Chapitre 1 – Signaux déterministes continus

1. Classification des signaux
2. Représentation temps-fréquence
3. Transformation de Fourier
4. Filtrage fréquentiel
5. Filtrage temporel
6. Conclusion

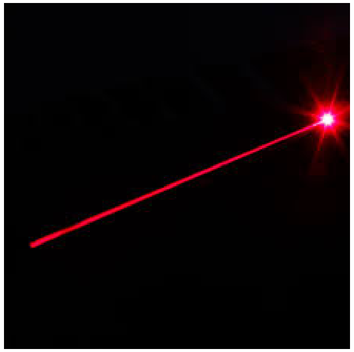
Qu’est ce qu’un signal ?

Dans le dictionnaire Larousse :

vient du latin signum : signe ; variation d’une grandeur physique de nature quelconque porteuse d’information.

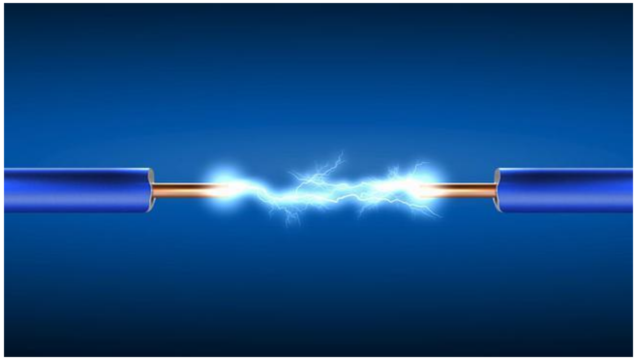
C’est une représentation physique de l’information

Un signal peut être de nature très varié



optique

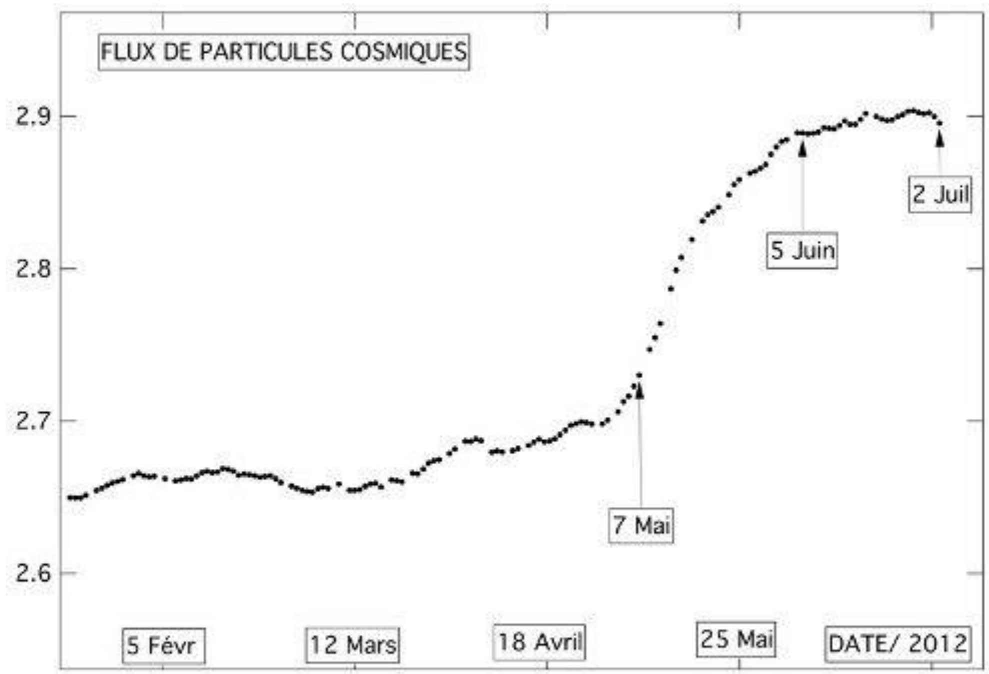
sonore



électrique

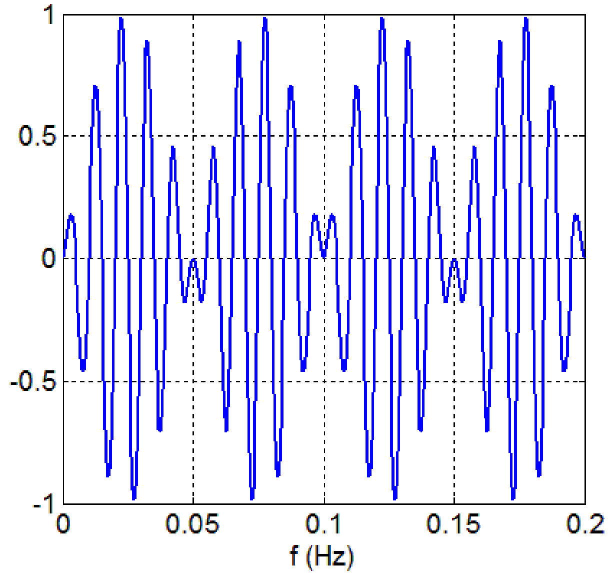
Qu'est ce qu'un signal ?

- Dans le cours, il s'agira de l'évolution (souvent temporelle) d'une quantité (souvent une tension ou un courant électrique).

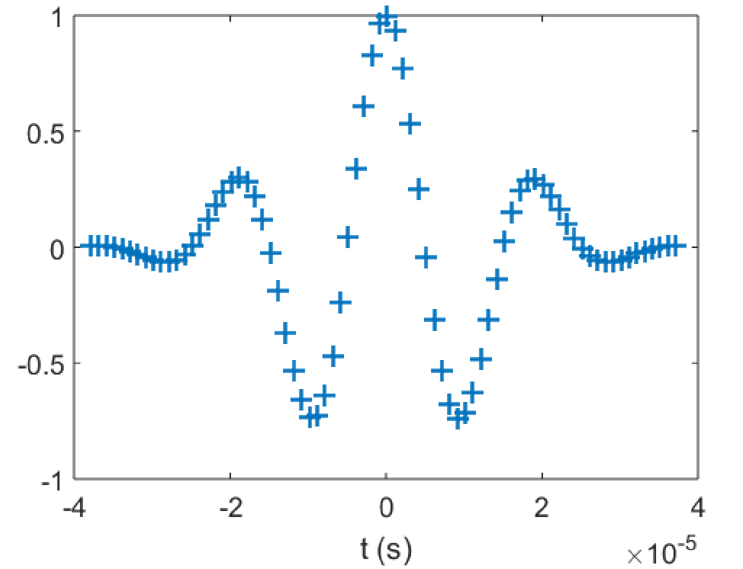


Flux de particules cosmiques mesuré par la sonde Voyager 1

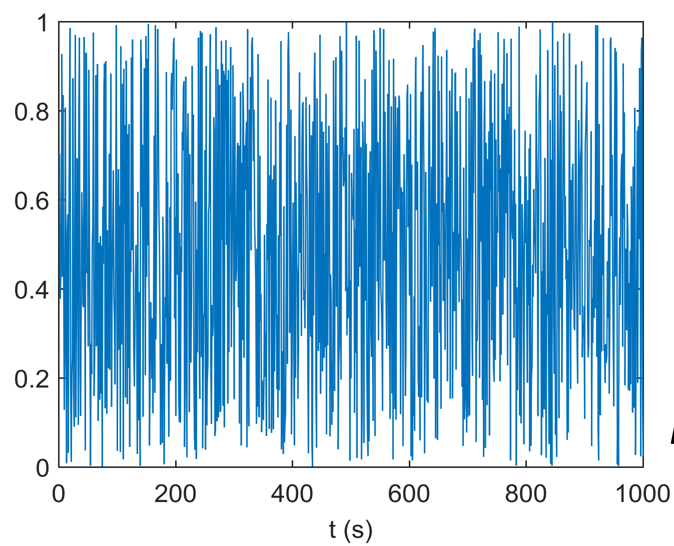
Quelles différences entre ces signaux?



Modulation d'amplitude



Gaussian-modulated sinusoidal pulse



Bruit blanc

Caractéristiques des signaux

Aléatoire / déterministe

Périodique / non périodique

Continu/discret

Energie finie / Puissance finie

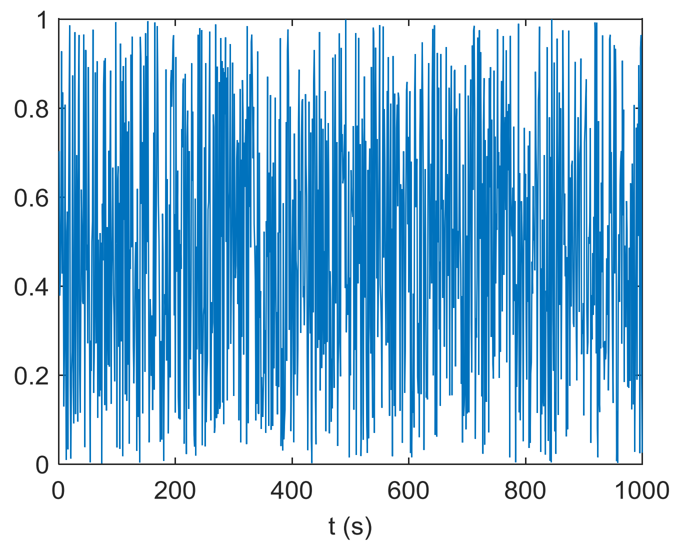
Signal aléatoire (ou stochastique)

Signal imprévisible à l'avance

Signal qui ne peut être décrit par une expression analytique

Signal susceptible de porter une information

Ex : Signal de parole d'une transmission téléphonique, tirage du loto.



