Chapitre 3 : Convergence de Variables aléatoires
MA 361 : Probabilités continues

Pierre-Alain TOUPANCE
pierre-alain.toupance@esisar.grenoble-inp.fr

Grenoble INP - ESISAR
3ième année

14 septembre 2015

Inégalité de Bienaymé - Tchébychev

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$.
On a

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|\ X - E(X)\ | \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque :

1. Cette inégalité permet de majorer la probabilité que X soit éloigné d'au moins ε de $E(X)$.
2. Cette probabilité est d'autant plus faible que $V(X)$ est petit.

Démonstration : 1er cas X VAR discrète
Soit $(x_i, p_i)_{i\in I}$ la loi de probabilité de X où
$I = \{1, 2, ..., n\}$ ou $\mathbb{N}$ Soit $J = \{i \in I, \mid x_i - E(X_i) \mid \geqslant \varepsilon\}$
On a :

$$V(X) = \sum_{i\in J}(x_i - E(X))^2 p_i + \sum_{i\notin J}(x_i - E(X))^2 p_i$$

Ainsi

$$V(X) \geqslant \sum_{i\in J}(x_i - E(X))^2 p_i \geqslant \varepsilon^2 \sum_{i\in J} p_i$$

D'où

$$V(X) \geqslant \varepsilon^2 P(\mid X - E(X) \mid \geqslant \varepsilon)$$

Démonstration : 2ième cas X VAR continue dont f est une densité.
Soit $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = (x - E(X))^2 f(x)$, on a

$$V(X) =$$

Ainsi

$$V(X) \geqslant \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} h(x)dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} h(x)dx$$

D'où

$$V(X) \geqslant \varepsilon^2 \Big(\int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} f(x)dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx \Big)$$

Or

$$P(\mid X - E(X) \mid) > \varepsilon) = P(X - E(X) < -\varepsilon) + P(X - E(X) > \varepsilon)$$

$$= \int^{E(X)-\varepsilon} f(x)dx + \int^{+\infty} f(x)dx$$

Démonstration : 2ième cas X VAR continue dont f est une densité.

Soit $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = (x - E(X))^2 f(x)$, on a

$$V(X) = \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} h(x)dx + \int_{E(X)-\varepsilon}^{E(X)+\varepsilon} h(x)dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} h(x)dx$$

Ainsi

$$V(X) \geqslant \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} h(x)dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} h(x)dx$$

D'où

$$V(X) \geqslant \varepsilon^2 \Big(\int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} f(x)dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx \Big)$$

Or

$$P(\mid X - E(X) \mid) > \varepsilon) = P(X - E(X) < -\varepsilon) + P(X - E(X) > \varepsilon)$$

$$= \int^{E(X)-\varepsilon} f(x)dx + \int^{+\infty} f(x)dx$$

Exercice

Soit F la fonction de répartition d'une VAR X qui suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Montrer que :

$$\forall x > 0,\ 1 - F(x) \leqslant \frac{1}{2x^2}$$

Définition : moyenne empirique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Soit $(X_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ une suite de variables aléatoires réelles de même loi indépendantes.
La moyenne empirique de $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est la VA :

$$\tilde{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Remarques : Si les VA X_i admettent des moments d'ordre 2 alors

1. $E(\tilde{X}_n) = m$
2. $V(\tilde{X}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

où $m = E(X_i)$ et $\sigma^2 = V(X_i)$

Définition : convergence presque surement

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VA sur Ω, on dit que (X_n) converge presque surement vers une VAR X lorsque :

$$P\big(\{\omega \in \Omega,\ \lim X_n(\omega) = X(\omega)\}\big) = 1$$

Remarque : La partie de Ω où X_n ne converge par vers X est de probabilité nulle.

