

## Chapitre 3 – Echantillonnage

1. Principe théorique
2. Théorème de Shannon
3. Filtres anti-repliement
4. Echantillonneurs en pratiques
5. Echantillonnage des signaux à durée limitée
6. Conclusion

# Définition de l'échantillonnage

## III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

Sig. Durée lim.

Conclusion

### Echantillonner

Discrétiser le temps de signaux analogiques

### Signal échantillonné

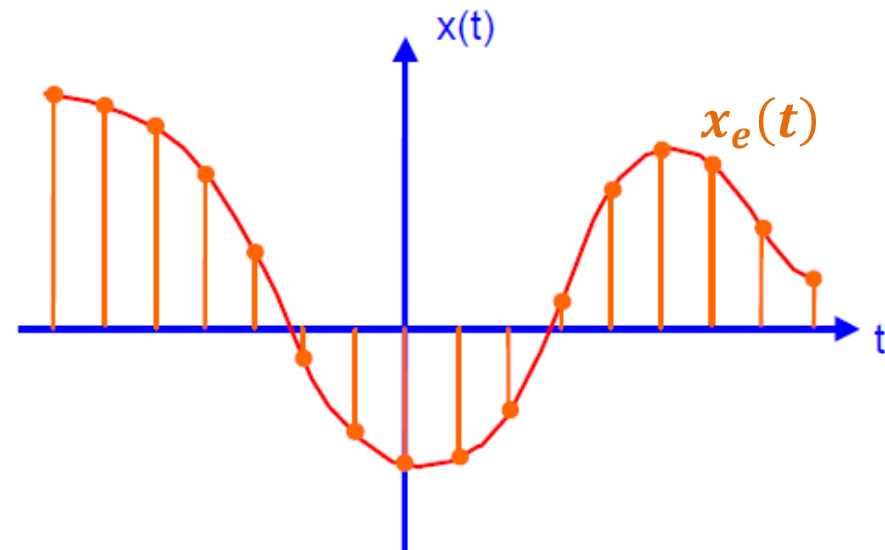
Ensemble des échantillons prélevés

### Période d'échantillonnage $T_e$

Période entre deux échantillons consécutifs

### Fréquence d'échantillonnage

$$F_e = 1/T_e$$



$$\begin{aligned} x_e(t) &= x(t) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_e) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) \end{aligned}$$

# Spectre d'un signal échantillonné

## III. Échantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

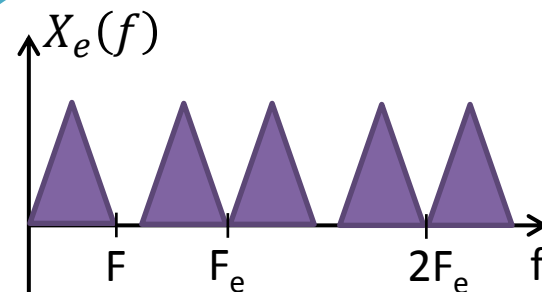
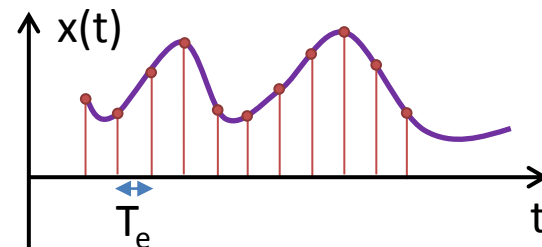
Sig. Durée lim.

Conclusion

$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_e)$$

TF

$$X_e(f) = Fe \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(f - nFe)$$



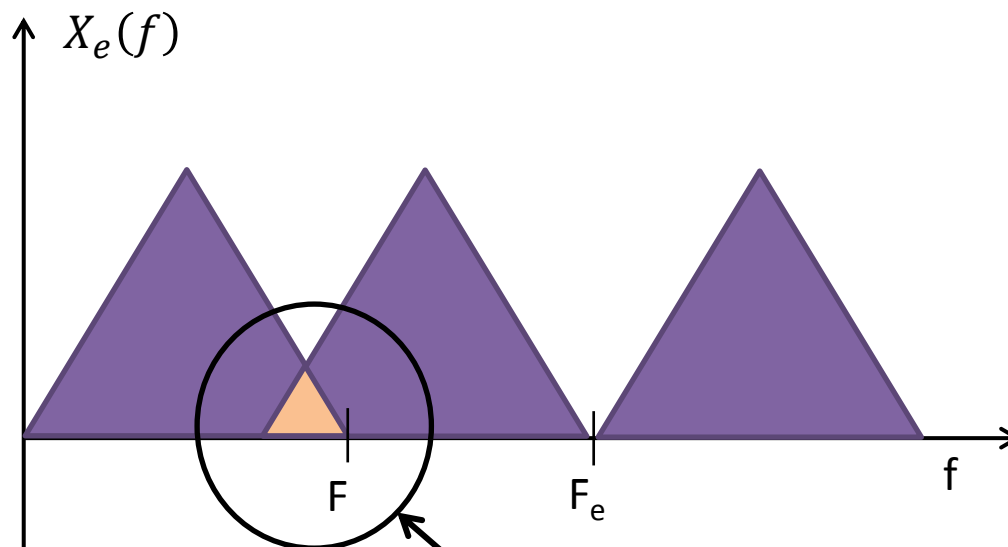
Somme de spectre élémentaires distribués sur l'axe des fréquences.

**Echantillonner** dans l'espace **temps** revient à **périodiser** dans l'espace des **fréquence**

# Problématique : est-il possible de reconstituer le signal analogique après échantillonnage?

Si  $F_e < 2.F$

$F_e$  : fréquence d'échantillonnage  
 $F$  : fréquence maximale du signal

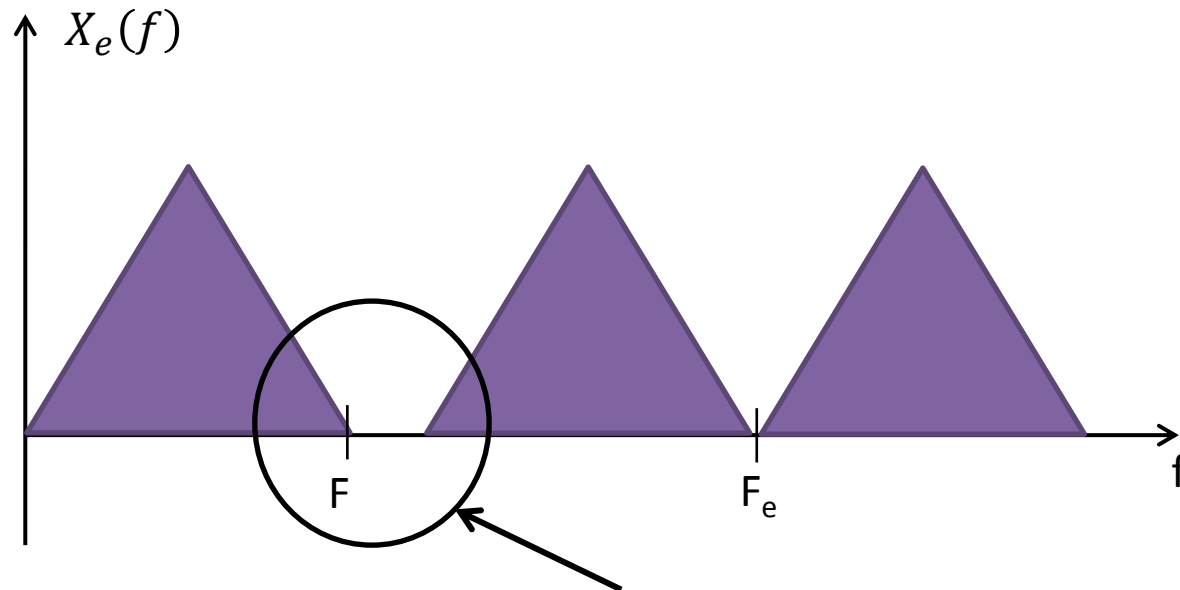


Recouvrement du spectre !

# Problématique : est-il possible de reconstituer le signal analogique après échantillonnage?

Si  $F_e > 2.F$

$F_e$  : fréquence d'échantillonnage  
 $F$  : fréquence maximale du signal



Spectre élémentaires disjoints !

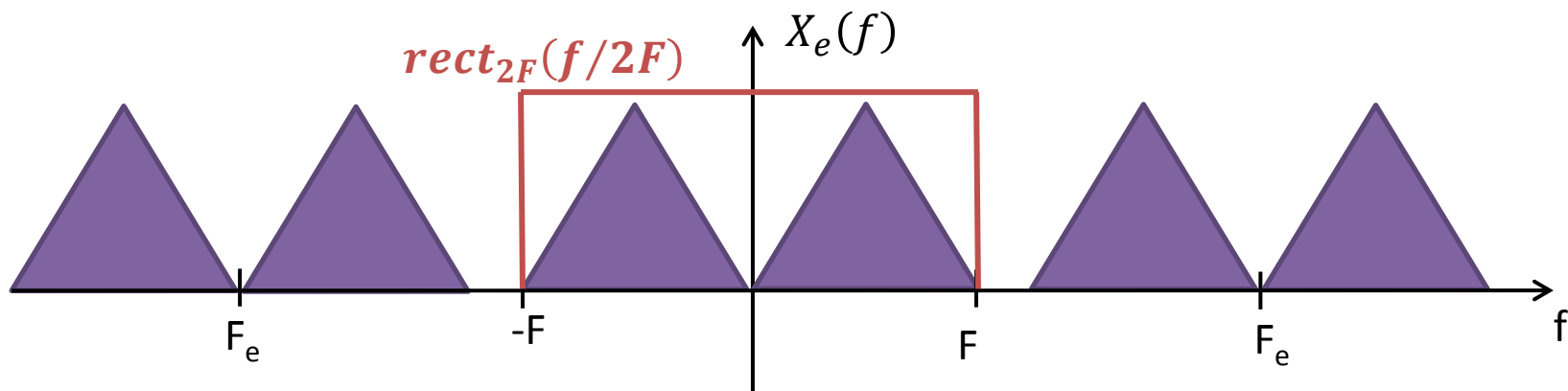
Possibilité de retrouver  $X_f$  à partir de  $X_e$  en utilisant une fenêtre rectangulaire du type  $rect_{2F}(f/2F)$  et un gain  $T_e$ .

# Théorème de Shannon

Un signal  $x(t)$  d'énergie finie dont le spectre a un support borné  $[-F; F]$  est entièrement défini par ses échantillons  $x(nT_e)$  prélevés à la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  supérieure ou égale à  $2F$ .

Il est ainsi possible de reconstruire  $x(t)$  à partir de ses échantillons par interpolation.

La façon la plus simple pour reconstituer le spectre du signal analogique est d'utiliser une fenêtre rectangulaire de gain  $T_e$ . Il reste alors à déterminer  $x(t)$  à l'aide de la transformée de Fourier inverse.



