Chapitre 7 : Tests d'hypothèses
MA 360 : Probabilités continues

Pierre-Alain TOUPANCE
pierre-alain.toupance@esisar.grenoble-inp.fr

Grenoble INP - ESISAR
3ième année

18 octobre 2020

Principe des tests :

Les tests sont des démarches qui consistent à définir une règle de décision permettant sur la base d'un échantillon de faire un choix entre 2 hypothèses.

Définition

Lors d'un test, l'hypothèse que l'on privilégie est appelée l'hypothèse nulle, notèe H_0.
Une autre hypothèse est appelée l'hypothèse alternative, notée H_1

Remarques :

- C'est H_0 qui est soumise au test. Toute démarche s'effectue en considérant cette hypothèse vraie.
- Un test statistique permet de rejeter une hypothèse ou de ne pas la rejeter.
- Attention, ne pas rejeter une hypothèse ne veut pas dire que l'on va accepter mais simplement que l'on n'a pas assez d'informations pour la rejeter.

Exemples de tests

1. On lance un pièce et on se demande si elle est bien équilibrée. Soit p la probabilité d'obtenir pile, on prendra $\begin{cases} H_0 & : \quad p = \dfrac{1}{2} \\ H_1 & : \quad p \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$
2. A partir d'un échantillon de données paramétriques, on peut effectuer un test sur la moyenne $H_0 \ : \ m = m_0$
3. On s'intéresse à la durée de vie d'un produit, on peut effectuer le test que cette durée de vie suit une loi exponentielle $H_0 \ : \ X \sim Exp(\lambda)$
4. $H_0 \ : \ X$ et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

Types de test :

On considère 2 types de tests :

- Tests paramétriques : dans le cas où le test porte sur un paramètre.
- Tests non paramétriques dans les autres cas, par exemple test d'adéquation à une loi, test d'indépendance, test de comparaison.

Pour les tests paramétriques, on a deux types de tests :

- Test bilatéral : $\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \theta \neq \theta_0 \end{cases}$
- Test unilatéral : dans les autres cas $\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \theta > \theta_0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \theta < \theta_0 \end{cases}$

Tableau des erreurs :

Décision \ Réalité	H_0 vraie	H_0 fausse
Ne pas rejeter H_0	Bonne décision	Erreur de $2^{\text{ième}}$ espèce
Rejeter H_0	Erreur de $1^{\text{ière}}$ espèce	Bonne décision

Tableau des risques :

Décision \ Réalité	H_0 vraie	H_0 fausse
Ne pas rejeter H_0	$1-\alpha$	β
Rejeter H_0	α	$1-\beta$

On a :

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(\text{Rejeter } H_0)$$

$$\beta = \mathbb{P}_{H_1}(\text{Ne pas rejeter } H_0)$$

Vocabulaire :

- α est la probabilité d'erreur de premier espèce, appelée **risque fournisseur**.
- $1-\alpha$ est le **niveau de confiance** du test.
- β est la probabilité d'erreur de second espace, appelée **risque client**.
- $1-\beta$ est la **puissance du test**.

Définition : règle et critère de décision

On appelle règle de décision une règle qui permet de choisir entre deux hypothèses au vu des observations sur un (ou plusieurs) échantillon(s).
Le critère de décision est une variable aléatoire Z dont la valeur de l'échantillon permet ou non de rejeter H_0.

Remarque : dans le cas d'un test paramétrique, on prend Z un estimateur du paramètre considéré.

Exemple :

Lorsque l'on test qu'une pièce n'est pas biaisée, on prend $F_n = \frac{1}{n} X_n$ où X_n est la VA égale au nombre de pile obtenu lors de n lancers. On a $X_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

Zone de rejet

On appelle zone de rejet (ou région critique) W du test l'ensemble des observations de la statistique du test pour lesquelles on rejettera l'hypothèse H_0.

On applique la règle de décision suivante :

- Si $z \in W$, on rejette H_0 au niveau α.
- Si $z \notin W$, on ne rejette pas H_0.

Définition : P value

On appelle p- value ou probabilité critique la probabilité p_c sous l'hypothèse H_0 que l'estimation du paramètre fournie par un échantillon au hasard soit pire que la valeur obtenue par l'échantillon.

On applique la règle de décision suivante :

- Si $p_c < \alpha$, on rejette H_0 au niveau α.
- Si $p_c \geqslant \alpha$, on ne rejette pas H_0.

