

SC311
Traitement du signal pour les communications

Nicolas Barbot

29 septembre 2016

Introduction

L'objectif de ce cours est de comprendre le fonctionnement d'une chaîne de transmission permettant de transmettre un message entre un émetteur et un récepteur. La chaîne peut être numérique ou analogique. Les architectures des deux chaînes sont présentées sur les figures 1 et 2.

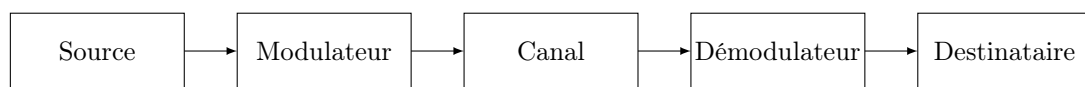


FIGURE 1 – Schéma d'une chaîne de communication analogique

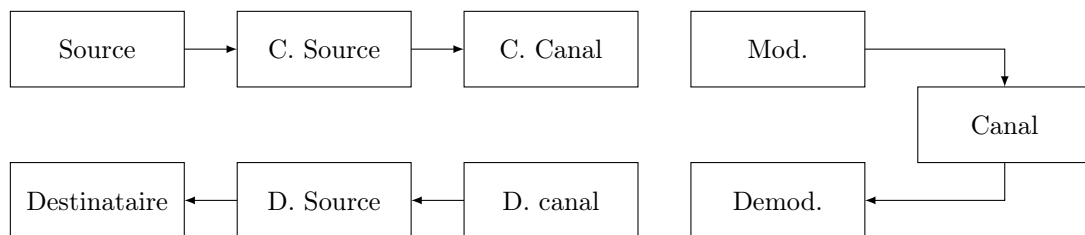


FIGURE 2 – Schéma d'une chaîne de communication numérique

Ce cours décrit les opérations réalisées lors de la transmission d'un message d'un point de vue théorique (mathématique). En ce sens, il nécessite l'acquisition et l'assimilation des connaissances dispensées dans le cours MA361 ainsi que certaines connaissances sur les processus aléatoires.

Le plan de ce cours est séparé de la manière suivante. Le premier chapitre définit les outils mathématiques permettant de décrire les signaux mis en jeu lors d'une communication. Le second chapitre présente la modélisation du canal de transmission et introduit (très) brièvement les canaux de transmission classiques. Ce chapitre sera complété par le cours SC312 (pour les EIS). Le chapitre suivant traite des modulations analogiques. Enfin le dernier chapitre abordera quant à lui les modulations numériques ainsi que leurs performances. Ce cours ne présente pas les opérations de codage de source et de codage canal présents dans la chaîne de communication numérique. Ces notions seront détaillées dans le cours MA331.

Le cours SC332 (pour les EIS) constitue la suite de ce cours et présente les circuits et les systèmes permettant d'implémenter (de manière matérielle ou logicielle) les opérations mises en jeu lors des phases d'émission et de réception.

Chapitre 1

Représentation des signaux

1.1 Transformée de Hilbert

1.1.1 Définition

La transformée de Hilbert $\hat{x}(t)$ d'un signal réel $x(t)$ est définie par :

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \text{vp} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(u)}{t-u} du \right). \quad (1.1)$$

où $\text{vp}(\cdot)$ représente la valeur principale de Cauchy. Ce qui peut aussi être réécrit en retirant la singularité présente pour $u = t$:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{t-\epsilon} \frac{x(u)}{t-u} du + \int_{t+\epsilon}^{+\infty} \frac{x(u)}{t-u} du \right).$$

Cette intégrale peut être interprétée comme un produit de convolution :

$$\hat{x}(t) = x(t) \star \text{vp} \left(\frac{1}{\pi t} \right) \quad (1.2)$$

La transformée de Hilbert d'un signal $x(t)$ peut alors être obtenue par un filtrage de réponse implusionnelle :

$$h_q(t) = \text{vp} \left(\frac{1}{\pi t} \right) \quad (1.3)$$

Ce filtre est appelé filtre de Hilbert ou filtre en quadrature. La fonction de transfert $H_q(f)$ de ce filtre peut être obtenue en réalisant la transformée de Fourier de $h_q(t)$ et vaut :

$$H_q(f) = -j \text{sign}(f) \quad (1.4)$$

Le module et l'argument de $H_q(f)$ sont représentés sur la figure 1.1.

On peut remarquer que le filtre de Hilbert n'est pas causal car sa réponse implusionnelle n'est pas nulle pour $t < 0$. Ce filtre n'est donc pas réalisable. Il est toutefois possible de réaliser une approximation de ce filtre en retardant sa réponse implusionnelle.

Calculez la transformée de Hilbert $\hat{x}(t)$ du signal $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$

Le signal $x(t)$ a pour transformée de Fourier :

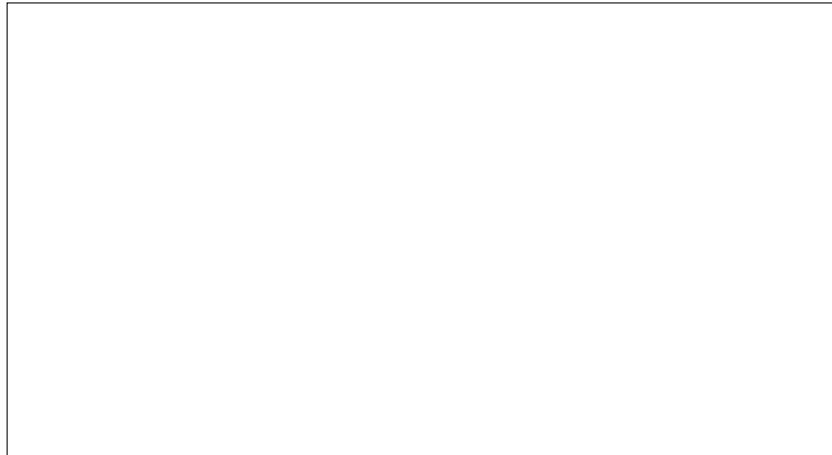


FIGURE 1.1 – Module et argument du filtre de Hilbert

Le spectre de $\hat{x}(t)$ vaut alors :