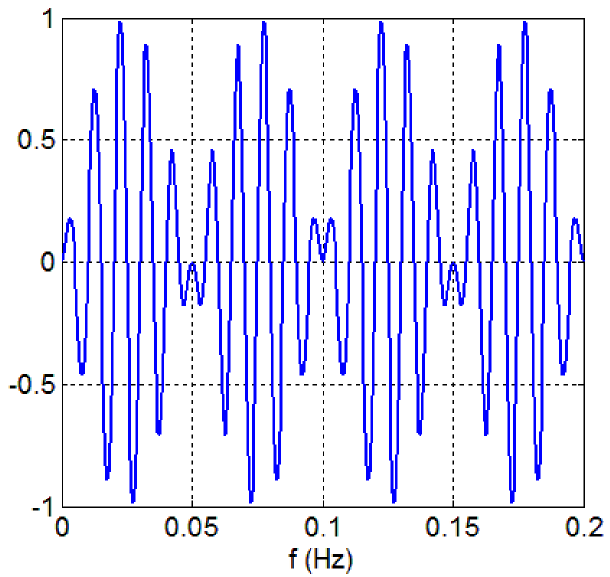
Bruit blanc

Signal déterministe (ou certain)

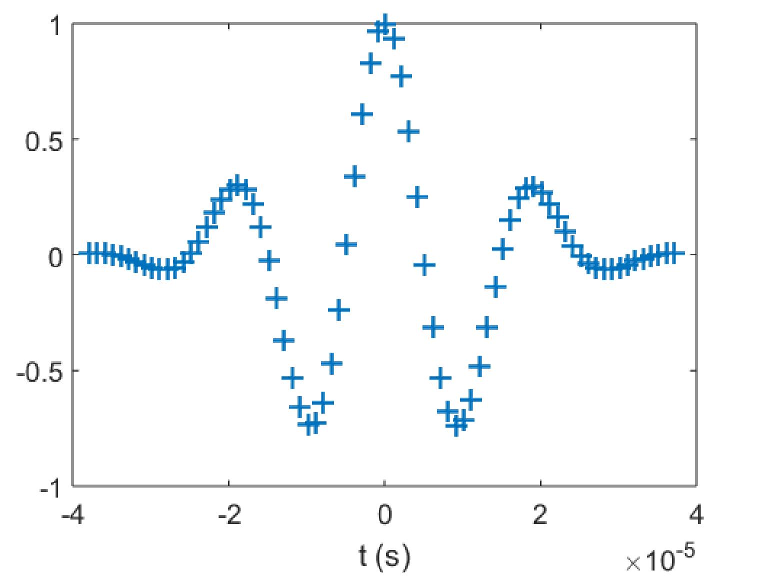
Signal dont les états futurs peuvent être déterminés

Signal qui peut être décrit par un modèle mathématique

Ex : Note de musique, fréquence porteuse d'un téléphone.



Modulation d'amplitude



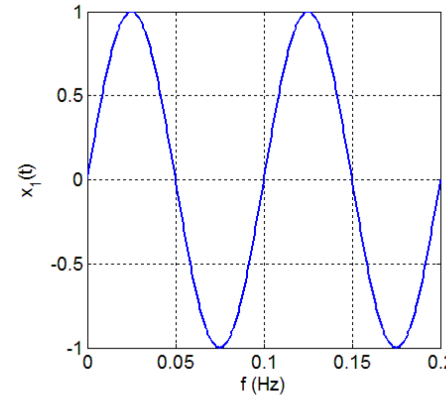
Gaussian-modulated sinusoidal pulse

Périodiques – non périodiques

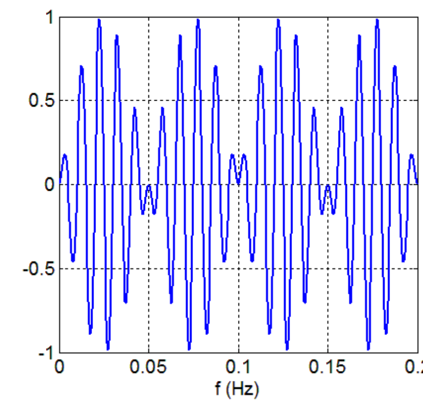
Déterministes

Périodiques

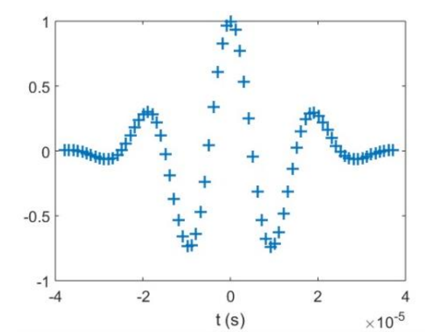
- Sinusoïdaux



- Composites



Non périodiques

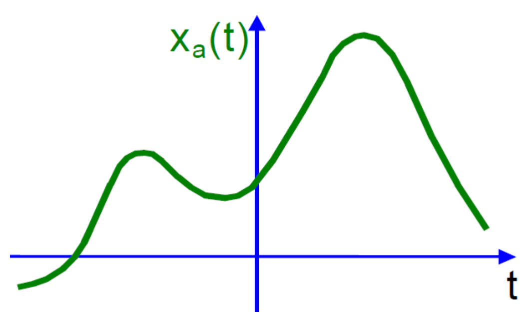


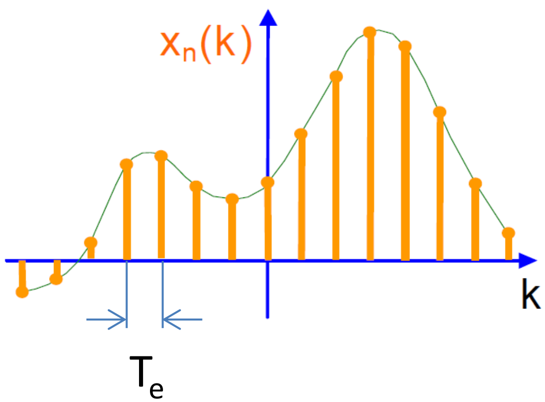
Signaux continus – signaux discrets

——— **ECHANTILLONNAGE** ———→

Signal à temps continu | Signal à temps discret

Signal à valeur continues

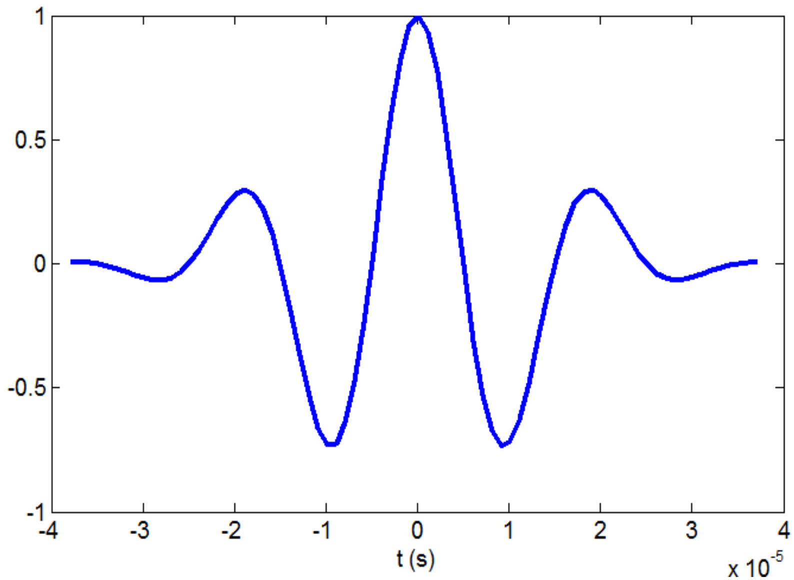




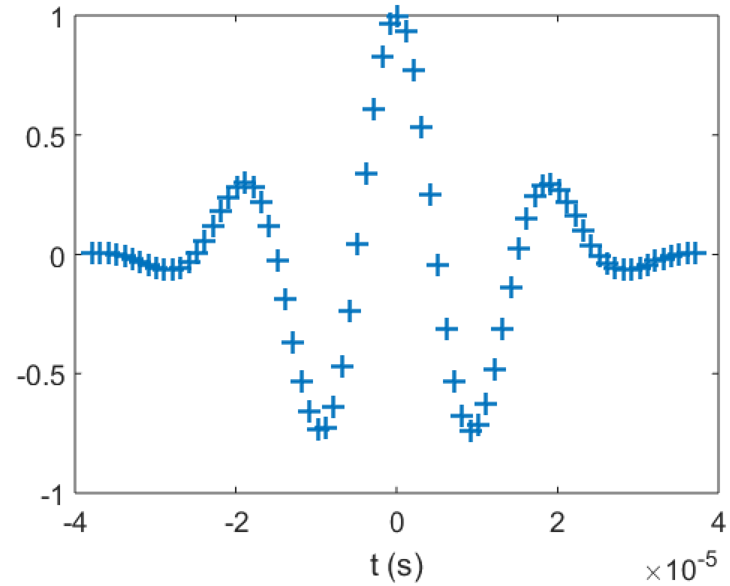
T_e : période d'échantillonnage (s)

$F_e = 1 / T_e$: fréquence d'échantillonnage (Hz)

Signaux continus – signaux discrets



Signal continu



Signal discret

Aujourd’hui, la majorité du traitement du signal est numérique et utilise donc des signaux discrets

Classification énergétique

Définition de l'énergie d'un signal x(t)

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

L'énergie est toujours positive
Unité : Joule

Classification énergétique

Définition de la puissance moyenne d'un signal x(t)

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt$$

La puissance est toujours positive
Unité : Joule/s = Watt

Pour le cas particulier des signaux périodiques, il suffit de faire le calcul sur une seule période T :

$$P_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

Classification énergétique

- Signal à énergie finie $E_x < +\infty$
  - Englobe les signaux de durée finie (rencontrés en pratique)
  - Signal de puissance nulle

Etude de ces signaux par analyse de Fourier

- Signal à puissance finie $P_x < +\infty$
  - Englobe les signaux périodiques
  - Signal d'énergie infinie
  - Pour les signaux périodiques, le calcul de P se fait sur une période

Représentation temps/fréquence

- Représentation temporelle (forme d'onde)
  - Variation de l'amplitude du signal en fonction du temps
  - Renferme toutes les informations contenues dans le signal
  - Permet de montrer l'instant d'émission ou la durée des évènements

- Représentation fréquentielle (spectre)
  - Variation de l'amplitude du signal en fonction de la fréquence
  - Renferme toutes les informations contenues dans le signal
  - Permet de montrer les composantes fréquentielles du signal.

Transformée de Fourier - TF

- Définition

Domaine temporel $\Leftrightarrow$ TF $\Leftrightarrow$ Domaine fréquentiel

Transformée de Fourier - TF

- Définition

Domaine temporel ⟷ TF ⟷ Domaine fréquentiel

Soit x(t) une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. La transformée de Fourier de x(t) est définie lorsqu'elle existe par :

$$X(f) = \mathrm{TF}[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2\pi jft}dt$$

$$X(f) = A(f) + jB(f) = |X(f)|e^{j\varphi(f)}$$

Condition d'existence : x(t) sommable, c'est-à-dire, fonction à énergie finie (elle tend vers 0 en $\pm\infty$ et possède une amplitude bornée.

Toute fonction existant physiquement admet une transformée de Fourier.

Exemple de TF

- Transformation de Fourier d'une fonction rectangulaire

Soit x(t) une fonction rectangle définie par :

$$x(t) = rectT(t/T) = 1, \forall t \in [-T/2, T/2]$$

0, ailleurs.

