Chapitre 5 – Produit de convolution et de corrélation discret

1. Définition du produit de convolution
2. Application à des signaux à support fini
3. Cas des signaux périodiques
4. Aspect spectral
5. Définition du produit de corrélation
6. Application à des signaux à support fini
7. Conclusion

Définition du produit de convolution

Soient $\{x(n)\},\ T_e\ et\{y(n)\}, T_e$

$$\{z(n)\}, T_e / \quad z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k) \cdot y(n-k)$$

$$y(n) * x(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y(k) \cdot x(n-k)$$

Le calcul exige donc :

- Un retournement $y(k) \rightarrow y(-k)$
- Une translation $y(-k) \rightarrow y(n-k)$
- Les produits $x(k) \cdot y(n-k), \forall\ k$
- Une sommation $\sum_{k\in\mathbb{Z}}$

Attention, l'indice k à une dimension temporelle

Application à des signaux à support fini

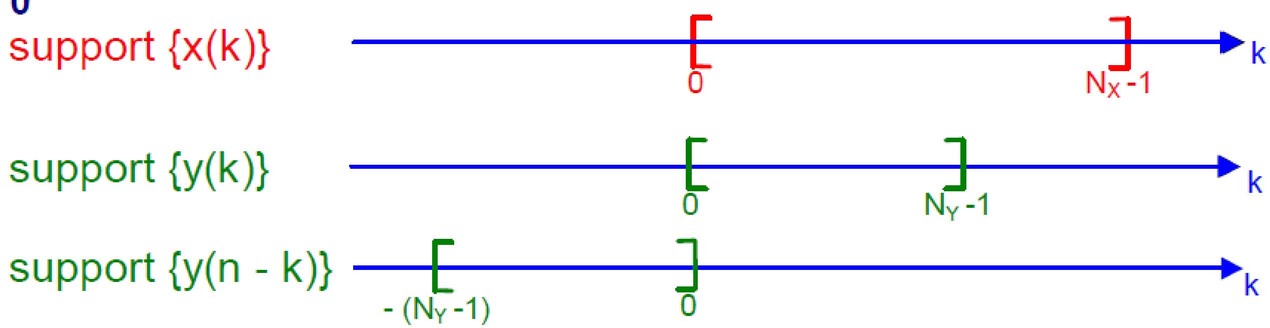
Détermination du support du produit de convolution

Soient $\{x(n)\}, T_e$ de support $[0 ; N_X - 1]$ contenant N_X échantillons

$\{y(n)\}, T_e$ de support $[0 ; N_Y - 1]$ contenant N_Y échantillons

$$z(n) = y(n) * x(n) = \sum_{k \in Z} x(k)y(n-k)$$

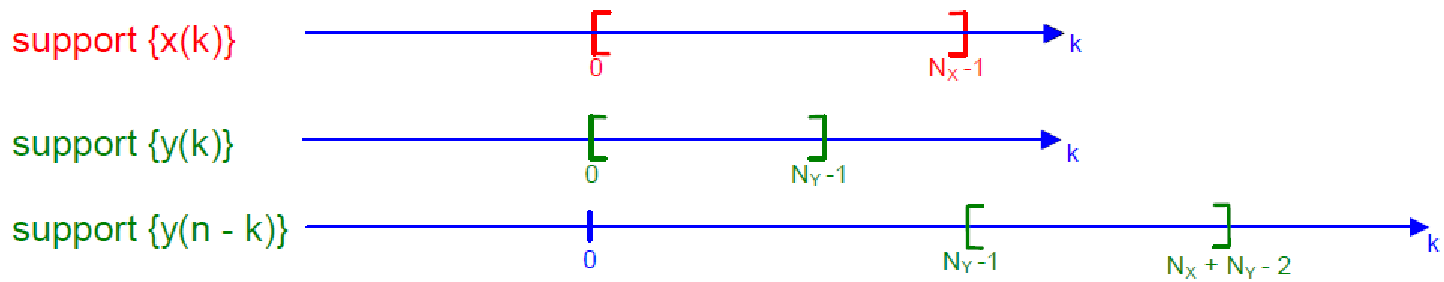
n = 0



Application à des signaux à support fini

Détermination du support du produit de convolution

n = Nx + Ny - 2



$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot y(n-k)\,, \forall n \in [0; N_x + N_y - 2]$$

