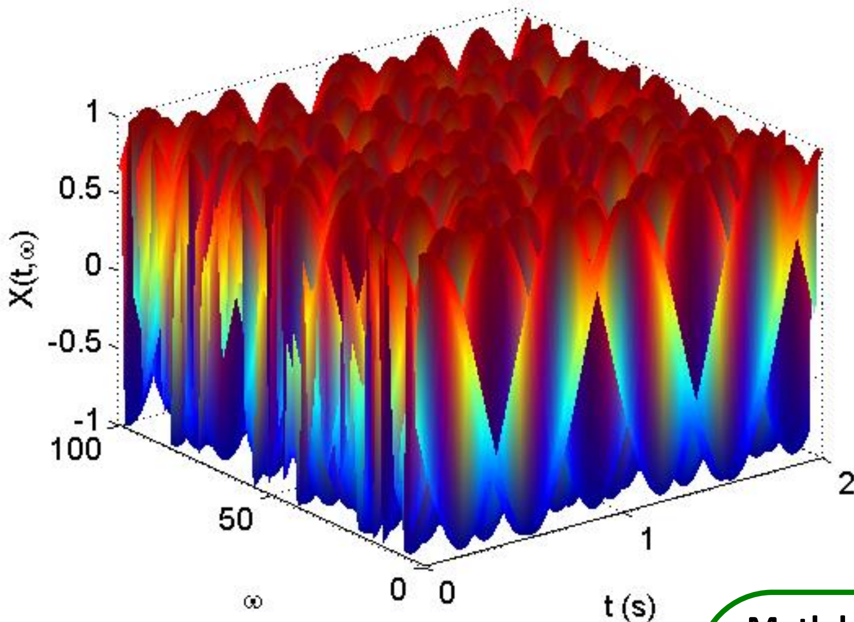
Matlab

```
VA=A*sin(2*pi*f0*t(10)+phi); % variable aléatoire à l'instant t(10)
```

Processus, signal, variable aléatoire

Exemple

Processus aléatoire $X(t,\omega) = \mathrm{A} \cdot sin\left(2\pi f_0 t + \underline{\varphi}(\omega)\right)$



En pratique, il n'est pas possible d'avoir une infinité de réalisation du processus. Comment caractériser et étudier ce genre de signaux?

Matlab

```
figure
surf(t*1e3,w,PA)
shading interp
set(gcf,'color','white')
set(gca,'fontsize',14)
xlabel('t (s)','fontsize',14)
ylabel('\omega','fontsize',14)
zlabel('X(t,\omega)','fontsize',14)
```

Signal aléatoire, formulation temporelle

- Un signal aléatoire quelconque peut être caractérisé par un certain nombre de moyennes temporelles obtenues en intégrant l'espace des temps
- Cette formulation est indépendante du temps mais elle dépends de l'épreuve ω considérée.
- La formulation temporelle seule n'est donc pas suffisante pour étudier ces problèmes comme nous le verrons par la suite.
- Dans le cours, nous étudierons des signaux réels de puissance moyenne finie.

Signal aléatoire, formulation temporelle

- Composante continue

SAC $$V_{xc}(\omega_i) = \langle x(t,\omega_i)\rangle_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T x(t,\omega_i)dt$$

SAD $$V_{xc}(\omega_i) = \langle x(n,\omega_i)\rangle_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_N x(n,\omega_i)$$

- Puissance de la composante continue

SAC $P_{xc} = \langle x(t,\omega_i)\rangle_T^2$ SAD $P_{xc} = \langle x(n,\omega_i)\rangle_N^2$

- Puissance totale

SAC $$P_x = \langle x^2(t,\omega_i)\rangle_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T |x|^2(t,\omega_i)dt$$

SAD $$P_x = \langle x^2(n,\omega_i)\rangle_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_N |x|^2(n,\omega_i)$$

SAD : Signal Aléatoire Discret SAC : Signal Aléatoire Continu

Signal aléatoire, formulation temporelle

- Valeur efficace

SAC $$V_{xe}(\omega_i) = \sqrt{P_x(\omega_i)}$$

SAD $$V_{xe}(\omega_i) = \sqrt{P_x(\omega_i)}$$

- Puissance des fluctuations

SAC $$P_{xf} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T \{x(t,\omega_i) - \langle x(t,\omega_i)\rangle\}^2 dt$$

SAD $$P_{xf} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_N \{x(n,\omega_i) - \langle x(n,\omega_i)\rangle\}^2$$

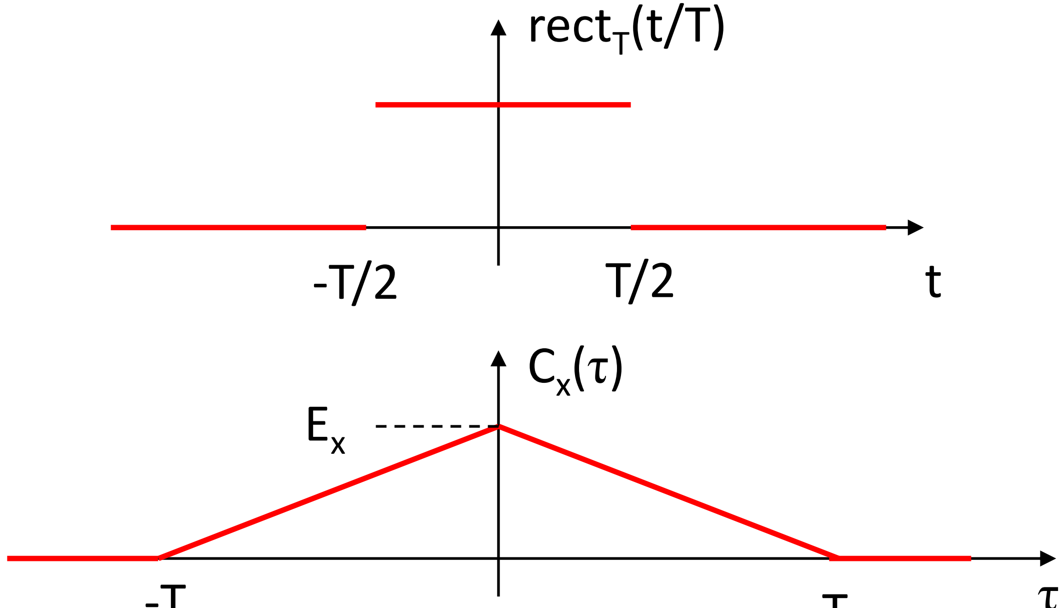
SAD : Signal Aléatoire Discret SAC : Signal Aléatoire Continu

Signal aléatoire, autocorrélation temporelle

SAC : énergie finie

$$C_x(\tau) = \int_T x(t,\omega_i)\cdot x^*(t-\tau,\omega_i)dt = x(\tau,\omega_i) * x^*(-\tau,\omega_i)$$

- L'autocorrélation est une comparaison entre le signal et ses copies retardée.
- $C_x(0)$ est l'énergie du signal .
- De manière imagée, l'autocorrélation est un indicateur de la déformation du signal au cours du temps

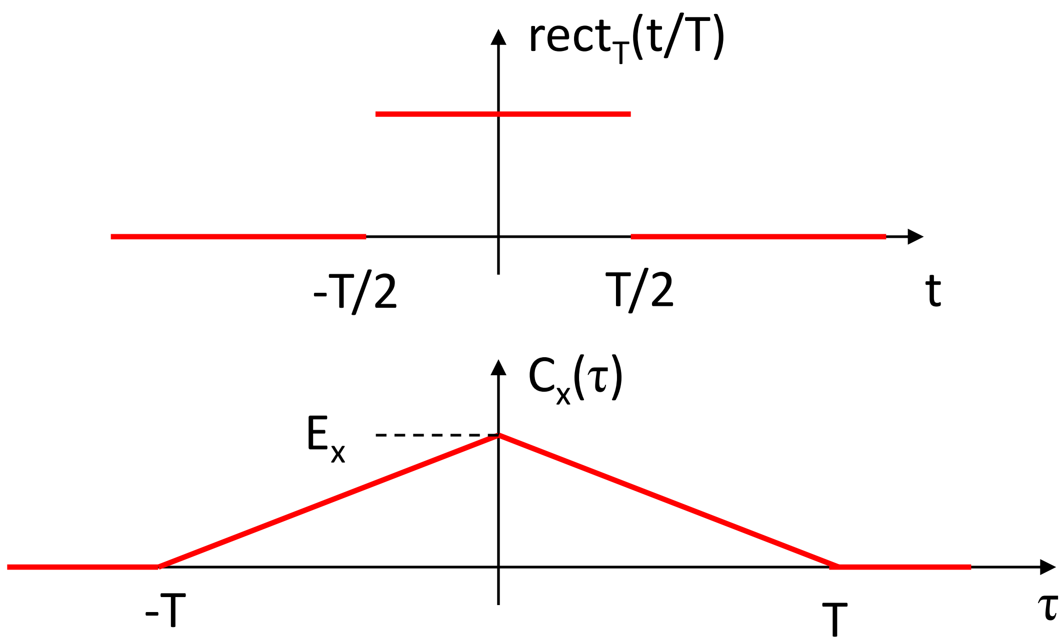


Signal aléatoire, autocorrélation temporelle

SAC : puissance finie

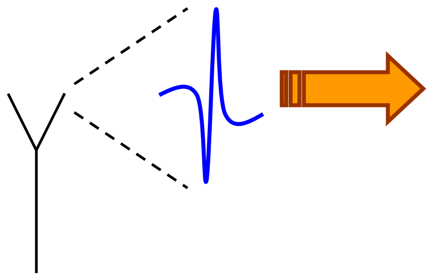
$$C_x(\tau) = lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T x(t,\omega_i)\cdot x^*(t-\tau,\omega_i)dt = x(\tau,\omega_i) * x^*(-\tau,\omega_i)$$

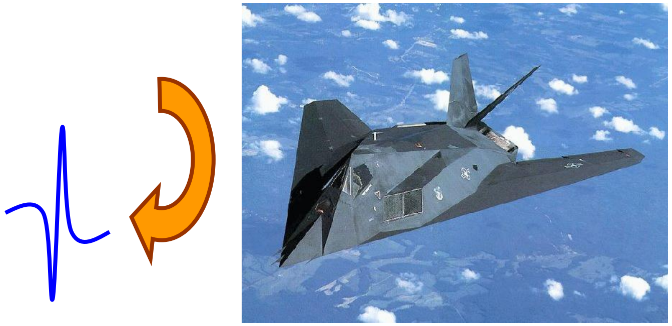
- L'autocorrélation est une comparaison entre le signal et ses copies retardée.
- $C_x(0)$ est l'énergie du signal .
- De manière imagée, l'autocorrélation est un indicateur de la déformation du signal au cours du temps