Sa transformée de Fourier existe et s'écrit :

$$\boxed{X\,(f) = \frac{sin(\pi f T)}{\pi f} = T sinc(\pi f T)}$$

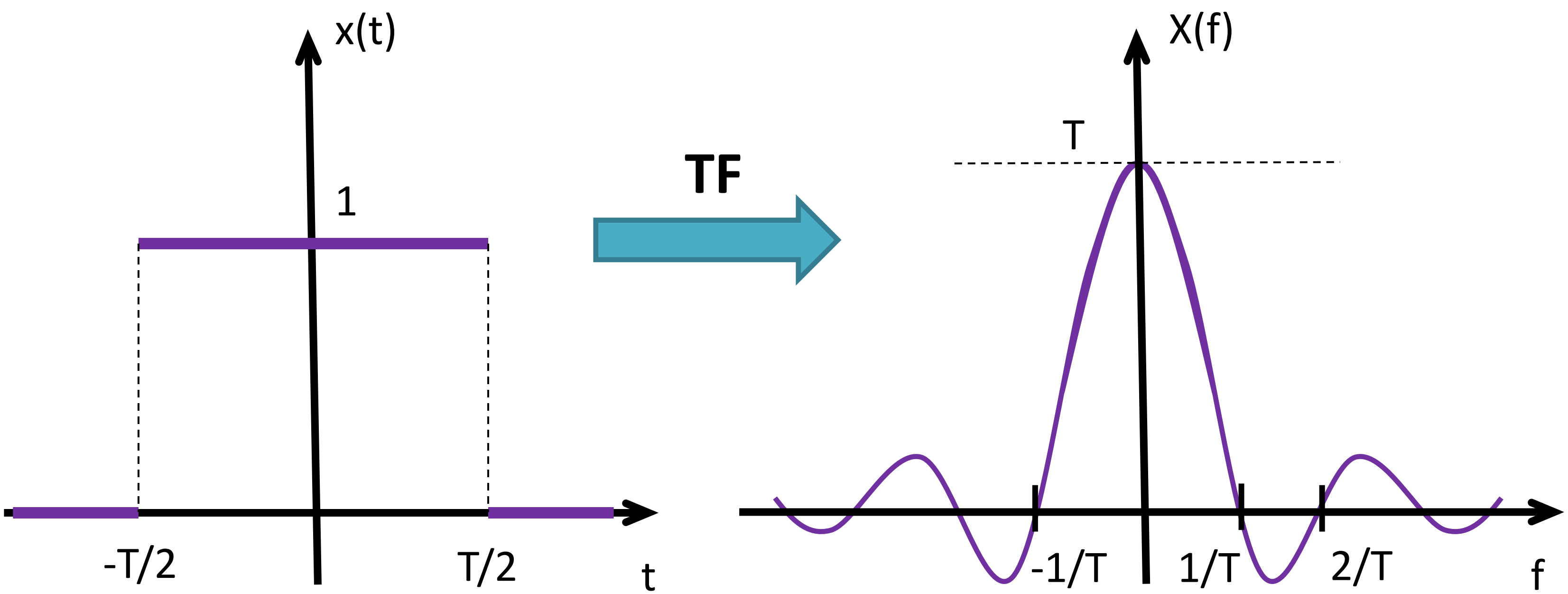
Où la fonction sinc est définie par : $sinc(x) = \sin(x)/x$

Démonstration :

Exemple de TF

- Transformation de Fourier d'une fonction rectangulaire

$$x(t) = rectT(t/T) \qquad X(f) = Tsinc(\pi f T)$$



Transformée de Fourier inverse

- Définition

La transformée de Fourier inverse est définie par :

$$\mathrm{x}(t) = \overline{\mathrm{TF}}[X(f)] = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{2\pi j f t} df$$

Remarques

– La transformée de Fourier est un opérateur **dual** : $\nabla(t) \leftrightarrow \vartheta(f) \mid \vartheta(t) \leftrightarrow \nabla(f)$
Par exemple la TF inverse d'un rectangle est un sinus cardinal dans l'espace temps.

– Signal de support étroit -> Spectre de support large et inversement.
L'exemple précédent illustre ce phénomène (si T est petit, le spectre devient plus large),

– L'unité de X(f) est celle de x(t) que multiplie le temps : si x(t) en V alors X(f) est en V.s

Fréquences négatives

Des fréquences négatives apparaissent dans la représentation spectrale car la TF parcours les espaces de $+\infty$ à $-\infty$

Physiquement seul les fréquences positives ont un sens mais il est important de représenter les fréquences négatives (voir chapitre analyse spectrale),

Propriétés de la TF

$$X(f) = \mathrm{TF}[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2\pi j f t} dt \quad \Bigg| \quad \mathrm{x}(t) = \overline{\mathrm{TF}}[X(f)] = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{2\pi j f t} df$$

Linéarité

$$\forall \alpha_1 \; et \; \alpha_2 \in \mathbb{C},$$
$$TF[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 TF[x_1(t)] + \alpha_2 TF[x_2(t)]$$

Transposition

$$TF[x(-t)] = X(-f)$$

Conjugaison

$$TF[x^*(t)] = X^*(-f)$$

Translation

$$TF[x(t - t_0)] = e^{-2\pi j f t_0} X(f)$$

Modulation

$$TF\left[x(t) e^{2\pi j f_0 t}\right] = X(f - f_0)$$

Dilatation/ Contraction

$$TF[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Dérivation / t

$$TF[x'(t)] = (2\pi j f) X(f)$$

Dérivation /f

$$X'(f) = TF[(-2\pi j t) x(t)]$$

Propriétés de la transformée de Fourier

- Translation (théorème du retard)

$$TF[x(t-t_0)] = e^{-2\pi j f t_0} X(f)$$

Un décalage dans le temps du signal ne modifie pas le module de son spectre. Il engendre un déphasage fréquentiel.

Démonstration

Propriétés de la transformée de Fourier

- Modulation

$$TF\left[x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right] = X(f - f_0)$$

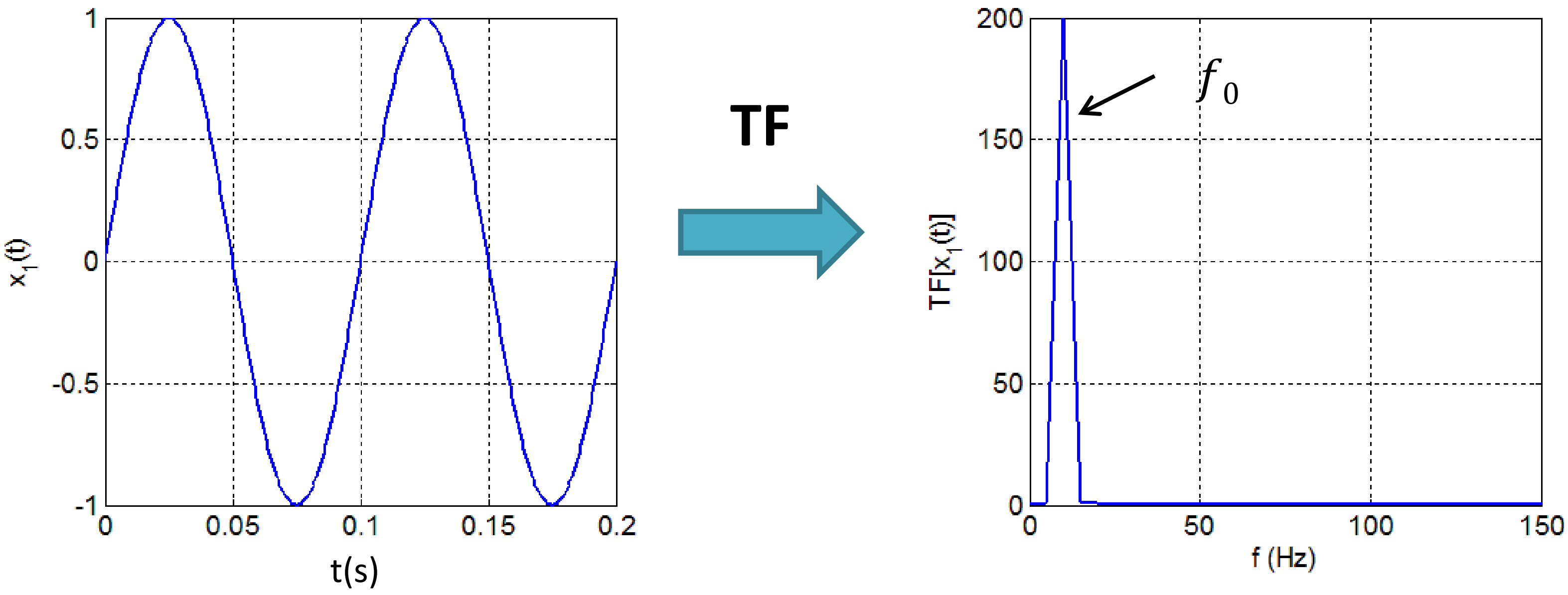
La multiplication d'un signal par une harmonique pure de fréquence f_0 translate le spectre du signal de f_0 : principe de la modulation d'amplitude.

