MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)
Séance de TD du 13 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 24 de la séance de TD consacrée aux chaînes de Markov à temps continu. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 24 (maintenance)
Un parking souterrain est éclaré par K ampoules allumées 24 heures sur 24, 7 jours sur 7. Dans cet exercice, on s'interroge sur la qualité des ampoules à acheter (investissement) et sur la fréquence des visites de à effectuer (maitenance). La durée de vie des ampoules est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ (plus λ est faible, plus les ampoules coûtent cher!). Le concierge du parking visite de temps en temps le parking, les dates de ses visites étant espacées par un temps de loi $Exp(\mu)$. A chacune de ses visites, le concierge remplace toutes les ampoules en panne par des ampoules neuves. Il ne touche pas aux autres[1].

1. Modéliser l'évolution temporelle des conditions d'éclairage du parking (nombre d'ampoules qui fonctionnent) par une CMTC. Donner le graphe associé, préciser les taux de transition et écrire le générateur infinitésimal.

2. Quelle est la probabilité qu'un usager du parking se retrouve dans le noir complet quand il va chercher sa voiture? On supposera que

[1]une action de maintenance préventive ne peut pas être optimisée à l'aide d'un modèle sous forme de CMTC où l'usure progressive des ampoules n'est pas prise en compte (absence de mémoire)

l'installation fonctionne depuis suffisamment longtemps pour que sa configuration initiale n'ait plus d'effet sur son fonctionnement actuel (i.e. on suppose que le régime stationnaire est établi).

3. A l'aide de la méthode des coupes, calculer le nombre moyen d'ampoules qui fonctionnent (en régime stationnaire)

Correction de l'Exercice 24

1. On pose $X(t) \in E := \{0, \dots, K\}$, le nombre d'ampoules qui fonctionnent au temps $t > 0$.
   Dans un premier temps, nous allons examiner les transitions associées aux visites du gardien, de l'état n (avec $n \in \{0, \dots, K-1\}$ vers l'état K. La probabilité qu'une telle transition ait lieu sur un intervalle de temps dt s'écrit :
$$p_{n,K}(dt) = P\left(T^\mu \leq dt; T_1^\lambda > dt; \dots T_n^\lambda > dt\right)$$
   où T^μ représente la durée entre deux visites du gardien et T_k^λ la durée de vie de l'ampoule k. Elle correspond à la réalisation d'évènements indépendants : le gardien effectue une visite et les différentes ampoules ne tombent pas en panne. Cette probabilité vaut donc :
$$\begin{aligned} p_{n,K}(dt) &= P(T^\mu \leq dt) \prod_{k=1}^{n} P\left(T_k^\lambda > dt\right) \\ &= \left(1 - e^{-\mu\, dt}\right) \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda\, dt} \\ &= \mu\, dt\,(1 + O(dt)),\ \text{pour } dt \to 0 \end{aligned}$$
   On a donc pour le taux de transition correspondant :
$$\lambda_{n,K} := \lim_{dt \to 0} \frac{p_{n,K}(dt)}{dt} = \mu\,,\ \forall n \in \{0, \dots, K-1\}$$
   Il est possible que, sur un intervalle de temps $[t, t+dt[$, le gardien effectue une visite, puis que des ampoules tombent en panne. Toutefois, le taux de transition correspondant est nul. Imaginons en effet, à titre d'exemple, le cas où le gardien effectue une visite et une ampoule tombe en panne après la visite. La probabilité correspondante s'écrit
$$\begin{aligned} p_{n,K-1}(dt) &= \sum_{k=1}^{K} P(T^\mu \leq dt)\, P\left(T_k^\lambda \leq dt\right) \prod_{j \neq k} P\left(T_j^\lambda > dt\right) \\ &= K(1 - e^{-\mu\, dt})(1 - e^{-\lambda\, dt}) \prod_{j \neq k} e^{-\lambda\, dt} \\ &= K\mu\lambda(dt)^2\,(1 + O(dt)),\ \text{pour } dt \to 0 \end{aligned}$$

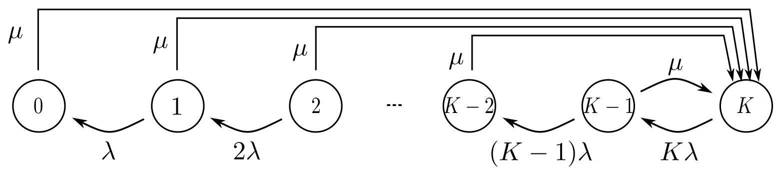

Figure 1: La chaîne de Markov à temps continu qui modélise le nombre d'ampoules fonctionnant au temps $t > 0$