Signal aléatoire, autocorrélation temporelle

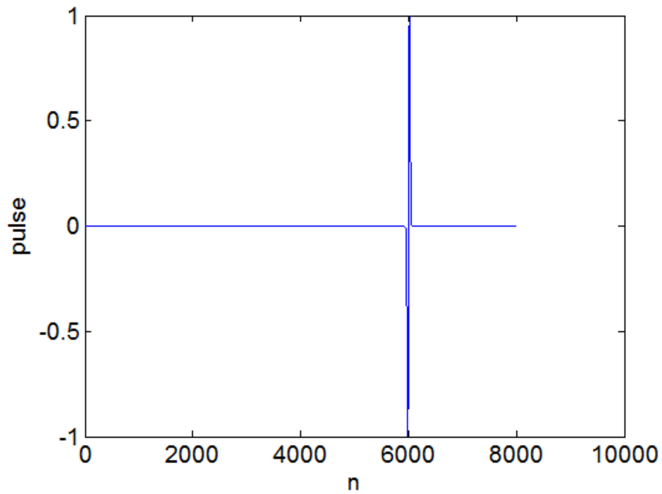
- Autocorrélation : application à la détection de signal (radar)

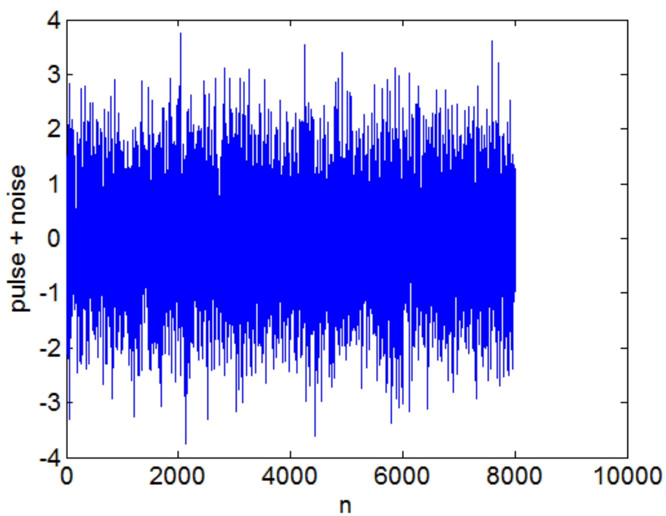




1. Envoi d'une impulsion gaussienne

2. Enregistrement du signal de retour fortement bruité

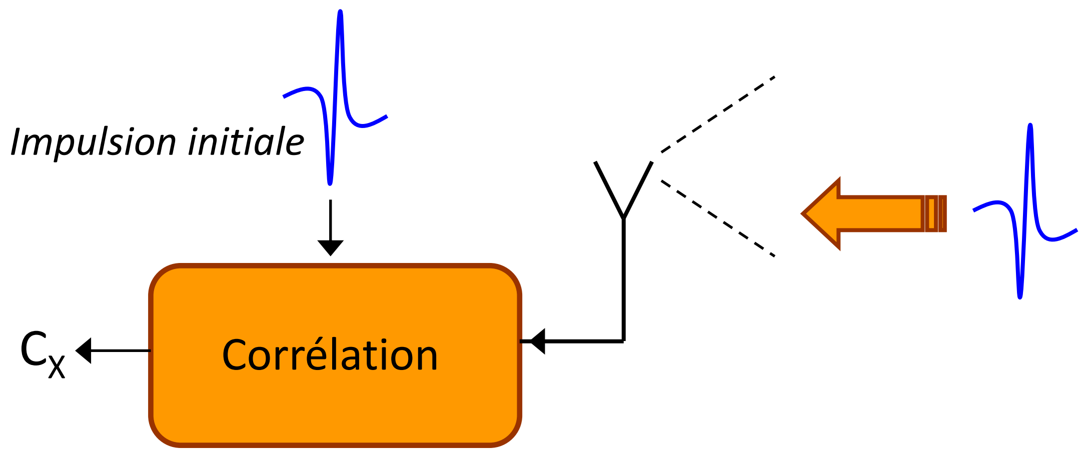




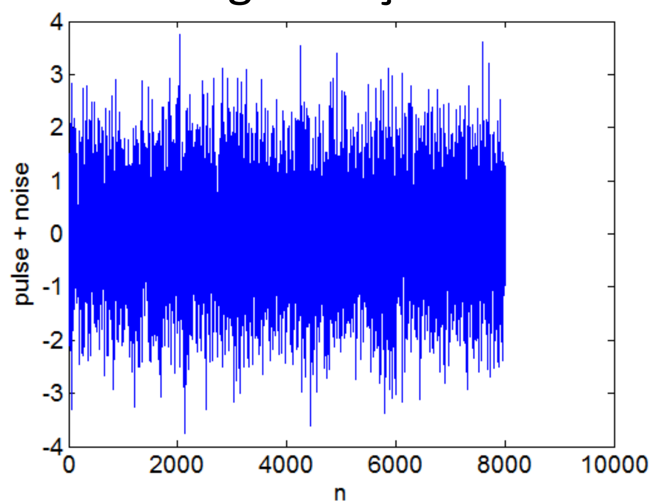
Comment détecter l'impulsion de retour ?

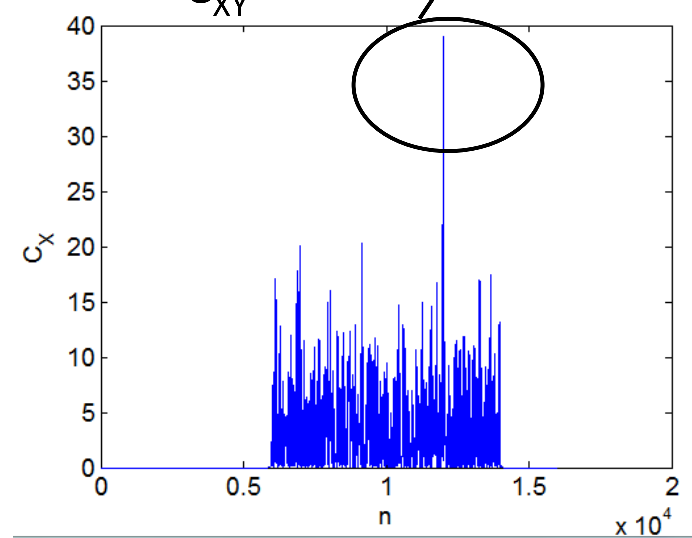
Signal aléatoire, autocorrélation temporelle

- Autocorrélation : application à la détection de signal (radar)



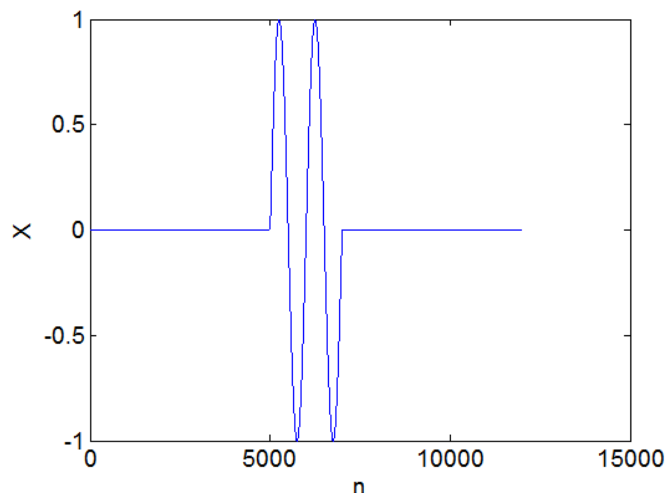
Détection de l'impulsion

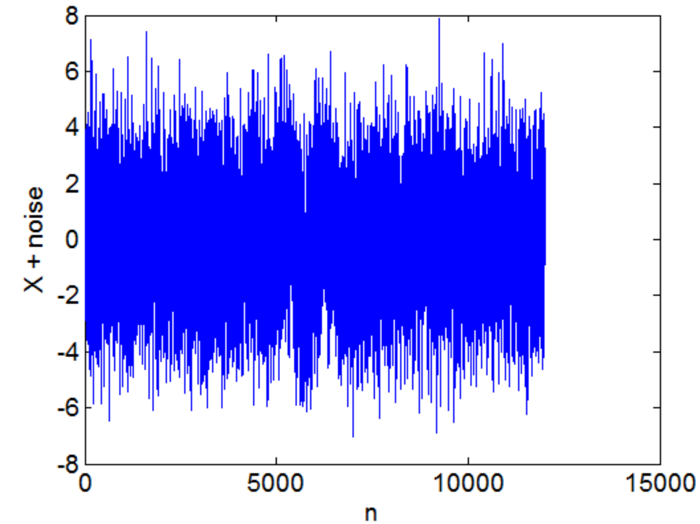


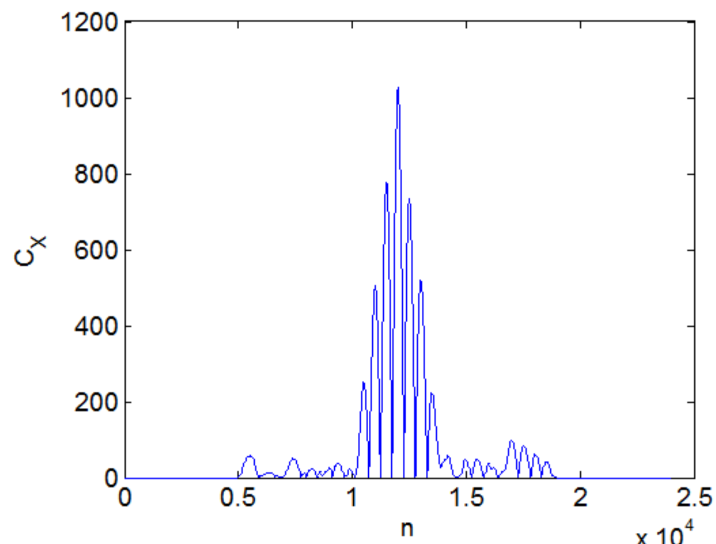


Signal aléatoire, autocorrélation temporelle

- Autocorrélation temporelle : détection d'une trame périodique







Signal aléatoire, autocorrélation temporelle

- Autocovariance temporelle

L'autocovariance est égale à l'autocorrélation en considérant le signal centré en zéro

SAC $V_x(\tau) = (x(\tau,\omega_i) - \langle x\rangle_T) * (x(-\tau,\omega_i) - \langle x\rangle_T)^*$

SAD $V_x(n) = (x(n,\omega_i) - \langle x\rangle_N) * (x(-n,\omega_i) - \langle x\rangle_N)^*$

Pour un signal réel, l'autocovariance est la différence entre l'autocorrélation et la composante continue

SAC $V_x(\tau) = C_x(\tau) - (\langle x\rangle_T)^2$

SAD $V_x(n) = C_x(\tau) - (\langle x\rangle_N)^2$

SAD : Signal Aléatoire Discret SAC : Signal Aléatoire Continu

Signal aléatoire : exemple

- Signal aléatoire : $X(t,\omega_i) = \mathrm{A} \cdot sin\left(2\pi f_0 t + \underline{\varphi}(\omega_i)\right)$

Composante continue ?