Démonstration

Propriétés de la transformée de Fourier

- Modulation : exemple

$$x_1(t) = \sin(2\pi f_0 t) \text{ avec } f_0 = 10 \text{ Hz}$$

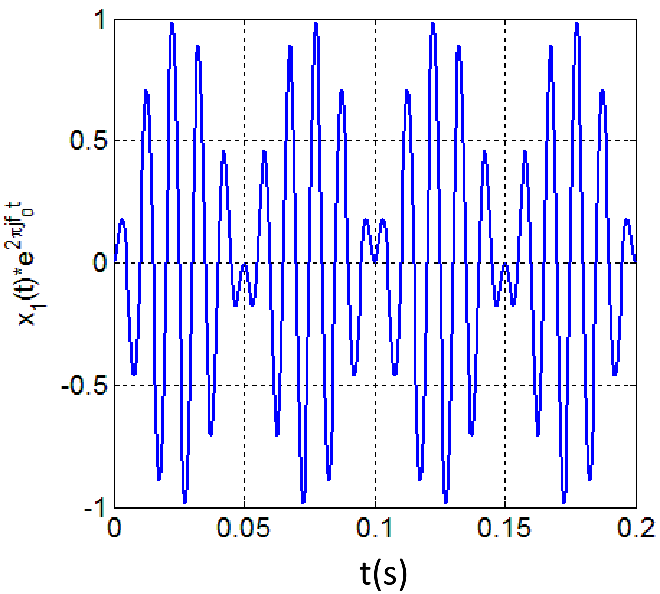


Propriétés de la transformée de Fourier

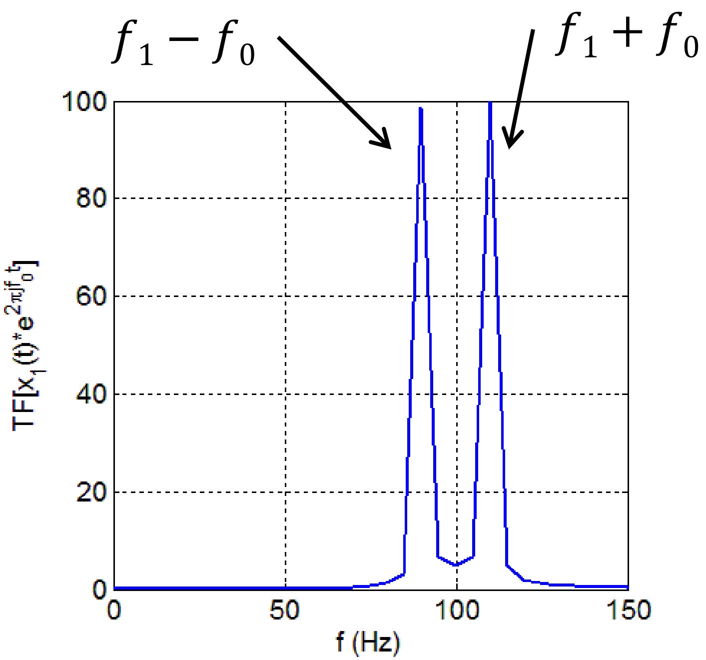
- Modulation : exemple

$$x_1(t).e^{2\pi j f_1 t} = \sin(2\pi f_0 t).e^{2\pi j f_1 t} \text{ avec } f_1 = 100 \text{ Hz}$$

$$TF[x_1(t).e^{2\pi j f_1 t}] = X_1(f - f_1)$$



TF

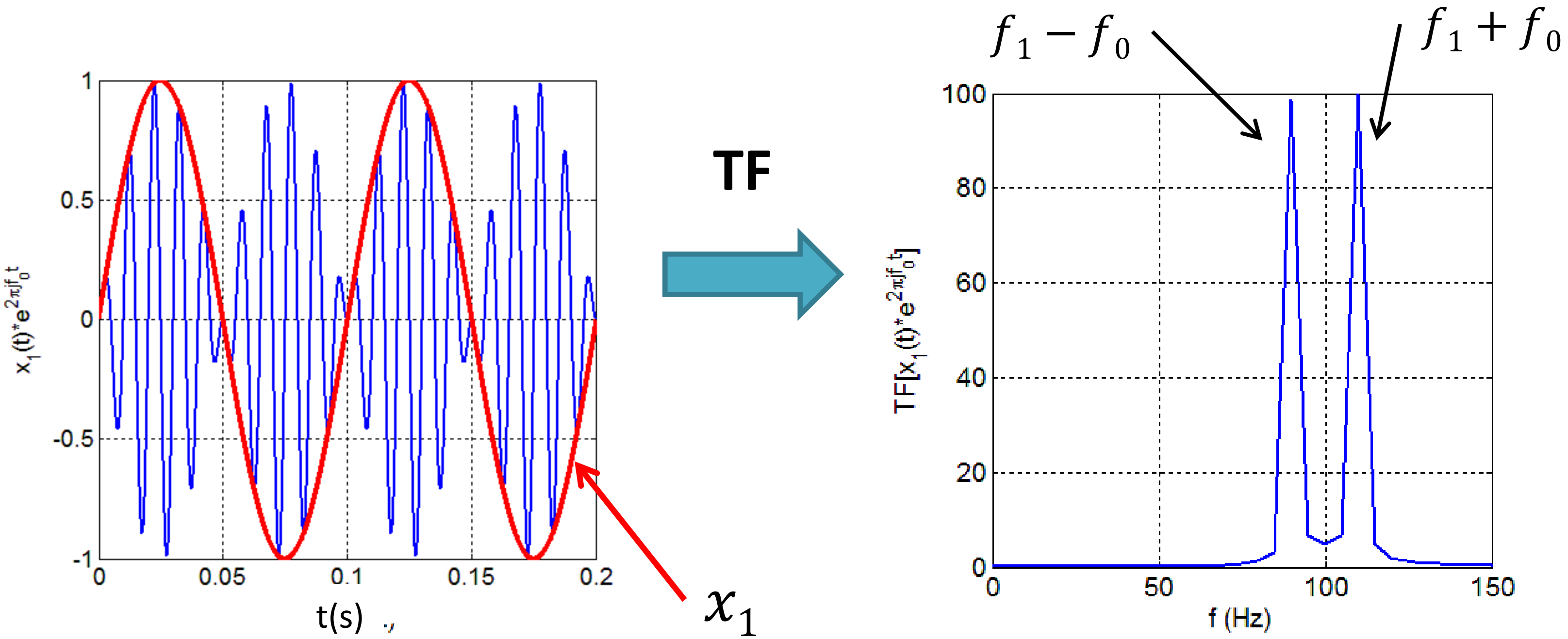


Propriétés de la transformée de Fourier

- Modulation : exemple

$$x_1(t) * e^{2\pi j f_1 t} = \sin(2\pi f_0 t) * e^{2\pi j f_1 t} \text{ avec } f_1 = 100 \text{ Hz}$$

$$TF[x_1(t) * e^{2\pi j f_1 t}] = X_1(f - f_1)$$



Filtrage fréquentiel

- Système linéaire et invariant dans le temps (LIT)

Linéarité

$$\forall \alpha_1 \; et \; \alpha_2 \; \in \mathbb{C},$$
$$LIT[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 LIT[x_1(t)] + \alpha_2 LIT[x_2(t)]$$

Stationnarité

$$y(t) = LIT[x(t)] \rightarrow y(t - t_0) = LIT[x(t - t_0)]$$

Filtrage fréquentiel

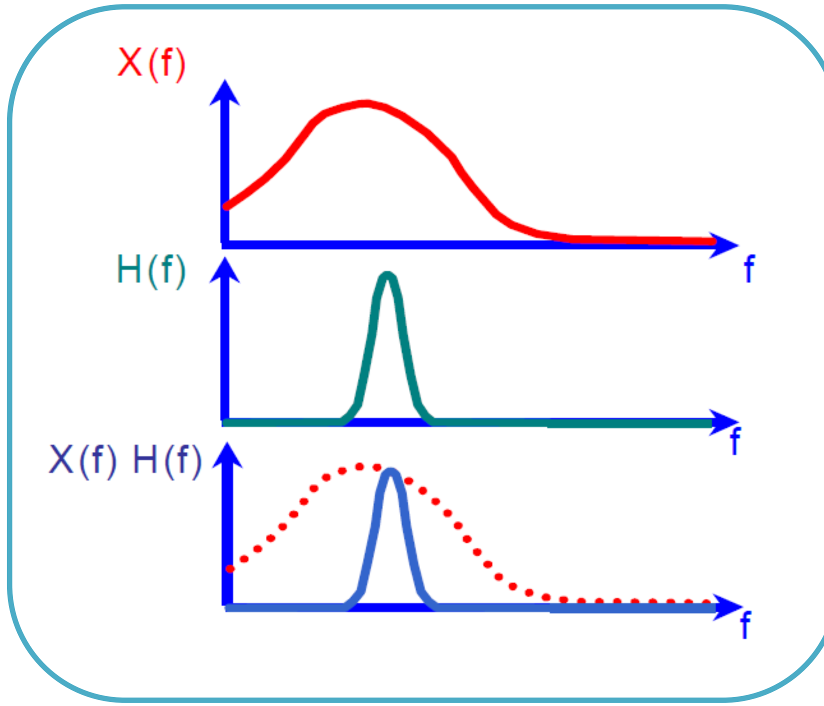
Soit x(t), un signal d'excitation et h(t), un filtre.

L'opération de filtrage h correspond à atténuer ou extraire certaines composantes fréquentielles de x.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

TF

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

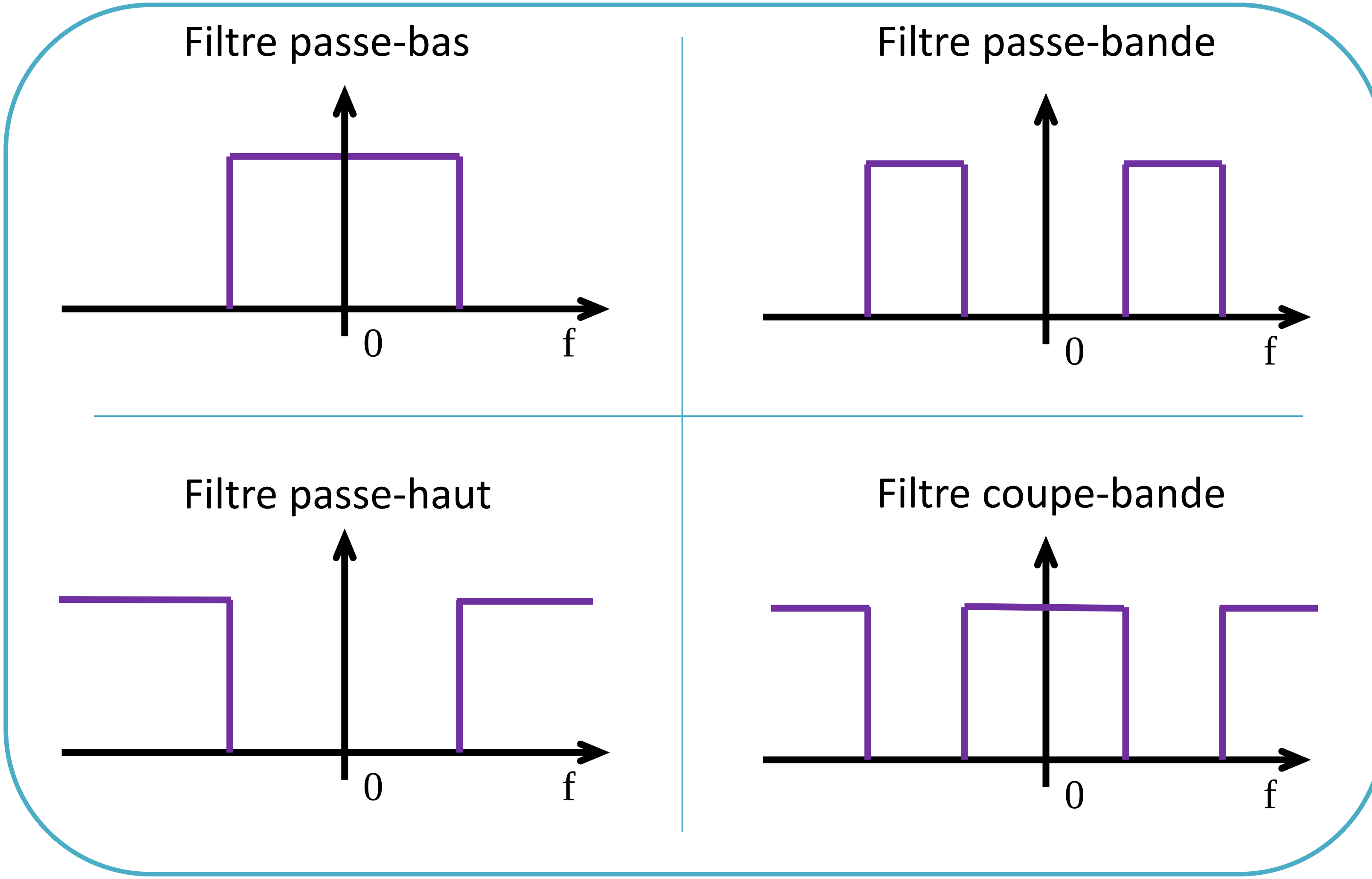


h(t) est appelé **réponse impulsionnelle** du filtre. Elle le caractérise complètement.