La transformée de Hilbert de $x(t)$ peut alors être obtenue en effectuant une transformée de Fourier inverse de $\hat{X}(f)$:

1.1.2 Propriétés

Un signal $x(t)$ déterministe et sa transformée de Hilbert $\hat{x}(t)$ possèdent une densité spectrale d'énergie identique :

Si $x(t)$ est un signal réel alors $x(t)$ et $\hat{x}(t)$ sont orthogonaux :

Soit $x(t)$ et $\hat{x}(t)$ sa transformé de Hilbert, si on effectue une nouvelle transformée de Hilbert sur $\hat{x}(t)$ on a :

On peut donc revenir au signal $x(t)$ en utilisant une transformée de Hilbert (au facteur -1 près). La transformée de Hilbert inverse est définie par :

$$x(t) = -\text{TH}[\hat{x}(t)] \quad (1.5)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \text{vp} \left(\int \frac{x(u)}{t-u} du \right). \quad (1.6)$$

Les transformées de Hilbert de signaux classiques sont présentées ci dessous :

| $x(t)$ | $\hat{x}(t)$ |
|----------------|------------------------|
| $\cos(t)$ | $\sin(t)$ |
| $\sin(t)$ | $-\cos(t)$ |
| $e^{2j\pi ft}$ | $-je^{2j\pi ft}$ |
| $\delta(t)$ | $\text{vp}(1/(\pi t))$ |

De plus pour un signal $x(t) = a(t) \cos 2\pi f_0 t$ à bande étroite, la transformée de Hilbert de $x(t)$ vaut :

$$\hat{x}(t) = a(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (1.7)$$

1.2 Signal analytique

Le spectre $X(f)$ d'un signal $x(t)$ réel possède une symétrie hermitienne *i.e.* sa partie réel et son module sont pairs alors que sa partie imaginaire et son argument sont impairs. On peut ainsi remarquer que la suppression d'une moitié de spectre (positive ou négative) n'entraîne pas de perte d'information.

On introduit $z_x(t)$, image de $x(t)$ et dont la transformée de Fourier $Z_x(f)$ est identique à $X(f)$ pour les fréquences positives (à un facteur multiplicatif près) et nulle pour les fréquences négatives :

$$Z_x(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{pour } f > 0 \\ 0 & \text{pour } f < 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Le facteur 2 permet de conserver l'énergie entre $X(f)$ et $Z_x(f)$.

Le signal $z_x(t)$ obtenu par transformée de Fourier inverse est appelé signal analytique de $x(t)$. Le signal analytique $z_x(f)$ est complexe car il ne possède pas de symétrie hermitienne.

L'expression du signal analytique $z_x(t)$ peut alors être obtenue en utilisant la définition de $Z_x(f)$:

$$Z_x(f) = 2u(f)X(f)$$

où $u(f)$ est l'échelon unité en fréquence. $Z_x(f)$ peut alors être vu comme le résultat d'un filtrage de fonction de transfert $2u(f)$. En utilisant la transformée de Fourier inverse, on peut montrer que :

$$\text{TF}^{-1}[u(f)] = \frac{1}{2} \left(\delta(t) + j \text{vp} \left(\frac{1}{\pi t} \right) \right)$$

Le filtrage peut alors être exprimé dans le domaine temporel :

$$z_x(t) = \frac{1}{2} \left(\delta(t) + j \text{vp} \left(\frac{1}{\pi t} \right) \right) \star x(t)$$

soit, en utilisant la définition de la transformé de Hilbert :

Le signal $z_x(t)$ est donc un signal complexe dont les parties réelles et imaginaires sont les transformées de Hilbert l'une de l'autre.

La détermination du signal analytique $z_x(t)$ à partir de $x(t)$ peut donc se faire de deux manières différentes :

- dans le domaine temporel i.e. par détermination de la transformée de Hilbert de $x(t)$;
- dans le domaine fréquentiel i.e. en effectuant une transformée de Fourier suivie d'une transformée de Fourier inverse sur le spectre tronqué :

$$z_x(t) = 2 \int_0^{+\infty} X(f) e^{2j\pi f t} df$$

La transformation inverse, permettant de retrouver $x(t)$ à partir de $z_x(t)$ est en revanche beaucoup plus simple puisqu'il suffit de prendre la partie réelle :

$$x(t) = \text{Re}[z_x(t)] \quad (1.10)$$

Calculez le signal analytique de $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$

En restant dans le domaine temporel, on a :

En passant dans le domaine fréquentiel on a :

1.3 Enveloppe complexe

L'enveloppe complexe $\alpha_x(t)$ d'un signal à bande étroite $x(t)$ (modulé autour de la fréquence f_0 est définie comme la transformée de Fourier inverse du signal analytique $Z_x(t)$ ramené autour de 0 :

$$A_x(f) = Z_x(f + f_0) \quad (1.11)$$

L'enveloppe complexe permet de transformer un signal en bande étroite en un signal en bande de base. La bande occupée par l'enveloppe complexe est la même de celle de son signal associé. La figure 1.2 présente le spectre d'un signal $x(t)$, le spectre de son signal analytique ainsi que le spectre de son enveloppe complexe.