= 0 ailleurs

Application à des signaux à support fini

Temps de calcul et ordre des signaux

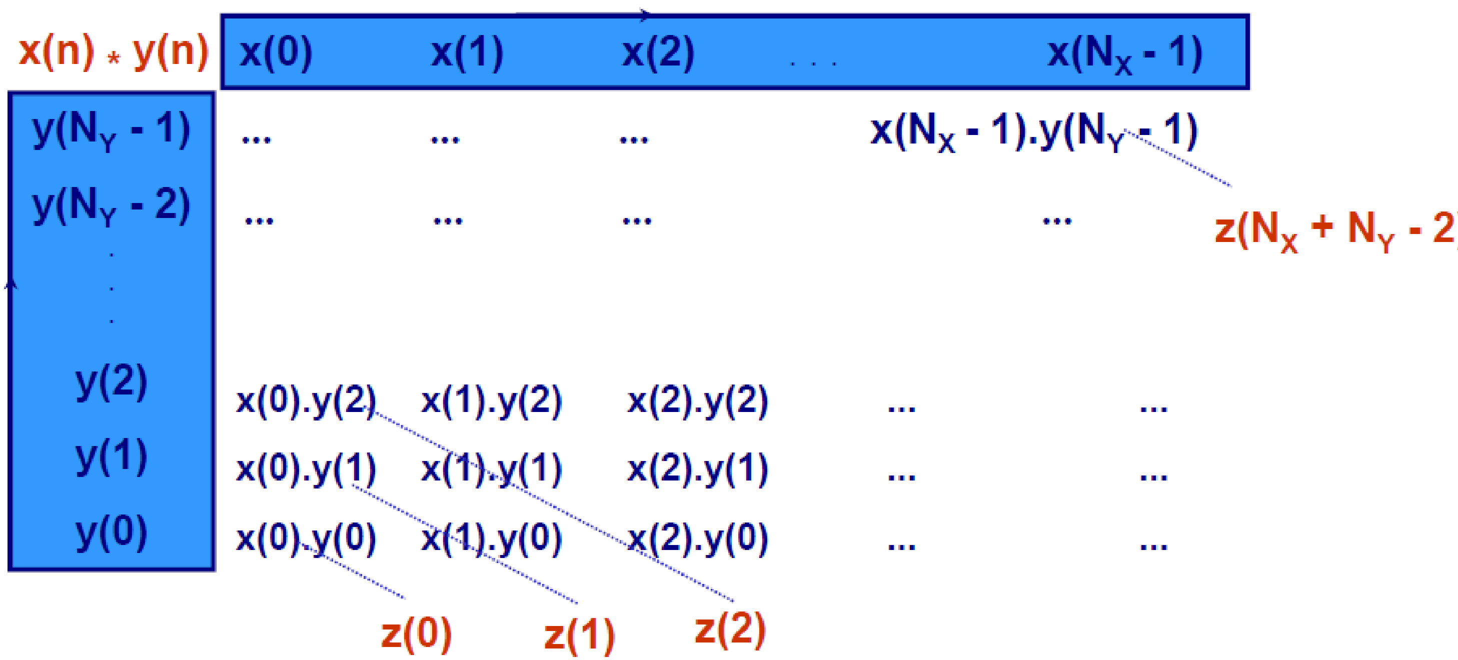
Réduction du temps de calcul en choisissant comme « premier signal » celui dont le support est le plus petit

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=0}^{N_x-1} x(k) \cdot y(n-k)\,, \forall n \in [0; N_x + N_y - 2]$$

$$z(n) = y(n) * x(n) = \sum_{k=0}^{N_y-1} x(k) \cdot y(n-k)\,, \forall n \in [0; N_x + N_y - 2]$$

