MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Processus de Poisson
Séance de TD du 26 mars 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 1 de la séance de TD consacrée aux processus de Poisson. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 6
Le nombre de personnes franchissant une barrière automatique de métro à l'heure de pointe est modélisé par un processus de Poisson. Il arrive une personne toutes les 2 secondes en moyenne. Parmi les personnes certaines fraudent en n'ayant pas de ticket. Le probabilité pour qu'une personne soit un fraudeur est $p = 0.1$.

1. Modéliser cette situation
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne fraude dans un intervalle d'une minute?
3. Sachant que 200 personnes sont passées en 12 minutes, quel est le nombre moyen de fraudeurs?
4. 60 personnes sont passées en 8 minutes. Quelle est la probabilité que 5 fraudeurs soient passés dans les 5 premières minutes
5. Chaque fraudeur fait perdre 1 euro à la compagnie de transports. Combien la compagnie perd-elle en moyenne à cette barrière en une heure?

Correction de l'Exercice 6

1. On appelle $N(t)$ le nombre darrivées au temps t, mesuré en secondes ($[s]$). $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre
$$\lambda = \frac{1}{2}\left[\mathrm{s}^{-1}\right]$$
On décompose ce processus en deux sous-processus indépendants. $N_1(t)$ désignera le nombre d'arrivées de fraudeurs au temps t. $N_2(t)$ désignera le nombre d'arrivées de clients en règle au temps t. $\{N_1(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{N_2(t)\}_{t\geq 0}$ sont donc aussi deux processus de Poisson, respectivement de paramètre $\lambda_1 := \lambda p$ et $\lambda_2 := \lambda(1-p)$.

2. Il s'agit de calculer :
$$\begin{aligned} P\left(N_1(60) \geq 1\right) &= 1 - P\left(N_1(60) = 0\right) \\ &= 1 - \left.\frac{(\lambda_1 t)^0 e^{-\lambda_1 t}}{0!}\right|_{t=60} \\ &= 1 - e^{-60\lambda p} = 1 - e^{-3} \end{aligned}$$

3. Parmi les 200 personnes arrivées, la probabilité qu'il y ait k fraudeurs est est distribuée selon la loi binomiale
$$P\left(N_1(720) = k \,|N(720) = 200\right) = C_{200}^k p^k (1-p)^{200-k}$$
où
$$C_{200}^k = \begin{pmatrix} 200 \\ k \end{pmatrix} = \frac{200!}{k!(200-k)!}$$
est le nombre de choix possibles de k clients parmi les 200 arrivés et
$$p^k(1-p)^{200-k}$$
est la probabilité, pour l'un de ces choix possibles, que les k choisis soient des fraudeurs et les autres non. On asit que l'espérance d'une variable binomiale $X \sim B(n,p)$ vaut $E(X) = np$. On a donc :
$$E\left(P\left(N_1(720) = k \,|N(720) = 200\right)\right) = 200 \cdot p = 20,$$
résultat qui était évident dès le départ.

4. Attention : on connait le nombre total de clients arrivés $N(480) = 60$, mais la question portent sur le nombre de fraudeurs sur une période différente, $N_1(300)$. Nous allons donc décomposer le calcul selon la formule des probabilités totales. En appelant :
$$\tilde{P} := P\left(N_1(300) = 5 \,|N(480) = 60\right)$$

on trouve

$$\tilde{P} = \sum_{j=5}^{60} P\left(N_1(300) = 5 \,|N(480) = 60; N(300) = j\,\right) \cdot P\left(N(300) = j \,|N(480) = 60\,\right)$$

avec (distribution uniforme des instants d'arrivées sur $[0, 480]$)

$$P\left(N(300) = j \,|N(480) = 60\,\right) = C_{60}^{j}\left(\frac{300}{480}\right)^{j}\left(\frac{180}{480}\right)^{60-j} = C_{60}^{j}\left(\frac{5}{8}\right)^{j}\left(\frac{3}{8}\right)^{60-j}$$

et

$$\begin{aligned} P\left(N_1(300) = 5 \,|N(480) = 60; N(300) = j\,\right) &= P\left(N_1(300) = 5 \,|N(300) = j\,\right) \\ &= C_{j}^{5}\left(\frac{1}{10}\right)^{5}\left(\frac{9}{10}\right)^{j-5} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \sum_{j=5}^{60} C_{60}^{j}\left(\frac{5}{8}\right)^{j}\left(\frac{3}{8}\right)^{60-j} C_{j}^{5}\left(\frac{1}{10}\right)^{5}\left(\frac{9}{10}\right)^{j-5} \\ &= \sum_{j=5}^{60} \frac{60!j!}{j!(60-j)!5!(j-5)!}\left(\frac{5}{8}\right)^{j}\left(\frac{3}{8}\right)^{60-j}\left(\frac{1}{10}\right)^{5}\left(\frac{9}{10}\right)^{j-5} \\ &= \left(\frac{5}{80}\right)^{5} C_{60}^{5} \sum_{k=0}^{55} C_{55}^{k}\left(\frac{9}{16}\right)^{k}\left(\frac{3}{8}\right)^{55-k} \\ &= \left(\frac{1}{16}\right)^{60} C_{60}^{5} \sum_{k=0}^{55} C_{55}^{k} 9^{k} 6^{55-k} \\ &= \frac{15^{55}}{16^{60}} C_{60}^{5} \simeq 0.14967.. \end{aligned}$$

5. Il s'agit de déterminer l'espérance du nombre de fraudeurs en une heure (on sait à priori que la réponse est 180!). La loi du nombre de fraudeurs en une heure est la loi de Poisson

$$P\left(N_1(3600) = k\right) = \left.\left[\frac{(\lambda p t)^k}{k!} e^{-\lambda p t}\right]\right|_{t=3600} = \frac{180^k}{k!} e^{-180},\ k \geq 0$$

de paramètre $\tilde{\lambda} = 180$. Or, l'espérance dune variable de Poisson $X \sim$ Poi $\left(\tilde{\lambda}\right)$ est $\tilde{\lambda}$. On a donc :

$$E\left(N_1(3600)\right) = 180$$