L'expression temporelle est obtenue par transformée de Fourier inverse :

L'enveloppe complexe peut être exprimée en fonction de $x(t)$ en utilisant la définition du signal analytique :

Inversement, l'expression de $x(t)$ peut être obtenue en fonction de l'enveloppe complexe :

L'enveloppe complexe comme tout nombre complexe, peut être exprimée avec une partie réelle et une partie imaginaire :

$$\alpha_x(t) = p(t) + jq(t)$$

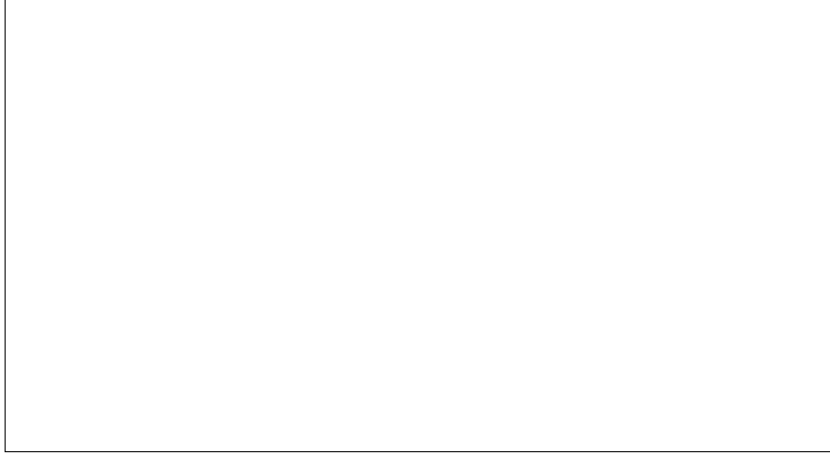


FIGURE 1.2 – Représentation fréquentielle du signal analytique et de l'enveloppe complexe

Le signal $x(t)$ peut alors être mis sous la forme :

(1.15)

Le signal $p(t)$ est appelé composante en phase alors que le signal $q(t)$ est appelé composante en quadrature du signal à bande étroite $x(t)$. Les signaux $p(t)$ et $q(t)$ peuvent respectivement être exprimés par :

$$p(t) = \frac{1}{2}(\alpha_x(t) + \alpha_x^*(t))$$

$$q(t) = \frac{1}{2j}(\alpha_x(t) - \alpha_x^*(t))$$

Leurs transformées de Fourier sont quant à elles définies par :

$$P(f) = \frac{1}{2}(A_x(f) + A_x^*(-f))$$

$$Q(f) = \frac{1}{2j}(A_x(f) - A_x^*(-f))$$

Remarquons enfin que la décomposition en phase et en quadrature peut être effectuée pour tous les signaux à bande étroite.

Si on décompose maintenant l'enveloppe complexe en module et phase :

$$\alpha_x(t) = a(t)e^{j\phi(t)}$$

et le signal $x(t)$ peut alors se mettre sous la forme :

(1.16)

Les signaux $a(t)$ et $\phi(t)$ sont respectivement appelés enveloppe et phase instantanée du signal $x(t)$. Cette décomposition est, une fois encore valable pour tous les signaux à bande étroite.

Ainsi un signal en bande étroite peut être vu comme une sinusoïde pure dont l'amplitude et la phase varient lentement en fonction du temps.

L'enveloppe et la phase instantanée sont liées aux composantes en phase et en quadrature du signal $x(t)$ par :

$$a(t) = \sqrt{p^2(t) + q^2(t)} \quad \phi(t) = \text{Arctan} \frac{q(t)}{p(t)}$$

Les modulations permettant de faire varier l'enveloppe $a(t)$ en fonction du message à transmettre sont dites linéaires. La modulation d'amplitude est une modulation linéaire. Les modulations agissant sur la phase instantanée $\phi(t)$ sont quant à elles qualifiées d'angulaire. Les modulations de fréquence et de phase sont des modulations angulaires.

1.4 Filtres équivalents

L'étude du filtrage d'un signal à bande étroite $x(t)$ (autour de la fréquence f_0) par un filtre passe bande $H(f)$ (centré sur f_0) génère nécessairement un signal à bande étroite $y(t)$ autour de f_0 .

Dans le domaine fréquentiel, l'expression de $Y(f)$ est liée à celle de $X(f)$ par :

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (1.17)$$

En multipliant cette équation par $2u(f)$ il est possible de déterminer une expression reliant $Z_y(f)$ et $Z_x(f)$:

où $H^+(f)$ est défini par :

$$H^+(f) = \begin{cases} H(f) & \text{si } f > 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

La relation entre les enveloppes complexes est obtenue translatant l'équation précédente de f_0 :

$$(1.18)$$

Ainsi pour toute opération de filtrage linéaire sur des signaux $x(t)$ et $y(t)$ en bande étroite, il existe une opération de filtrage équivalente permettant de lier les enveloppes complexes $\alpha_x(t)$ et $\alpha_y(t)$. Le filtre $H(f)$ est une version translaté (autour de 0) du filtre passe bande original et est appelé filtre passe bas équivalent de $H(f)$.

Dans le domaine temporel, on trouve alors :

$$\alpha_y(t) = \tilde{h}(t) * \alpha_x(t)$$

L'étude du filtrage de signaux en bande étroite (autour de f_0) peut alors être entièrement réalisée en bande de base (autour de 0) en remplaçant les signaux en bande étroite par leurs enveloppes complexes et les filtres passe-bande par leurs équivalents passe-bas. La figure 1.3 présente un filtrage en bande étroite ainsi que son équivalent en bande de base.

En pratique, l'étude d'un système de communication en bande étroite impliquera les opérations suivantes :

1. Calculer l'enveloppe complexe des signaux d'entrée et déterminer les expressions des filtres passe-bas équivalents.
2. Calculer les enveloppes complexes des signaux intermédiaires et des signaux de sorties
3. Repasser au signal réel à partir des enveloppes complexes pour les signaux de sorties.

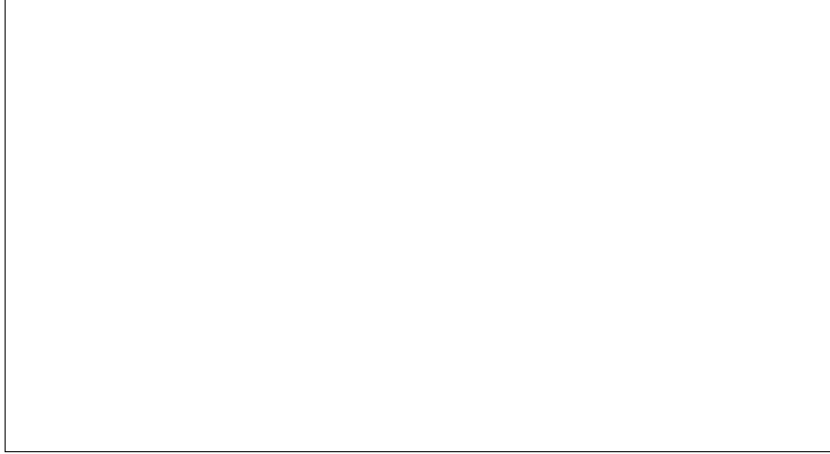


FIGURE 1.3 – Système en bande étroite et équivalent en bande de base

1.5 Processus aléatoire à bande étroite

Cette section introduit les notions permettant de caractériser les processus aléatoires à bande étroite. Ces processus seront utilisés pour déterminer les performances des schémas de modulation analogique et numérique (présentés dans les chapitres suivants). La partie “Processus aléatoires” est un pré-requis de cette section.