H_0	type de test	H_1	p value
$\theta = \theta_0$	test unilatéral	$\theta > \theta_0$	$\mathbb{P}_{H_0}(Z > z)$
$\theta = \theta_0$	test unilatéral	$\theta > \theta_0$	$\mathbb{P}_{H_0}(Z < z)$
$\theta = \theta_0$	test bilatéral	$\theta \neq \theta_0$	$\begin{cases} 2\mathbb{P}_{H_0}(Z > z) & \text{si } z > z_0 \\ 2\mathbb{P}_{H_0}(Z < z) & \text{si } z < z_0 \end{cases}$

En pratique

En pratique, lorsque l'on effectue un test d'hypothèse, on effectue les démarches suivantes :

1. Définir l'hypothèse nulle.
2. Choisir le seuil de signification.
3. Définir le critère de test.
4. Etablir la règle de décision : déterminer la zone de rejet ou calculer la p-value.

Les deux approches

i) Approche de Neyman & Pearson : déterminer la région critique du test

On détermine la zone où, si H_0 est vraie, la valeur de la variable d'échantillonnage a une faible probabilité de se trouver.

Règle de décision : Rejeter H_0 au seuil α si la valeur calculée dans l'échantillon appartient à la région critique.

ii) Approche de Fisher : déterminer la probabilité critique du test

On calcule la probabilité pour que, si H_0 est vraie, la variable soit supérieure (ou inférieure) à la valeur de la variable d'échantillonnage calculée sur l'échantillon.

Règle de décision : Rejeter H_0 au seuil α si la pvalue calculée dans l'échantillon est inférieure à α.

Exemple

On lance 100 fois une pièce et on obtient 45 fois pile.
L'hypothèse nulle est : H_0 la pièce est équilibrée.

Méthode de Neyman et Pearson (intervalle de rejet) :

Soit $F_n = \frac{X_n}{n}$ avec $X_n \sim \mathcal{B}(n, \dfrac{1}{2})$ et $n = 100$.

Exemple

On lance 100 fois une pièce et on obtient 45 fois pile.
L'hypothèse nulle est : H_0 la pièce est équilibrée.

Méthode de Neyman et Pearson (intervalle de rejet) :

Soit $F_n = \frac{X_n}{n}$ avec $X_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ et $n = 100$.

Comme $n > 30$, on considère que $F_{100} \sim \mathcal{N}(\frac{1}{2}; \frac{1}{20}$ On prend $\alpha = 0,95$, on cherche ainsi a et b tels que $\mathbb{P}(a \leqslant F_n \leqslant b) = 0,95$.

Exemple

On lance 100 fois une pièce et on obtient 45 fois pile.
L'hypothèse nulle est : H_0 la pièce est équilibrée.

Méthode de Neyman et Pearson (intervalle de rejet) :
Soit $F_n = \frac{X_n}{n}$ avec $X_n \sim \mathcal{B}(n, \dfrac{1}{2})$ et $n = 100$.
Comme $n > 30$, on considère que $F_{100} \sim \mathcal{N}(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{20}$ On prend $\alpha = 0,95$, on cherche ainsi a et b tels que $\mathbb{P}(a \leqslant F_n \leqslant b) = 0,95$.
Or on a :

$$\mathbb{P}(a \leqslant F_n \leqslant b) = 0,95 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\frac{a - 1/2}{1/20}) \leqslant \frac{F_n - 1/2}{1/20}) \leqslant \frac{b - 1/2}{1/20})) = 0,95$$

Ainsi on obtient $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} - 1,96 \times \dfrac{1}{20} \simeq 0,598 \\ b = \dfrac{1}{2} + 1,96 \times \dfrac{1}{20} \simeq 0,4020 \end{cases}$

Ainsi on obtient $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} - 1,96 \times \dfrac{1}{20} \simeq 0,598 \\ b = \dfrac{1}{2} + 1,96 \times \dfrac{1}{20} \simeq 0,4020 \end{cases}$

L'intervalle de rejet est donc $W = [0; 0,4020[\cup]0,598; 1]$.

Ainsi on obtient $\begin{cases} a = \frac{1}{2} - 1,96 \times \frac{1}{20} \simeq 0,598 \\ b = \frac{1}{2} + 1,96 \times \frac{1}{20} \simeq 0,4020 \end{cases}$

L'intervalle de rejet est donc $W = [0; 0,4020[\cup]0,598; 1]$.

Or $0,45 \notin W$, on ne rejette donc pas l'hypothèse H_0 par la méthode de Neyman et Pearson.

Exemple

On lance 100 fois une pièce et on obtient 45 fois pile.
L'hypothèse nulle est : H_0 la pièce est équilibrée.

Méthode de Fischer (p value) :
On a

$$p_c = 2\mathbb{P}(F_n < 0,45) \tag{1}$$

(2)

(3)

Exemple

On lance 100 fois une pièce et on obtient 45 fois pile.
L'hypothèse nulle est : H_0 la pièce est équilibrée.