Signal aléatoire : exemple

- Signal aléatoire : $X(t,\omega_i) = \mathrm{A} \cdot sin\left(2\pi f_0 t + \underline{\varphi}(\omega_i)\right)$

Puissance moyenne totale?

Signal aléatoire : exemple

- Signal aléatoire : $X(t,\omega_i) = \mathrm{A} \cdot sin\left(2\pi f_0 t + \underline{\varphi}(\omega_i)\right)$

Autocorrelation ?

Variable aléatoire, formulation statistique

- Une variable aléatoire réelle ou complexe $X(t_i, \omega)$ est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, t_i étant fixé et ω étant différentes épreuves de l'expérience

Exemple de VA : note d'une promo

VA	9	10	12	8	9	12	9	14	13	11	13	13
12	15	12	13	8	10	13	12	11	10	13	16	13
11	14	13	15	9	12	11	9	12	11	9	11	7
10	5	12	13	13	9	11	13	15	10	11	14	11
11	12	10										

Variable aléatoire : fonction de répartition

La fonction de répartition de la variable aléatoire continue, réelle, $\underline{x}$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$F_{\underline{x}} = \mathrm{P}(\underline{x} \leq x) = P(\underline{x} \in \,]-\infty; x])$$

Concrètement, c'est la probabilité pour qu'à un instant donné la variable aléatoire soit inférieure à un niveau *x* donné.

Variable aléatoire : Densité de probabilité

La densité de probabilité de la variable aléatoire continue réelle $\underline{x}$ est définie par :

$$\boxed{p_{\underline{x}}(x) = \frac{dF_{\underline{x}}(x)}{dx}}$$

La fonction de répartition s'exprime alors en fonction de la densité de probabilité par la relation :

$$\boxed{F_{\underline{x}}(x) = \int_{-\infty}^{x} p_{\underline{x}}(u)du}$$

Démonstration :

$$dF_{\underline{x}}(x) = p_{\underline{x}}(x) \cdot dx$$

$$\int_{-\infty}^{x} dF_{\underline{x}}(u) = \int_{-\infty}^{x} p_{\underline{x}}(u) \cdot du = F_{\underline{x}}(x) - F_{\underline{x}}(-\infty)$$

$$= F_{\underline{x}}(x) \;\; car \;\; F_{\underline{x}}(-\infty) = 0$$

Variable aléatoire : Densité de probabilité

Propriétés de la densité de probabilité

- F_x est croissante au sens large : $p_{\underline{x}}(x) = \dfrac{dF_{\underline{x}}(x)}{dx} \geq 0$

- $F_{\underline{x}}(+\infty) = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\underline{x}}(u)du = 1$

- $P\left(\underline{x} \in \,]x_1; x_2[\right) = \int_{x_1}^{x_2} p_{\underline{x}}(u)du$

Démonstration :

$$P\left(x_1 \leq \underline{x} \leq x_2\right) = P(x \in \{]-\infty; x_2] -]-\infty; x_1]\}) = F_{\underline{x}}(x_2) - F_{\underline{x}}(x_1)$$

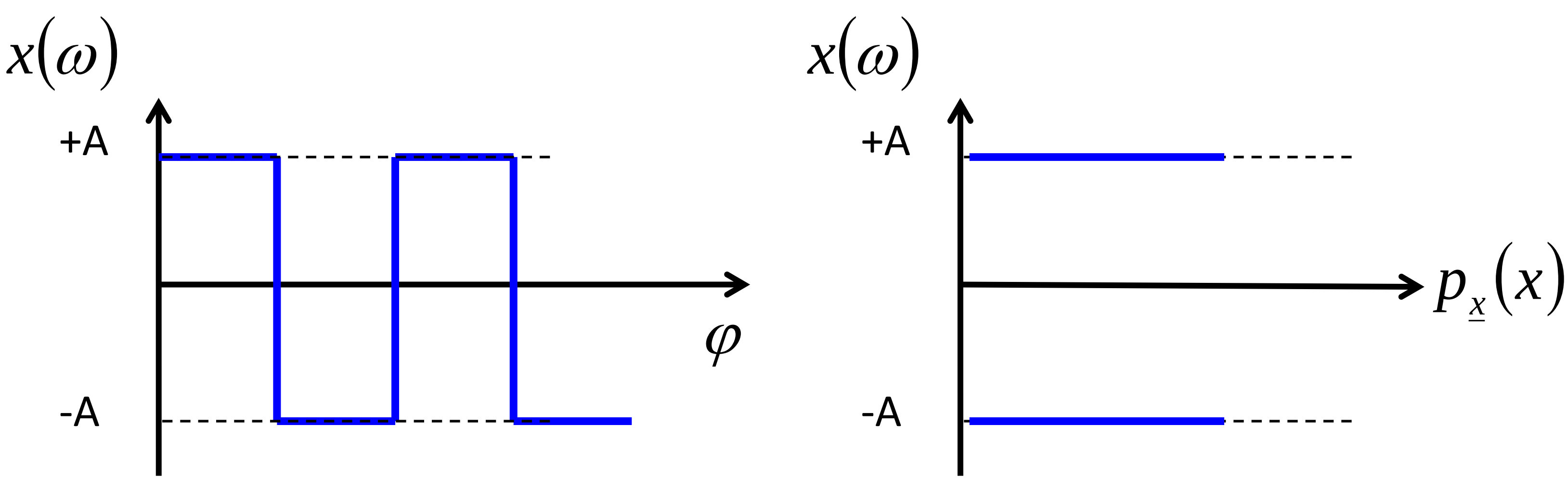
$$P\left(x_1 \leq \underline{x} \leq x_2\right) = \int_{x_1}^{x_2} p_{\underline{x}}(u)du$$

Variable aléatoire : Densité de probabilité

Signification de la densité de probabilité

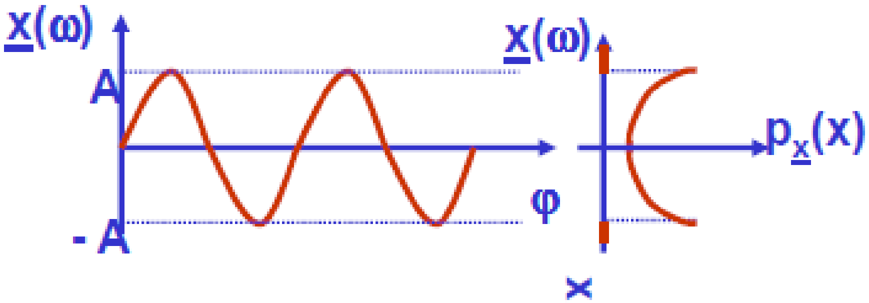
En représentant les fonctions comme ci-dessous, il est facile de comprendre la signification de la densité de probabilité.
$p_{\underline{x}}$ est maximale pour les valeurs de x les plus courantes.

Ex : créneaux

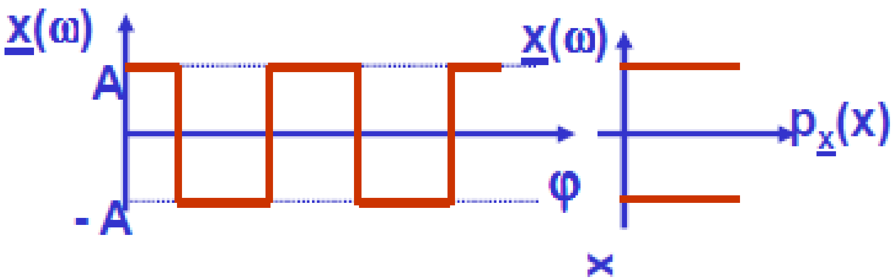


Variable aléatoire : Densité de probabilité

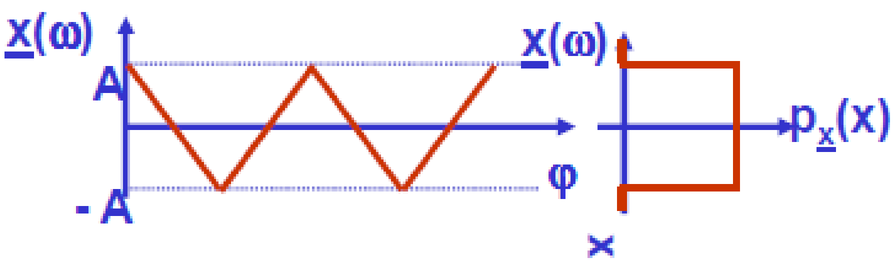
Sinus



Créneaux



Triangle



Variable aléatoire : moment d'ordre n

- Le moment d'ordre n de la variable aléatoire continue et réelle est définie par :

$$E[\underline{x}^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n \cdot p_{\underline{x}}(x)dx$$

- Les moments supérieures à deux ne seront pas étudiés car ils sont utilisés dans des cas très pointus qui dépassent l'objectif du cours.