Application à des signaux à support fini

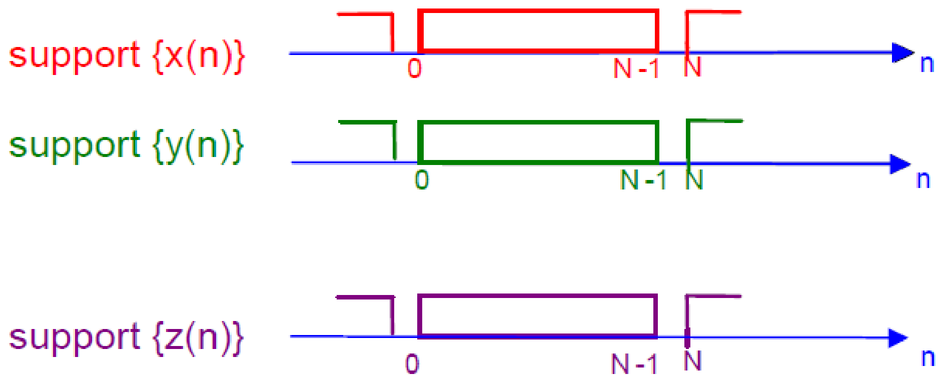
Principe de calcul



Cas des signaux périodiques

Propriétés

Soient $\{x(n)\}$, T_e et $\{y(n)\}$,
T_e périodiques et de même période $T \gg T_e, T = N \cdot T_e \;\; (N_x = N_y = N)$



$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot y(n-k)\,, \forall n \in [0; N-1]$$

$$z(n) = z(n + \alpha \cdot N), avec\ \alpha \in \mathbb{Z}$$

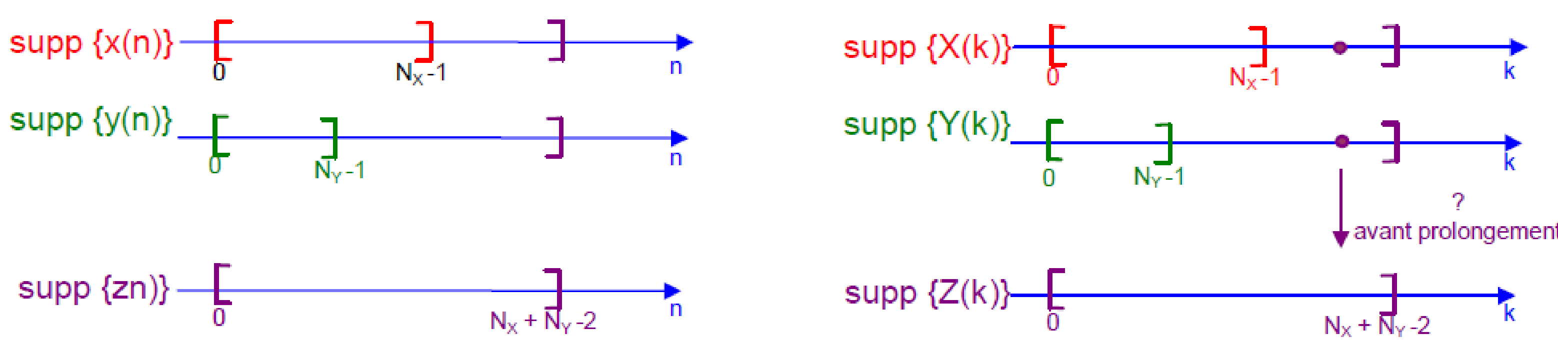
Aspect spectral

Principe

$$z(n) = x(n) * y(n) \xrightarrow{TFD} Z(k) = X(k) \cdot Y(k)$$

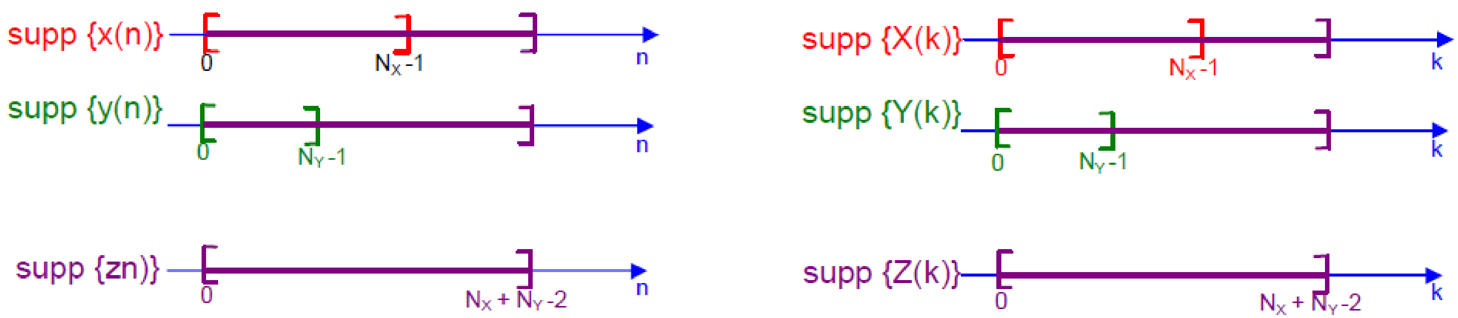
A condition de prendre un certain nombre de précautions concernant les indices

