MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Chaînes de Markov à temps discret (CMTD)
Séance de TD du 05 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 20 de la séance de TD consacrée aux chaînes de Markov à temps discret. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 20

On considère la chaîne de Markov (X_n) définie sur l'espace d'état $E = \{1, 2, ...5\}$, dont la matrice de transition est donnée par

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1. Classer les états de la chaîne. On notera dans la suite C, la classe formée par les états récurrents.
2. On note $T = inf\{n \geq 0,\ X_n \in C\}$ le temps d'entrée dans C. Calculer $E_x(T)$, l'espérance de T partant de l'état x, pour tout $x \in \bar{C} = E \setminus C$.
3. Calculer la loi d'entrée dans C, c'est-à-dire les probabilités $P_x(X_T = y)$ si d'entrer dans la classe C par l'état $y \in C$, partant de $x \in \bar{C}$.

Correction de l'Exercice 20

1. La chaîne de Markov associée à la matrice $\mathbf{P}$ est représentée à la figure 1. Elle peut être partitionnée en deux classes d'équivalences : la classe $\{1, 3, 4\}$, composée d'état transitoires, et la classe $\{2, 5\}$, composée d'états récurrents non nuls. Aucun état de la chaîne n'est périodique.

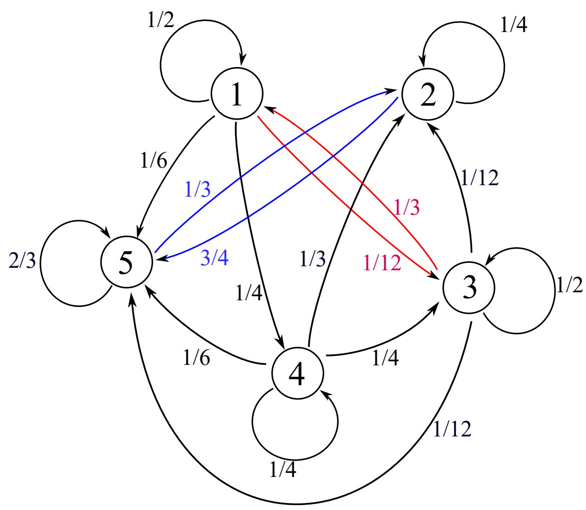

Figure 1: Le graphe associé à la CMTD de l'exercice 20.

2. Définissons, en adoptant les notations du cours, le vecteur des espérances des temps d'entrée dans la classe C :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_3 \\ \mathbf{T}_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} E\left(T_F \,|X_0 = 1\right) \\ E\left(T_F \,|X_0 = 3\right) \\ E\left(T_F \,|X_0 = 4\right) \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\mathbf{T}$ est solution de :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_3 \\ \mathbf{T}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_3 \\ \mathbf{T}_4 \end{pmatrix}$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_3 \\ \mathbf{T}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{7} \\ \frac{34}{7} \\ \frac{62}{21} \end{pmatrix}$$

3. En suivant les notations du cours, nous noterons

$$\mathbf{W}_2^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_2^{(1)} \\ \mathbf{W}_2^{(2)} \\ \mathbf{W}_2^{(3)} \\ \mathbf{W}_2^{(4)} \\ \mathbf{W}_2^{(5)} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} P\left(X_T = 2 \,|X_0 = 1\right) \\ P\left(X_T = 2 \,|X_0 = 2\right) \\ P\left(X_T = 2 \,|X_0 = 3\right) \\ P\left(X_T = 2 \,|X_0 = 4\right) \\ P\left(X_T = 2 \,|X_0 = 5\right) \end{pmatrix}$$

le vecteur des probabilités d'entrer dans C par l'état 2, en partant de l'état i pour $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Comme $C = \{2,5\}$, on a nécessairement $\mathbf{W}_2^{(2)} = 1$ et $\mathbf{W}_2^{(5)} = 0$. Il reste à résoudre :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_2^{(1)} \\ \mathbf{W}_2^{(3)} \\ \mathbf{W}_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_2^{(1)} \\ \mathbf{W}_2^{(3)} \\ \mathbf{W}_2^{(4)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathbf{W}_2^{(2)} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \mathbf{W}_2^{(5)}$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_2^{(1)} \\ \mathbf{W}_2^{(3)} \\ \mathbf{W}_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45}{122} \\ \frac{161}{427} \\ \frac{784}{1281} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.368.. \\ 0.307.. \\ 0.612.. \end{pmatrix}$$

Comme les probabilités d'entrer dans la classe C par l'état 5 sont complémentaires, on trouve également :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_5^{(1)} \\ \mathbf{W}_5^{(3)} \\ \mathbf{W}_5^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{77}{122} \\ \frac{266}{427} \\ \frac{497}{1281} \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{W}_5^{(2)} = 0$ et $\mathbf{W}_5^{(5)} = 1$.