MA351 : Introduction à la théorie des graphes

Graphes orientés

Yann Kieffer

ESISAR

Graphes orientés : définition

Produit cartésien

Le *produit cartésien* de deux ensembles A et B, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples formés d'un élément de A et d'un élément de B.

Relation

Une *relation* R de A vers B est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$:

$$R \subseteq A \times B$$

.

Graphe orienté

Un graphe orienté est la donnée d'un ensemble fini V, dit *ensemble de sommets*, et d'une relation A de V sur V, nommée *ensemble d'arcs*.

Graphe orientés : vocabulaire de base

Lorsque (x, y) est un arc d'un graphe orienté, on dit que :

- x est la *queue* de l'arc ;
- y est la *tête* de l'arc ;
- x et y sont les *extrémités* de l'arc ;
- y est un *successeur* de x ;
- x est un *prédécesseur* de y.

L'arc (x, y) est également noté $\overrightarrow{xy}$.

- L'ensemble des successeurs de x est noté $N^+(x)$;
- L'ensemble des prédécesseurs de x est noté $N^-(x)$;
- Le *degré sortant* de x est $d^+(x) = |N^+(x)|$;
- Le *degré entrant* de x est $d^-(x) = |N^-(x)|$;
- le *degré total* de x est $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$.

Sommets particuliers

- Un sommet de degré total 0 est appelé *sommet isolé* ;
- Un sommet de degré total 1 est appelé *feuille* ;
- Un sommet de degré entrant 0 est appelé *source* ;
- Un sommet de degré sortant 0 est appelé *puits*.

Questions :

- Montrer qu'une feuille est soit une source, soit un puits.
- A-t-on toujours la relation $d(x) = |N^+(x) \cup N^-(x)|$?
- Un sommet peut-il être à la fois puits et source ?

Opérateurs de graphes

Graphe miroir

Si $\overrightarrow{G} = (V, A)$ est un graphe orienté, son graphe miroir $\overrightarrow{G}^m$ est le graphe (V, B) où $B = \{(y, x) \mid (x, y) \in A\}$.

Sous-graphe induit

Si $\overrightarrow{G} = (V, A)$ est un graphe orienté, et $S \subseteq V$ un sous-ensemble de l'ensemble de ses sommets, alors le sous-graphe de $\overrightarrow{G}$ induit par S, noté $\overrightarrow{G}[S]$, est le graphe (S, B) avec $B = \{(x, y) \in A, \mid x \in S, y \in S\}$.

Chemins

La première notion élaborée en théorie des graphes est celle de cheminement.

Définition

Un *chemin* de a à b dans le graphe orienté $\overrightarrow{G} = (V, A)$ est une succession de sommets $C = (x_0, \ldots, x_k)$ telle que :

- $x_0 = a$;
- $x_k = b$;
- $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \quad (x_{i-1}, x_i) \in A$.

On dit que ce chemin est de *longueur* k ; on note : $l(C) = k$.

Observez la notation utilisée pour l'arc (x_{i-1}, x_i) : la notation avec la flèche n'est utilisée que pour désigner des couples dont on sait qu'ils sont des arcs. Ici, la dernière condition exprime que le couple doit bien être un arc du graphe.

Propriété des chemins ; circuits

Chemins particuliers

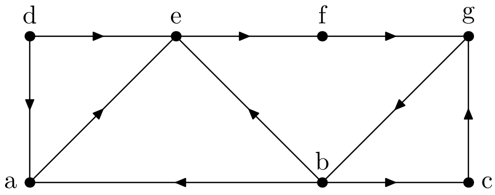
On dit que le chemin $C = (x_0, \ldots, x_k)$ est :

- *clos* si $x_0 = x_k$;
- *simple* si $\forall i, j \in \{1, \ldots, k\}, \quad \overrightarrow{x_{i-1}, x_i} = \overrightarrow{x_{j-1}, x_j} \Rightarrow i = j$.

Définition

Un chemin clos simple, de longueur non nulle, est appelé *circuit*.

Exemples



Les suites de sommets suivantes sont-elles des chemins ? Des chemins clos ? Des chemins simples ? Des circuits ?

- (a, e, f, g, b)
- (b, a, e, b)
- (b, a, e, f, g, b)
- (b, e, f, g, b, c, g, b)
- (b)
- (d, e, f, g, b, e, f)