Variable aléatoire : moment d'ordre 1 et 2

- Moment d'ordre 1

Le moment d'ordre 1 représente la valeur statistique moyenne ou espérance mathématique de la variable aléatoire :

$$\boxed{E[\underline{x}] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot p_{\underline{x}}(x) dx = \mu_{\underline{x}}}$$

Lorsque le moment d'ordre 1 est nul, la variable est dite centrée

- Moment d'ordre 2

Le moment d'ordre 2 représente la valeur quadratique moyenne de la variable aléatoire. C'est en quelque sorte la puissance de la VA :

$$\boxed{E[\underline{x}^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot p_{\underline{x}}(x) dx = m_2(\underline{x})}$$

Variable aléatoire : variance, écart-type

La variance, ou écart quadratique moyen d'une VA réelle est son moment centré de degré 2. On peut voir la variance comme la puissance des fluctuation de la VA :

$$\sigma_{\underline{x}}{}^2 = \mathrm{var}(\underline{x}) = E\left[\left(\underline{x} - \mu_{\underline{x}}\right)^2\right]$$

L'écart-type est la racine carrée de la variance. Il représente une mesure de la dispersion des valeurs de la variable aléatoire autour de la valeur moyenne.

La variance est aussi égale à :

$$\sigma_{\underline{x}}{}^2 = E\left[\underline{x}^2\right] - \left(\mu_{\underline{x}}\right)^2$$

Variable aléatoire : intercorrelation

- Fonction d'intercorrelation statistique

$$R_{\underline{x}}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\left[\underline{x}(t_1) \cdot \underline{x}^*(t_2)\right] = \iint_{\mathbb{R}} \underline{x}(t_1) \cdot \underline{x}^*(t_2) \cdot p_{\underline{x_1}, \underline{x_2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$p_{\underline{x_1}, \underline{x_2}}(x_1, x_2)$: la densité de probabilité conjointe qui caractérise la variable aléatoire bidimensionnelle (x_1, x_2)

Mesure l'information mutuelle contenue dans deux VA

- Propriétés

$R_{\underline{x}}(\tau)$ possède un maximum à l'origine
$R_{\underline{x}}(0)$ correspond à la puissance de la variable aléatoire
$R_{\underline{x}}(\tau)$ est une fonction hermitienne : $R_{\underline{x}}(\tau) = R_{\underline{x}}^{\ *}(-\tau)$

Variable aléatoire : fonction caractéristique

- **Définition**

$$\varphi_{\underline{x}}(u) = E\left[e^{-2\pi j u \underline{x}}\right] = TF\left[p_{\underline{x}}(x)\right] = \int_{\mathbb{R}} p_{\underline{x}}(x) \cdot e^{-2\pi j u x} dx$$

- **Propriétés**

$$\varphi_{\underline{x}}(u = 0) = 1$$

$$E\left[\underline{x}^n\right] = \left.\frac{\varphi_{\underline{x}}^{(n)}(u)}{(-2\pi j)^n}\right|_{u=0}$$

$$\varphi_{\underline{x}}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\pi j u)^n}{n!} E\left[\underline{x}^n\right]$$

Variable aléatoire : exemple

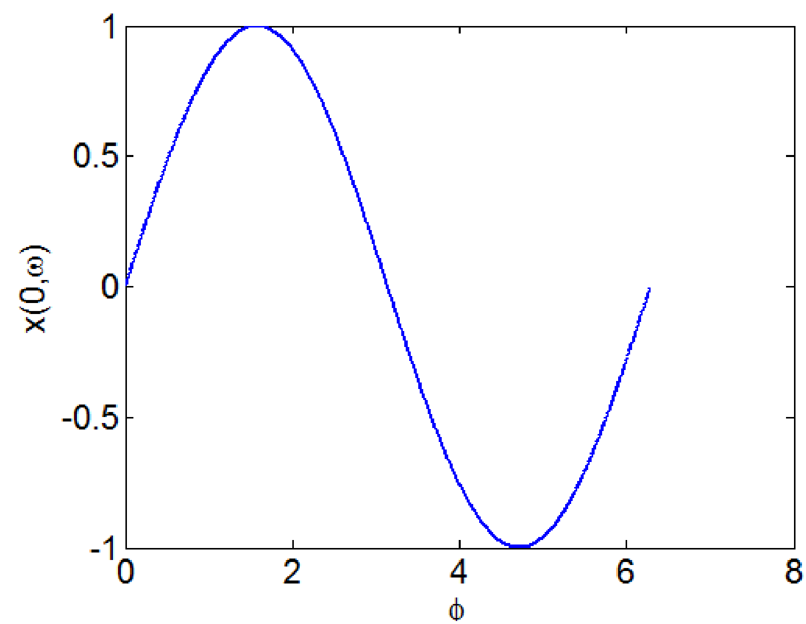
- Reprenons le processus aléatoire :

$$X(t,\omega) = \mathrm{A} \cdot sin\left(2\pi f_0 t + \underline{\varphi}(\omega)\right)$$

- soit $X(t_i,\omega)$ la variable aléatoire obtenue en observant le processus à l'instant $\mathrm{t} = t_i$. Pour simplifier les calculs, nous supposerons que $t_i = 0$.

- la phase est distribuée uniformément entre 0 et 2π

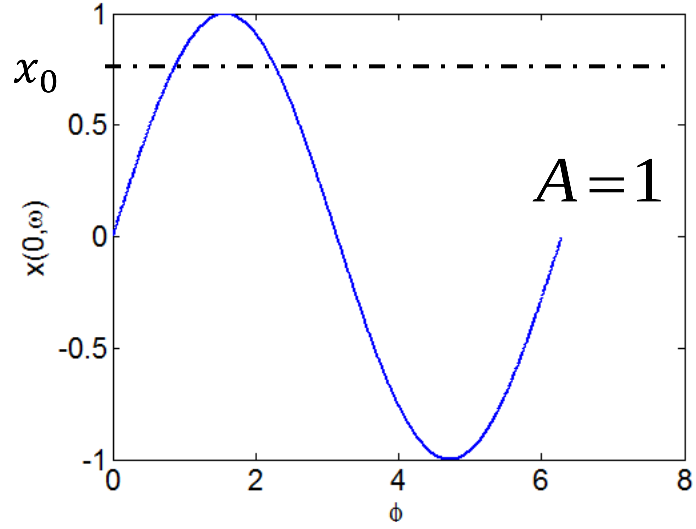
$$X(0,\omega) = \mathrm{A} \cdot sin\left(2\pi f_0 0 + \underline{\varphi}(\omega)\right)$$
$$= \mathrm{A} \cdot sin\left(\underline{\varphi}(\omega)\right)$$



Variable aléatoire : Exemple

- **Fonction de répartition ?**

$$F_{\underline{x}}(x_0) = p(\underline{x} \leq x_0)$$

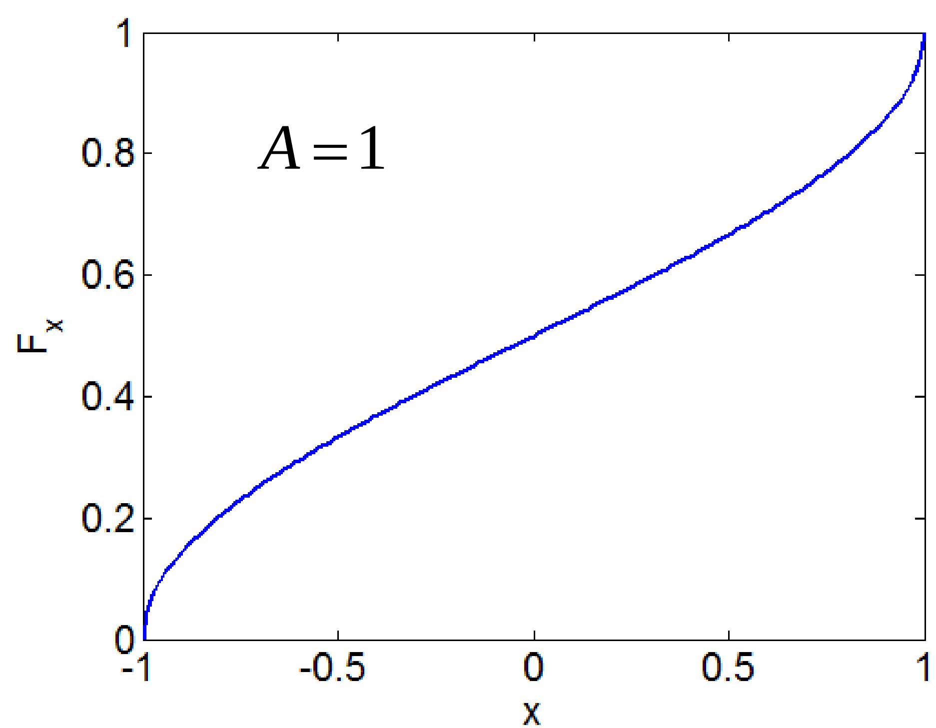


- Démonstration

Variable aléatoire : Exemple

- **Fonction de répartition ?**

$$\begin{cases} \forall x_0 < -A & F_{\underline{x}}(x_0) = 0 \\ \forall x_0 \geq +A & F_{\underline{x}}(x_0) = 1 \\ \forall x_0 \in [-A; A[& F_{\underline{x}}(x_0) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} arcsin\left(\dfrac{x_0}{A}\right) \end{cases}$$



Variable aléatoire : Exemple

- **Densité de probabilité ?**

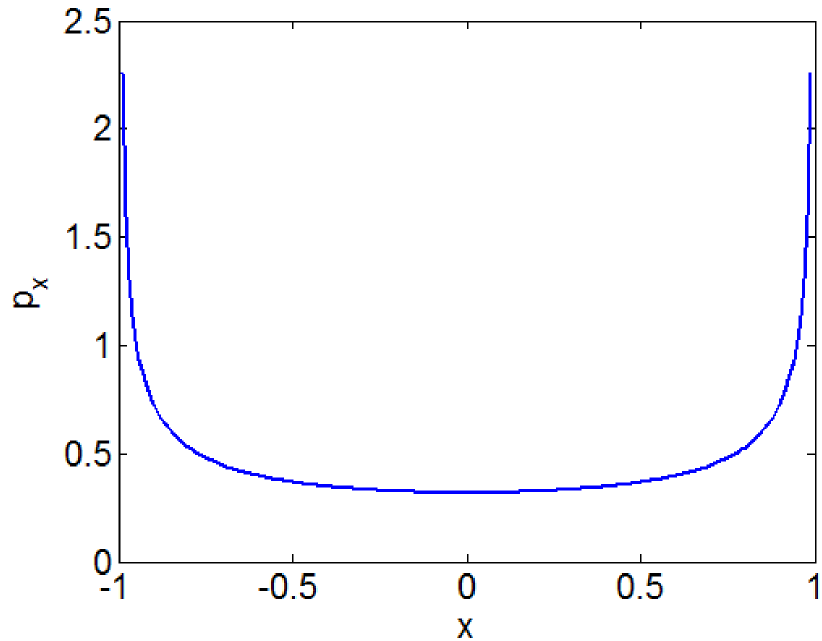
$$p_{\underline{x}}(x_0) = \frac{dF_{\underline{x}}(x)}{dx}$$

Formule : $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Variable aléatoire : Exemple

- **Densité de probabilité**

$$\begin{cases} \forall x_0 < -A & p_{\underline{x}}(x_0) = 0 \\ \forall x_0 \geq +A & F_{\underline{x}}(x_0) = 0 \\ \forall x_0 \in [-A; A[& p_{\underline{x}}(x_0) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} \end{cases}$$



Variable aléatoire : Exemple

- **Moment d'ordre 1**

$$\mu_{\underline{x}}(x) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot p_{\underline{x}}(x) dx = \int_{-A}^{A} \frac{x}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} dx = 0$$

Car on intègre une fonction impaire sur un intervalle symétrique.