Un processus aléatoire à bande étroite est un processus aléatoire réel, SSL, et dont la densité spectrale de puissance $S_{XX}(f)$ est nulle en dehors d’une certaine bande de fréquence.

Un processus aléatoire peut, comme tous les signaux à bande étroite, soit être exprimé en fonction de ses composantes en phase et en quadrature :

$$X(t) = P(t) \cos 2\pi f_0 t - Q(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (1.19)$$

soit en fonction de son enveloppe et de sa phase instantanée :

$$X(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \Phi(t)) \quad (1.20)$$

Supposons dans un premier temps qu’un processus aléatoire $X(t)$ à bande étroite quelconque. On impose par la suite que $P(t)$ et $Q(t)$ soient stationnaires au sens large et centrés et on cherche les conditions pour que $X(t)$ soit SSL :

- la moyenne de $X(t)$ est indépendante du temps : $m_X(t) = m_X$
- la fonction d’autocovariance de $X(t)$ ne dépend que de τ : $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(\tau)$ avec $\tau = t_1 - t_2$.

Le calcul de l’espérance est direct et immédiat :

$$(1.21)$$

Le processus $X(t)$ est alors centré (m_X ne dépend pas du temps)

Le calcul de la fonction d'autocovariance vaut :

$$\begin{aligned}
R_{XX}(t, t - \tau) &= E[(X(t) - m_X)(X(t - \tau) - m_X)^*] \\
&= E[(P(t) \cos 2\pi f_0 t - Q(t) \sin 2\pi f_0 t)(P(t - \tau) \cos 2\pi f_0(t - \tau) - Q(t - \tau) \sin 2\pi f_0(t - \tau))] \\
&= E[P(t)P(t - \tau)] \cos 2\pi f_0 t \cos(2\pi f_0(t - \tau)) + E[Q(t)Q(t - \tau)] \sin 2\pi f_0 t \sin(2\pi f_0(t - \tau)) \\
&\quad - E[P(t)Q(t - \tau)] \cos 2\pi f_0 t \sin(2\pi f_0(t - \tau)) - E[Q(t)P(t - \tau)] \sin 2\pi f_0 t \cos(2\pi f_0(t - \tau)) \\
&= R_{PP}(\tau) \cos 2\pi f_0 t \cos(2\pi f_0(t - \tau)) + R_{QQ}(\tau) \sin 2\pi f_0 t \sin(2\pi f_0(t - \tau)) \\
&\quad - R_{PQ}(\tau) \cos 2\pi f_0 t \sin(2\pi f_0(t - \tau)) - R_{QP}(\tau) \sin 2\pi f_0 t \cos(2\pi f_0(t - \tau)) \\
&= \frac{R_{PP}(\tau) + R_{QQ}(\tau)}{2} \cos 2\pi f_0 \tau + \frac{R_{PP}(\tau) - R_{QQ}(\tau)}{2} \cos(2\pi f_0(2t - \tau)) \\
&\quad - \frac{R_{PQ}(\tau) - R_{QP}(\tau)}{2} \sin 2\pi f_0 \tau + \frac{R_{PQ}(\tau) + R_{QP}(\tau)}{2} \sin(2\pi f_0(2t - \tau))
\end{aligned}$$

Pour que $X(t)$ soit SSL, il faut annuler les termes qui dépendent de t . Le premier terme qui dépend de t s'annule si $R_{PP}(\tau) = R_{QQ}(\tau)$. Pour le second terme il faut que $R_{PQ}(\tau) = -R_{QP}(\tau)$.

Ainsi tout processus aléatoire à bande étroite SSL possède les propriétés suivantes :

$$R_{PP}(\tau) = R_{QQ}(\tau) \quad R_{PQ}(\tau) = -R_{QP}(\tau) \quad (1.22)$$

Une conséquence directe de ces résultats est que la fonction de covariance croisée est nulle en 0 :

$$\begin{aligned}
R_{PQ}(0) &= E[P(t)Q(t)] \\
&= -R_{QP}(0) \\
&= -E[Q(t)P(t)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Une autre propriété concerne la quantité $E[\alpha_X(t)\alpha_X(t - \tau)]$ (qui n'est pas la fonction d'autocorrélation ni la fonction d'autocovariance!) :

$$\begin{aligned}
E[\alpha_X(t)\alpha_X(t - \tau)] &= E[(P(t) + jQ(t))(P(t - \tau) + jQ(t - \tau))] \\
&= E[P(t)P(t - \tau)] - E[Q(t)Q(t - \tau)] + j(E[P(t)Q(t - \tau)] + E[P(t - \tau)Q(t)]) \\
&= R_{PP}(\tau) - R_{QQ}(\tau) + j(R_{PQ}(\tau) + R_{QP}(\tau)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

A partir de ces informations, nous allons maintenant déterminer les variances, les fonctions de corrélation ainsi que les densités spectrales de puissance des processus $P(t)$, $Q(t)$ et $\alpha_X(t)$.