Cas général :



Aspect spectral

Prolongement par des zéros (« zero padding »)



Incrément fréquentiel modifié

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N_x-1} x(n) \cdot W_N^{-nk}, k \in [0, N-1]$$

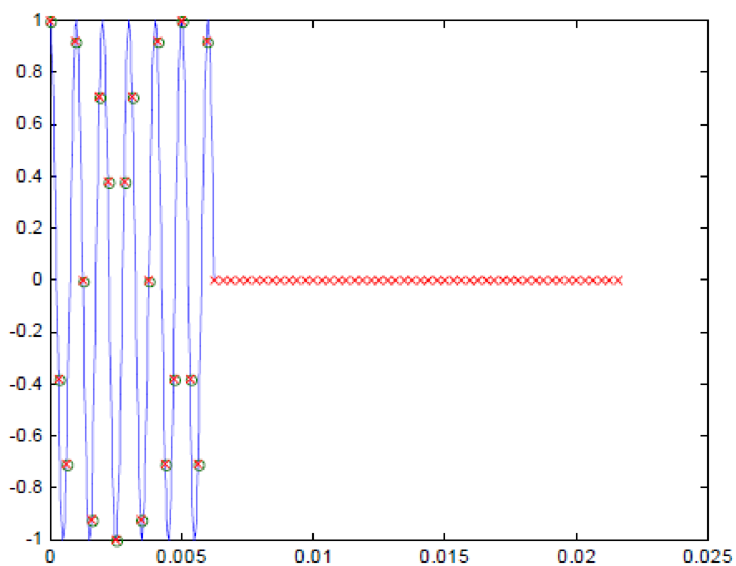
$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N_y-1} x(n) \cdot W_N^{-nk}, k \in [0, N-1]$$

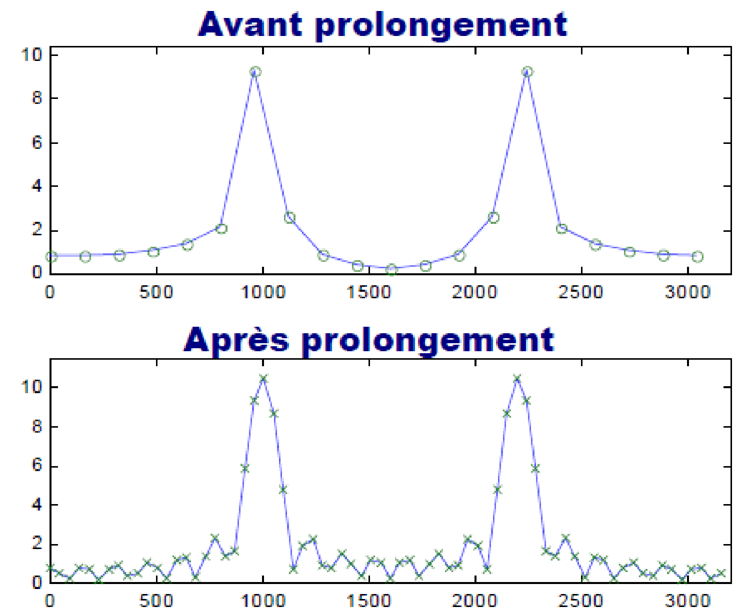
$$Z(k) = X(k) \cdot Y(k), k \in [0, N-1]$$

V. Corrélation, convolution
Convolution
Support fini
Sig. périodiques
Aspect spectral
Corrélation
Support fini
Conclusion

Aspect spectral

Prolongement par des zéros (« zero padding »)