Le résultat est logique car le signal est centrée en 0.

Nous voyons le lien entre moyenne du signal et moment de la VA

Variable aléatoire : Exemple

- **Moment d'ordre 2**

$$E[\underline{x}^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot p_{\underline{x}}(x)dx = \int_{-A}^{A} \frac{x^2}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} dx$$

On pose

$$x = \mathrm{A} \cdot \sin(\theta)$$

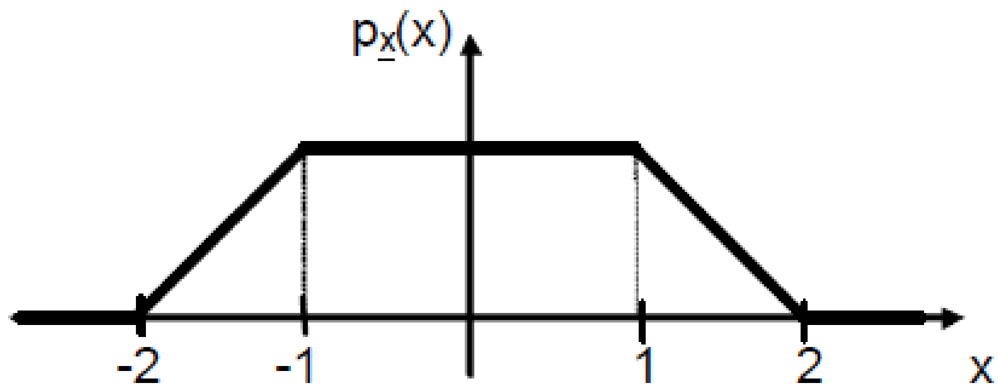
Variable aléatoire : Exemple

- **Autocorrelation statistique** $R_{\underline{x}}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\left[\underline{x}(t_1) \cdot \underline{x}^*(t_2)\right]$

Variable aléatoire, formulation statistique

- **Exemple 2**

Soit $p_{\underline{x}}(x)$ la densité de probabilité d'une signal aléatoire $\underline{x}$.
Calculer $P(|\underline{x}|<1,5)$



Variable aléatoire, formulation statistique

- **Exemple 3 : loi uniforme**

A partir de la définition caractérisant une loi uniforme. Déterminer :

- la densité de probabilité
- la fonction de répartition
- la valeur moyenne
- le moment quadratique
- la variance
- la fonction caractéristique de la loi.

Variable aléatoire discrète

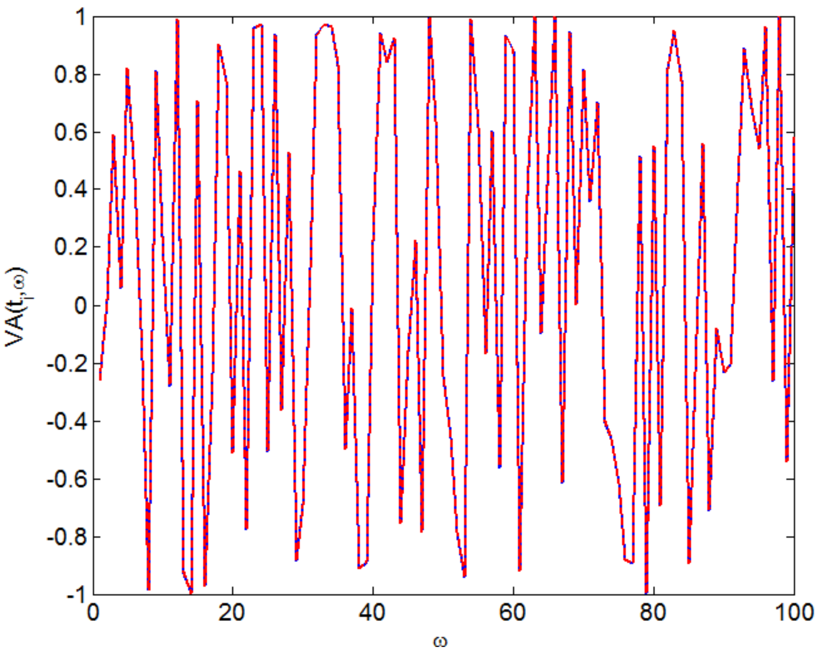
- **Définition**

Une variable aléatoire (VA) est discrète lorsqu'elle ne peut prendre qu'un nombre fini ou dénombrables de valeurs distinctes

- **Exemple**

- Notes de partiel
- VA associée à un signal numérique

Quantification de la VA sur 4 bits
Nb de niveaux : $2^4 = 32$
*Matlab : xQ=q*floor(VA/q)+q/2;*



Variable aléatoire discrète

- **Fonction de répartition**

Considérons une VA discrète x prenant N valeurs $(x_1, \ldots, x_n)$ avec les probabilités (p$(x = x_1) = p_1$, p$(x = x_2) = p_2, \ldots,$ p$(x = x_n) = p_n$. La fonction de répartition s'écrit :

$$F_{\underline{x}}(x) = P\left[\underline{x} \leq x\right] = \sum_{i=1}^{N} u(x - x_i) \cdot p_i$$

Avec u(x), la fonction échelon

- **Densité de probabilité**

La densité de probabilité est définie comme la dérivée de la fonction de répartition :

$$p_{\underline{x}}(x) = \frac{dF_{\underline{x}}(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{N} u(x - x_i) \cdot p_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\, u(x - x_i)}{dx} \cdot p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \delta(x - x_i) \cdot p_i$$

Variable aléatoire discrète : moments

- **Moments d'ordre 1 : moyenne statistique**

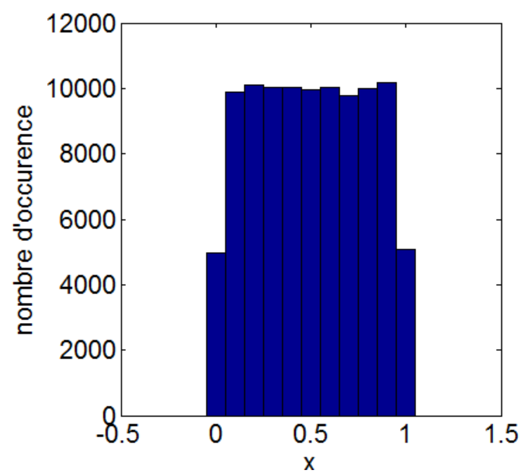
$$E[x] = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot p_i$$

- **Moments d'ordre 2 : moyenne quadratique**

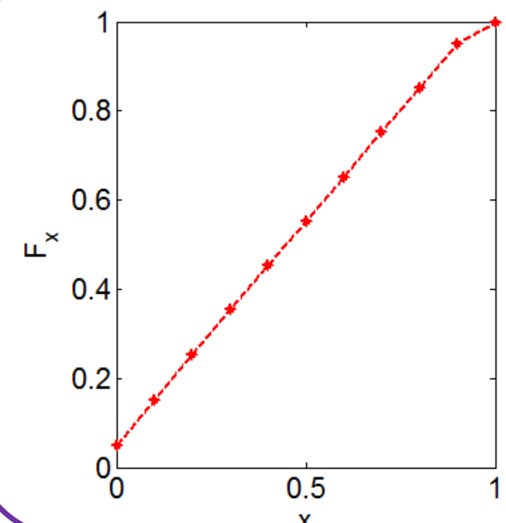
$$E[x^2] = \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 \cdot p_i$$

Variable aléatoire discrète : exemple

- Exemple de distribution uniforme discrète



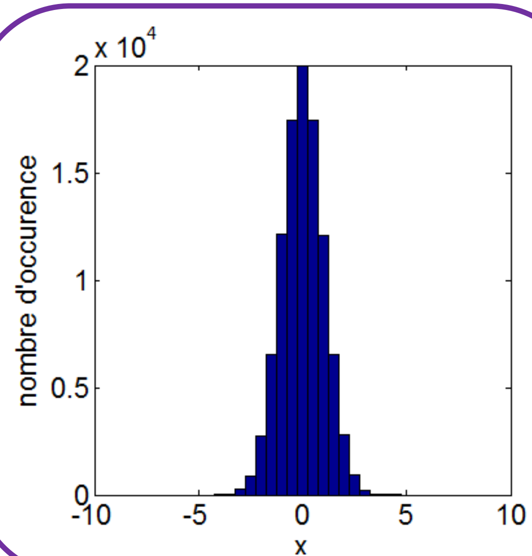
Densité de probabilité => distribution / N