**Echantillonnage :  $F_e > 2F$**

# Théorème de Shannon : reconstitution du signal analogique

$x(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  à énergie finie et spectre borné entre  $[-F; F]$

 **Echantillonnage**

$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_e)$$

 **TF**

$$X_e(f) = TF(x_e(t)) = X(f) * Fe \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(f - nFe) = Fe \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(f - nFe)$$

 **Si le th. De Shannon est respecté**

$$X(f) = T_e \cdot X_e(f) \cdot \text{rect}_{2F}(f/2F)$$

 **TF inverse**

$$x(t) = 2F \cdot T_e \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \cdot \text{sinc}(2\pi F(t - nT_e)) \quad \text{Formule d'interpolation}$$

## III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

Sig. Durée lim.

Conclusion

# Théorème de Shannon : reconstitution du signal analogique

## III. Échantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

Sig. Durée lim.

Conclusion

## Démonstration de la formule d'interpolation

$$X(f) = T_e \cdot X_e(f) \cdot \text{rect}_{2F}(f/2F)$$



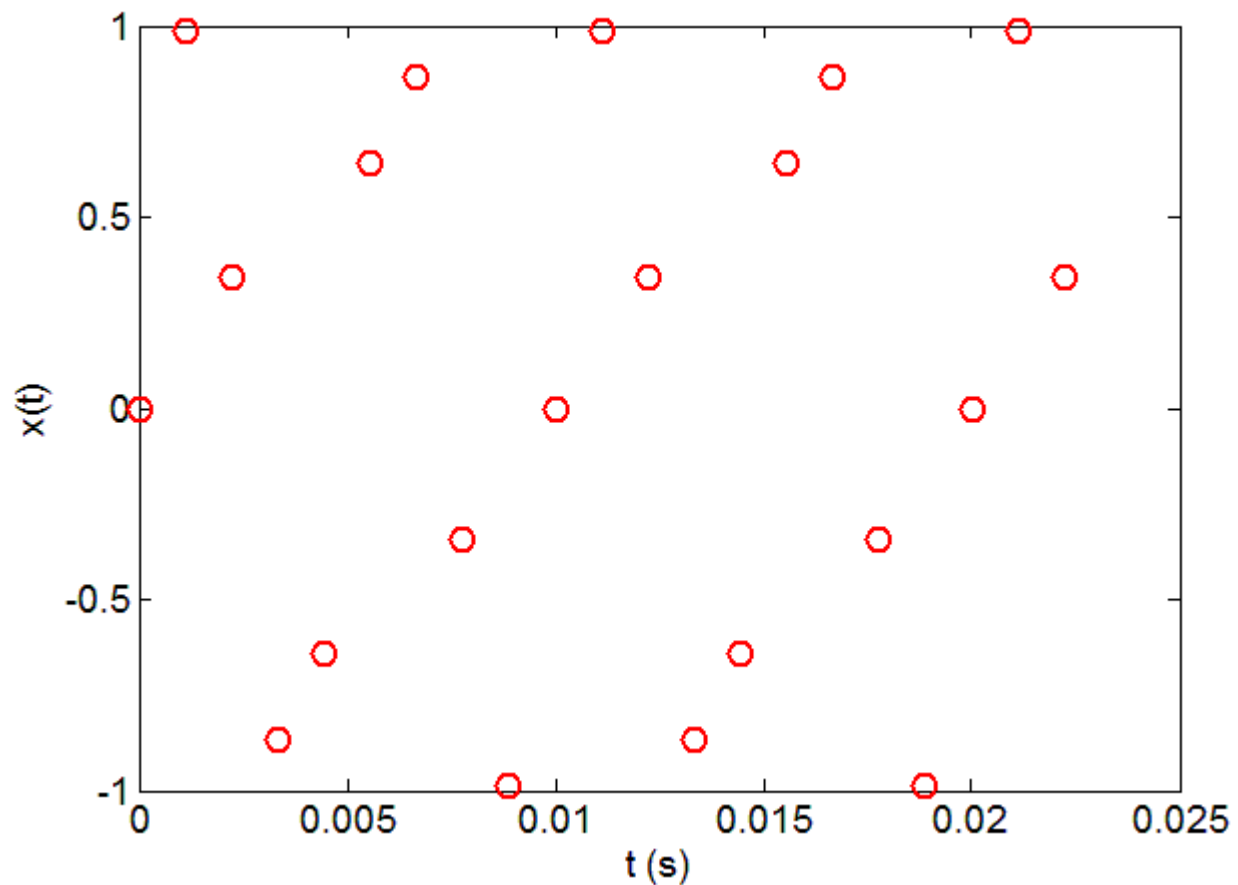
***TF inverse***

$$x(t) = 2F \cdot T_e \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \cdot \text{sinc}(2\pi F(t - nT_e))$$



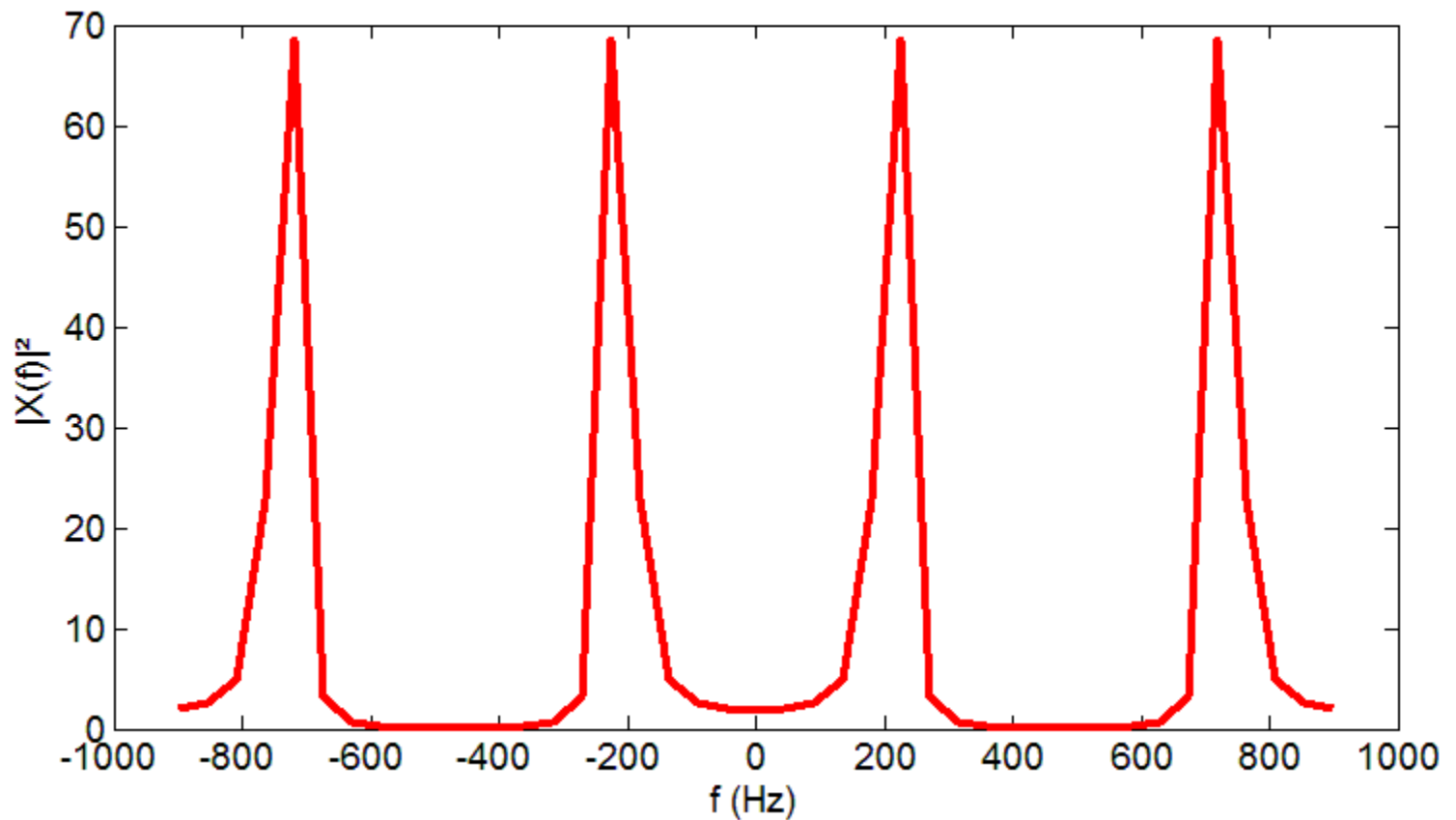
# Théorème de Shannon : reconstitution du signal analogique

Que représente ces échantillons ?



# Théorème de Shannon : reconstitution du signal analogique

La d-s-e du signal nous donne la courbe suivante :

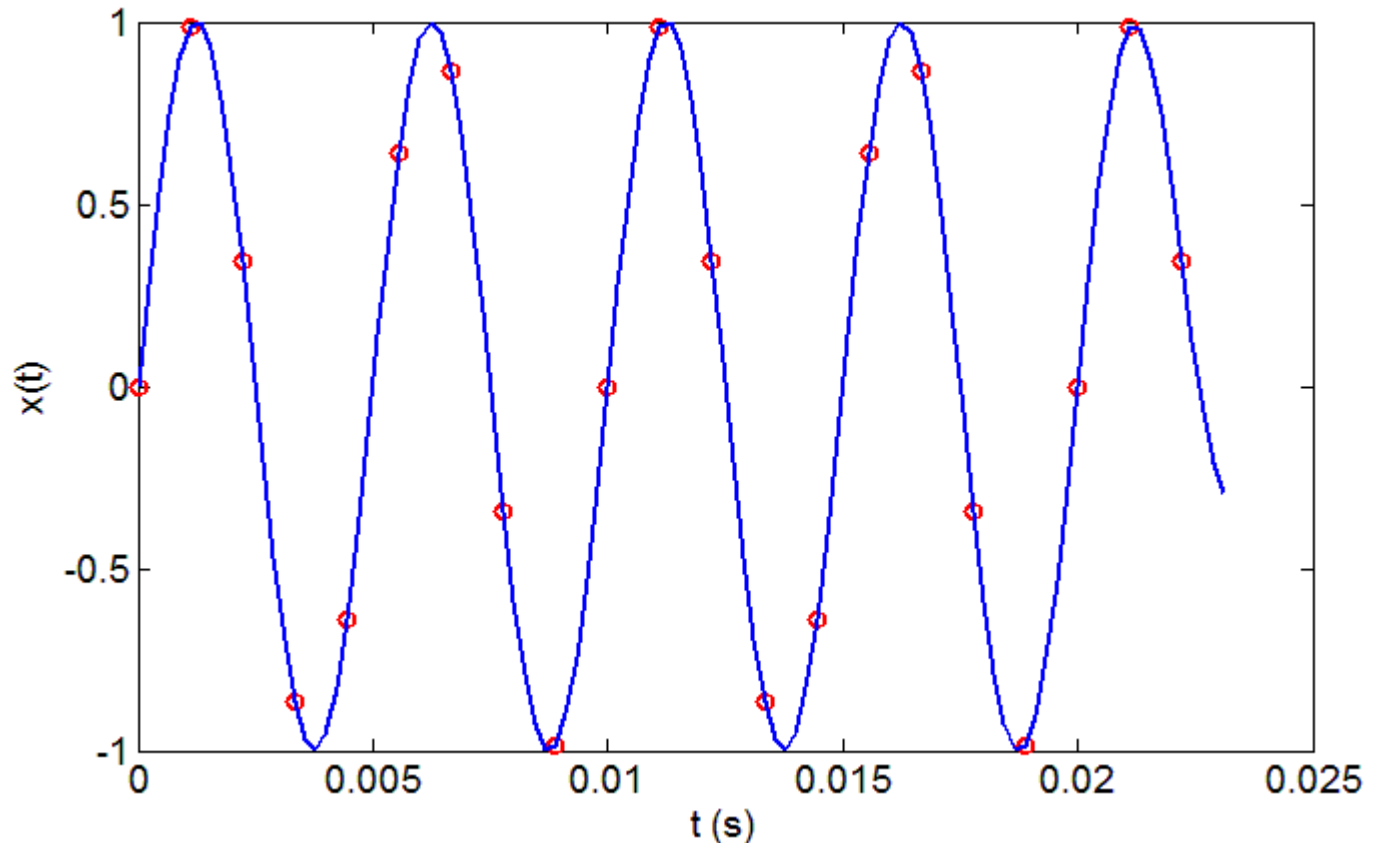


Le signal est :