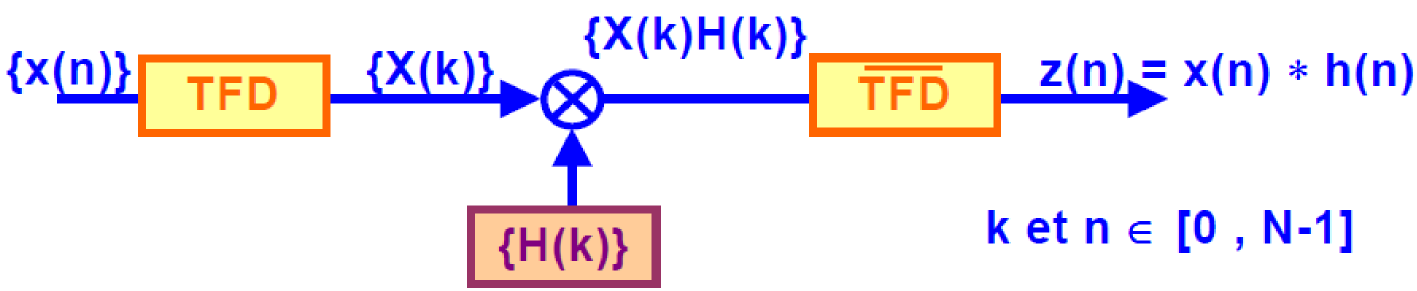




Aspect spectral

Application au filtrage numérique

Le filtrage d'un signal x(n) par un filtre de fonction de transfert H(n) revient à faire le produit de convolution entre x et H.
Une méthode d'implémentation est de passer dans le domaine fréquentiel :



La méthode est économique en temps de calcul dés que le nombre d'échantillons à traiter devient supérieur à 64

Produit de corrélation

Définition

Soient $\{x(n)\}, T_e \; et \{y(n)\}, T_e$

$$C_{XY}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k) \cdot y^*(k-n) = x(n) * y^*(-n)$$

Attention à l'ordre des signaux ! $C_{XY}(n) = C_{YX}^*(-n)$

Produit de corrélation

Définition

Soient $\{x(n)\}, T_e\ et \{y(n)\}, T_e$

$$C_{XY}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k) \cdot y^*(k-n) = x(n) * y^*(-n)$$

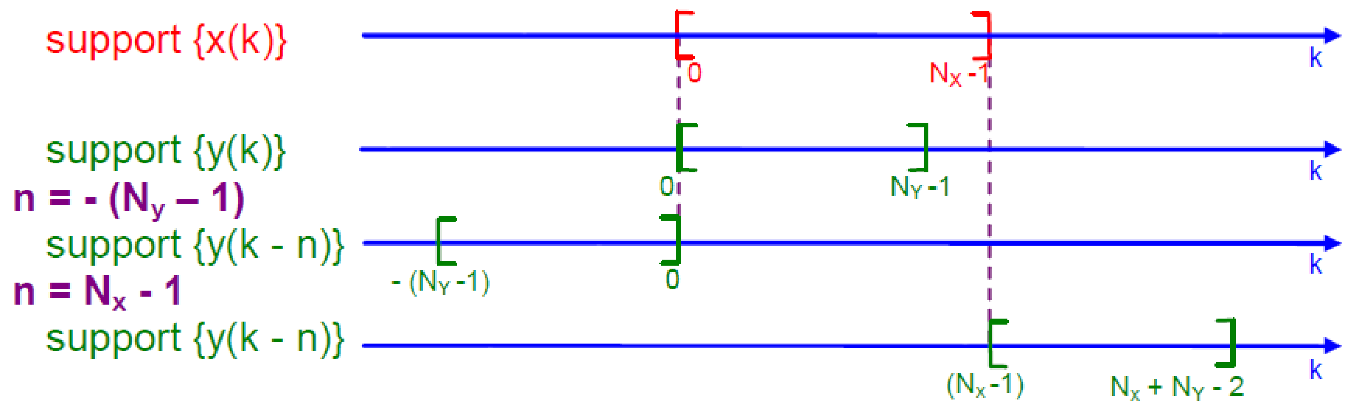
Attention à l'ordre des signaux ! $C_{XY}(n) = C_{YX}^*(-n)$

