# MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

**Chaînes de Markov à temps discret (CMTD)**
Séance de TD du 05 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 13 de la séance de TD consacrée aux chaînes de Markov à temps discret. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

**Exercice 13**
Dans une maison constituée de 4 pièces se déroule un cruel épisode de la vie domestique. Une souris se promène pour trouver à manger. Un chat [1] décide d'attraper la souris.
La souris démarre sa recherche au hasard dans la maison (mais pas par la cuisine, où la nourriture se trouve), elle reste 10 minutes dans chaque pièce, puis ayant oublié où elle a déjà cherché, change d'endroit pour une des 3 autres pièces. Le chat, en bonne larve qu'il est, ne veut pas courir. Il se place dans la cuisine et attend la souris.

1. Pourquoi peut-on modéliser cette situation par une chaîne de Markov?
2. Donner le graphe et la matrice de transition de cette chaîne.
3. Classifier les états de la chaîne.
4. Quelle est l'espérance de vie de la souris?
5. Déterminer le régime stationnaire de la chaîne (i.e. donner la distribution stationnaire). Etait-il possible de donner à priori, sans calcul, cette distribution stationnaire de probabilités?

[1] qui lui n'a pas ce genre de soucis, c'est une larve gavée par ses maîtres

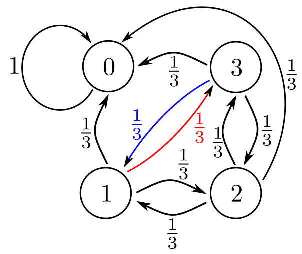


Figure 1: Le graphe associé à la CMTD qui modélise la parcours aléaoire de la souris dans la maison (exercice 13).

### Correction de l'Exercice 13

1. Oui. Comme la souris n'a pas de mémoire, la probabilité que l'état au temps $n+1$ soit une certaine valeur $x_{n+1} \in \{0,1,2,3\}$ (c'est-à-dire que la souris décide d'aller dans la pièce $x_{n+1}$) ne dépend que de l'état au temps $n$ (la pièce $x_n$ où elle se trouve) et pas des pièces qu'elle a visitées avant (les pièces $x_k$ pour $k < n$). Cette absence de mémoire entraîne donc bien le caractère markovien de la chaîne.

2. Soit $X_n \in E := \{0,1,2,3\}$, la pièce où se trouve la souris au temps $n$. On supposera dans la suite que la cuisine est la pièce 0. Le graphe associé à la CMTD qui modélise ce problème est donnée à la figure 1. La matrice de passage associée à cette chaîne de Markov est

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

3. L'état 1 est récurrent et absorbant. Une fois que la souris entre dans la cuisine, elle y meurt! Les états 1, 2 et 3 communiquent entre eux et forment donc une seule classe d'équivalence. Ils sont tous transitoires.

4. On demande l'espérance du temps d'entrée la classe $F := \{0\}$, ou encore l'espérance du temps de séjour dans la classe $\bar{F} := \{1,2,3\}$. On sait (voir cours) que cette espérance vaut :

$$E(T_F) = \sum_{i \in \bar{F}} \boldsymbol{\pi}_i^{(0)} \cdot E\left(T_F \,|X_0 = i\,\right) = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\mathbf{T}$$

où

$$\mathbf{T}_i := E\left(T_F \,|X_0 = i\,\right)$$

désigne l'espérance du temps d'entrée la classe $F := \{0\}$ partant de l'état $X_0 = i \in \bar{F}$, et où

$$\boldsymbol{\pi}_i^{(0)} := P\left(X_0 = i\right), \forall i \in \{1,2,3\}$$

est la distribution initiale de probabilité. On sait par ailleurs que le vecteur $\mathbf{T}$ satisfait l'équation

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 &= 1 + \frac{1}{3}\left(\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\right) \\
\mathbf{T}_2 &= 1 + \frac{1}{3}\left(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3\right) \\
\mathbf{T}_3 &= 1 + \frac{1}{3}\left(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\right)
\end{aligned}$$

dont la solution est $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1 = 3$. On trouve donc pour l'espérance de vie de la souris (mesurée en nombre de pas de temps)

$$E(T_F) = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\pi}_i^{(0)} \mathbf{T}_i = 3 \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\pi}_i^{(0)} = 3$$

c'est-à-dire 30 minutes.

5. La distribution stationnaire de cette CMTD satisfait les équations

$$\left( \begin{array}{cccc} \boldsymbol{\pi}_0 & \boldsymbol{\pi}_1 & \boldsymbol{\pi}_2 & \boldsymbol{\pi}_3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc} \boldsymbol{\pi}_0 & \boldsymbol{\pi}_1 & \boldsymbol{\pi}_2 & \boldsymbol{\pi}_3 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right)$$

avec la condition de normalisation

$$\boldsymbol{\pi}_0 + \boldsymbol{\pi}_1 + \boldsymbol{\pi}_2 + \boldsymbol{\pi}_3 = 1$$

On obtient par calcul $\boldsymbol{\pi}_0 = 1$ et $\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi}_2 = \boldsymbol{\pi}_3 = 0$. Cette solution était évidente à priori car les états 1, 2 et 3 sont transitoires. Leur probabilités limites valent donc nécessairement

$$\boldsymbol{\pi}_1^{(\infty)} = \boldsymbol{\pi}_2^{(\infty)} = \boldsymbol{\pi}_3^{(\infty)} = 0$$

et sont égales aux probabilités stationnaires correspondantes.