La fréquence d'échantillonnage est :

# Théorème de Shannon : reconstitution du signal analogique

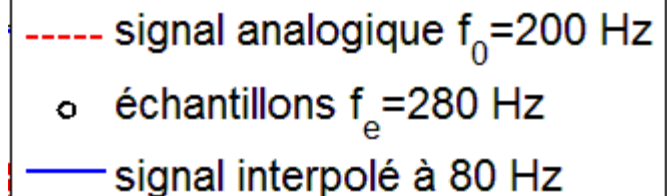
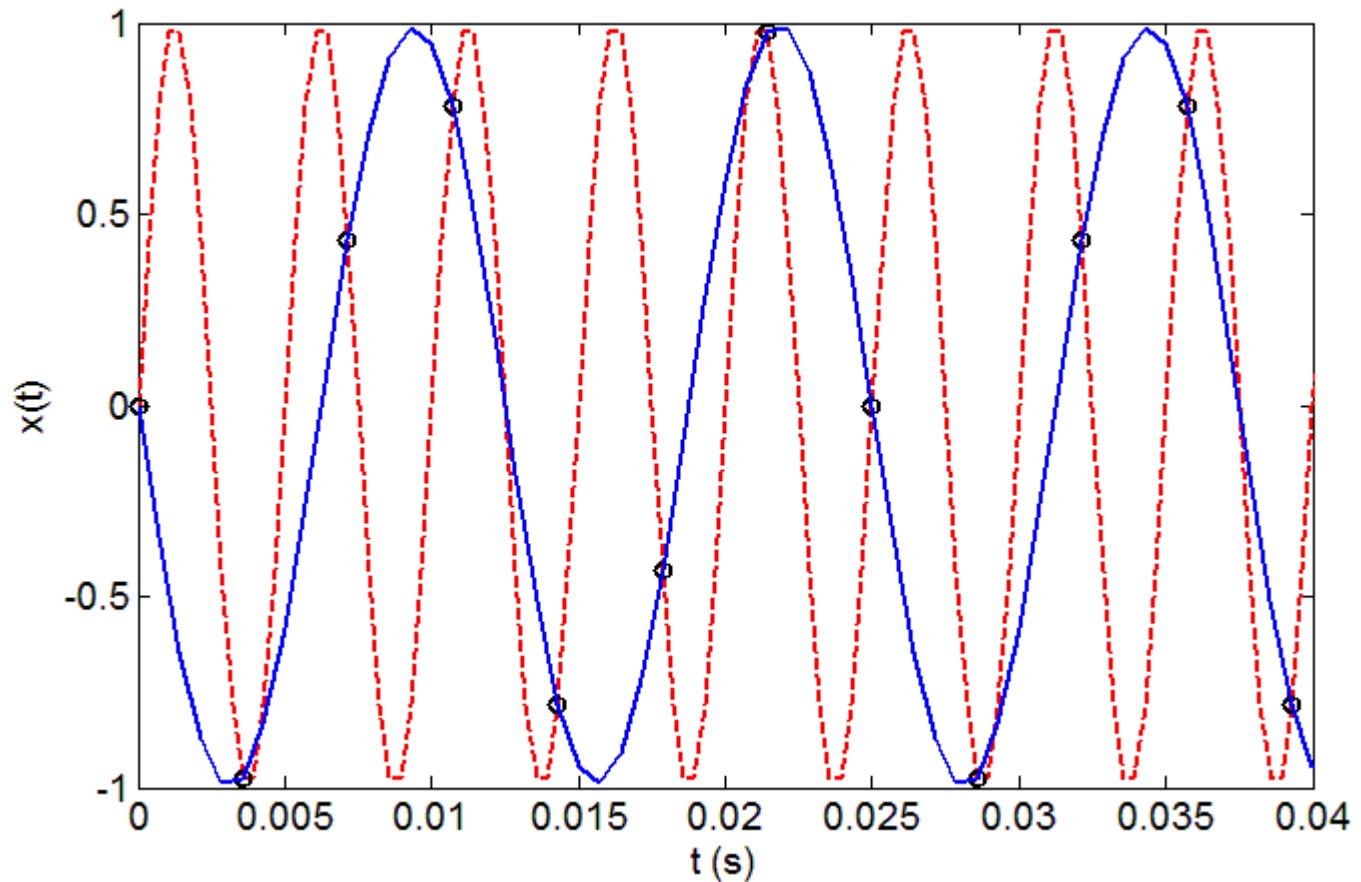
L'interpolation des échantillons nous donne :



Que pouvons nous conclure de l'échantillonnage lorsque le théorème de Shannon est respecté?

# Théorème de Shannon : reconstitution du signal analogique

## Exemple d'interpolation en sous échantillonnage :



# Limites pratiques de l'échantillonnage idéal

## III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

Sig. Durée lim.

Conclusion

En pratique,

Il faut s'assurer qu'il n'y ait **pas de recouvrement**

Un prélèvement d'échantillons instantané est impossible

Les signaux manipulés en pratique ont des **spectres infinis**

Comment les signaux sont-ils échantillonnés ?

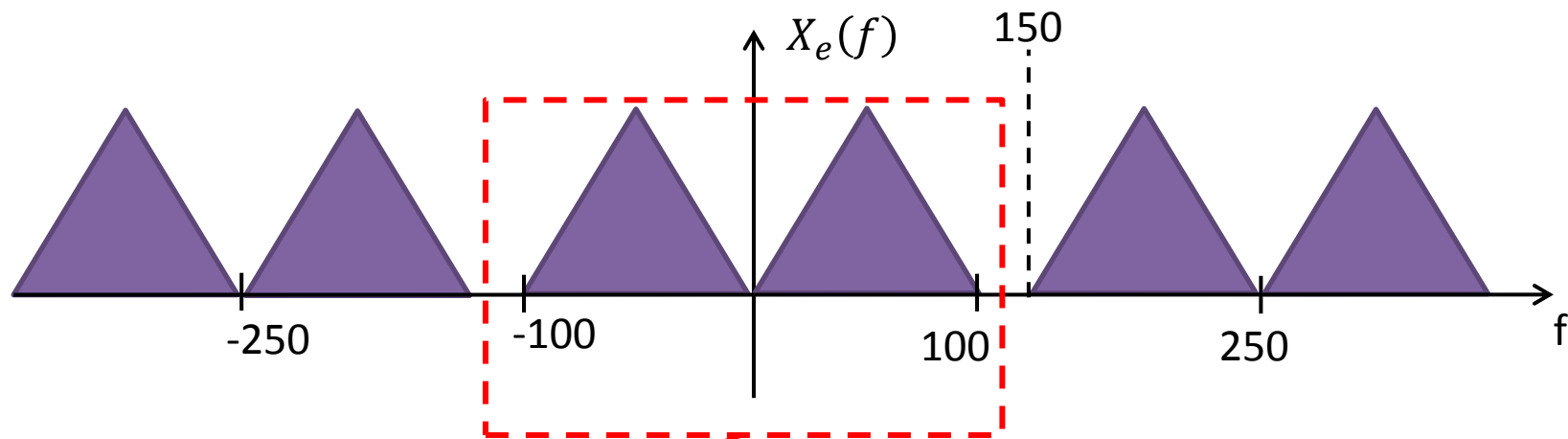
# Filtre anti-repliement

## Problématique

Imaginons un signal utile sur la bande  $[0 - 100 \text{ Hz}]$  que l'on veut échantillonner.

Théorème de Shannon :  $F_e > 200 \text{ Hz} \Rightarrow$  nous choisissons  $250 \text{ Hz}$

Le spectre du signal échantillonné est le suivant :



Spectre du signal analogique

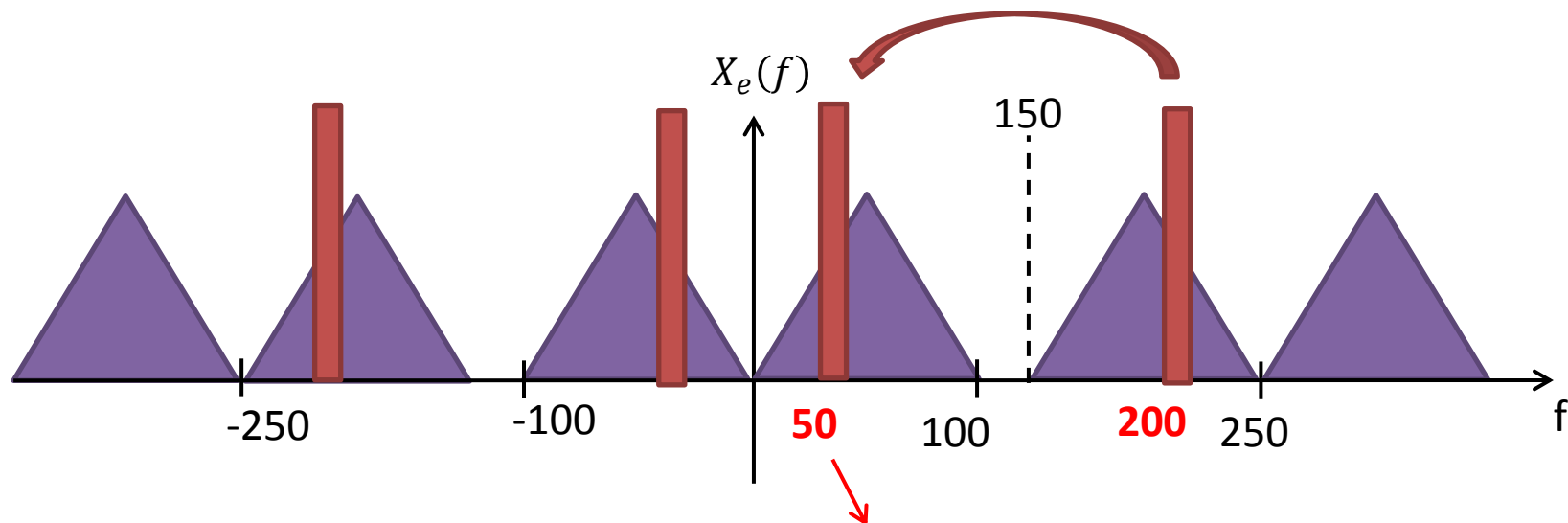
**Pas de problèmes apparents**

# Filtre anti-repliement

## Problématique

Imaginons que le système doivent cohabiter avec un système fonctionnant sur la bande [200-210 Hz].

