MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Processus de Poisson
Séance de TD du 26 mars 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 4 de la séance de TD consacrée aux processus de Poisson. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 4 Robert a trouvé un job de standardiste, on suppose que les appels téléphoniques se succèdent à ce standard selon un processus de Poisson de paramètre λ. De 8h à 12h, il y a eu 10 appels cette matinée

1. Calculer la probabilité que 5 appels arrivent dans la première heure, par deux méthodes.

2. Robert s'est absenté de 10h à 10h 15 pour draguer sa collègue. Quelle est la probabilité pour que Robert aie raté un appel ?

Correction de l'Exercice 4

1. Nous allons calculer la probabilité demandée de deux manières. La première méthode se basera sur le fait que le nombre d'appels sur la durée totale est connu et que les instants de ces appels sont en conséquence distribués de manière uniforme sur l'intervalle $[8, 12]$. La deuxième méthode consiste à appliquer directement la définition du processus de Poisson et la calcul des probabilités conditionnelles. Nous verrons que nous obtenons le même résultat avec les deux méthodes.

- **Première méthode :** Le nombre total d'appels reçus sur l'intervalle $[8-12]$ étant connu (10 appels), nous savons que les instants de ces appels sont distribués selon des variables uniformes indépendantes. L'instant de l'appel k est donc une variable aléatoire continue de densité :

$$f_{A_k}(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 8 \leq t \leq 12 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad , \forall k \in \{1, \ldots, 10\}$$

La probabilité que l'appel $k = 1$ tombe pendant la première heure est donc :

$$P\left(0 \leq A_1 \leq 9\right) = \int_8^9 f_{A_k}(t)\, dt = \frac{1}{4}$$

La probabilité que les appels $k \in \{1, \ldots, 5\}$ tombent pendant la première heure et que les appels $k \in \{6, \ldots, 10\}$ tombent entre 9h et 12h vaut

$$\left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

car tous les instants d'appel sont distribués selon des variables aléatoires (uniformes) indépendantes les unes des autres. Pour trouver la probabilité demandée, il reste à comptabiliser le nombre de choix possibles des 5 appels qui tombent la première heure parmi les 10 appels possibles. La probabilité associée à chacun de ces choix est la même que précédemment. La probabilité totale est donc :

$$C_{10}^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^5 \simeq 0.058..$$

avec

$$C_{10}^5 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{10!}{5!(10-5)!}$$

- **deuxième méthode (directe) :** on note $N(t)$ le nombre d'appels reçus au temps t où $t \in [8, 12]$ est exprimé en heures. Par hypothèse, $N(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ. La meilleure estimation possible pour la valeur de λ est donnée par la valeur de l'estimateur $\frac{N(T)}{T}$, ici $\hat{\lambda} = \frac{10}{4} = 2.5h^{-1}$. La probabilité d'avoir 5 appels la première heure, sachant qu'il y a eu 10 appels pendant les quatre heures, s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
P\left((N(1)=5\,|N(4)=10\right) &= \frac{P\left((N(1)=5; N(4)=10\right)}{P\left((N(4)=10\right)} \\
&= \frac{P\left(N(1)=5; N(4)-N(1)=5\right)}{P\left((N(4)=10\right)} \\
&= \frac{P\left(N(1)=5\right)\cdot P\left(N(4)-N(1)=5\right)}{P\left((N(4)=10\right)} \\
&= \frac{\frac{\lambda^5 e^{-\lambda}}{5!}\cdot\frac{(3\lambda)^5 e^{-3\lambda}}{5!}}{\frac{(4\lambda)^{10}e^{-4\lambda}}{10!}} \\
&= \frac{10!}{5!5!}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^5
\end{aligned}$$

2. On calcule la probabilité complémentaire que Robert n'ait manqué aucun appel, c'est-à-dire que les dix appels tombent en dehors de l'intervalle $[10\,,10.25]$. Cette dernière vaut :

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{k\in\{1,\ldots,10\}} A_k \notin [10\,,10.25]\right) &= \prod_{k\in\{1,\ldots,10\}} P\left(A_k\notin[10\,,10.25]\right) \\
&= \left(\frac{15}{16}\right)^{10}
\end{aligned}$$

La probabilité que Robert manque **au moins un appel** vaut donc :

$$1-\left(\frac{15}{16}\right)^{10}$$