Les variances des processus $P(t)$ et $Q(t)$ sont liées car $P(t)$ et $Q(t)$ possèdent la même fonction d'autocovariance : $R_{PP}(\tau) = R_{QQ}(\tau)$ d'où $\text{var}(P(t)) = \text{var}(Q(t))$ de plus ces variances peuvent être reliées à celle de $X(t)$ par :

$$\begin{aligned}
\text{var}(X(t)) &= E[(X(t) - m_X)(X(t) - m_X)^*] \\
&= E[X^2(t)] \\
&= E[(P(t) \cos 2\pi f_0 t - Q(t) \sin 2\pi f_0 t)^2] \\
&= E[P^2(t)] \cos^2 2\pi f_0 t + 2E[P(t)Q(t)] \cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0 t + E[Q^2(t)] \sin^2 2\pi f_0 t \\
&= E[P^2(t)] = E[Q^2(t)] \\
&= \text{var}(P(t)) = \text{var}(Q(t))
\end{aligned} \quad (1.23)$$

La variance de l'enveloppe complexe $\alpha_X(t)$ vaut quant à elle :

$$\begin{aligned}
\text{var}(\alpha_X(t)) &= E[(\alpha_X(t) - m_\alpha)(\alpha_X(t) - m_\alpha)^*] \\
&= E[|\alpha_X(t)|^2] \\
&= E[|P(t) + jQ(t)|^2] \\
&= E[P^2(t) + Q^2(t)] \\
&= E[P^2(t)] + E[Q^2(t)] \\
&= 2\text{var}(X(t))
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Les fonctions d'autocorrélation des composantes en phase et en quadrature peuvent être reliées à la fonction d'autocovariance de l'enveloppe complexe : $P(t) = (\alpha_X(t) + \alpha_X^*(t))/2$ et $Q(t) = (\alpha_X(t) - \alpha_X^*(t))/2j$:

$$\begin{aligned}
R_{PP}(\tau) &= E[P(t)P(t-\tau)] \\
&= \frac{1}{4}E[(\alpha_X(t) + \alpha_X^*(t))(\alpha_X(t-\tau) + \alpha_X^*(t-\tau))] \\
&= \frac{1}{4}(E[\alpha_X(t)\alpha_X(t-\tau)] + E[\alpha_X(t)\alpha_X^*(t-\tau)] \\
&\quad + E[\alpha_X^*(t)\alpha_X(t-\tau)] + E[\alpha_X^*(t)\alpha_X^*(t-\tau)]) \\
&= \frac{1}{4}(E[\alpha_X(t)\alpha_X^*(t-\tau)] + E[\alpha_X^*(t)\alpha_X(t-\tau)]) \\
&= \frac{1}{4}(R_{\alpha\alpha}(\tau) + R_{\alpha\alpha}^*(\tau)) \\
&= \frac{1}{4}(R_{\alpha\alpha}(\tau) + R_{\alpha\alpha}(-\tau))
\end{aligned} \tag{1.25}$$

où la dernière ligne a été obtenue en utilisant la propriété de symétrie hermitienne de $R_{\alpha\alpha}(\tau)$. L'obtention de R_{QQ} est immédiate :

$$R_{QQ}(\tau) = \frac{1}{4}(R_{\alpha\alpha}(\tau) + R_{\alpha\alpha}(-\tau)) \tag{1.26}$$

Les fonctions de corrélation croisées sont obtenues sur le même principe :

$$R_{PQ}(\tau) = E[P(t)Q(t-\tau)] = \frac{1}{4j}(-R_{\alpha\alpha}(\tau) + R_{\alpha\alpha}(-\tau)) \tag{1.27}$$

$$R_{QP}(\tau) = E[Q(t)P(t-\tau)] = \frac{1}{4j}(R_{\alpha\alpha}(\tau) - R_{\alpha\alpha}(-\tau)) \tag{1.28}$$

Pour les densités spectrales de puissances, on note $S_{XX}(f)$ la densité spectrale de puissance du processus aléatoire à bande étroite $X(t)$. La densité spectrale de puissance de l'enveloppe complexe $S_{\alpha\alpha}(f)$ peut alors être exprimée en fonction de $S_{XX}(f)$ et vaut :

$$S_{\alpha\alpha}(f) = 4S_{XX}^+(f + f_0) \tag{1.29}$$

où $S_{XX}^+(f)$ est la partie positive de $S_{XX}(f)$.

Réciproquement, il est possible d'obtenir $S_{XX}(f)$ à partir de $S_{\alpha\alpha}(f)$ par :

$$S_{XX}(f) = \frac{1}{4}S_{\alpha\alpha}(f - f_0) + \frac{1}{4}S_{\alpha\alpha}(f + f_0) \tag{1.30}$$

Les densités spectrales de puissance de $P(t)$ et $Q(t)$ sont identiques et sont obtenues en effectuant la transformée de Fourier sur les fonctions d'autocorrélation :

$$\begin{aligned}
S_{PP}(f) &= S_{QQ}(f) = \frac{1}{4}(S_{\alpha\alpha}(f) + S_{\alpha\alpha}(-f)) \\
&= S_{XX}^+(f + f_0) + S_{XX}^-(f - f_0)
\end{aligned} \tag{1.31}$$

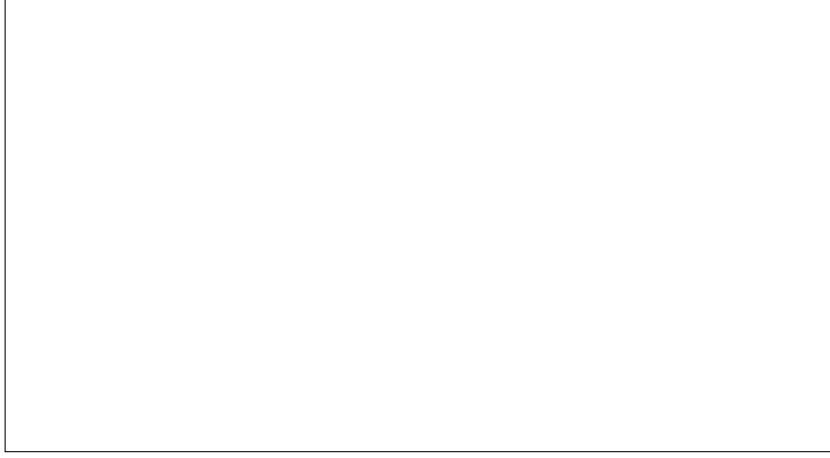


FIGURE 1.4 – Densités spectrales de puissance de S_{XX} , S_{PP} , S_{QQ} , S_{PQ} et S_{QP}

Enfin les densités spectrales de puissance $S_{PQ}(f)$ et $S_{QP}(f)$ peuvent être exprimées, de la même manière, en fonction de $S_{XX}(f)$ et valent :

$$S_{PQ}(f) = S_{QP}(-f) = \frac{1}{j}(-S_{XX}^+(f + f_0) + S_{XX}^-(f - f_0)) \quad (1.32)$$

La figure 1.4 présente la relation entre $S_{XX}(f)$, $S_{PP}(f)$ et $S_{QQ}(f)$.