Le spectre du signal échantillonné reçu est le suivant :



**Repliement du spectre : perturbation du signal utile !!**

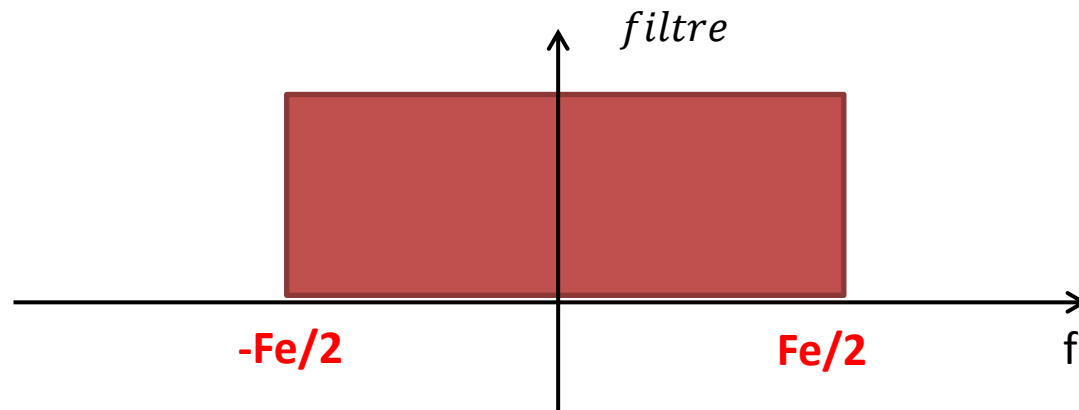
**Comment éviter ce problème?    => filtre anti-repliement**

# Filtre anti-repliement

## Solution

En pratique, le signal est toujours filtré **AVANT** échantillonnage pour supprimer toutes les composantes au dessus de  $F_e/2$

Le filtre anti-repliement est donc un filtre **passé-bas analogique** de fréquence égale **au maximum** à  $F_e/2$



En pratique, le filtre n'est pas parfait. Sa fréquence de coupure est donc souvent choisi en dessous de  $F_e/2$

III. Échantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Échantillonneurs

Sig. Durée lim.

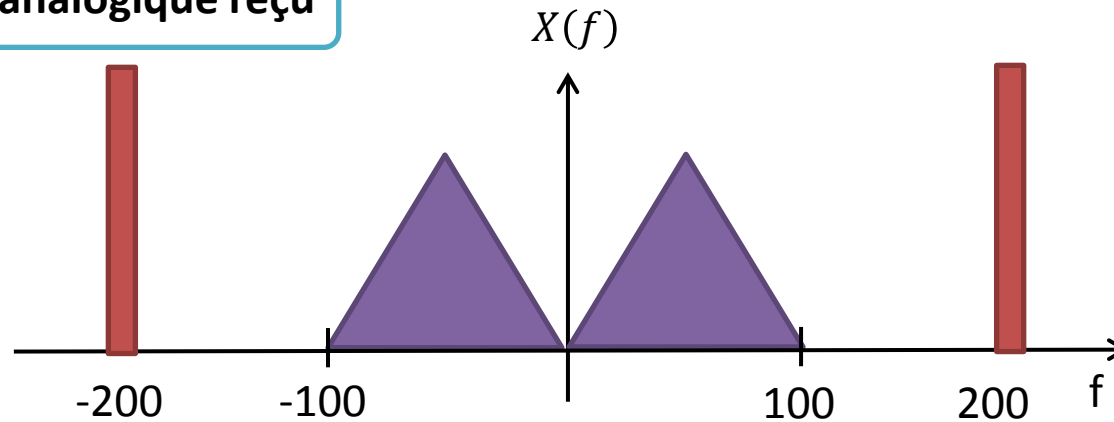
Conclusion



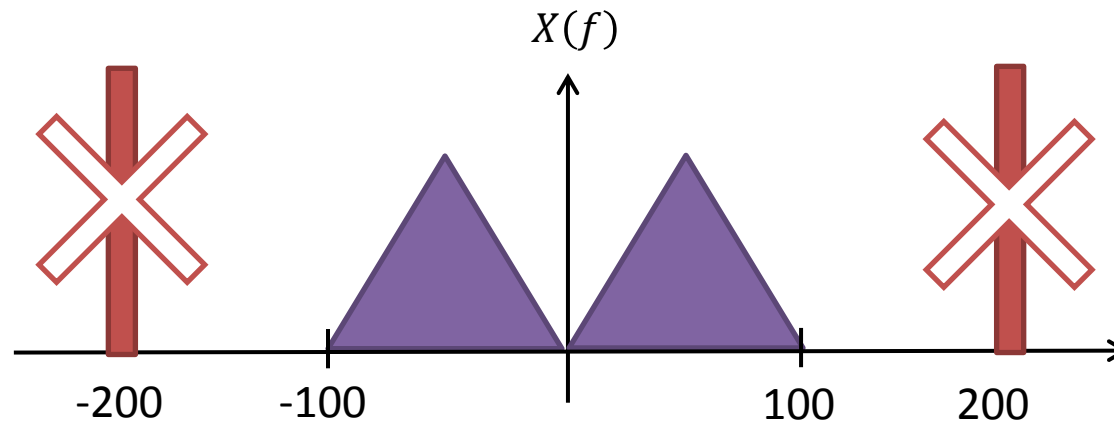
# Filtre anti-repliement

Revenons à l'exemple précédent

Signal analogique reçu



Filtre anti-repliement à  $F_e/2 = 125$  Hz avant échantillonnage



III. Échantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

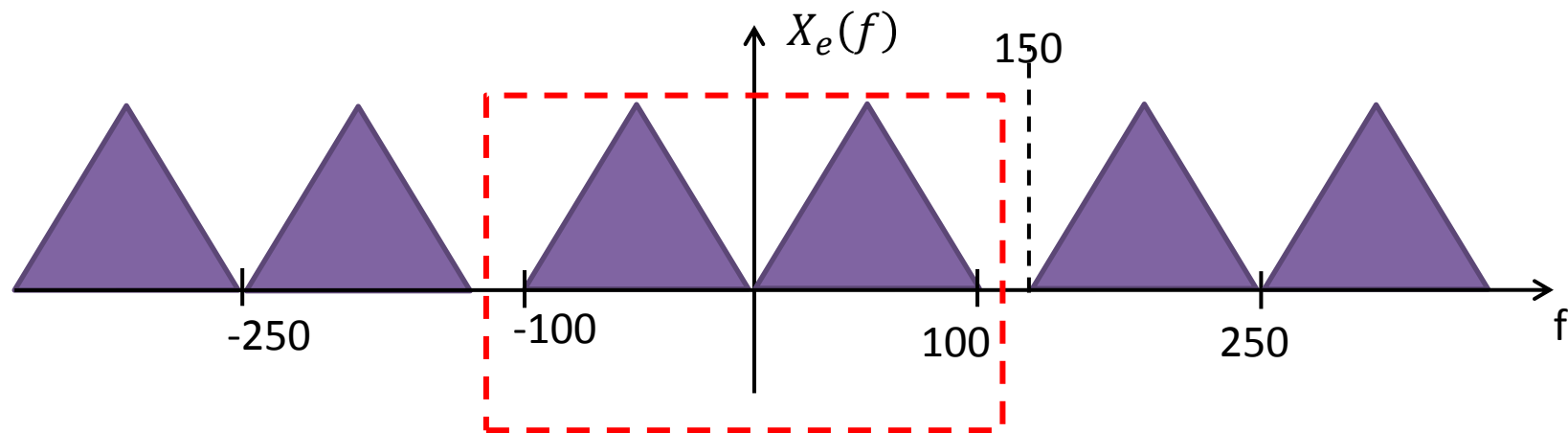
Échantillonneurs

Sig. Durée lim.