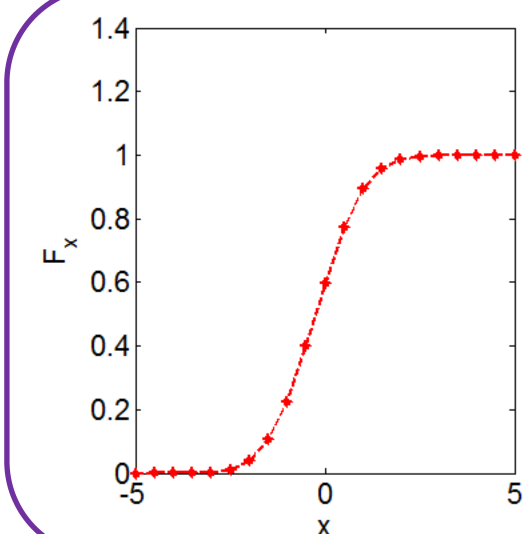
Fonction de répartition

Variable aléatoire discrète : exemple

- Exemple de distribution gaussienne discrète



Densité de probabilité => distribution / N



Fonction de répartition

Variable aléatoire discrète : exemple

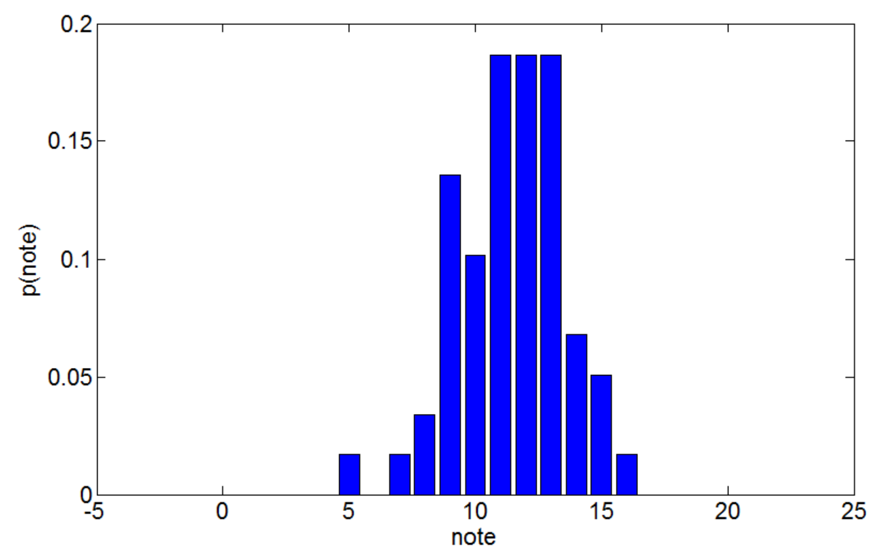
- Reprennons la VA suivante :

VA	9	10	12	8	9	12	9	14	13	11	13	13
12	15	12	13	8	10	13	12	11	10	13	16	13
11	14	13	15	9	12	11	9	12	11	9	11	7
10	5	12	13	13	9	11	13	15	10	11	14	11
11	12	10										

- Densité de probabilité?

- Matlab

```
dFx=[];
for ii=0:20
dFx(ii+1)=
size(find(VA_note==ii),2)
end
dFx=dFx/size(VA_note,2)
```



- Comme vérification, nous pouvons calculé la somme des p(note)

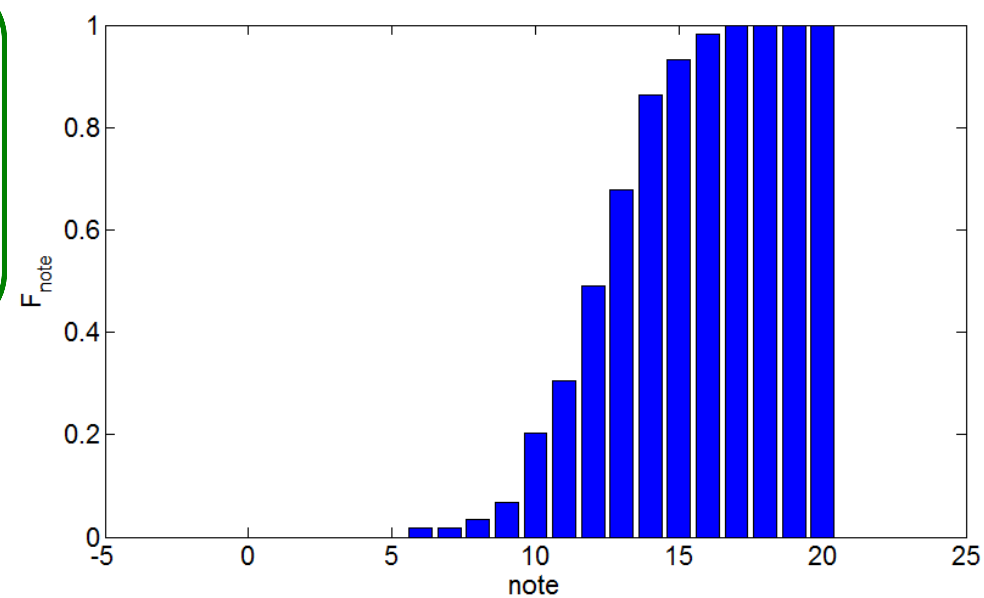
Variable aléatoire discrète : exemple

- Reprennons la VA suivante :

VA	9	10	12	8	9	12	9	14	13	11	13	13
12	15	12	13	8	10	13	12	11	10	13	16	13
11	14	13	15	9	12	11	9	12	11	9	11	7
10	5	12	13	13	9	11	13	15	10	11	14	11
11	12	10										

- Fonction de répartition ?

```
Fx=[]
for ii=0:20
Fx(ii+1)= sum(dFx(1:ii))
end
```



Variable aléatoire discrète : exemple

- Reprennons la VA suivante :

VA	9	10	12	8	9	12	9	14	13	11	13	13
12	15	12	13	8	10	13	12	11	10	13	16	13
11	14	13	15	9	12	11	9	12	11	9	11	7
10	5	12	13	13	9	11	13	15	10	11	14	11
11	12	10										

- Moment d'ordre 1 et 2 ?

```
% moment d'ordre 1
Ex=sum(x.*dFx)

%moment d'ordre 2
Ex2=sum(x.^2.*dFx)
```

- $E(x) = 11,4$
- $E(x^2) = 134,5$

Variable aléatoire bidimensionnelles

- Fonction de répartition conjointe – densité de probabilité conjointe

Soient les deux variables aléatoires $\underline{x}$ et $\underline{y}$: le couple $(\underline{x},\underline{y})$ est une variable aléatoire bidimensionnelle caractérisée par une fonction de répartition conjointe $F_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)$ et une densité de probabilité conjointe $p_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)$ définies par :

$$F_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = F(x,y) = P\left[(\underline{x} \leq x) \cap (\underline{y} \leq y)\right]$$

$$p_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = p(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Variable aléatoire bidimensionnelles

- **Cas discret**

Dans le cas des VA discrètes, il est plus facile d'utiliser la notation matricielle :

$$[\underline{x},\underline{y}] = \begin{bmatrix} (x_1, y_1) & \dots & (x_1, y_N) \\ \dots & & \dots \\ (x_M, y_1) & \dots & (x_M, y_N) \end{bmatrix} \qquad [\underline{p}(x,y)] = \begin{bmatrix} p(x_1, y_1) & \dots & p(x_1, y_N) \\ \dots & & \dots \\ p(x_M, y_1) & \dots & p(x_M, y_N) \end{bmatrix}$$

La densité de probabilité conjointe s'exprime comme un réseau d'impulsions de Dirac défini par :

$$p_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = p(x,y) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_i, y - y_j)\, p(x_i, y_j)$$

Variable aléatoire bidimensionnelles

- **Densité de probabilité marginale**

La densité de probabilité marginale permet de définir la densité de probabilité de l'une des variables aléatoires du couple indépendamment de l'autre. Elle est obtenue à partir de la densité de probabilité conjointe par les relations suivantes :

$$p_{\underline{x}}(x) = \int_{\Re} p(x, y)dy \qquad p_{\underline{y}}(x) = \int_{\Re} p(x, y)dx$$

$$p_{\underline{x}}(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j) \qquad p_{\underline{y}}(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)$$

Variable aléatoire bidimensionnelles

- **Indépendance et décorrélation**

- Deux variables aléatoires x et y sont décorrélées si

$$E[\underline{x}.\underline{y}] = E[\underline{x}].E[\underline{y}]$$

- Deux variables aléatoires x et y sont statistiquement indépendantes si

$$p_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)=p_{\underline{x}}(x).p_{\underline{y}}(y)$$

Deux variables indépendantes sont décorrélées mais l'inverse n'est pas valable

Processus aléatoire ou stochastique

Un processus aléatoire est une famille de fonctions à deux variables :
- le temps t
- l'épreuve aléatoire ω appartenant à l'expérience Ω

$$\underline{x}(t,\omega) = \begin{cases} \{x(t,\omega_i)\}, \forall \omega_i \in \Omega \\ \{\underline{x}(t_i,\omega)\}, \forall t_i \end{cases}$$

L'observation du PA aux instants t_1, t_2, …, t_k fournit k variables aléatoires notée $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, …, $\underline{x}_k$
Celles-ci définissent le vecteur aléatoire ($\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, …, $\underline{x}_k$) caractérisé par une densité de probabilité conjointe :

$$p(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k; t_1, t_2, \ldots, t_k)$$

Cette densité permet de définir une statistique d'ordre k.

Processus aléatoire ou stochastique

- **Statistique à l'ordre 1**

A l'instant $t=t_1$, le processus aléatoire $\underline{x}(t,\omega)$ se réduit à une seule variable aléatoire $x(t_1, \omega)$ caractérisée par :

- Sa densité de probabilité

$$p(x_1\,;\,t_1)$$

- Sa fonction de répartition

$$F(x_1;t_1) = P\left[x(t_1,\omega) \in \left]-\infty; x_1\right]\right]$$

Processus aléatoire ou stochastique

- **Statistique à l'ordre 2**

Soit deux instants d'observation : t_1 et t_2
Le processus aléatoire $\underline{x}(t, \omega)$ est alors composé du couple de variables aléatoires $\{\underline{x}(t_1, \omega)\ ,\ \underline{x}(t_2, \omega)\}$, c'est-à-dire du vecteur aléatoire $\underline{\vec{x}} = (x_1, x_2)^T$

Ce vecteur est caractérisé par

- Sa densité de probabilité conjointe

$$p(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial X_1 \partial X_2}$$

- Sa fonction de répartition

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\left[\underline{x}(t_1, \omega) \in \left]-\infty; x_1\right] \cap \underline{x}(t_2, \omega) \in \left]-\infty; x_2\right]\right]$$

Processus aléatoire ou stochastique

Autocorrélation statistique, $R_{\underline{x}}(t_1,t_2)$

$$R_{\underline{x}}(t_1,t_2) = E\left[\underline{x}(t_1)\underline{x}^*(t_2)\right] = \iint_{\Re} \underline{x}(t_1)\underline{x}^*(t_2)\, p\left(\underline{x}(t_1), \underline{x}(t_2)\right) dx_1 dx_2$$

Avec $p(x(t_1), x(t_2))$ la densité de probabilité conjointe qui caractérise la variable aléatoire bidimensionnelle $(x(t_1), x(t_2))$

Autocovariance statistique, $R_{\underline{x}}(t_1,t_2)$

$$V_{\underline{x}}(t_1,t_2) = E\left[\left\{\underline{x}(t_1,\omega) - \mu_{\underline{x}_1}\right\}\left\{\underline{x}(t_2,\omega) - \mu_{\underline{x}2}\right\}^*\right]$$

$$V_{\underline{x}}(t_1,t_2) = R_{\underline{x}}(t_1,t_2) - \mu_{\underline{x}_1}\mu_{\underline{x}_2}$$ Pour un PA réel

Stationnarité d'un processus aléatoire

Stationnarité au sens strict

Un processus aléatoire $\underline{x}(t,\omega)$ est stationnaire au sens strict si ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps.