Une conséquence intéressante est qu'il est possible d'annuler $S_{PQ}(f)$ et $S_{QP}(f)$ si $S_{XX}^+(f)$ est symétrique autour de f_0 . Par transformé de Fourier inverse, on peut déduire que la fonction de corrélation croisée est elle aussi nulle quel que soit τ . Les processus $P(t)$ et $Q(t)$ sont dans ce cas décorrélés.

Enfin dans le cas où $X(t)$ est un processus aléatoire à bande étroite possédant une distribution gaussienne alors $P(t)$ et $Q(t)$ sont aussi gaussiens. De plus dans le cas gaussien, la décorrélation entraîne l'indépendance.

Exemple : Bruit blanc gaussien

On considère un bruit de densité spectrale $N_0/2$ sur une bande B centré en f_0 (et $-f_0$ par symétrie). Donner l'expression de $S_{XX}(f)$, en déduire sa puissance P_X .

Donner l'expression de $S_{\alpha\alpha}(f)$ ainsi que P_α .

Donner l'expression de $S_{PP}(f)$ et $S_{QQ}(f)$ ainsi que P_P et P_Q .

Chapitre 2

Support de transmission

Les canaux sont les supports de la transmission d'information entre un émetteur et un récepteur. On distingue les canaux d'enregistrement qui sont chargés de conserver un message pendant une certaine durée (papier, bandes magnétiques, disques durs...) et les canaux de transmission qui sont chargés de transmettre le message entre deux points séparés dans l'espace. Dans la quasi-totalité des cas, le message (signal) est porté par une onde électromagnétique. Idéalement, le canal devrait transférer le signal sans le modifier, cependant tous les canaux introduisent des perturbations sur le message à transmettre. Ces perturbations peuvent déformer le signal (atténuation, distorsion, délai) ou introduire du bruit. Au final, le message reçu n'est pas une réplique exacte du message envoyé.

Les canaux de transmission peuvent être séparés en 2 groupes :

- les canaux filaires (propagation guidée)
- les canaux sans fil (propagation non guidée)

Les canaux filaires regroupent les guides d'ondes, les paires torsadées, les fibres optiques alors que les canaux sans fil sont constitués des canaux radio-fréquences et des canaux optiques. Enfin la transmission sur un canal filaire peut se faire en bande de base ou autour d'une fréquence porteuse alors que les transmissions sans fil sont toujours sur fréquence porteuse.

2.1 Modélisation

2.1.1 Modèle du canal

Les caractéristiques exactes d'un canal de transmission peuvent être connues en résolvant les équations de Maxwell et en utilisant les conditions aux limites pour le support considéré (guidé ou rayonné). Les solutions analytiques sont connues pour les canaux filaires mais restent souvent difficiles à obtenir pour les canaux sans fil réels (hors espace libre).

En pratique, on se contente de modéliser le canal de transmission (filaire ou sans fil) par un système linéaire invariant dans le temps. Un tel système est alors entièrement décrit par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ dans le domaine temporel ou sa fonction de transfert $H(f)$ dans le domaine fréquentiel. Le signal à la sortie $y(t)$ du canal est alors obtenu en convoluant le signal d'entrée $x(t)$ par $h(t)$.

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (2.1)$$

De manière totalement équivalente, on peut travailler dans le domaine fréquentiel, le spectre $Y(f)$ est alors obtenu en multipliant le spectre $X(f)$ par $H(f)$:

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (2.2)$$

L'atténuation est définie comme le rapport entre la puissance émise sur la puissance reçue :

$$P_L = \frac{P_r}{P_t} \quad (2.3)$$

Par exemple dans le cas où le canal est caractérisé par $h(t) = K\delta(t)$ alors le signal de sortie vaut $y(t) = Kx(t)$ et sa puissance est égale à $P_y = K^2 P_x$. L'atténuation de ce canal est alors de K^2 . Imaginons un canal caractérisé par la fonction de transfert suivante :

$$H(f) = K \exp(2j\pi f\tau) \quad (2.4)$$

Par transformée de Fourier inverse, on a $h(t) = K\delta(t - \tau)$ et $y(t) = x(t - \tau)$. Le signal reçu est une réplique atténuée et retardée d'une durée τ , du signal $x(t)$ (il ne présente pas de distorsion). Ainsi, pour qu'un signal soit transmis sans distorsion en bande de base, il faut que le module de $H(f)$ soit constant et que sa phase soit linéaire en fonction de la fréquence.

Dans le cas d'un signal à bande étroite, on peut raisonner directement sur le filtre équivalent :

$$\tilde{H}(f) = K \exp(j\phi(f + f_0))$$

Si on suppose que la phase est linéaire autour de f_0 alors

$$\phi(f + f_0) \approx \phi(f_0) + f\phi'(f_0)$$

L'enveloppe complexe du signal de sortie est alors :

Soit dans le domaine temporel :

En revenant au signal réel, on trouve :

avec

$$\tau_\phi(f_0) = -\frac{\phi(f_0)}{2\pi f_0} \quad \tau_g(f_0) = \frac{1}{2\pi f_0} \left[\frac{d\phi(f)}{df} \right]_{f_0} \quad (2.5)$$

Ainsi, si la phase est linéaire, la porteuse est retardée d'une quantité τ_ϕ alors que l'enveloppe est retardée d'une quantité τ_g . Si la phase n'est pas linéaire l'enveloppe sera en plus déformée (comme dans le cas en bande de base).