Conclusion

# Filtre anti-repliement

Echantillonnage à 250 Hz



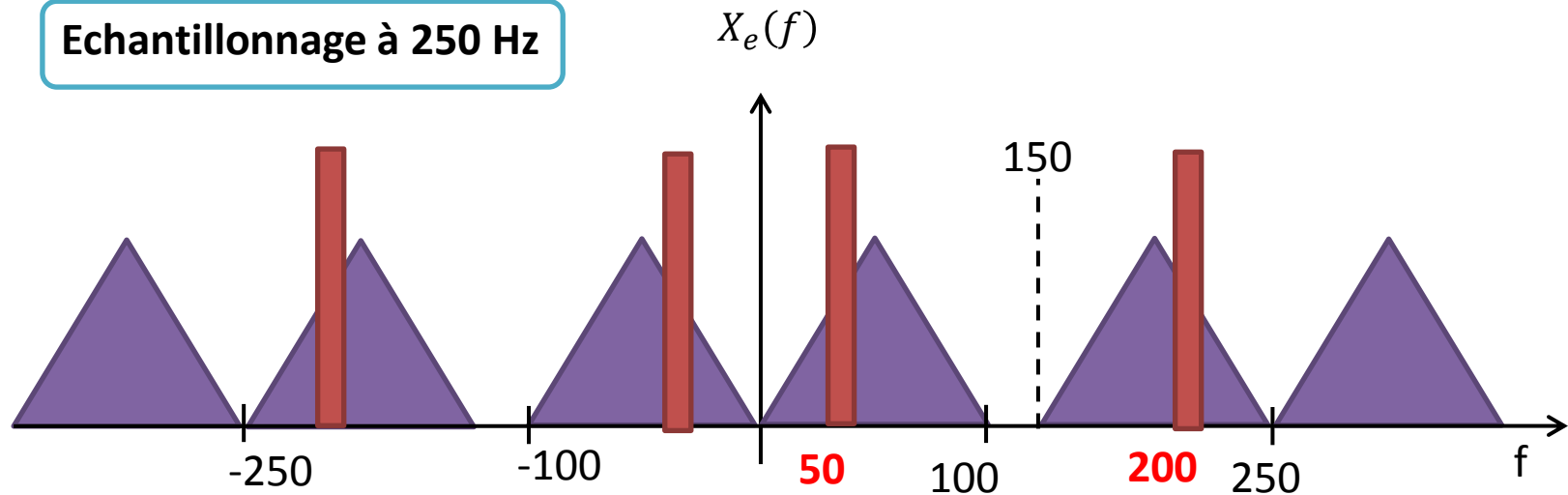
Spectre du signal analogique

**Plus de problème de repliement !**

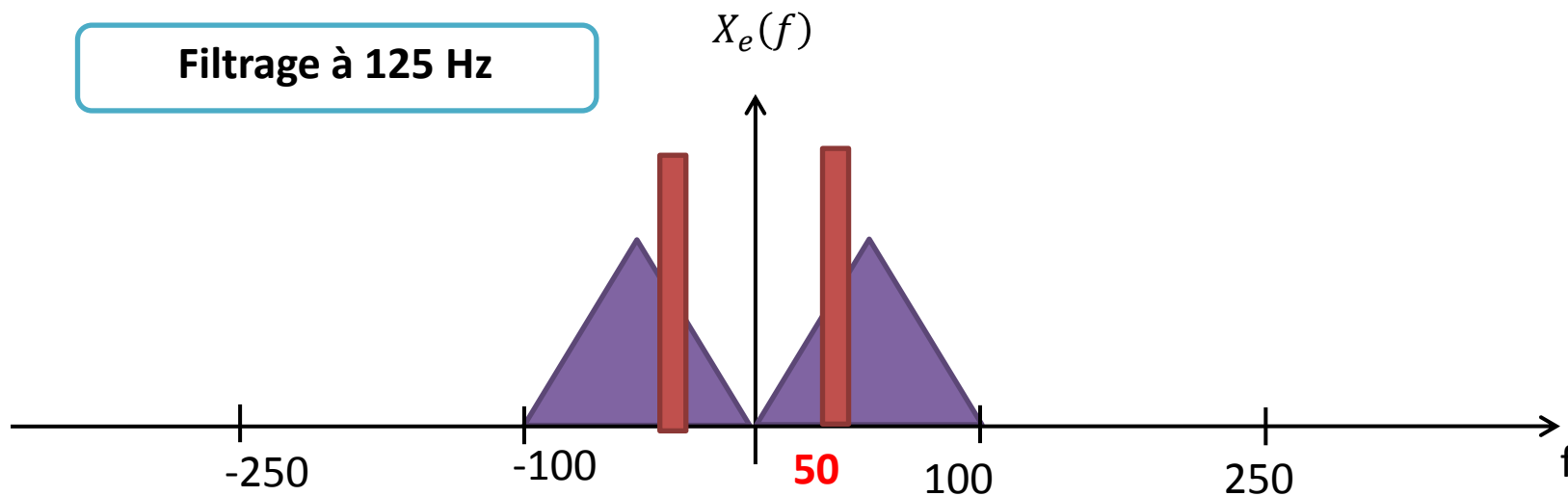
**Que se passe-t-il si l'on place le filtre anti-repliement après  
l'échantillonnage?**

# Filtre anti-repliement

Echantillonnage à 250 Hz



Filtrage à 125 Hz



Le repliement est toujours là ! => **filtre anti-repliement = filtre analogique**

# Exemples d'utilisation du filtre anti-repliement

## III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

Sig. Durée  
lim.

Conclusion

### *Le réseau téléphonique numérique*

Le signal analogique de parole nécessite un filtrage préalable dans la bande  $[300 \text{ Hz} ; 3,4 \text{ kHz}]$  puis un échantillonnage à la fréquence 8 kHz.

# Exemples d'utilisation du filtre anti-repliement

## III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

Sig. Durée  
lim.

Conclusion

### Enregistrement d'un signal sonore

Un signal sonore est audible dans la bande  $[20 \text{ Hz} ; 20 \text{ kHz}]$ . En suivant le théorème de Shannon sur cette bande, une fréquence de 40 kHz est choisie.

Considérons un enregistrement sonore contenant une harmonique à 32 kHz donc inaudible.

Echantillonné à 40 kHz puis restitué à l'aide d'un filtre passe-bas de bande passante  $[-20 \text{ kHz} ; 20 \text{ kHz}]$ , il fournit une composante sinusoïdale parasite à 8 kHz donc audible !!

# Exemples d'utilisation du filtre anti-repliement

## III. Échantillonnage

Principe

Shannon

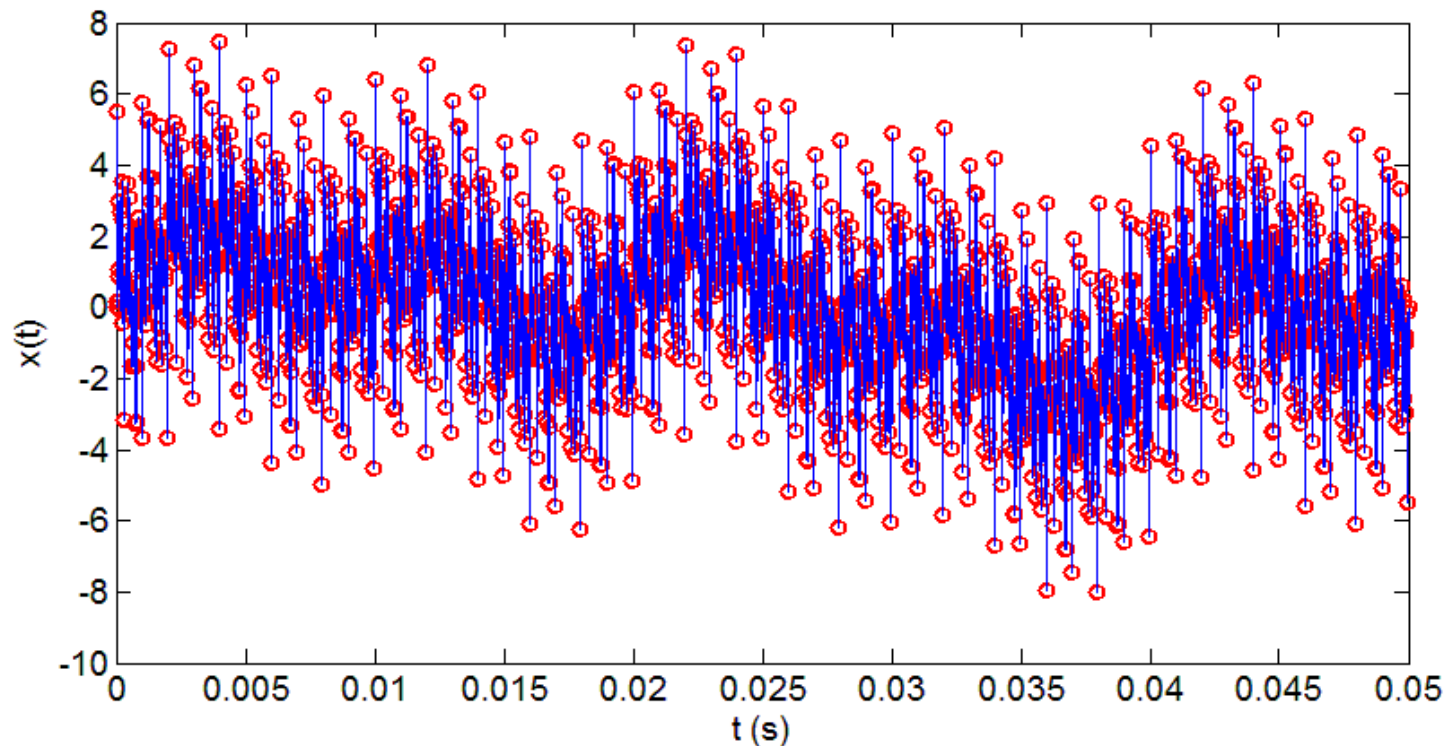
Filtre anti-rep

Échantillonneurs

Sig. Durée lim.

Conclusion

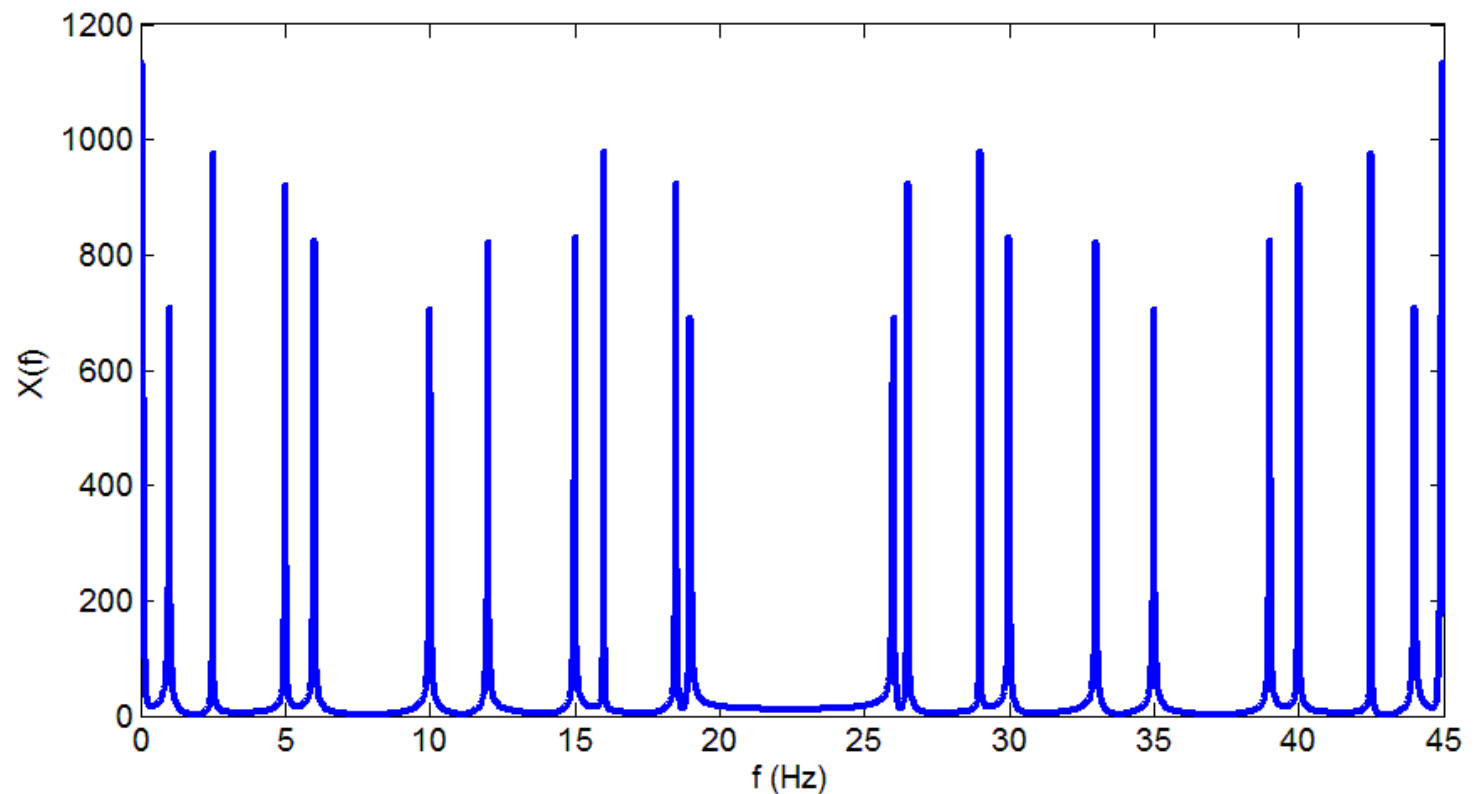
## Enregistrement d'un signal sonore - Démonstration