h(t) est obtenue en excitant le filtre par une distribution de Dirac,

Filtrage fréquentiel

- Spectre idéaux des 4 principaux types de filtrage



Filtrage fréquentiel

- Causalité et déphasage

Pour qu'un filtre soit causale, il faut que $h(t)$ soit causale.
L'effet ne doit pas précéder la cause => $h(t) \in [0, +\infty[$
En conséquence, $h(t)$ n'est ni paire ni impaire.

$$h(t) = \mathrm{hpaire(t)} + \mathrm{himpair(t)}$$

$$\Rightarrow H(f) = TF[h(t)] = \mathrm{Re(H(f))} + \mathrm{j.Im(H(f))}$$

⇒ Un filtre physiquement réalisable déphase obligatoirement !

Diagramme de Bode

- Soit H(f) la fonction de transfert d'un système quelconque. Le diagramme de Bode est la représentation en gain et en phase de H(f) :

Module de H(f) : gain

$$|H(f)| = \sqrt{H(f) \cdot H^*(f)}$$

Gain en décibel

$$G_{dB} = 20 \cdot log(|H(f)|)$$

Argument de H(f) : phase

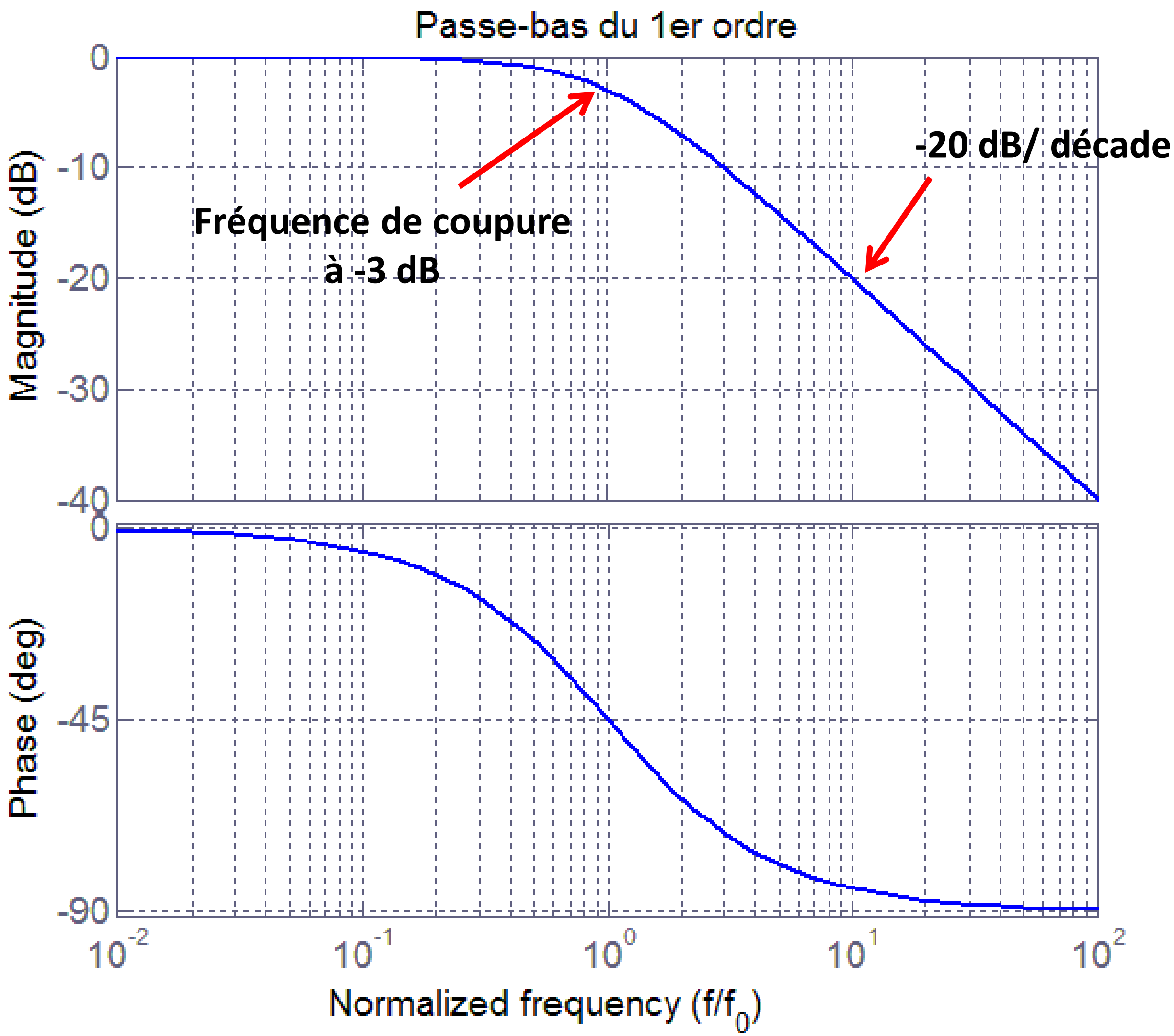
$$arg(H(f)) = arctan\left\{\frac{Im(H(f))}{Re(H(f))}\right\}$$

Exemple :

$$c = a + jb \quad \Rightarrow \quad |c| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad arg(c) = arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