Méthode de Fischer (p value) :
On a

$$
\begin{aligned}
p_c &= 2\mathbb{P}(F_n < 0,45) && (1)\\
&= 2\mathbb{P}(\frac{F_n - 1/2}{1/20}) < \frac{0,45 - 0,5}{1/20}) && (2)\\
& && (3)
\end{aligned}
$$

Exemple

On lance 100 fois une pièce et on obtient 45 fois pile.
L'hypothèse nulle est : H_0 la pièce est équilibrée.

Méthode de Fischer (p value) :
On a

$$p_c = 2\mathbb{P}(F_n < 0,45) \tag{1}$$

$$= 2\mathbb{P}(\frac{F_n - 1/2}{1/20}) < \frac{0,45 - 0,5}{1/20}) \tag{2}$$

$$\simeq 0,217 \tag{3}$$

Exemple

On lance 100 fois une pièce et on obtient 45 fois pile.
L'hypothèse nulle est : H_0 la pièce est équilibrée.

Méthode de Fischer (p value) :
On a

$$
\begin{aligned}
p_c &= 2\mathbb{P}(F_n < 0,45) && (1) \\
&= 2\mathbb{P}(\frac{F_n - 1/2}{1/20}) < \frac{0,45 - 0,5}{1/20}) && (2) \\
&\simeq 0,217 > 0,05 && (3)
\end{aligned}
$$

Exemple

On lance 100 fois une pièce et on obtient 45 fois pile.
L'hypothèse nulle est : H_0 la pièce est équilibrée.

Méthode de Fischer (p value) :
On a

$$
\begin{aligned}
p_c &= 2\mathbb{P}(F_n < 0,45) && (1)\\
&= 2\mathbb{P}(\frac{F_n - 1/2}{1/20}) < \frac{0,45 - 0,5}{1/20}) && (2)\\
&\simeq 0,217 > 0,05 && (3)
\end{aligned}
$$

Par la méthode de Fischer, on rejette l'hypothèse H_0.

Loi du Khi deux

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi du khi deux à n degrés de liberté lorsque :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

où $X_1,\ X_2, ..., X_n$ sont des VA indépendantes tel que $\forall i \in [\![1; n]\!],\ X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$

La fonction de répartition de X est

$$F_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^x t^{n/2-1} e^{-t/2} dt & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\forall z > 0,\ \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

Propriété

Si $X \sim \chi^2(n)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = n$$

$$\mathbb{V}(X) = 2n$$

Démonstration :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) = n$$

On a

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i^2)$$

Car les variables aléatoires (Y_i) sont indépendantes.

$$\forall i,\ \mathbb{E}(Y_i^4) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-x^2/2} dx$$

Théorème de Cochran

Soient $Y_1,\ Y_2,\ \ldots Y_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales centrées réduites et soit $\overline{Y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$, alors :

- $\overline{Y}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})$ ne sont pas indépendantes.
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})$ suit une loi du khi deux à $n-1$ degrés de liberté

Remarques :

- $\forall i,\ (Y_i - \overline{Y})$ suit une loi normale centrée.
- Les VA $(Y_i - \overline{Y})$ ne sont pas indépendantes, on perd un degré de liberté.
- Pour $n > 100$ on approche la loi du $\chi^2(n)$ par une loi

Loi du Student

Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.
Soit U une variable aléatoire qui suit une loi du Khi deux à n degré de liberté (ddl). On dit que $Y = \dfrac{Z}{\sqrt{U/n}}$ suit une loi du Student à n ddl.

Loi de Fischer Snedecor

Soient $X \sim \chi_2(n)$ et $Y = \chi^2(m)$ deux variables aléatoires indépendantes
alors $Z = \dfrac{X/n}{Y/m}$ suit une loi de Fischer Snedecor de paramètre $(n; m)$

Cas ou σ est connu

$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum X_i$ est un estimateur de la moyenne. On choisit donc cette VA comme critère de décision.

On a

$$\frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Cas d'un test bilatéral

On a : $\begin{cases} H_0 \ m = m_0 \\ H_1 \ m \neq m_0 \end{cases}$

On détermine a et b tels que

$$\mathbb{P}_{H_0}(a \leqslant \overline{X}_n) = 1-\alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}(\frac{a-m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant \frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant \frac{b-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$

Exemple

Un certain médicament indique que chaque comprimé doit contenir $m_0 = 2,5$ g de substance active. L'écart-type est connu, on a $\sigma = 0,4g$.
On a un échantillon de taille $n = 100$ dont la moyenne des substance active est $m = 2,6g$.
Effectuer le test $m = m_0$ au risque de 5%.

L'intervalle d'acceptation est
$I = [2,5 - 1,96 \times \dfrac{0,4}{\sqrt{100}}; 2,5 + 1,96 \times \dfrac{0,4}{\sqrt{100}}] = [2,42; 2,57]$.
Comme $2,6 \notin I$, on refuse l'hypothèse H_0