MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)
Séance de TD du 20 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 28 de la séance de TD consacrée aux files et réseaux de files d'attente. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 28
Dans une école, se proposent deux choix : soit une installer une imprimante, soit installer 3 imprimantes indépendantes, mais 3 fois moins rapides que dans le premier cas. Pour simplifier le calcul, le processus d'arrivée des requêtes d'impression sera modélisé comme un processus de Poisson. Les temps moyen de traitement des requêtes d'impression sont supposés distribués selon des lois exponentielles indépendantes.

1. Dans un premier temps, la configuration envisagée pour la solution à trois imprimantes est de les doter chacune d'un spooler d'impression indépendant. On suppose que l'installation des trois imprimantes peut être faite de manière à ce que les requêtes d'impression soit équitablement distribuée – en régime permanent – entre les trois imprimantes. Quel est le meilleur choix à faire, en terme de temps de réponse (confort de l'utilisateur) et en terme de stockage (nombre de requêtes stockées) entre les deux condifurations?

2. La solution avec une seule imprimante étant jugée trop fragile et incommode pour les usagers, on cherche une configuration plus efficace pour la solution à trois imprimantes. On regarde alors une solution où les trois imprimantes travaillent en parallèle, mais sont alimentées

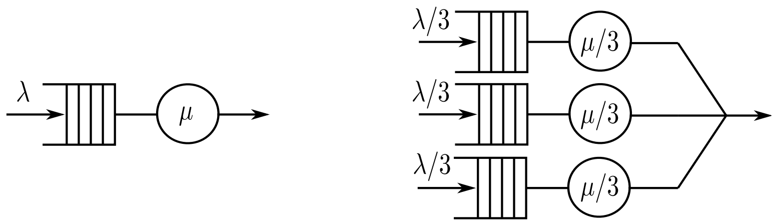

Figure 1: Les deux configurations du système d'impression étudiées dans l'exercice 28 (premier point)

par un spooler d'impression unique. Comparer cette solution avec les deux précédentes en terme de temps de réponse.

Correction de l'Exercice 28

1. Les deux configurations d'imprimantes proposées sont réprésentées à la figure 1. La configuration de gauche est une fille $M/M/1$. Pour étudier son fonctionnement en régime permanent (donc sur le long terme), nous devons supposer sa stabilité, c'est-à-dire $\lambda < \mu$. Si c'est le cas, le temps de service d'une requête (temps moyen de séjour d'un client dans le système) est :

$$R = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

avec pour taux d'utilisation de l'imprimante :

$$U = \rho := \frac{\lambda}{\rho}$$

La configuration de droite est la mise en parallèle de trois files $M/M/1$. La condition de stabilité du réseau est la stabilité de chacune des trois files, c'est-à-dire $\lambda/3 < \mu/3$. Le réseau est donc stable si $\lambda < \mu$, comme dans le cas de la première configuration. Désignons respectivement par X_i et Q_i, les débits moyens et les nombres de requêtes ($i \in \{1, 2, 3\}$) dans chacune de ces trois files (en régime stationnaire). En appliquant la loi de Little à l'ensemble du système constitué des trois files, on peut calculer le temps moyen de séjour d'un client :

$$\tilde{R} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{X_1 + X_2 + X_3}$$

En régime stationnaire, la condition de stabilité donne

$$X_1 = X_2 = X_3 = \frac{\lambda}{3}$$

Par ailleurs, la formule qui donne le nombre moyen de clients dans une fille $M/M/1$ permet d'écrire :

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \frac{\rho}{1-\rho}$$

On obtient donc

$$\tilde{R} = \frac{3\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{3}{\mu(1-\rho)} = 3\left(\frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}\right) = 3R$$

La première configuration est donc meilleure en terme de temps moyen de séjour des requêtes d'impression dans le système. Elle est d'ailleurs préférable également en terme de nombre de requêtes présentes en moyenne dans le système puisque :

$$\tilde{Q} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{3\rho}{1-\rho} = 3Q$$

si Q et $\tilde{Q}$ désignent respectivement le nombre moyen de requêtes en impression dans le premier et dans le deuxième système.

2. La nouvelle configuration envisagée est représentée à la figure 2. Il s'agit cette fois d'une file de type $M/M/C$ avec $C = 3$ serveurs de taux de service $\hat{\mu} := \mu/3$ et une discipline de service $FIFO$. La condition

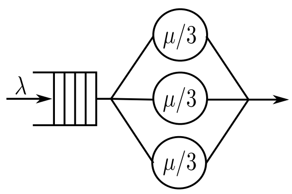

Figure 2: La configuration envisagée pour le système d'impression dans l'exercice 28 (deuxième point)

de stabilité pour la file $M/M/3$ donne

$$\lambda < 3 \cdot \frac{\mu}{3} = \mu$$

C'est la même condition de stabilité que pour les deux premières configurations. En appliquant les formules qui donnent le régime stationnaire pour une file $M/M/C$ avec $C = 3$ et un ratio

$$\hat{\rho} := \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\mu}} = \frac{\lambda}{\frac{\mu}{3}} = 3\rho$$

on obtient :

$$\hat{R} = \frac{1}{\hat{\mu}} + \frac{\hat{\rho}^3}{2\hat{\mu}(3-\hat{\rho})^2}\boldsymbol{\pi}_0$$

avec

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \frac{1}{1+\hat{\rho}+\frac{\hat{\rho}^2}{2}+\frac{\hat{\rho}^3}{2(3-\hat{\rho})}} = \frac{2(\rho-1)}{3\rho^2+4\rho+2}$$

Au final, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\hat{R} &= \frac{3}{\mu}\left(1+\frac{3\rho^3}{2(1-\rho)^2}\boldsymbol{\pi}_0\right) \\
&= \frac{3}{\mu}\left(1+\frac{3\rho^3}{(1-\rho)(3\rho^2+4\rho+2)}\right) \\
&= \underbrace{\frac{3}{\mu}\left(1+\frac{\rho}{1-\rho}\right)}_{3R} - \frac{3\rho}{\mu(1-\rho)}\left[1-\frac{3\rho}{3\rho^2+4\rho+2}\right] \\
&= 3R - \frac{3\rho}{\mu(1-\rho)}\cdot\frac{3\rho^2+\rho+2}{3\rho^2+4\rho+2}
\end{aligned}$$

On montre alors que pour $0<\rho<1$, on a toujours :

$$R < \hat{R} < 3R = \tilde{R}$$

La dernière configuration est donc un meilleur compromis si on veut malgré tout une solution avec trois imprimantes.