MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Chaînes de Markov à temps discret (CMTD)
Séance de TD du 05 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 22 de la séance de TD consacrée aux chaînes de Markov à temps discret. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 22
Pour les cinq chaînes de Markov dont les graphes sont représentés à la figure 1, déterminer la matrice de transitions $\mathbf{P}$, les classes d'équivalence, la nature des états de ces classes (récurrents ou transitoires), ainsi que les éventuels états absorbants ou périodiques (dans le cas d'états périodiques, donner leur période).

Correction de l'Exercice 22

- Dans le cas de la CMTD représentée en haut à gauche, sur la figure 1, la matrice de transition s'écrit :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  avec $0 < p < 1$. Les classes sont $\{1, 2, 3\}$ et $\{4\}$. L'état 4 est récurrent et absorbant. Les états 1, 2 et 3 sont transitoires. Aucun état n'est périodique.

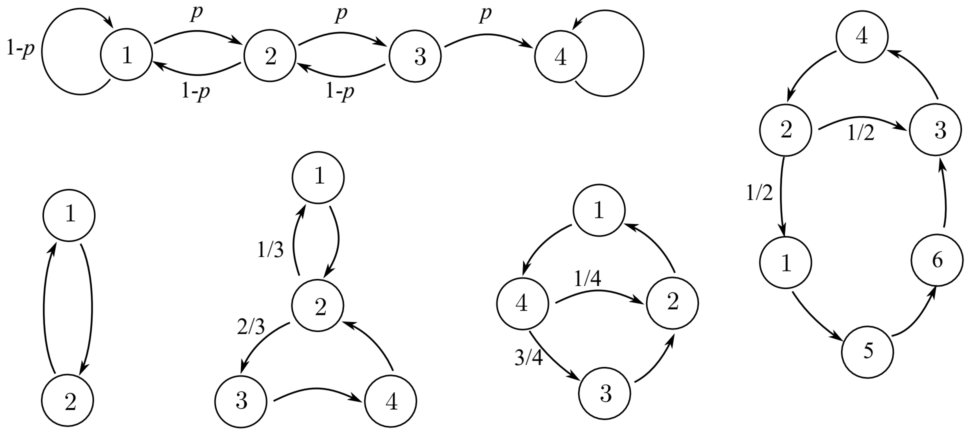

Figure 1: Les chaînes de Markov pour l'exercice 22

- Dans le cas de la CMTD représentée en bas à gauche, la matrice de transition s'écrit :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une CMTD irréductible (la seule classe est $\{1, 2\} = E$). Les états 1 et 2 sont récurrents et périodiques, de période 2. La CMTD est donc 2-périodique.

- Dans le cas de la deuxième CMTD sur la rangée du bas, dans la figure 1, la matrice de transition s'écrit :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une CMTD irréductible (la seule classe est $\{1, 2, 3, 4\} = E$). Tous les états sont récurrents. Il est possible de partir de l'état 1 et d'y revenir en 2, 5, 7, ... étapes. L'état 1 n'est donc pas périodique. En conséquence, aucun état de cette CMTD irréductible ne peut l'être. La CMTD n'est donc pas périodique.

- Dans le cas de la troisième CMTD sur la rangée du bas, dans la figure 1, la matrice de transition s'écrit :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une CMTD irréductible (la seule classe est $\{1, 2, 3, 4\} = E$). Tous les états sont récurrents. Il est possible de partir de l'état 1 et d'y revenir en 3, 4, 6, 7, ... étapes. L'état 1 n'est donc pas périodique. En conséquence, aucun état de cette CMTD irréductible ne peut l'être. La CMTD n'est donc pas périodique.

- Dans le cas de la CMTD à droite dans la figure 1, la matrice de transition s'écrit :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Il s'agit d'une CMTD irréductible (la seule classe est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Tous les états sont récurrents. Il est possible de partir de l'état 4 et d'y revenir en 3, 6, 9, ... étapes. Tous les états de cette chaîne sont donc périodiques, de période 3.