Loi faible des grands nombres

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles de même loi admettant des moments d'ordre 2.
Soit m l'espérance de ces variables aléatoires.
On a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim P(\mid \tilde{X}_n - m \mid) \geqslant \varepsilon) = 0$$

Démonstration : D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, on a :

$$P(\mid \tilde{X}_n - m \mid \geqslant \varepsilon) = P(\mid \tilde{X}_n - E(\tilde{X}_n) \mid \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(\tilde{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

$P(\mid \tilde{X}_n - m \mid \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

Ainsi $\lim P(\mid \tilde{X}_n - m \mid) \geqslant \varepsilon) = 0$

Loi forte des grands nombres (théorème de Kolmogorov)

On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ de même loi d'espérance m.

Soit $\tilde{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$

On a

$$\tilde{X_n} \to m \times 1_\Omega \text{ presque surement}$$

Lorsque que l'on répète n fois de façon indépendante une même expérience, la moyenne obtenue par l'expérience tend vers la moyenne théorique quand n tend vers ∞.

Méthode de Monte Carlo appliquée au calcul d'intégrale

Application de la loi forte des grands nombres

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, et soit A un réel tel que $A > \sup_{x\in[a;b]} (f(x))$.

On utilise la loi forte des grands nombres pour calculer $\int_a^b f(t)dt$:

Si on prend un point au hasard dans le rectangle délimité par les droites d'équation $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et $y = A$, la probabilité qu'il soit sous la courbe de f est :

$$p = \frac{\int_a^b f(t)dt}{A(b-a)}$$

Méthode de Monte-Carlo

On choisit au hasard n points soit X_i la VA telle que

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la ième point est sous } \mathcal{C}_f \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to p1_\Omega$

Définition : convergence en loi

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VAR et X une VAR définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soient $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et F_X leur fonction de répartition.
On dit que X_n tend en loi vers X si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \lim F_{X_n}(t) = F_X(t)$$

Remarque : Dans le cas discret, cette convergence en loi se traduit par la convergence des probabilités $P(X_n = k)$.

Approximation d'un loi Binomiale par un loi de Poisson

Théorème

Soit $\lambda \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit X_n une suite de V.A.R. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \dfrac{\lambda}{n})$. X_n converge en loi vers une V.A.R. X de loi de Poisson de paramètre λ, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$$

En pratique Si X suit une loi binomiale de paramètre (n, p).
Si $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0,1$ et $np < 15$
alors on prendra comme approximation de X la V.A.R. Y qui suit un loi de Poisson de paramètre np ($Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(np)$).

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geqslant k$,

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \binom{n}{k}\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} \end{aligned}$$

Or

$\lim \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} = 1$ et $\lim \Big(1-\dfrac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} = e^{-\lambda}$.

Ainsi

$$\lim P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Théorème central limite

Soit (X_n) une suite de VAR indépendantes de même loi, d'espérance m et d'écart type σ.
Soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$Z_n = \dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers une VAR $X^* \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, c'est à dire :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

Remarque : $\dfrac{\tilde{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}$ tend en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
Ainsi $\tilde{X}_n$ tend en loi vers une VAR qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma/\sqrt{n})$.

Exemple : Théorème de Moivre Laplace

Soit (X_n) une suite de VAR indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre p.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$$

$$Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

converge en loi vers $X^* \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

En pratique, la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par un loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ lorsque :

1. $n \geqslant 30$
2. $np \geqslant 15$
3. $np(1-p) \geqslant 5$

Exercice

Un vol Lyon - Strasbourg est assuré par un airbus de 140 places. La réservation est obligatoire. L'expérience a montré que la probabilité qu'une personne confirme sa réservation et retire son billet est 0,8.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de personnes ayant confirmé leur réservation et retiré leur billet.

1. La compagnie a accepté 160 réservations.
   1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
      Pour $k \leq 160$, exprimer $P(X = k)$ en fonction de k.
      Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de X.
   2. Justifier que X peut être approchée par une loi normale que l'on déterminera.
      Calculer la probabilité que plus de 135 personnes confirment leur réservation et retirent leur billet.