EXAMEN JANVIER 2015 AC 330 Durée 1h45

Aucun document autorisé

Calculatrice type collège autorisée

REPONDRE SUR DES FEUILLES SEPAREES POUR CHAQUE EXERCICE

EXERCICE II : *Etude d'une équation aux différences (8 pts) :*

On se propose d'étudier un filtre récursif utilisé en traitement du son. La prise d'échantillons sur le signal analogique x(t) s'effectue à la fréquence $F_e = 44{,}1\ kHz$.

Le filtre est caractérisé par l'équation aux différences suivante : $y(n) = \frac{3}{4}.y(n-1) + \frac{1}{4}.x(n)$.

Détermination de la fonction de transfert du système :

1- Démontrer que $Tz\big(x(n-N)\big) = z^{-N}.X(z)$
2- Déduire l'expression de la fonction de transfert en z du filtre $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$
3- Quels sont les zéros et les pôles de cette fonction de transfert. En déduire si ce filtre est stable et causal.
4- Montrer que la fonction de transfert en fréquence du filtre est $H(f) = \frac{1}{4-3.\cos(2\pi f T_e)+3j.sin(2\pi f T_e)}$
5- Déduire le module de la fonction de transfert
6- Tracer son allure entre 0 et Fe en plaçant correctement les valeurs correspondant à $f = 0$, $f = \frac{Fe}{4}$,$f = \frac{Fe}{2}$.
7- Calculer numériquement la fréquence de coupure du filtre à -3 dB ($|H(f_c)| = \frac{|H|_{max}}{\sqrt{2}}$) et déduire le type de filtre auquel on a affaire.

Détermination de la réponse impulsionnelle du filtre :

8- Calculer directement à partir de l'équation aux différences les 3 premiers termes de la réponse impulsionnelle ($h(0),\ h(1)\ et\ h(2)$).
9- Déterminer la transformée en z d'un signal échantillonné causal : $x(n) = q^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Préciser le domaine de convergence.
10- En déduire l'expression de la réponse impulsionnelle du filtre : $h(n)$. Comparer aux résultats de la réponse 8.

Réponse du filtre à une entrée particulière :

11- Calculer les 4 premiers termes de la réponse $y(n)$ du filtre pour une entrée causale $x(0) = 2$, $x(1) = 1$, $x(2) = 1$ ($x(n) = 0,$ ensuite). Que prévoyez-vous comme valeurs de $y(n)$ lorsque n tend vers l'infini ?