# Exemples d'utilisation du filtre anti-repliement

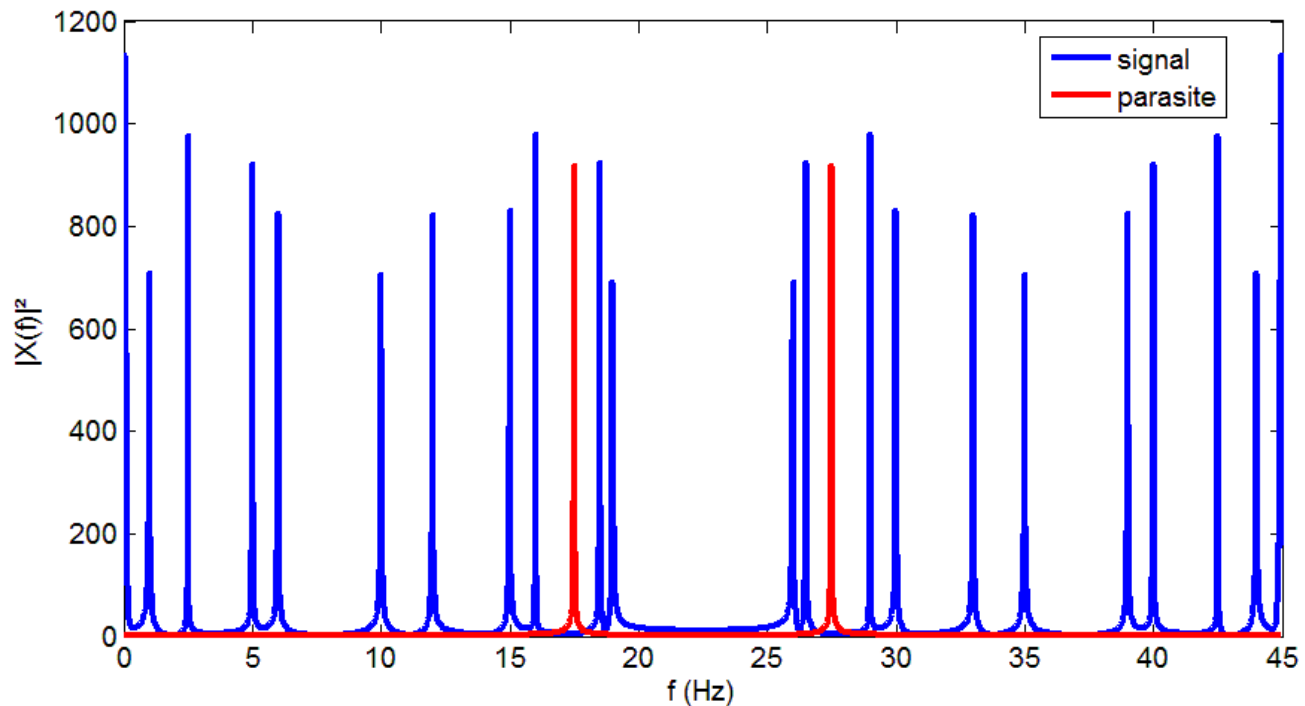
Enregistrement d'un signal sonore – d-e-s du signal utile

Bande passante entre 20 Hz et 20 kHz, échantillonnage à 45 kHz



# Exemples d'utilisation du filtre anti-repliement

Si un signal parasite non audible à 27,5 KHz est présent lors de l'échantillonnage :



**Apparition d'un signal à 17,5 kHz donc audible !!!**

Utilisation d'un filtre anti-repliement avant échantillonnage pour supprimer cette fréquence.



# Echantillonneurs

## III. Echanti- llonnage

Principe

### Processus d'échantillonnage idéal non réaliste en pratique

Impossibilité de prélever un échantillon d'un signal en un temps infiniment court.

Shannon

Filtre anti-rep

Echantill  
onneurs

### Echantillonneur en pratique

Porte analogique qui s'ouvre un court instant  $\tau$  pendant lequel le signal est mis en mémoire.

Sig. Durée  
lim.

Aussi petit que soit  $\tau$ , ce n'est pas  $x(n \cdot T_e)$  qui est mis en mémoire mais une certaine fonction de  $x(t)$  entre les instants " $kT_e - \tau/2$ " et " $kT_e + \tau/2$ ".

Conclusion

# Echantillonneur moyennneur ou suiveur

## III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

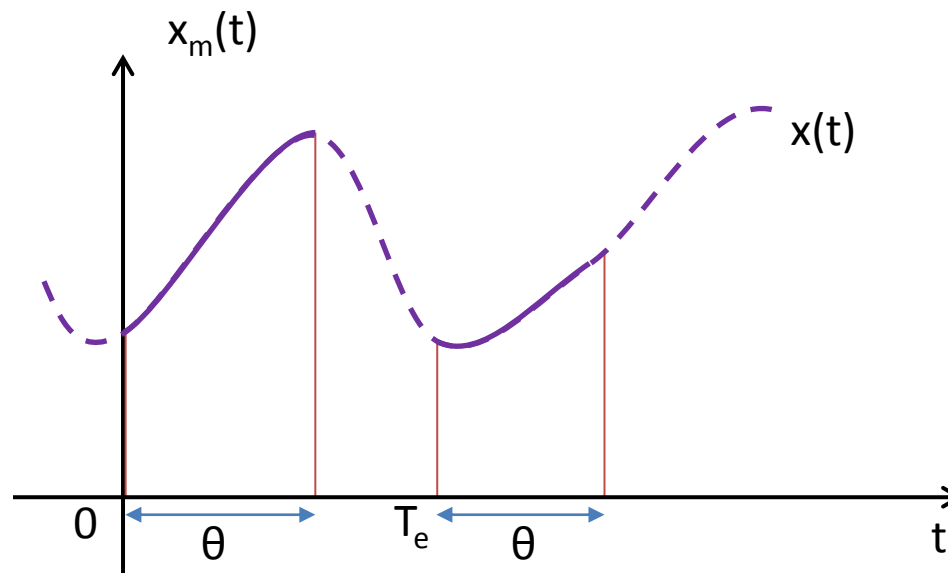
Echantillonneurs

Sig. Durée lim.

Conclusion

Pendant l'ouverture de la porte, le signal prélevé recopie le signal d'entrée.

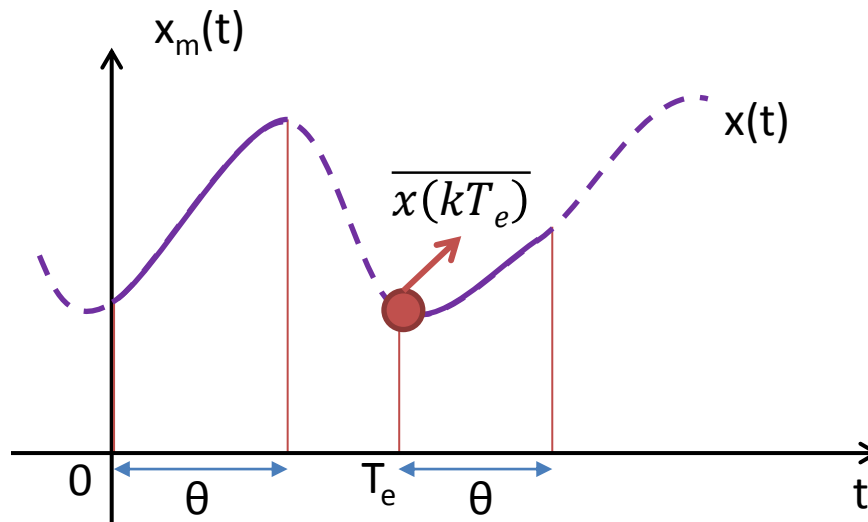
L'échantillon est obtenu en réalisant la **moyenne** du signal sur le temps d'ouverture de la porte.



# Echantillonneur moyennneur ou suiveur

Expression d'un échantillon de  $x(t)$  à l'instant  $t = kT_e$

$$\overline{x(kT_e)} = \frac{1}{\theta} \int_{kT_e}^{kT_e + \theta} x(t) dt = \frac{1}{\theta} \cdot x\left(kT_e + \frac{\theta}{2}\right) * \text{rect}_{\theta}\left(\frac{kT_e + \theta/2}{\theta}\right)$$



# Echantillonneur moyennneur ou suiveur

A partir de l'échantillon  $\overline{x(kT_e)}$ , il est possible d'exprimer le signal  $x_m(t)$

$$\begin{aligned} x_m(t) &= \sum_k x(kT_e) = \sum_k \overline{x(kT_e)} \cdot \delta(t - kT_e) \\ &= \frac{1}{\theta} \cdot \sum_k x\left(kT_e + \frac{\theta}{2}\right) * \text{rect}\left(\frac{kT_e + \theta/2}{\theta}\right) \cdot \delta(t - kT_e) \\ &= \frac{1}{\theta} \cdot x\left(t + \frac{\theta}{2}\right) * \text{rect}\left(\frac{t + \theta/2}{\theta}\right) \cdot \sum_k \delta(t - kT_e) \end{aligned}$$

$$x_m(t) = \frac{1}{\theta} \cdot \left\{ \left\{ x(t) * \text{rect}_\theta\left(\frac{t}{\theta}\right) \right\} * \delta\left(t + \frac{\theta}{2}\right) \right\} \cdot \sum_k \delta(t - kT_e)$$

III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

Sig. Durée lim.

Conclusion

# Echantillonneur moyennneur ou suiveur

Expression du spectre du signal échantillonné  $X_m(f)$

$$\begin{aligned} X_m(f) &= TF[x_m(t)] \\ &= Fe \cdot \{(X(f) \cdot \text{sinc}(\pi f \theta)) \cdot e^{\pi j f \theta}\} * \sum_k \delta(f - kFe) \\ &= Fe \cdot \sum_k X_1(f - kFe) \end{aligned}$$

Le principe de cet échantillonneur peut être généralisé en considérant une impulsion de forme quelconque en guise de fenêtre.

III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

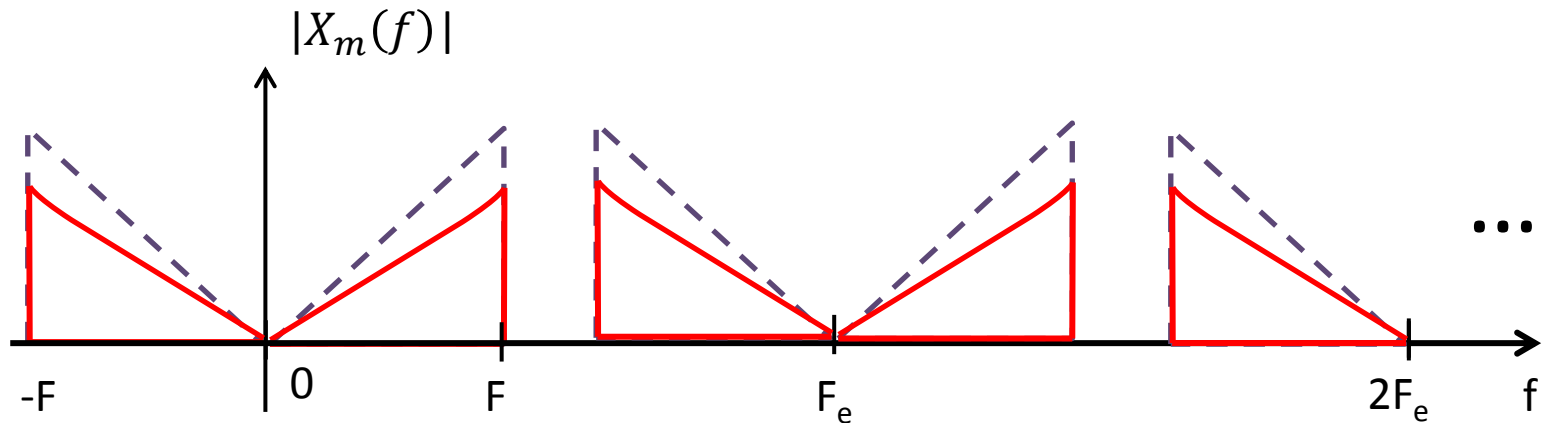
Sig. Durée lim.