Produit de corrélation : cas des signaux à support fini

Détermination du support du produit de corrélation

Soient $\{x(n)\}$, T_e de support $[0 ; N_X - 1]$ contenant N_X échantillons

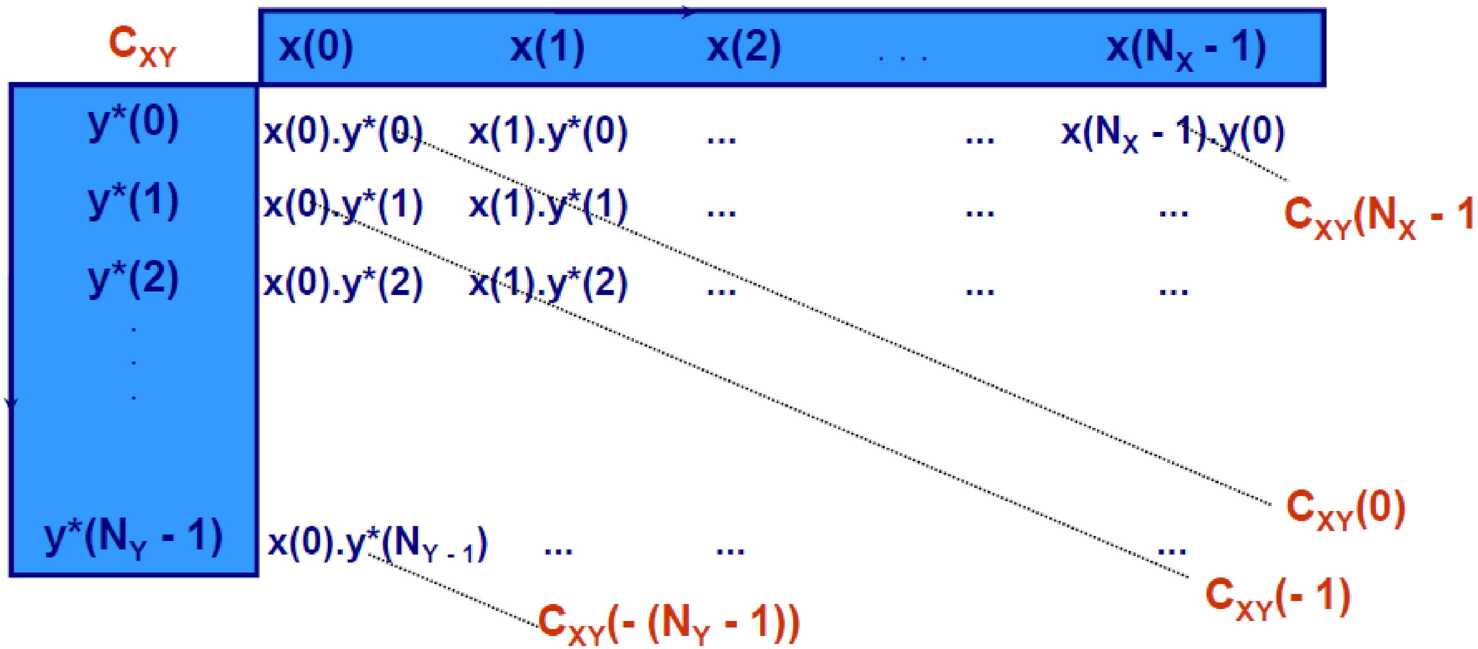
$\{y(n)\}$, T_e de support $[0 ; N_Y - 1]$ contenant N_Y échantillons



$$C_{XY}(n) = \sum_{k=0}^{N_x-1} x(k) \cdot y^*(k-n) \,, \forall n \in [-(N_Y - 1); (N_x - 1)]$$

Produit de corrélation : cas des signaux à support fini

Principe du calcul



Grenoble INP Esisar

Produit de corrélation : cas des signaux périodiques

Principe et propriété

Lorsque les deux signaux $x(n)$ et $y(n)$ ont même période N, la corrélation est calculée sur une période :

$$C_{XY}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot y^*(k-n)$$

Le produit de corrélation est alors également périodique de période N

Produit de corrélation : aspect spectral

Principe et propriété

Comme pour la convolution, il est possible de passer dans le domaine fréquentiel pour effectuer le calcul de la corrélation :

$$TFD\{C_{XY}(n)\} = TFD\{x(n) * y^*(-n)\} = X(k) \cdot Y^*(k) = S_{XY}(k)$$

Attention à prolonger les domaines par des zéros comme pour la convolution

Produit de corrélation : aspect spectral

Calcul d'une intercorrélation

Méthode économique en temps de calcul lorsque le nombre d'échantillons à traiter devient supérieur à 64