

## Examen CS353 Algorithmique et structures de données

**Session 1- Juin 2021** (1h30 - Aucun document ni calculatrice autorisés)

2 parties / 2 pages, notation sur 20- Auteurs : Y. Guido, E. Brun

- *La compréhension du sujet faisant partie de l'épreuve il ne sera répondu à aucune question.*
- *Toute réponse non justifiée sera considérée comme fausse.*
- *Les copies brouillons ou contenant des fautes d'orthographe pourront faire l'objet de retraits de points*
- *Barème donné à titre indicatif, susceptible d'être modifié.*

POUR FACILITER LA CORRECTION, RENDRE LA PARTIE 1 SUR UNE COPIE, ET  
LA PARTIE 2 SUR UNE AUTRE COPIE

### PARTIE 1- 10 Points

---

#### Question de cours (0.5 pt) :

Donnez la définition précise vue en cours de la notation  $\Theta$ .

#### Exercice (3.5 pts) : Master theorem (méthode générale)

Donner des bornes asymptotiques supérieure et inférieure pour  $T(n)$  dans chacune des récurrences suivantes. On supposera que  $T(n)$  est constant pour  $n \leq 2$ . Rendre les bornes aussi approchées que possible, et justifier les réponses.

- a)  $T(n) = 2T(n/2) + n^3$
- b)  $T(n) = T(9n/10) + n$
- c)  $T(n) = 16T(n/4) + n^2$
- d)  $T(n) = 7T(n/3) + n^2$
- e)  $T(n) = 7T(n/2) + n^2$
- f)  $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$
- g)  $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

#### Problème (6 pts) : Diviser pour régner

Soient  $A[1..n]$  et  $B[1..n]$  deux tableaux triés par ordre croissant. On cherche à trouver l'élément médian de ces deux tableaux (élément qui a autant d'éléments supérieurs stricts que d'éléments inférieurs ou égaux<sup>1</sup>).

- Proposez un algorithme diviser pour régner qui trouve le médian en  $O(\log n)$ .
- Justifiez la complexité de cet algorithme.

---

<sup>1</sup> En fait, ceci est un raccourci. Le médian est un élément  $m$  tel qu'il existe une partition de l'ensemble des éléments en deux ensembles  $E_p$  et  $E_g$  telle que  $|E_p| = |E_g|$ ,  $\forall x \in E_p, x \leq m$  et  $\forall y \in E_g, y \geq m$

## PARTIE 2- 10 points

---

### Exercice 1 : La monnaie (8 points)

On a un stock illimité de pièces de monnaie de **m** valeurs différentes  $\alpha = p_1, p_2, \dots, p_m$ .

On peut représenter certains montants A avec ces monnaies. Par exemple, pour les pièces de 2, 3, 5 (centimes) et le montant A = 11, il existe des représentations suivantes (et d'autres - à la fin de l'exercice on saura combien) :

$$11 = 2 + 2 + 2 + 5$$

$$11 = 2 + 3 + 3 + 3$$

Le problème algorithmique à résoudre dans cet exercice est le suivant : étant donné  $\alpha = p_1, p_2, \dots, p_m$  et A trouver le nombre de représentations différentes du montant A par les pièces  $\alpha$ . On utilisera la programmation dynamique pour concevoir un algorithme qui résolve ce problème. Notez bien que l'on ne tient pas compte de l'ordre : dans notre exemple, les représentations  $(11 = 2 + 2 + 2 + 5)$  et  $(11 = 5 + 2 + 2 + 2)$  comptent pour une et seule représentation.

1. Soit  $R(i, j)$  le nombre de représentations du montant j avec les i premières pièces  $p_1, \dots, p_i$ .

Donnez la valeur de  $R(i, j)$  si  $j=0$ .

Donnez la valeur de  $R(i, j)$  si  $i=0$  et  $j>0$ .

Écrivez l'équation de récurrence donnant la valeur de  $R(i, j)$  si  $i \neq 0$  et  $j \neq 0$  et  $j < p_i$  (dans ce cas, on ne peut pas utiliser une pièce de valeur  $p_i$ )

Écrivez l'équation de récurrence donnant la valeur de  $R(i, j)$  si  $i \neq 0$  et  $j \neq 0$  et  $j \geq p_i$  (dans ce cas, notez bien que la liste des représentations est constituée

- d'une liste de représentations sans la pièce de valeur  $p_i$
- d'une liste de représentations avec **une** pièce de valeur  $p_i$  et d'autres pièces de valeurs  **$p_1$  à  $p_i$**  ( $p_i$  est bien une valeur possible pour les autres pièces).

2. Calculer en entier le tableau  $R(i, j)$ , avec i allant de 0 à 3 et j de 0 à 11, avec les valeurs de notre exemple (i étant l'index des lignes, et j étant l'index des colonnes).

3. Quelle est votre stratégie pour remplir le tableau ? (Expliquez par un texte en français – pas de pseudo code)

4. En connaissant le tableau R, comment répondre à la question initiale : trouver le nombre de représentations différentes du montant A par les pièces  $\alpha$  ? Quelle est la valeur de la réponse dans notre exemple ? (Expliquez par un texte en français – pas de pseudo code)

5. Écrivez un algorithme de programmation dynamique pour calculer R (en pseudo code)

6. Analysez la complexité de votre algorithme.

### Exercice 2 : Arbre binaire de recherche (1 point)

Expliquez par un texte en français et un ou plusieurs dessins comment supprimer un nœud dans un arbre binaire de recherche.

### Exercice 3 : Tables de hachage (1 point)

Considérons une table de hachage à adressage ouvert de taille m. On utilise la fonction de hachage suivante :

$$h(k, i) = (h_1(k) + i * h_2(k)) \text{ modulo } m$$

$$h_1(k) = k \text{ modulo } m$$

$$h_2(k) = 1 + (k \text{ modulo } (m-1))$$

avec k la clé de l'élément à insérer, et i le numéro du sondage

Vous souhaitez stocker 10 éléments dans cette table de hachage. Pouvez-vous choisir  $m = 27$  ? Pourquoi ?