Enfin, dans le cas général, le module (respectivement la phase) de la fonction de transfert n'est pas constant (respectivement linéaire) en fonction de la fréquence. On observe alors l'apparition de distorsion sur le signal de sortie. Dans le cas où le module de $H(f)$ est non nul uniquement entre les fréquences f_1 et f_2 on dit alors que le canal possède une *bande passante* de largeur $B = |f_2 - f_1|$. La distorsion est un phénomène linéaire et peut dans certains cas être complètement compensée (en choisissant la bonne forme d'impulsion, ou en ajoutant un filtre égaliseur).

2.1.2 Modélisation du bruit

Le signal reçu sur le canal subit une déformation à cause de la fonction de transfert du canal mais il est aussi entaché de bruit. L'expression générale du signal reçu est alors :

$$y(t) = h(t) * x(t) + n(t) \quad (2.6)$$

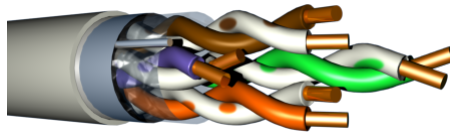


FIGURE 2.1 – Paire torsadée

où $n(t)$ est un processus aléatoire SSL. Dans la grande majorité des cas, la statistique de $n(t)$ sera supposée gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2 .

Si le bruit est blanc (bruit AWGN) alors sa fonction d'autocovariance est égale à :

et sa densité de probabilité :

2.2 Caractéristique des supports filaires

Il est possible de transmettre un message en utilisant un simple fil électrique tant que la bande occupée par le signal ne dépasse pas quelques centaines de kHz. Pour assurer une transmission haut débit ou sur fréquence porteuse, il est nécessaire d'employer une ligne de transmission radio fréquence. Pour des fréquences micro ondes, les pertes dans les lignes de transmission deviennent si importantes que l'on utilise alors des guides d'ondes. Dans le domaine des fréquences optique, on utilise des fibres optiques pour guider les ondes électromagnétiques.

Les supports filaires les plus couramment utilisés sont :

- la paire torsadée ;
- le câble coaxial ;
- la fibre optique.

2.2.1 Paires torsadées

Une paire torsadée est une ligne de transmission constituée de 2 conducteurs enroulés en double hélice. Cet enroulement permet de réduire la diaphonie. Les paires torsadées sont utilisées sur le réseau téléphonique commuté (RTC), dans les réseaux locaux de type Ethernet, Token Ring, ainsi que dans les câbles USB. La figure 2.1 présente un câble composé de quatre paires torsadées.

En général, un câble est constitué de plusieurs paires torsadées (par exemple un câble Ethernet possède 4 paires). De plus le câble peut être constitué d'un blindage entre la gaine et les paires torsadées. Ce blindage permet d'immuniser les paires contre les interférences. On distingue alors :

- la paire torsadée non blindée (UTP)
- la paire torsadée écrantée (FTP) possédant un unique blindage pour toutes les paires torsadées
- la paire torsadée blindée (SPT) où chaque paire torsadée possède un blindage unique
- la paire torsadée doublement écrantée qui est une combinaison des deux précédentes

De plus le blindage peut être relié au connecteur, on parle alors de blindage de bout en bout.

Les câbles sont aussi classés en catégories (indiqué sur le câble) :

- Catégorie 3 : caractérisé par une bande passante de 16 MHz
- Catégorie 4 : caractérisé par une bande passante de 20 MHz (Ethernet 10BASE-T)
- Catégorie 5 : caractérisé par une bande passante de 100 MHz (Ethernet 100BASE-T)
- Catégorie 5e : évolution de la catégorie 5 pour transmettre en Gigabit Ethernet
- Catégorie 6 : caractérisé par une bande passante de 250 MHz (Ethernet 1000BASE-TX)
- Catégorie 6a : évolution de la catégorie 6 pour transmettre en 10GBASE-T
- Catégorie 7 : caractérisé par une bande passante de 700 MHz (Ethernet 1000BASE-TX)

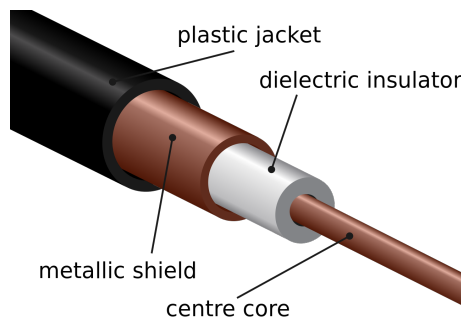


FIGURE 2.2 – Câble coaxial

— Catégorie 7a : caractérisé par une bande passante de 1 GHz

L'atténuation d'un câble est en moyenne de 6 dB pour un signal de bande 10 MHz et de 20 dB pour un signal de bande 100 MHz. De plus, une paire torsadée ne devrait pas relier deux équipements distant de plus de 100 m sans être régénérée.

Enfin, le déploiement d'un réseau basé sur des paires torsadées est facile à mettre en place : la bande passante doit être choisie en fonction de la version d'Ethernet utilisée, la diaphonie et les interférences (dus à l'environnement extérieur) peuvent être limitées en choisissant un blindage adéquat. Le bruit et l'atténuation sont rarement des facteurs limitants dans ce type de réseaux.

2.2.2 Câble coaxial

Un câble coaxial est une ligne de transmission composée d'une âme centrale entourée par une tresse (ou une feuille) conductrice. Les deux conducteurs sont séparés par un diélectrique. La figure 2.2 présente une coupe d'un câble coaxial.

Les câbles coaxiaux sont utilisés pour la transmission des signaux TV sur fréquence porteuse (entre l'antenne et la télé), pour la transmission des signaux satellite (entre l'antenne parabolique et la station), sur les réseaux locaux de type Ethernet de type 10BASE2 et 10BASE5.

L'atténuation dans un câble coaxial dépend des caractéristiques géométriques du câble ainsi que des caractéristiques de ces composants (conducteur et diélectrique). De manière générale, un câble coaxial présente une atténuation plus faible qu'une paire torsadée et est moins sensible aux perturbations électromagnétiques.

L'atténuation d'un câble coaxial est en moyenne de 3 dB pour un signal de bande 30 MHz, 8 dB pour 100 MHz et 20 dB pour 400 MHz (l'atténuation d'un câble peut être très éloignée de cette valeur (si les dimensions ont été optimisées ou si le câble n'est pas utilisé dans la plage de fréquence pour laquelle il a été prévu).