Conclusion

# Echantillonneur moyennneur ou suiveur

Expression du spectre du signal échantillonné  $X_m(f)$

$$X_m(f) = Fe \cdot \{ (X(f) \cdot \text{sinc}(\pi f \theta)) \cdot e^{\pi j f \theta} \} * \sum_k \delta(f - kFe)$$



L'effet de l'échantillonneur moyennneur affecte surtout les hautes fréquences => effet du sinus cardinal

— — — Spectre du signal avec un échantillonnage parfait

# Echantillonneur bloqueur

Le signal est bloqué pendant une durée  $\theta$  de mise en mémoire de sa valeur.

L'expression d'un échantillon de  $x(t)$  à l'instant  $t = kT_e$

$$\overline{x(kT_e)} = x(kT_e) \cdot \text{rect}_\theta \left( \frac{t - \theta/2 - kT_e}{\theta} \right)$$

L'expression du signal échantillonné bloqué est :

$$x_b(t) = \sum_k \leftarrow x(kT_e) = \sum_k x(kT_e) \cdot \left( \text{rect}_\theta \left( \frac{t - \theta/2}{\theta} \right) * \delta(t - kT_e) \right)$$

$$x_b(t) = \sum_k (x(t) \cdot \delta(t - kT_e)) * \text{rect}_\theta \left( \frac{t - \theta/2}{\theta} \right)$$

## III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

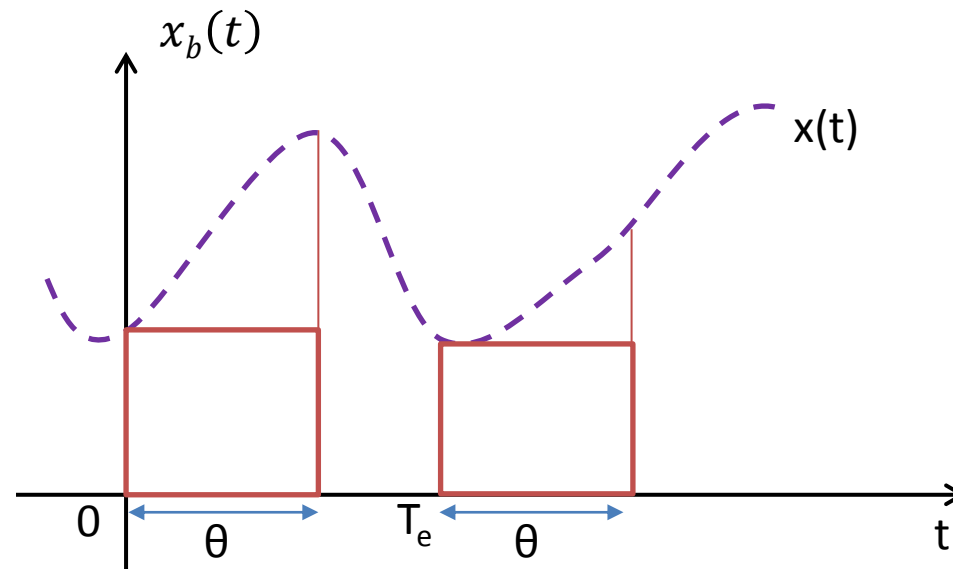
Sig. Durée lim.

Conclusion

# Echantillonneur bloqueur

Le signal est bloqué pendant une durée  $\theta$  de mise en mémoire de sa valeur.

$$x_b(t) = \sum_k (x(t) \cdot \delta(t - kT_e)) * \text{rect}_{\theta} \left( \frac{t - \theta/2}{\theta} \right)$$



## III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

Sig. Durée lim.

Conclusion

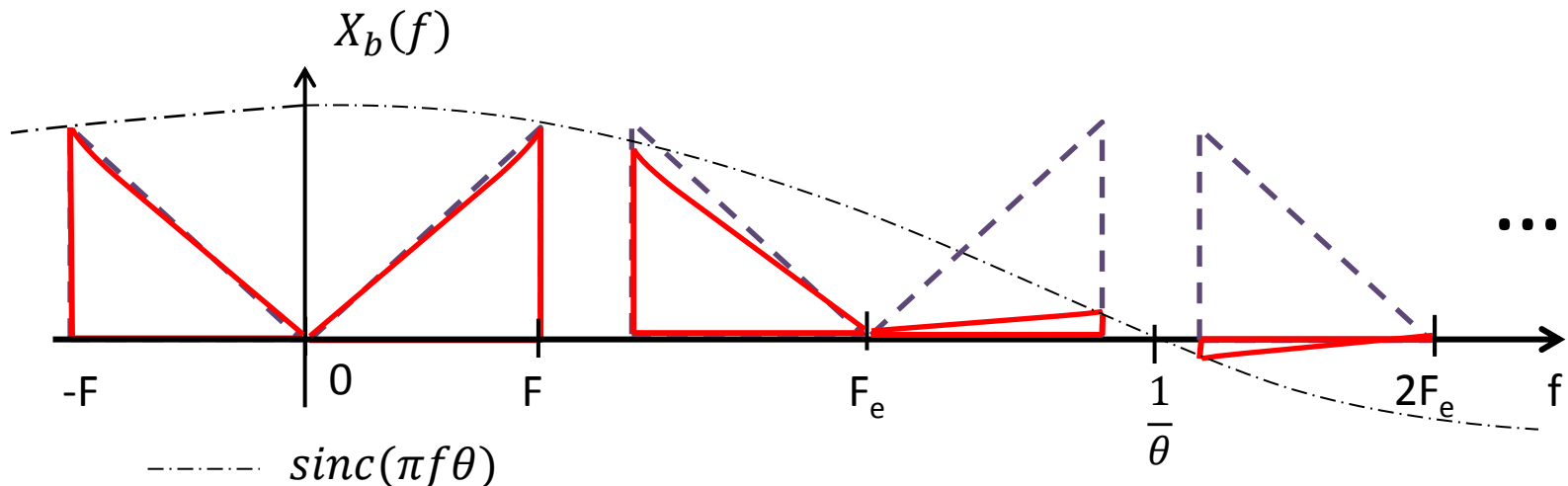


# Echantillonneur bloqueur

Le spectre du signal échantillonné bloqué est alors :

$$X_b(f) = X(f) * F_e \sum_k \delta(t - kF_e) \cdot \theta \text{sinc}(\pi f \theta) \cdot e^{-\pi j f \theta}$$

$$X_b(f) = \theta \cdot F_e \sum_k X(f - kF_e) \cdot \text{sinc}(\pi f \theta) \cdot e^{-2\pi j f \theta/2}$$



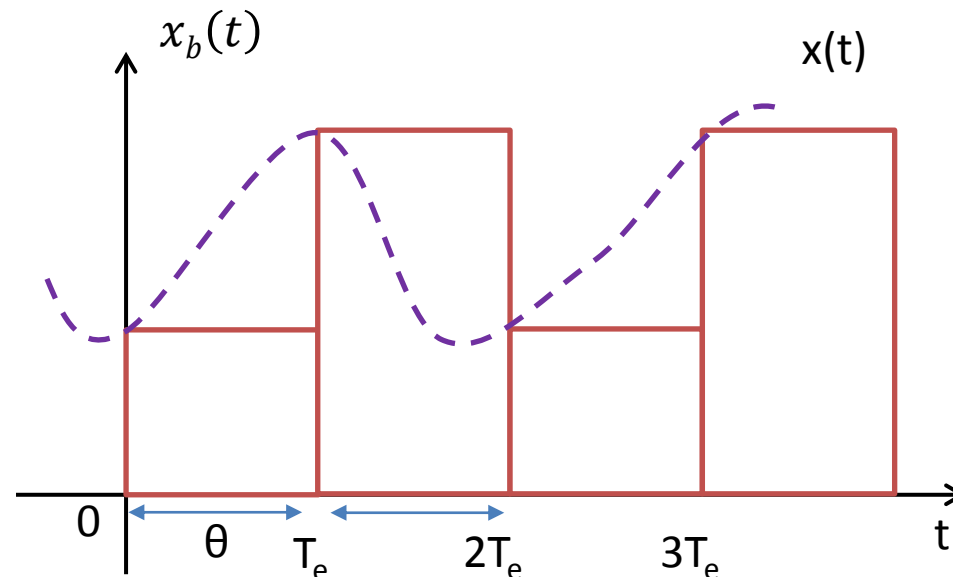
Distorsion du signal, sauf en  $f=0$

# Echantillonneur bloqueur d'ordre 0

Cas particulier de l'échantillonneur bloqueur quand :  $\theta = T_e$

Le signal est bloqué pendant une durée  $\theta$  égale à  $T_e$  de mise en mémoire de sa valeur.

$$x_b(t) = \sum_k (x(kT_e)) * \text{rect}T_e \left( \frac{t - (k + 1/2)T_e}{T_e} \right)$$



## III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

Sig. Durée lim.

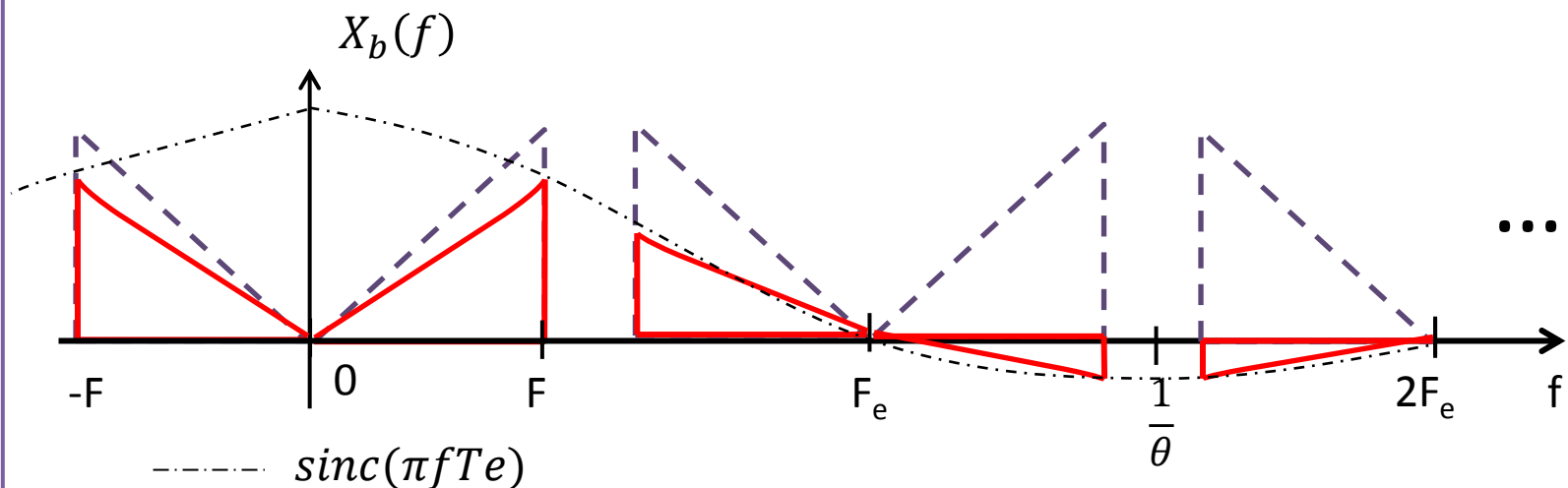
Conclusion

# Echantillonneur bloqueur d'ordre 0

Le spectre du signal échantillonné bloqué est alors :

$$X_b(f) = \sum_k X(f - kF_e) \cdot \text{sinc}(\pi f T_e) \cdot e^{-\pi j f T_e}$$

La périodisation du spectre est fortement atténuée.