Stationnarité au sens large

Un processus aléatoire $\underline{x}(t,\omega)$ est stationnaire au sens large :

- si l'espérance mathématique $E\left[\underline{x}(t,\omega)\right] = \mu_{\underline{x}}$ est indépendante du temps

Et

- Si la fonction d'autocorrélation $R_{\underline{x}}(t_1,t_2)$ ne dépend que de l'écart de temps $\tau = t_1 - t_2$:

$$R_{\underline{x}}(t_1,t_2) = \mathrm{E}\left[\underline{x}(t_1)\cdot\underline{x}^*(t_2)\right] = R_{\underline{x}}(\tau) = \mathrm{E}\left[\underline{x}(t,\omega)\cdot\underline{x}^*(t-\tau,\omega)\right]$$

Stationnarité d'un processus aléatoire

Exemple

Soit le processus aléatoire $\underline{x}$(t,ω) défini par $\underline{x}(t,\omega) = \underline{x}(\omega).e^{2\pi jft}$

Moyenne statistique dépendant du temps : PA non stationnaire

$$\rightarrow E\left[\underline{x}(t,\omega)\right] = E\left[\underline{x}(\omega).e^{2\pi jft}\right] = e^{2\pi jft} E\left[\underline{x}(\omega)\right]$$

$\mu_{\underline{x}}$ est fonction du temps sauf si E[x(ω)] = 0

Fonction d'autocorrélation ne dépendant que de l'écart de temps τ

Le Processus aléatoire est stationnaire au sens large si et seulement si E[$\underline{x}$(t,ω)] = 0, c'est-à-dire s'il est centré.

$$\rightarrow R_{\underline{x}}(t_1,t_2) = E\left[\underline{x}(\omega)e^{2\pi jft_1}.\underline{x}^*(\omega)e^{2\pi jft_2}\right] = E\left[\left|\underline{x}(\omega)\right|^2\right]e^{2\pi jf(t_1-t_2)}$$

$$= E\left[\left|\underline{x}(\omega)\right|^2\right]e^{2\pi jf\tau} \qquad ,\tau = t_1 - t_2$$

Ergodisme d'un processus aléatoire

Si l'espérance d'un processus aléatoire est stationnaire, donc si :

$$E\left[\underline{x}(t,\omega)\right] = \mu_{\underline{x}} \,, \forall t$$

Il y a ergodisme de l'espérance lorsque :

$$V_{xc}(\omega_i) = \langle x(t,\omega_i)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T x(t,\omega_i)dt = cte$$

ET

$$\langle x(t,\omega_i)\rangle = E\left[\underline{x}(t,\omega)\right]$$

Ergodisme d'un processus aléatoire

Si l'autocorrélation d'un processus aléatoire est stationnaire, donc si :

$$R_{\underline{x}}(\tau) = E\left[\underline{x}(t,\omega) \cdot \underline{x}^*(t-\tau,\omega)\right], \forall t$$

Il y a ergodisme de l'autocorrélation lorsque :

$$C_x(\tau) = \int_T x(t,\omega_i) \cdot x^*(t-\tau,\omega_i)dt = cte$$

ET

$$C_{\underline{x}}(\tau) = R_{\underline{x}}(\tau)$$

Processus aléatoire ou stochastique

Ergodisme : Intérêt

Avec une **seule** réalisation d'un signal issue du processus aléatoire

Déduction de **l'ensemble** de ses caractéristiques !

Processus aléatoire ou stochastique

Exemple

Moyennes statistiques indépendantes du temps

$$\mu_{\underline{x}} = 0, \qquad \forall t_0 \qquad\qquad R_{\underline{x}}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau), \forall t_1 \quad et \quad t_2$$

STATIONNARITE

Moyennes statistiques = Moyennes temporelles

$$\langle x(t,\omega_i)\rangle = 0, \qquad \forall \omega_i \qquad\qquad C(\tau,\omega_i) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau), \forall \omega_i$$

$$\langle x(t,\omega_i)\rangle = \mu_{\underline{x}}, \qquad \forall \omega_i \qquad\qquad C(\tau,\omega_i) = R_{\underline{x}}(\tau)$$

ERGODISME

Théorème de Wiener-Kintchine

La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire au sens large est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation :

$$\boxed{S_{\underline{x}}(f) = TF\left[R_{\underline{x}}(t)\right]}$$

Réciproquement

$$R_{\underline{x}}(t) = \overline{TF}\left[S_{\underline{x}}(f)\right] = \int_{\mathbb{R}} S_{\underline{x}}(f) e^{2\pi j f t} df = R_{\underline{x}}^{*}(-t)$$

(Symétrie hermitienne)

Et en particulier

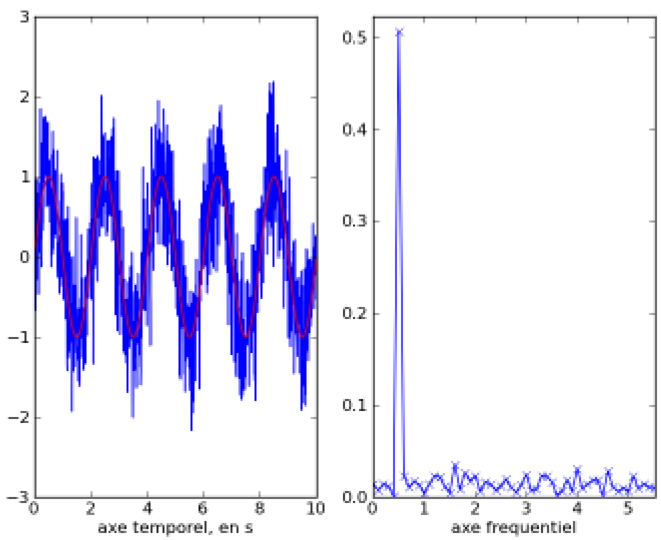
$$R_{\underline{x}}(0) = \int_{\mathbb{R}} S_{\underline{x}}(f) \cdot df = E[x^2] = \sigma_{\underline{x}}^2 + \mu_{\underline{x}}^2$$

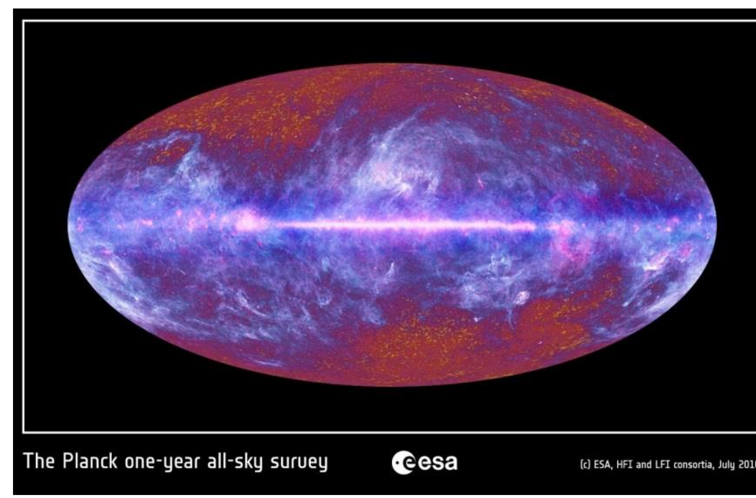
(puissance du PA)

Bruit – formalisme mathématique

définition

Signal indésirable limitant l'intégrité et l'intelligibilité d'un signal utile dans un processus de transmission ou de traitement d'information.





Bruit – formalisme mathématique

Les sources de bruits externes

- Perturbations artificielles générées par les équipements électriques
- Perturbations naturelles associées à des phénomènes atmosphériques et aux phénomènes d'évanouissement des signaux de radiocommunication dus à des fluctuations des conditions de propagation du milieu.

→ *Réduction voire élimination de ces bruits par une conception intelligente des systèmes*

Bruit – formalisme mathématique

Les sources de bruits internes

- Perturbations de type impulsionelle engendrées par des commutations de courants

→ *Réduction ou élimination par une conception adaptée*

- Bruit de fond généré dans les câbles et les composants en raison des statistiques de conduction électrique

→ *Irréductible*

Bruit – formalisme mathématique

Rapport signal sur bruit : $$RSB = 10\log_{10}\left(\frac{P_{signal}}{P_{bruit}}\right)[dB]$$

- dB : décibel = unité **relative** de représentation en échelle logarithmique
- Représentation utilisées pour mettre en évidence des différences d'amplitude trop importantes pour être tracées sur des axes linéaires

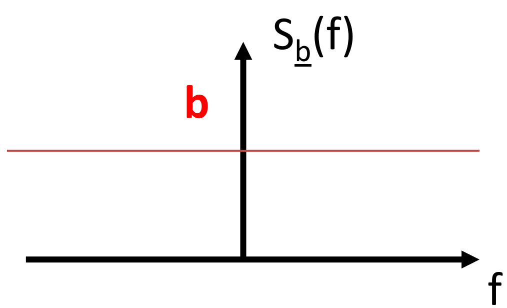
Unité de mesure absolue : $$P[W] \rightarrow 10\log_{10}\left(\frac{P}{1mW}\right)[dBm]$$