Les taux de transition correspondants sont donc

$$\lambda_{n,K-1} := \lim_{dt \to 0} \frac{p_{n,K-1}(dt)}{dt} = 0$$

Il en va de même pour tous les taux $\lambda_{n,m}$ avec $m \in \{n+1, \dots, K-1\}$. La probabilité que deux évènements ou plus[2] se réalisent pendant un intervalle de temps dt sera toujours négligeable devant dt et correspondra donc à un taux de transition nul. Par contre, la probabilité de passer de l'état $n \in \{1, \dots, K\}$ à l'état $n-1$ pendant un intervalle de temps dt s'écrit :

$$\begin{aligned} p_{n,n-1}(dt) &= \sum_{k=1}^{n} P\left(T^{\mu} > dt\right) P\left(T_k^{\lambda} \leq dt\right) \prod_{j \neq k} P\left(T_j^{\lambda} > dt\right) \\ &= n\left(1 - e^{-\lambda\, dt}\right) e^{-\mu\, dt} e^{-(n-1)\lambda\, dt} \\ &= n\lambda\, dt\left(1 + O(dt)\right), \text{ pour } dt \to 0 \end{aligned}$$

où T_k^{λ} désigne la durée de vie d'une des n ampoules en fonctionnement. Ces probabilités correspondent à des taux :

$$\lambda_{n,n-1} := \lim_{dt \to 0} \frac{p_{n,n-1}(dt)}{dt} = n\lambda$$

Nous venons d'établir, pour le procesus stochastique considéré, le modèle par CMTC représenté à la figure 1. Le *générateur infinitésimal* correspondant s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & 0 & \dots & 0 & \mu \\ 0 & 2\lambda & -(2\lambda+\mu) & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \mu \\ \vdots & \vdots & & (K-1)\lambda & -((K-1)\lambda+\mu) & \mu \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K\lambda & -K\lambda \end{pmatrix}$$

[2] par exemple deux ampoules qui tombent en panne, une visite du gardien et une ampoule qui tombe en panne, trois ampoules qui tombent en panne, etc.

2. La CMTC est finie et irréductible (une seule classe d'équivalence). Tous les états sont donc récurrents non nuls. La distribution limite existe et est égale à $\boldsymbol{\pi}$, la distribution stationnaire de probabilités. Pour répondre à la question, il faut trouver :

$$\boldsymbol{\pi}_0 := \lim_{t\to\infty} P\left(X(t) = 0\right)$$

Dans ce cas, pour obtenir la distribution stationnaire de probabilité, le plus simple est d'écrire les équations d'équilibre en chacun des noeuds du graphe (i.e. en chacun des états). On obtient pour le bilan en 0 :

$$\lambda\boldsymbol{\pi}_1 = \mu\boldsymbol{\pi}_0$$

Pour le noeud n avec $n \in \{1, \dots, K-1\}$, l'équilibre s'écrit

$$(n+1)\lambda\boldsymbol{\pi}_{n+1} = (n\lambda + \mu)\boldsymbol{\pi}_n$$

et l'équilibre au noeud K s'écrit :

$$\mu\sum_{j=1}^{K-1}\boldsymbol{\pi}_j = K\lambda\boldsymbol{\pi}_K$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_1 &= \frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{\pi}_0 \\
\boldsymbol{\pi}_2 &= \frac{(\lambda+\mu)\mu}{2\lambda^2}\boldsymbol{\pi}_0 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\pi}_n &= \frac{(\lambda+\mu)^{n-1}\mu}{n!\lambda^n}\boldsymbol{\pi}_0 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\pi}_K &= \frac{(\lambda+\mu)^{K-1}\mu}{K!\lambda^K}\boldsymbol{\pi}_0
\end{aligned}$$

et la condition de normalisation donne :

$$\boldsymbol{\pi}_0\left[1 + \sum_{n=1}^{K}\frac{(\lambda+\mu)^{n-1}}{n!\lambda^n}\right] = 1$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{K}\frac{(\lambda+\mu)^{n-1}}{n!\lambda^n}\right]^{-1}$$

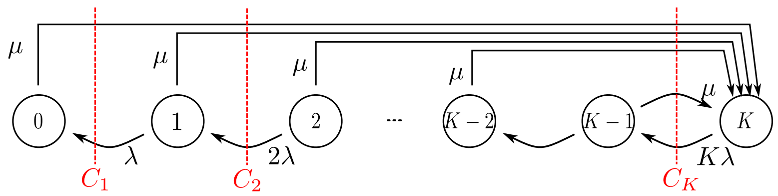

Figure 2: Les coupes qui permettent d'obtenir plus facilement, dans l'exemple des ampoules, la valeur moyenne de la distribution stationnaire

3. Nous allons calculer les équations issues de la méthode des coupes, avec les coupes illustrées à la figure 2. Les équations qui correspondent aux coupes C_n, pour $n \in \{1, \ldots, K\}$ s'écrivent :

$$n\lambda\boldsymbol{\pi}_n = \mu \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{\pi}_k$$

En aditionnant ces équations, et en posant

$$\bar{N} = E\left(X_\infty\right) := \sum_{n=0}^{K} n\boldsymbol{\pi}_n = \sum_{n=1}^{K} n\boldsymbol{\pi}_n$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\lambda\bar{N} &= \sum_{n=0}^{K} \lambda n\boldsymbol{\pi}_n \\
&= \mu \sum_{n=0}^{K} (K-n)\boldsymbol{\pi}_n \\
&= \mu \left(K \sum_{n=0}^{K} \boldsymbol{\pi}_n - \sum_{n=0}^{K} n\boldsymbol{\pi}_n \right) \\
&= \mu(K - \bar{N})
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\bar{N} = \frac{\mu K}{\lambda + \mu} = \frac{1}{1 + \dfrac{\lambda}{\mu}} \cdot K$$