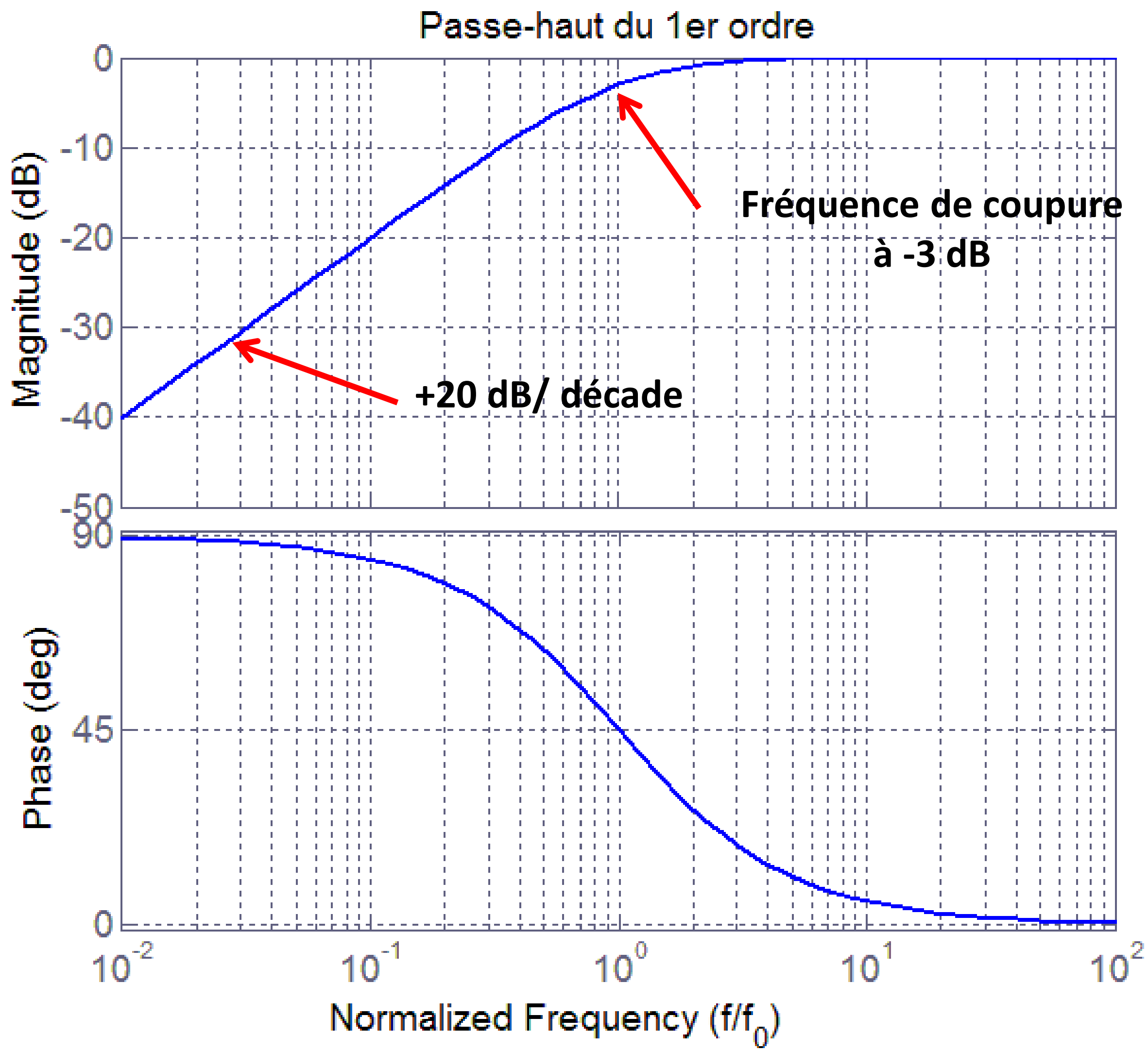
Filtre passe-bas du 1er ordre

$$H(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_0}}$$



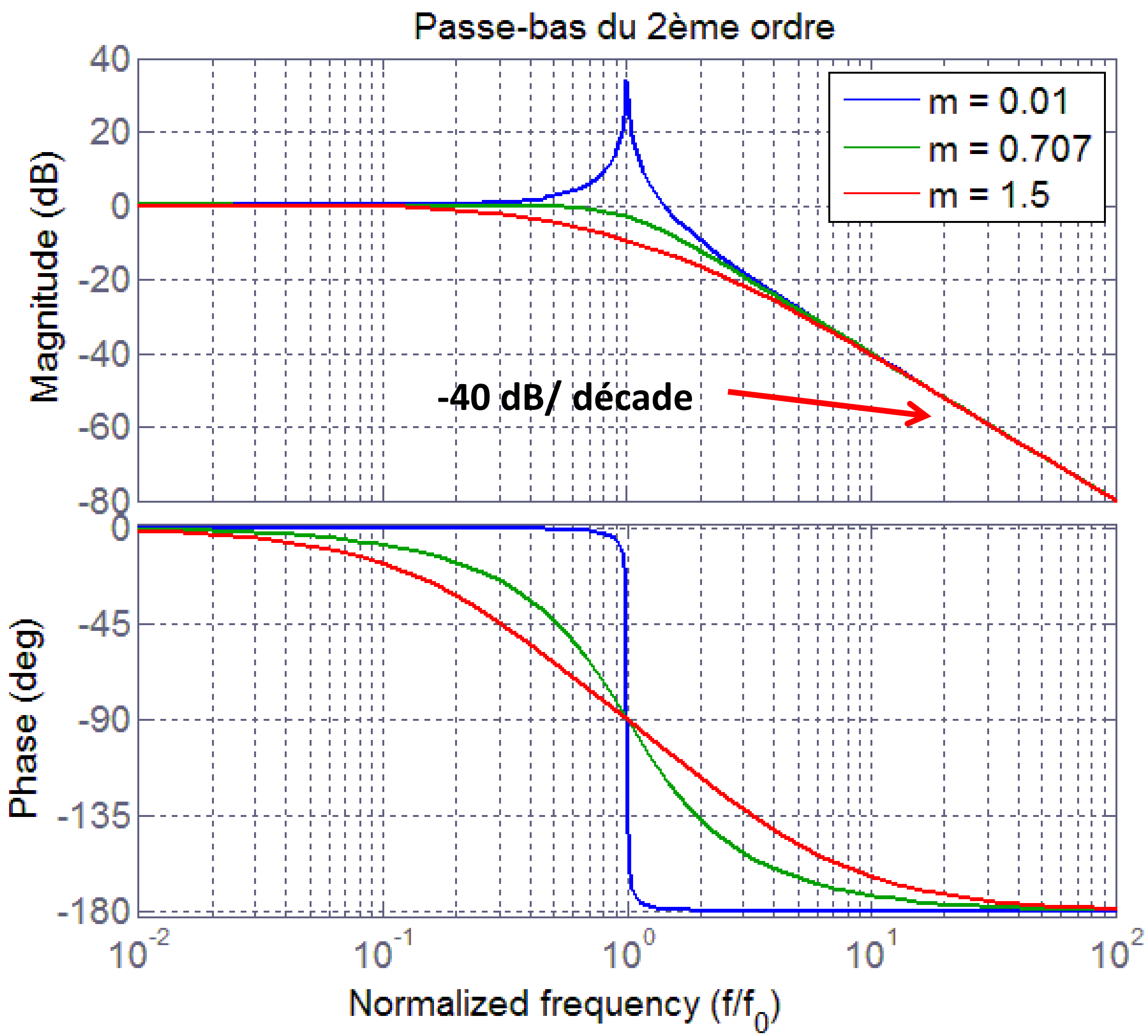
Filtre passe-haut du 1er ordre

$$H(f) = \frac{j\,\frac{f}{f_0}}{1 + j\,\frac{f}{f_0}}$$



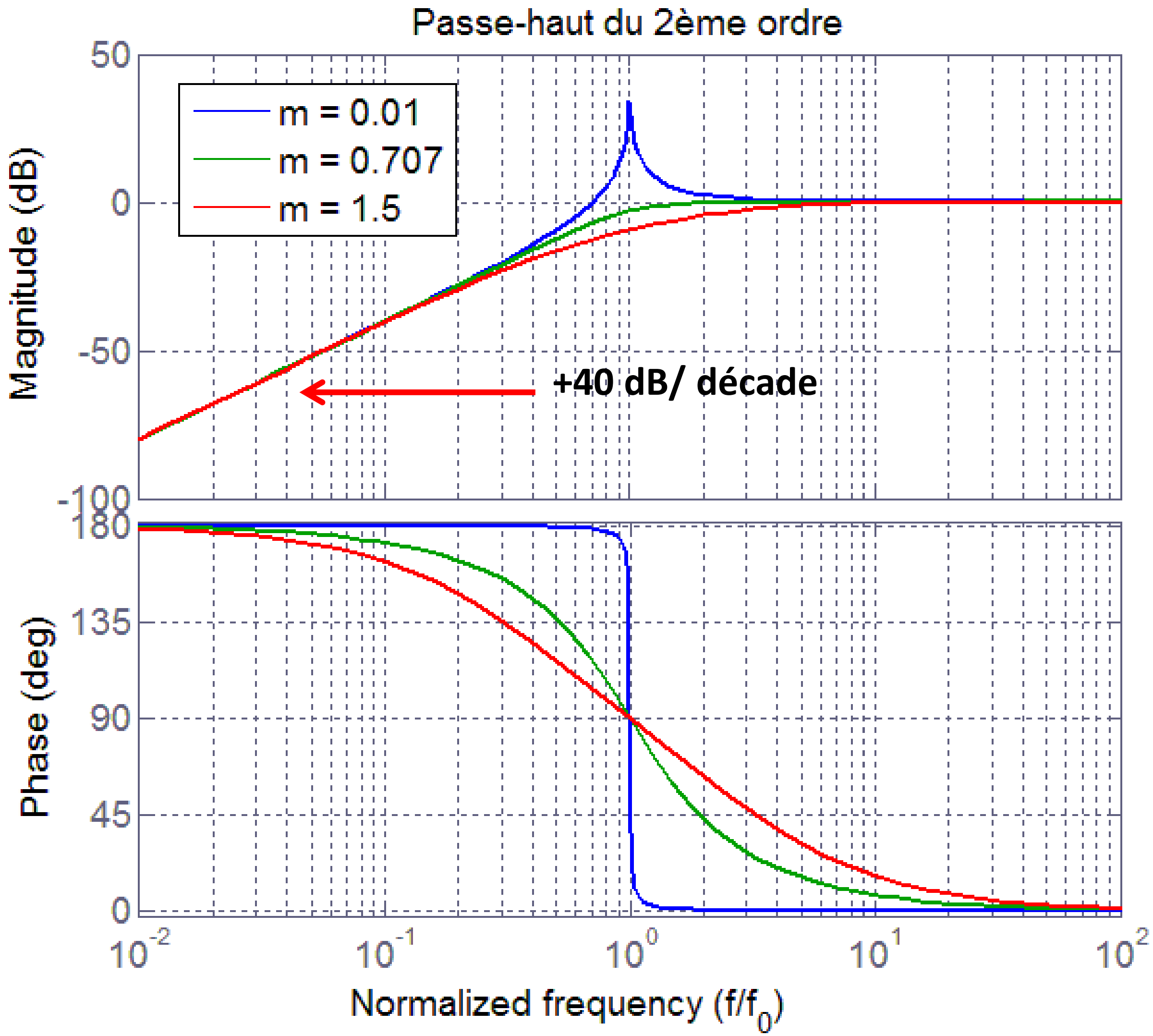
Filtre passe-bas du 2ème ordre

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2m\frac{f}{f_0} - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$



Filtre passe-haut du 2ème ordre

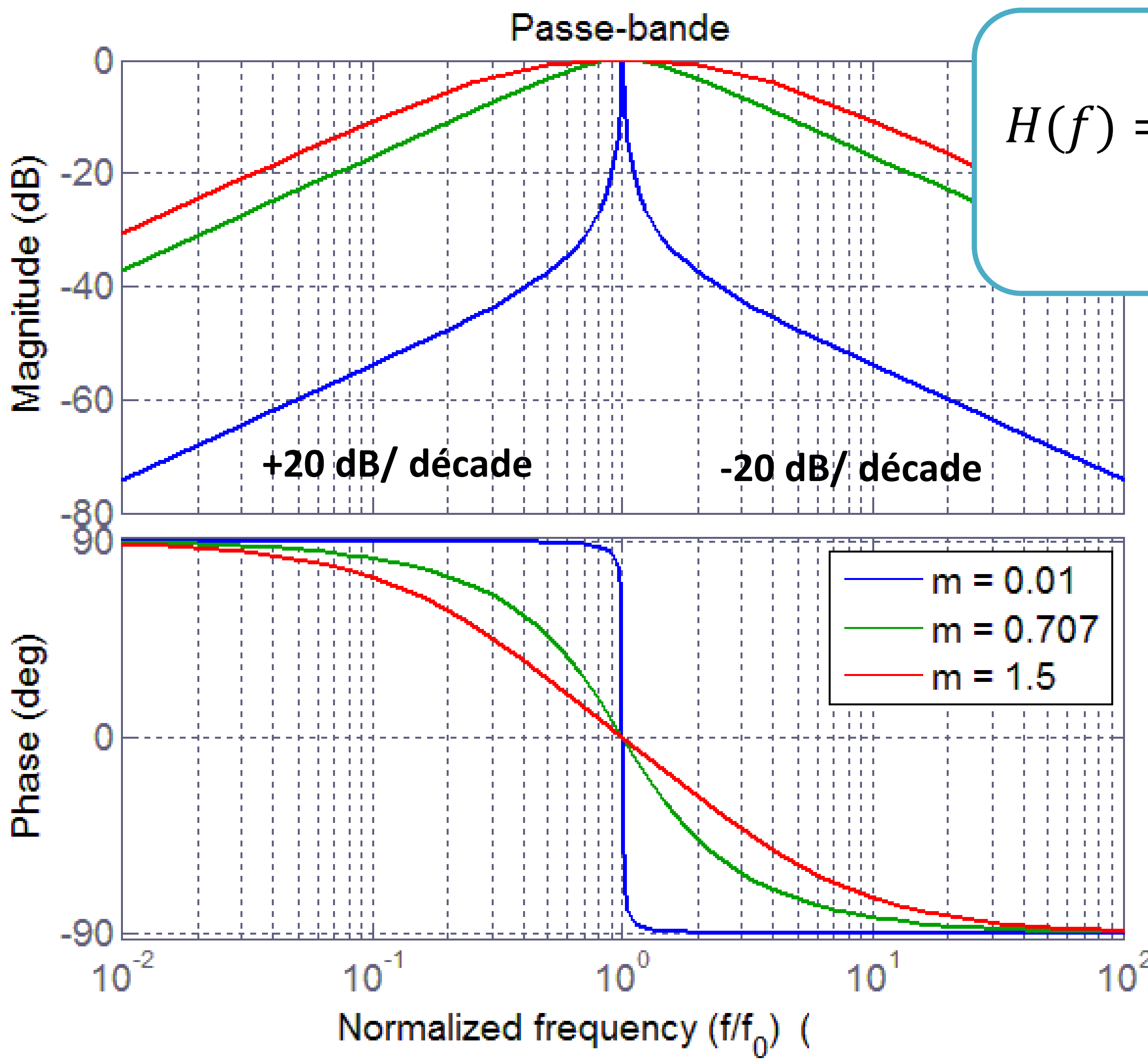
$$H(f) = \frac{-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1 + j2m\frac{f}{f_0} - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$



