# LA MONNAIE

On a un stock illimité de pièces de monnaie de **m** valeurs différentes **α = p1 , p2, . . . , pm.**

On peut représenter certains montants A avec ces monnaies. Par exemple, pour les pièces de 2, 3, 5 (centimes) et le montant A = 11 , il existe des représentations suivantes (et d'autres - à la fin de l'exercice on saura combien) :

11 = 2 + 2 + 2 + 5

11 = 2 + 3 + 3 + 3

Le problème algorithmique à résoudre dans cet exercice est le suivant : étant donné α = p1 , p2, . . . , pm et A trouver le nombre de représentations différentes du montant A par les pièces α. On utilisera la programmation dynamique pour concevoir un algorithme qui résolve ce problème. Notez bien que l'on ne tient pas compte de l'ordre : dans notre exemple, les représentations (11 = 2 + 2 + 2 + 5) et (11 = 5 + 2 + 2 + 2) comptent pour une et seule représentation.

1. Soit R(i, j) le nombre de représentations du montant j avec les i premières pièces p1 , . . . , pi.

Donnez la valeur de R(i,j) si j=0.

Donnez la valeur de R(i,j) si i=0 et j>0.

Écrivez l'équation de récurrence donnant la valeur de R(i,j) si i≠0 et j≠0 et j<pi (dans ce cas, on ne peut pas utiliser une pièce de valeur **pi**)

Écrivez l'équation de récurrence donnant la valeur de R(i,j) si i≠0 et j≠0 et j>=pi (dans ce cas, notez bien que la liste des représentations est constituée

- d'une liste de représentations sans la pièce de valeur pi
- d'une liste de représentations avec **une** pièce de valeur pi et d'autres pièces de valeurs **p1** à **pi** (**pi** est bien une valeur possible pour les autres pièces).

2. Calculer en entier le tableau R(i,j), avec i allant de 0 à 3 et j de 0 à 11, avec les valeurs de notre exemple (i étant l'index des lignes, et j étant l'index des colonnes).

3. Quelle est votre stratégie pour remplir le tableau ? (Expliquez par un texte en français –

pas de pseudo code)

4. En connaissant le tableau R , comment répondre à la question initiale : trouver le nombre de représentations différentes du montant A par les pièces α ? Quelle est la valeur de la réponse dans notre exemple ? (Expliquez par un texte en français – pas de pseudo code)

5. Écrivez un algorithme de programmation dynamique pour calculer le tableau R en entier (en pseudo code)

6. Analysez la complexité de votre algorithme.

# CORRECTION

Question 1

R(i,j)=1 si j=0.

R(i,j)=0 si i=0 et j>0.

R(i,j)=R(i-1,j) si i≠0 et j≠0 et j<pi

R(i,j)=R(i,j-pi)+R(i-1,j) si si i≠0 et j≠0 et j>=pi

Question 2

| i/j | 00 | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 01 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 |
| 1 | 01 | 00 | 01 | 00 | 01 | 00 | 01 | 00 | 01 | 00 | 01 | 00 |
| 2 | 01 | 00 | 01 | 01 | 01 | 01 | 02 | 01 | 02 | 02 | 02 | 02 |
| 3 | 01 | 00 | 01 | 01 | 01 | 02 | 02 | 02 | 03 | 03 | 04 | 04 |

Question 3

Deux solutions possibles : ligne par ligne ou colonne par colonne

Question 4

le nombre de représentations différentes du montant A par les pièces α est R(m,A)

Dans notre exemple, la réponse est R(3,11), donc 4 représentations.

Question 6

La complexité est O(m*A) : il est nécessaire de calculer chaque case du tableau, or le calcul d'une case se fait en temps constant