## III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

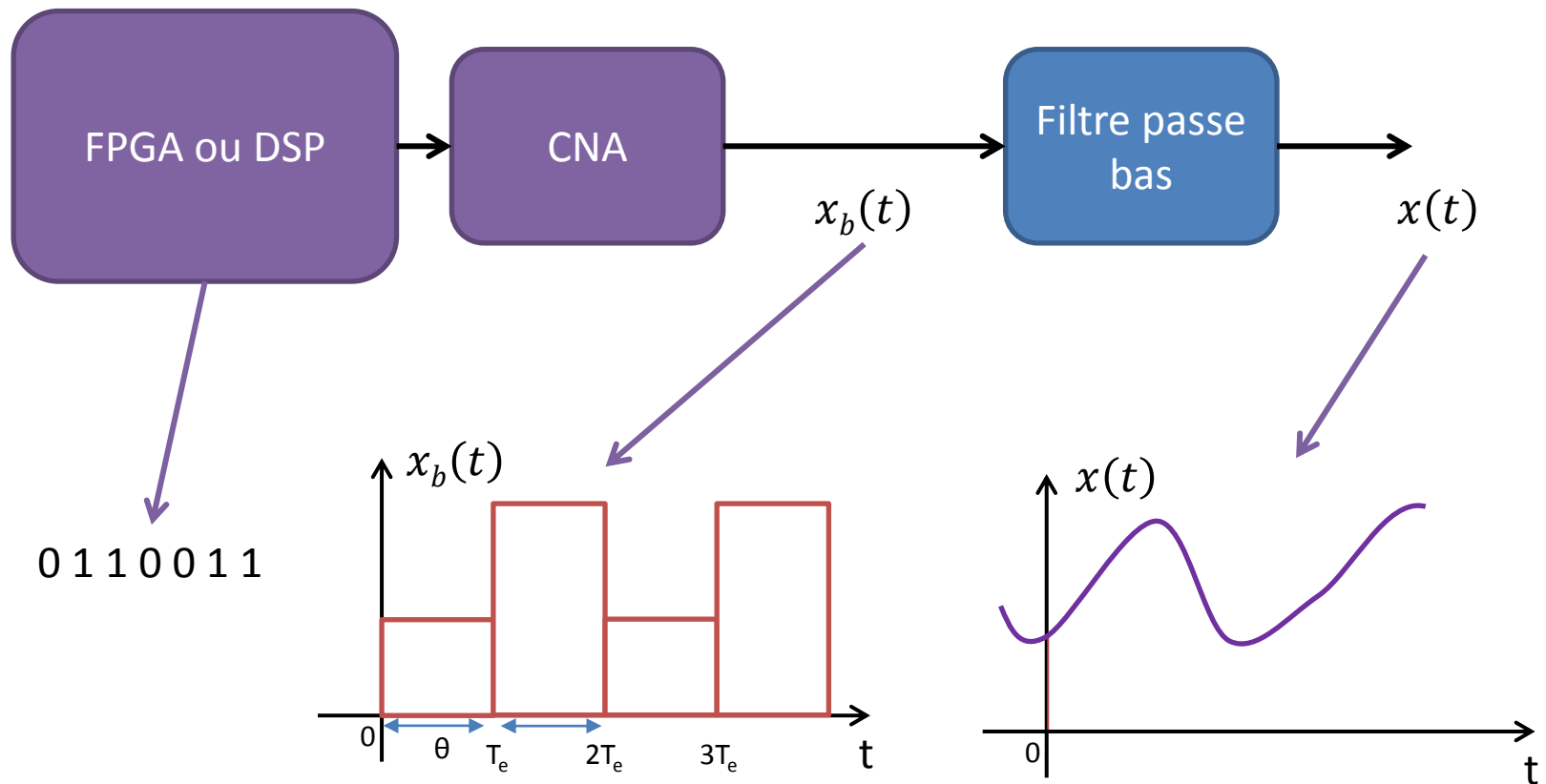
Sig. Durée lim.

Conclusion

# Echantillonneur bloqueur d'ordre 0

En pratique, c'est l'échantillonneur le plus utilisé :

- Pour restituer  $x(t)$ , il suffit d'utiliser un filtre passe-bas pour « lisser » les marches à la sortie du CNA



0 1 1 0 0 1 1

# Echantillonnage des signaux à durée limitée

## Aspect théorique

Soit  $x(t)$ , un signal à support infini  
et  $x(t, T) = x(t) \cdot \text{rect}(t/T)$ , le signal tronqué de support  $[T/2; T/2]$

Le spectre du signal tronqué est donc :

$$X(f, T) = X(f) * T \text{sinc}(\pi f T)$$

Où  $X(f)$  a un support fini et  $T \text{sinc}(\pi f T)$  a un support infini.

**Donc  $X(f, T)$  a un support infini.**

D'après le théorème de Shannon, la fréquence d'échantillonnage doit être supérieur à deux fois la fréquence la plus haute du signal.

⇒ Nous arrivons à la conclusion d'une fréquence d'échantillonnage infinie.

⇒ Comment choisie-t-on la fréquence d'échantillonnage en pratique?

III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

Sig. Durée lim.

Conclusion

# Echantillonnage des signaux à durée limitée

## Aspect pratique

En pratique, la fonction sinus cardinal peut être approximée par son lobe principal (on peut ajouter des lobes secondaires)

Le spectre du signal tronqué est donc :

$$X(f, T) = X(f) * T \cdot \text{"lobe principal sinc}(\pi f T)\text{"}$$

Où  $X(f)$  a un support fini entre  $[-F; F]$

Et  $T \cdot \text{lobe principal sinc}(\pi f T)$  a un support fini entre  $[-1/T; 1/T]$ .

Le spectre est alors défini sur :  $[-1/T - F; 1/T + F]$

La fréquence d'échantillonnage est alors choisie comme :  $F_e \geq 2 \cdot (1/T + F)$

Dans le cas où  $T$  est suffisamment grand, il est possible d'échantillonner le signal à une fréquence légèrement supérieur à  $2F$ .

### III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

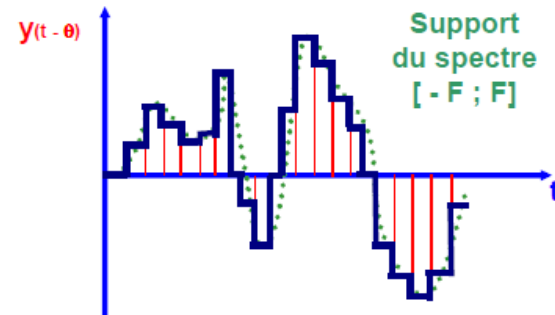
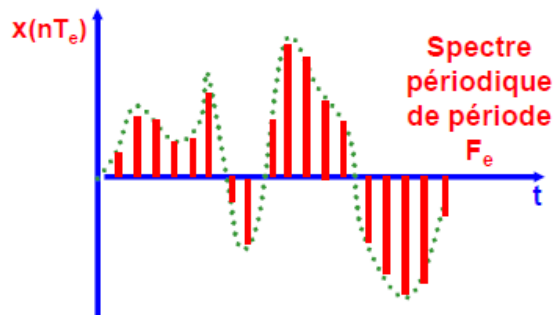
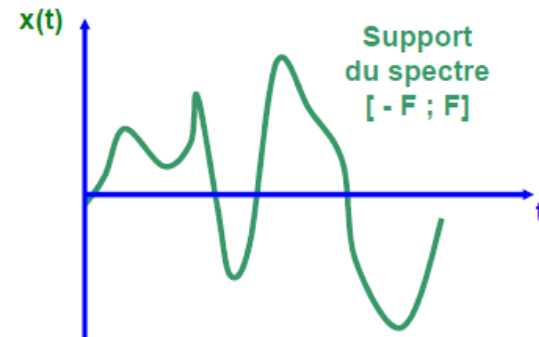
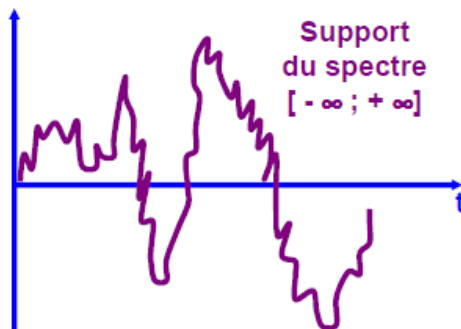
Echantillonneurs

Sig. Durée lim.

Conclusion

# Conclusion

## Chaine de traitement numérique



# Conclusion

## Remarque

### III. Échantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Échantillonneurs

Sig. Durée lim.

Conclusion

#### Son audio téléphonique

Échantillonnage à 8 kHz et quantification sur 8 bits

Débit :  $8 \cdot 10^3 \times 8 = 64 \text{ kbit/s}$

Volume en 1 minute :  $3,84 \cdot 10^6 \text{ bits} \sim 480 \text{ ko}$

#### Son audio qualité CD

Échantillonnage à 44,1 kHz et quantification sur 16 bits

Débit :  $705,6 \text{ kbit/s}$

Volume en 1 minute :  $\sim 5 \text{ Mo}$

- ⇒ Influence de la technique de numérisation sur le débit et le volume de stockage
- ⇒ Fréquence d'échantillonnage et quantification en fonction de l'usage
- ⇒ Fréquence d'échantillonnage minimale donnée par Shannon



# Conclusion

## *A retenir*

### Echantillonnage

Prélèvement des valeurs d'un signal tous les  $1/F_e$

### Effet

Périodisation du spectre de période  $F_e$

### Préconisation

Théorème de Shannon :  $F_e > 2 F_{\max}$  du signal

Filtre anti-repliement :

Filtre passe bas analogique de fréquence de coupure :  $F_c = F_e/2$

#### III. Echantillonnage

Principe

Shannon

Filtre anti-rep

Echantillonneurs

Sig. Durée lim.

Conclusion