Filtre passe-bande du 2ème ordre

$$H(f) = \frac{j2m\frac{f}{f_0}}{1 + j2m\frac{f}{f_0} - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

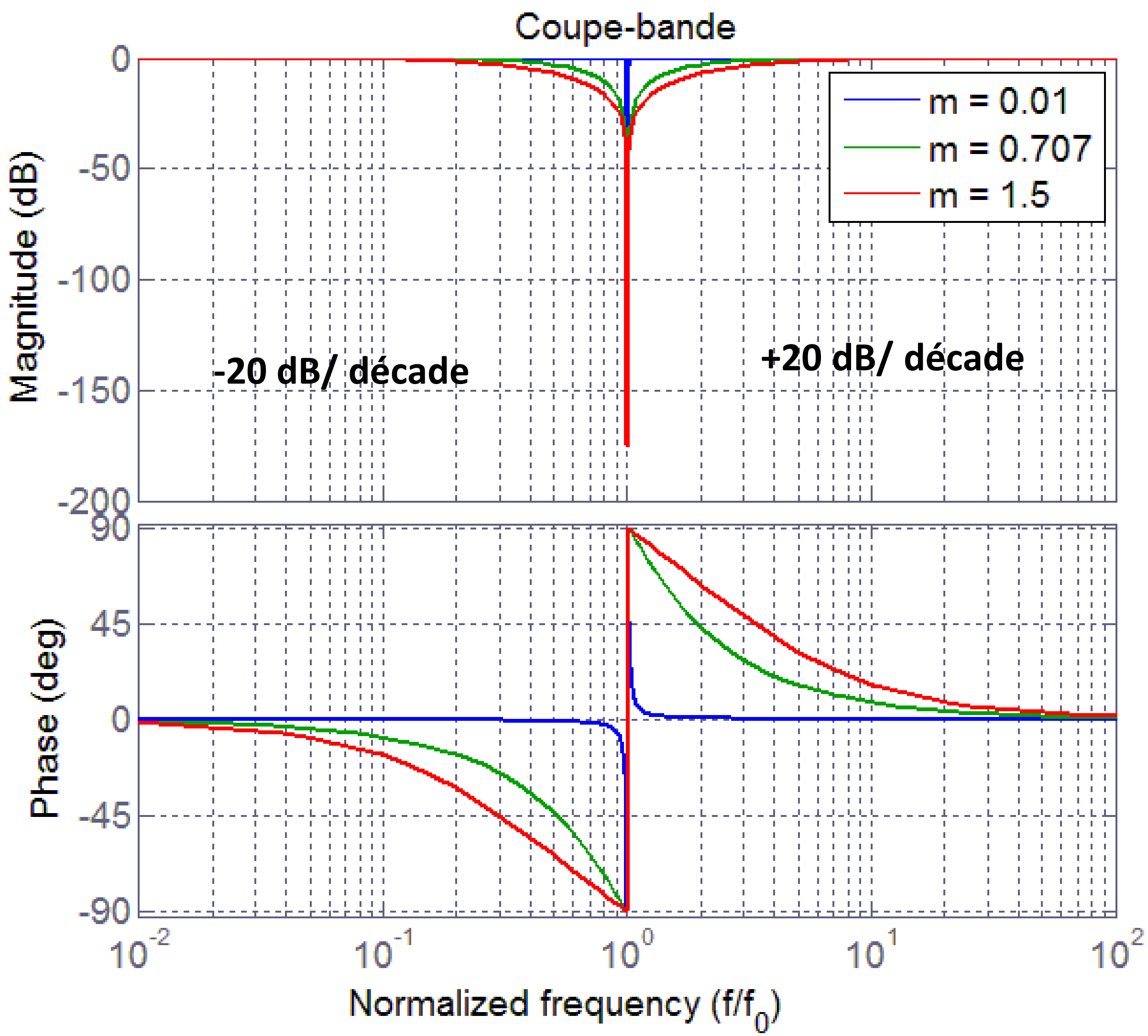
$$H(f) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$



Q : facteur de qualité
$Q = f_0/\Delta f$

Filtre coupe-bande du 2ème ordre

$$H(f) = \frac{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1 + j2m\frac{f}{f_0} - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$



Apodisation (Filtrage temporel)

I. Signaux déterministes continus
Classification
Espace t-f
TF
Filtrage Freq
Filtrage Temp
Conclusion

Apodisation : Multiplieur temporel – convolueur fréquentiel

$x(t)$
$X(f)$

Filtre temporel
h(t), .
H(f), *

$y(t) = x(t) \cdot h(t)$
$Y(f) = X(f) * H(f)$

Remarque : il n'existe pas de filtre temporel ne modifiant pas le spectre du signal d'entrée (seul solution le Dirac en fréquence)

Application : En pratique les signaux ne sont jamais utilisés intégralement mais sur une tranche temporelle.
L'opération se traduit par une multiplication avec une fenêtre :

$$x(t,T) = x(t) \cdot rectT(t/T) \quad \xrightarrow{\text{TF}} \quad X(f,T) = X(f) * \left(Tsinc(\pi f T)\right)$$

Apodisation (Filtrage temporel)

Exemple : fenêtre rectangulaire

Calculez et tracez le spectre d’un signal cosinusoïdale de fréquence 1 kHz observé à l’aide d’un oscilloscope sur une durée de 10 ms.

Apodisation (Filtrage temporel)

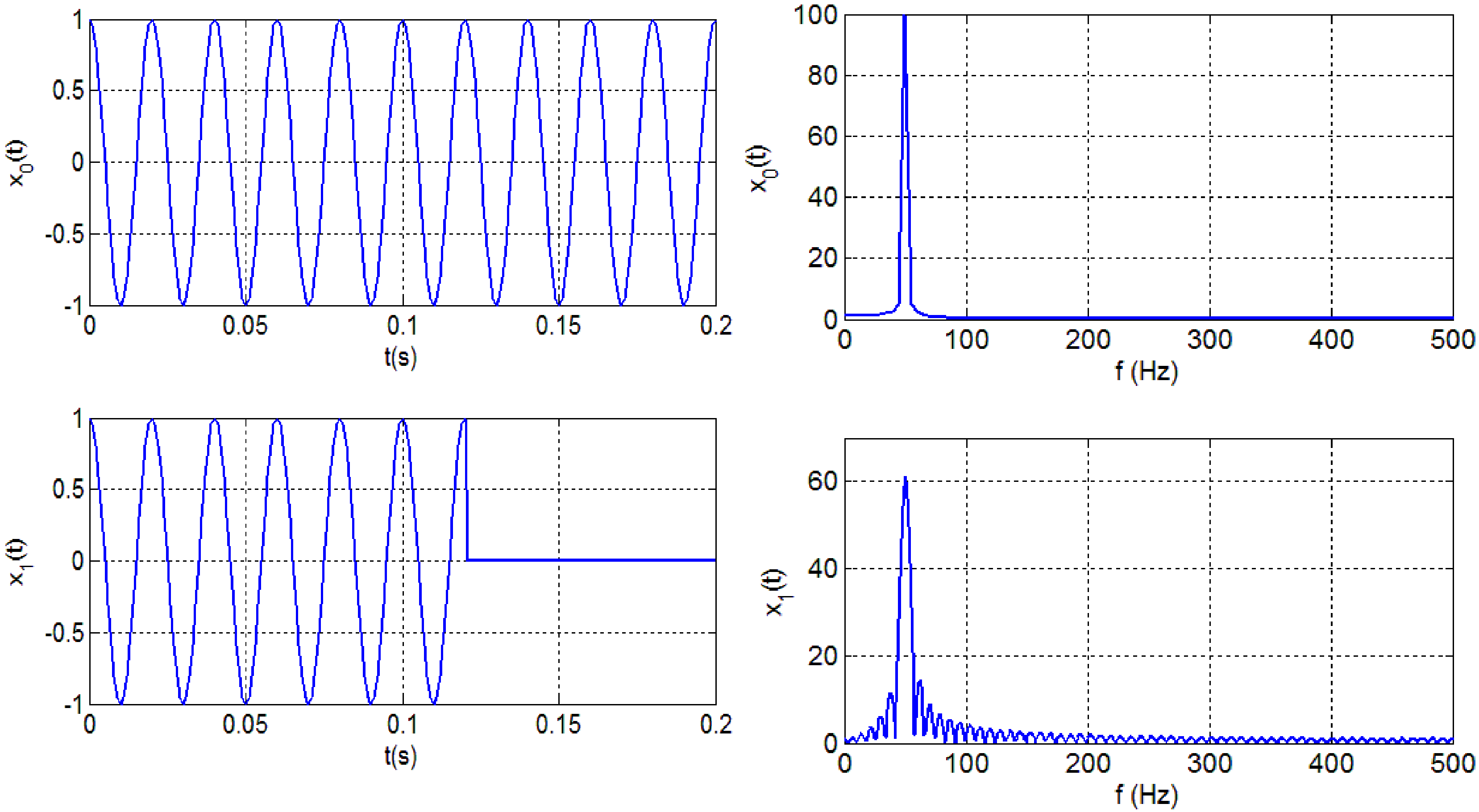
Exemple : fenêtre rectangulaire

Calculez et tracez le spectre du signal suivant observé à l'aide d'un oscilloscope sur une durée de 10 ms :