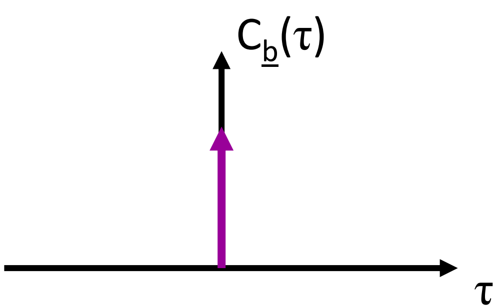
- dBm : décibel par rapport au mW

Bruit blanc – bruit coloré

Définition

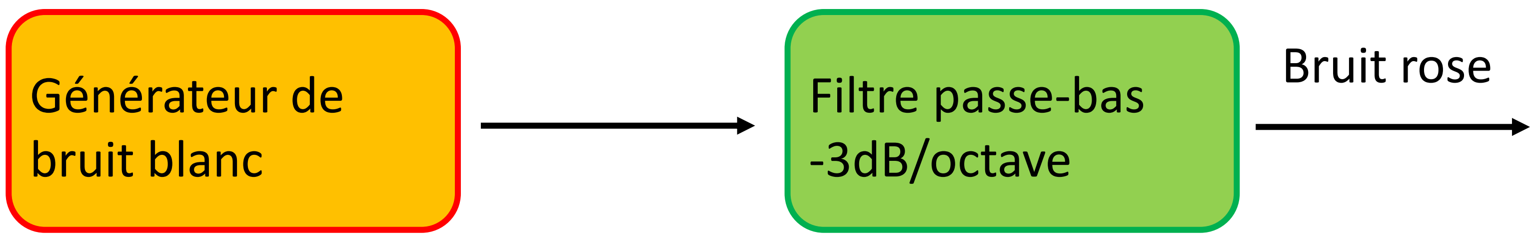
Un bruit blanc est un processus aléatoire continu réel stationnaire, noté $\underline{b}(t,\omega)$ dont la densité spectrale de puissance est constante quelle que soit la fréquence : $S_{\underline{b}}(f)=b=cte$,

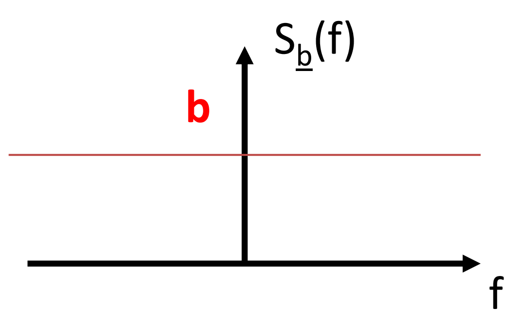


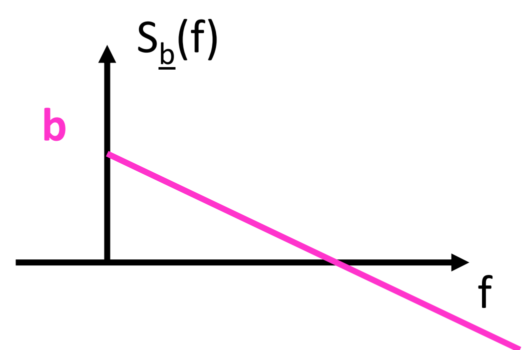


Bruit blanc – bruit coloré

- **Bruit pseudo-blanc** : bruit blanc de densité spectrale de puissance constante sur une bande limitée de fréquence
- **Bruit coloré** : bruit blanc filtré
- **Bruit rose** : processus aléatoire continu réel stationnaire dont la densité spectrale de puissance diminue de 3 décibels par octave

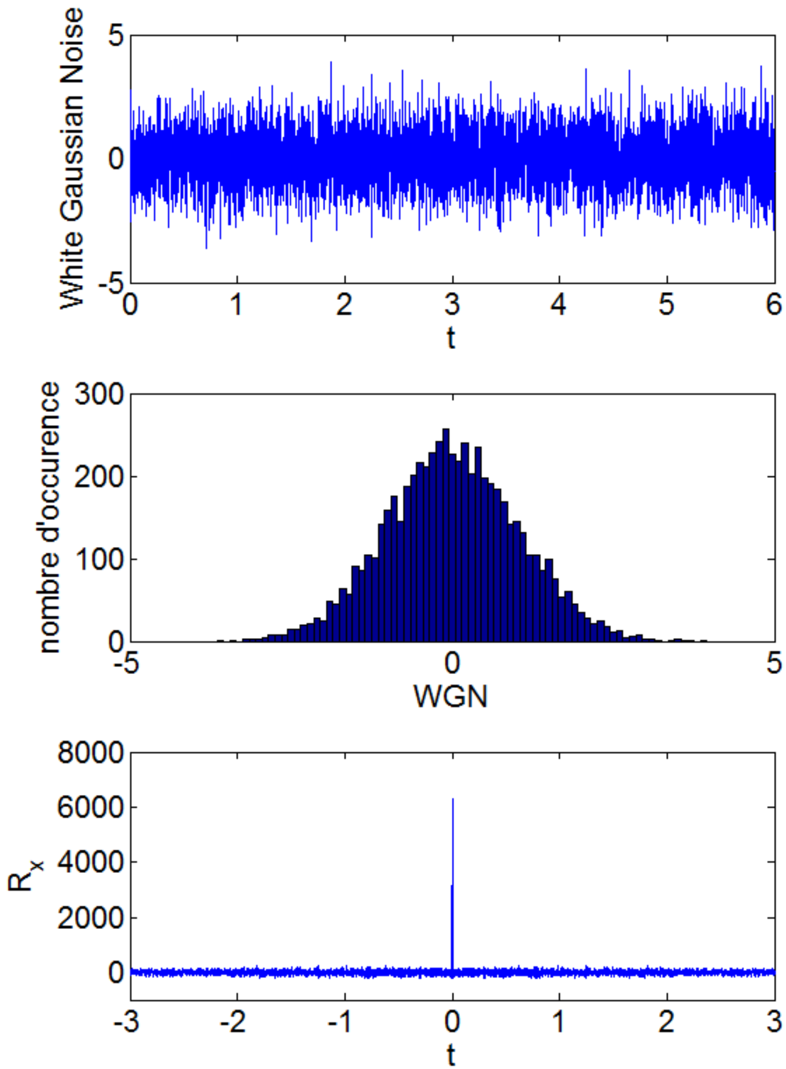






Bruit blanc – bruit coloré

Exemple bruit blanc gaussien



Attention !! Un bruit est caractérisé par sa densité spectrale de puissance et sa densité de probabilité

Introduction
Rappel proba
PA, SA, VA
Sig. Aléatoire
VA continue
VA discrète
VA bidim.
Process. Al.
Bruit
Filtrage d'un PA
Conclusion

Filtrage

Définition

Un filtre est un dispositif destiné à favoriser ou à entraver le passage de certaines composantes de fréquence d'un signal électrique. Un filtre permet donc d'opérer une sélection des fréquences d'un signal. Les applications des filtres sont très nombreuses :

- élimination du bruit HF, du 50 Hz du secteur, d'harmoniques d'un onduleur ;
- préaccentuation ou désaccentuation en transmission de signaux ;
- traitement d'images numériques.

Un **filtre linéaire** est un système qui effectue une transformation **linéaire** et **invariante** dans le temps.

Un filtre linéaire est caractérisé complètement par sa **réponse impulsionnelle** et **l'équation de convolution** associée.

Filtrage – caractéristique d'un filtre

À temps continu

La fonction de transfert est, en toute rigueur, définie comme la transformée
de Laplace de la réponse impulsionnelle :

$$TL[h(t)] = H(p) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-pt}dt$$

En général, on préfère utiliser le gain complexe (ou réponse en fréquence) défini pour $\mathrm{p} = 2\pi jf$, c'est-à-dire la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle :

$$TF[h(t)] = H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2\pi jft}dt$$

Filtrage – caractéristique d'un filtre

À temps dicret

La fonction de transfert est définie comme la transformée en z de la réponse impulsionnelle :

$$Tz[h(n)] = H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot z^{-n}$$

Avec z appartenant à un domaine de convergence

Le gain complexe est défini pour $z = e^{-2\pi j f n T_e}$, c'est-à-dire la transformée de Fourier à temps discret de la réponse impulsionnelle :

$$TFd[h(n)] = H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-2\pi j f n T_e}$$

Filtrage – caractéristique d'un filtre

Relation E/S

Les signaux d'entrée et de sortie du filtre sont liées à la fonction de transfert par la relation suivante :

Signaux discrets $$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

Signaux continus $$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

Introduction
Rappel proba
PA, SA, VA
Sig. Aléatoire
VA continue
VA discrète
VA bidim.
Process. Al.
Bruit
Filtrage d'un PA
Conclusion

Filtrage d'un processus aléatoire stationnaire au sens large

Problématique

Considérons un filtre linéaire caractérisé par sa réponse impulsionelle h(t) et sa réponse en fréquence H(f).

$x(t) \longrightarrow$ **Filtre linéaire** h, * H, . $\xrightarrow{y(t)}$

Appliquons en entrée de ce filtre un processus aléatoire $\underline{x}$, continu ou discret, stationnaire au sens large et ergodique, de moyenne statistique $\mu_{\underline{x}}$ et de densité spectrale de puissance $S_{\underline{x}}$.

Quelles sont alors les caractéristiques statistiques du processus aléatoire $\underline{y}$ obtenu en sortie du filtre ?

Filtrage d'un processus aléatoire stationnaire au sens large

Conséquence

On montre que le processus aléatoire $\underline{y}$ est un processus aléatoire **stationnaire au sens large et ergodique** tel que :

$$\mu_{\underline{y}} = E\left[\underline{y}(t)\right] = H(f = 0) \cdot \mu_{\underline{x}}$$

$$S_{\underline{y}}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_{\underline{x}}(f)$$

$$R_{\underline{y}}(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_{\underline{x}}(\tau)$$

Conclusion

A retenir

Processus aléatoires ou stochastiques
Représentation des signaux réels (signaux utiles et bruits)

Stationnarité et ergodisme
Étude à partir d'une réalisation du processus

Densité spectrale de puissance et autocorrélation
Représentations duales (« Temps – Fréquence »)

Conclusion

Bilan – traitement du signal

- Relation temps/fréquence
- Echantillonnage / quantification d'un signal
- Analyse spectrale
- Processus/signaux/variables aléatoires
- Filtrage

Densité spectrale de puissance d'un PA SSL

Définition

$$S_{\underline{x}}(f) = \lim_{T \to +\infty} S_{\underline{x}}(f,T) = \lim_{T \to +\infty} E\left[S_{\underline{x_i}}(f)\right] = \lim_{T \to +\infty} E\left[\frac{1}{T}\left|X_i(f,T)\right|^2\right]$$