$$\cos(2\pi \cdot 1e3 \cdot t) + 0{,}2\cos(2\pi \cdot 1{,}15e3 \cdot t)$$

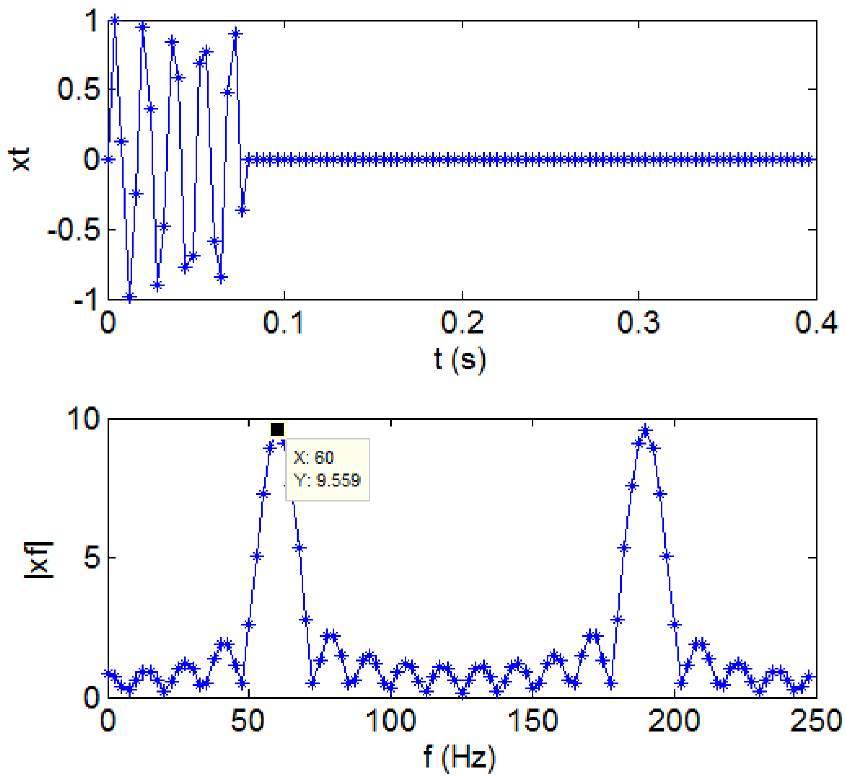
Apodisation (Filtrage temporel)

Exemple : fenêtre rectangulaire



Apodisation (Filtrage temporel)

Comme nous venons de le voir, le fait de ne prendre qu'une partie du signal à un effet sur le spectre :



Opération d'apodisation :

$$x_{ap}(\mathrm{t}) = \mathrm{x(t)} \cdot rect_T\left({}^{t}/_{T}\right)$$

TF

$$X_{ap}(\mathrm{f}) = \mathrm{X(f)} * Tsinc(\pi f T)$$

L'apodisation que l'on fait le plus souvent est fait avec une fenêtre rectangle mais il existe un grand nombre de fenêtre

Apodisation (Filtrage temporel)

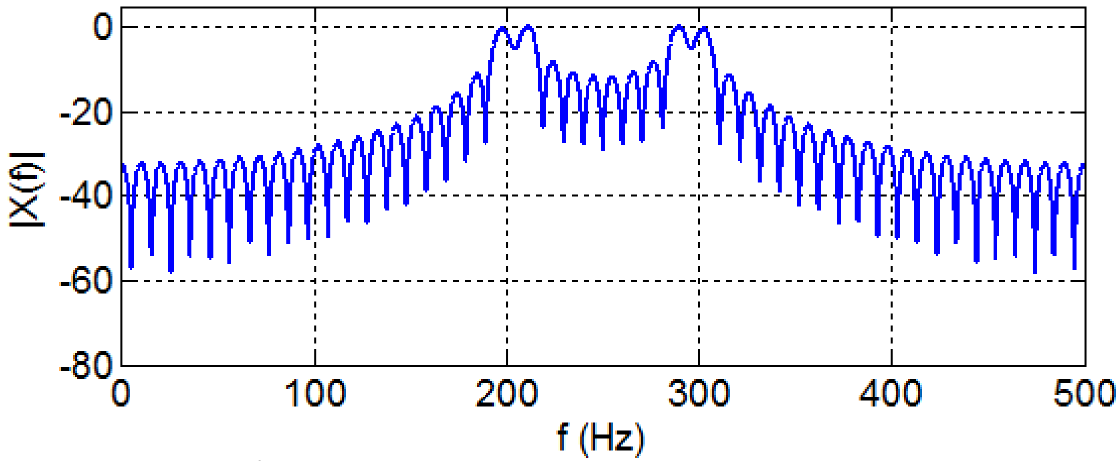
Type de fenêtre	Atténuation en dB entre lobe principal et premier lobe secondaire	Largeur du lobe principal
Rectangulaire	13	$2F_e/_N$
Bartlett	26	$4F_e/_N$
Hanning	31	$4F_e/_N$
Hamming	41	$4F_e/_N$
Blackman	57	$6F_e/_N$
Nuttall	95	$8F_e/_N$

Compromis à faire entre lobe secondaire et largeur du lobe principal.
Le choix de la fenêtre dépend du signal à observer

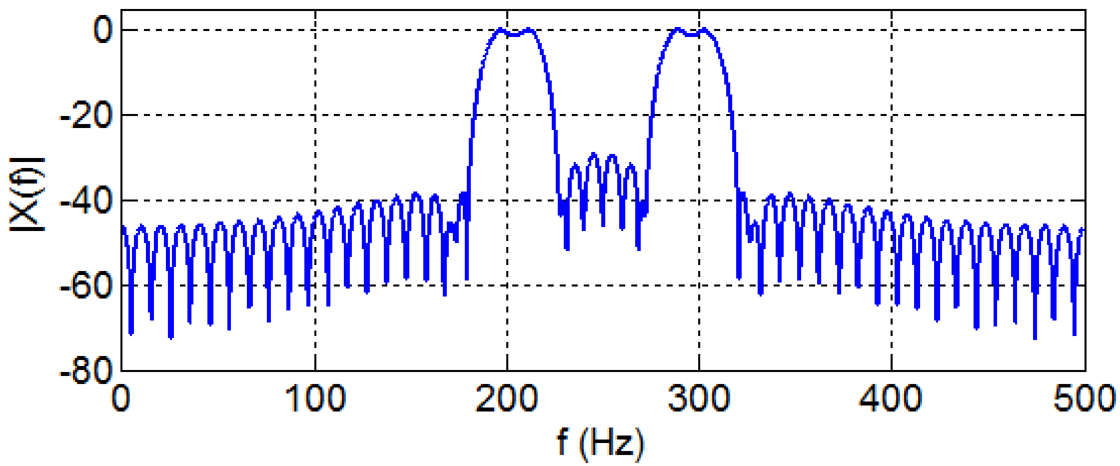
Apodisation (Filtrage temporel)

Signaux des fréquences très proches

Rectangle

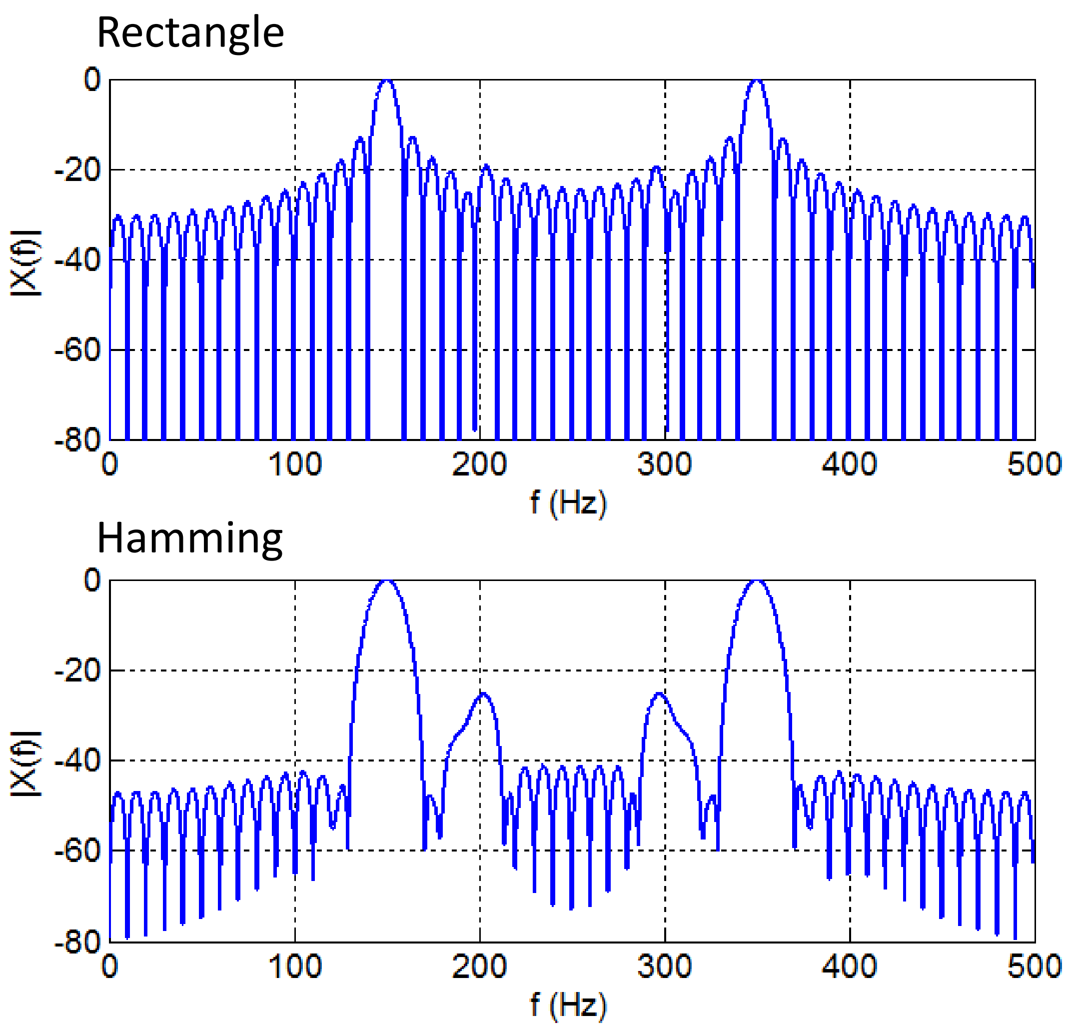


Hamming



Apodisation (Filtrage temporel)

Signaux avec de grandes différences d'amplitude



A retenir

Représentations en temps : signaux
Représentations en fréquence : spectre

Représentation :

- **Différentes**
- **Complémentaires**
- **Sans perte d'énergie ! (th. de Parseval)**

Passage de l'une à l'autre représentation :

- **Transformée de Fourier**
- **Opérateur réversible**