La transmission d'information longue distance nécessite la mise en place de répéteur permettant d'amplifier (ou de régénérer) le signal. Ces répéteurs peuvent être espacés de quelques kilomètres (max 10 km), dans les réseaux de type Ethernet cette distance n'était que de 500 m. Enfin, le bruit est, là encore, rarement le facteur limitant. Le câble coaxial a été complètement remplacé par la fibre optique pour les réseaux longue distance.

2.2.3 Fibre optique

Une fibre optique est un guide d'onde permettant de transporter des ondes lumineuses (électromagnétique). Elle est constituée d'un cœur entouré d'une gaine. L'indice de réfraction du cœur n_c est légèrement plus élevé que l'indice n_g de la gaine. Une fibre peut être constituée de silice ou de plastique. Une gaine externe peut aussi être placée autour de la fibre pour offrir une protection mécanique (elle n'a aucun rôle pour la transmission). La figure 2.3 présente le schéma d'une fibre optique (à saut d'indice).

La propagation repose sur le fait que si un rayon dans le cœur rencontre l'interface entre les deux milieux et si l'angle d'incidence est assez faible, alors le rayon est totalement réfléchi (il n'y a pas de rayon réfracté). On parle alors de réflexion totale.

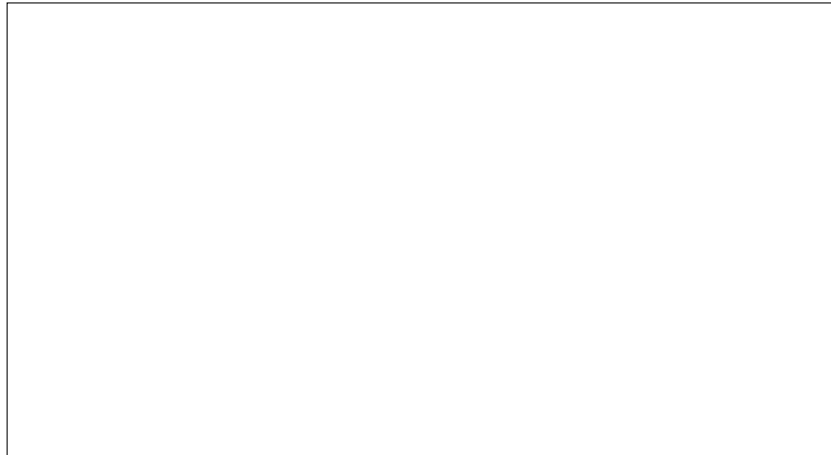


FIGURE 2.3 – Schéma d'une fibre optique à saut d'indice

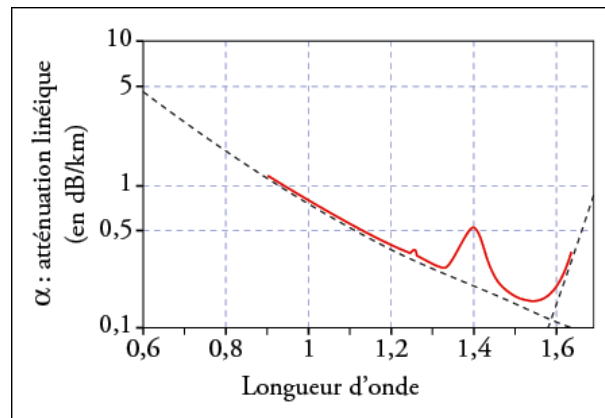


FIGURE 2.4 – Atténuation de la silice

Une fibre est généralement caractérisé par :

- sa différence d'indice normalisé Δ définit par :

$$\Delta = \frac{n_c - n_g}{n_c}$$

- son ouverture numérique qui est le sinus de l'angle maximum qui peut être accepté par la fibre :

$$\sin \theta_{max} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$$

Si un rayon lumineux frappe le cœur avec une incidence plus faible de θ_{max} alors ce rayon sera propagé dans le cœur de fibre. Dans le cas contraire, il n'y a pas de réflexion totale, le rayon incident est réfléchi et réfracté, sa puissance (dans le cœur) diminue rapidement.

On distingue aussi les fibres multimodes des fibres monomodes. Les fibres multimodes possèdent un cœur de diamètre important (typiquement $50 \mu\text{m}$) et sont utilisés sur des liaisons courtes distances (car elle sont facile à mettre en place). Les fibres monomodes ont un cœur de faible diamètre ($10 \mu\text{m}$) et ne peuvent propager qu'un seul mode (1 seul rayon).

L'atténuation d'une fibre dépend des matériaux utilisés, les fibres plastiques présentent une forte atténuation ce qui limite leur utilisation aux liaisons courtes distances. Les fibres en silice présentent une atténuation bien plus faible. La figure 2.4 présente l'atténuation de la silice en fonction de la longueur d'onde.

On peut voir que si l'on utilise des composant travaillant à la longueur d'onde 1550 nm, l'atténuation d'une fibre en silice n'est que de 0.23 dB/km.

Un signal transmis sur une fibre optique subit une distorsion linéaire. Cette distorsion est due à deux phénomènes bien distincts :

- la dispersion modale
- la dispersion chromatique

La dispersion chromatique est principalement due aux caractéristiques des matériaux utilisés dans la fibre : la silice (ou le plastique) sont des matériaux dispersifs ainsi, toutes les fréquences de se propagent pas à la même vitesse et le signal reçu est déformé.

La dispersion intermodale est due au fait que la fibre peut pro gager plusieurs modes (rayons) où chaque mode possède sa propre vitesse. En réception, le signal reçu est à nouveau déformé. La dispersion intermodale peut être réduite en utilisant une fibre à gradient d'indice. Les fibres monomodes ne présente pas de dispersion intermodale car un seul mode peut se propager Ainsi les fibres monomodes sont toujours utilisées pour les transmissions longues distances.

Enfin, le bruit dans les transmissions optiques, n'est pas forcément gaussien.

2.3 Caractéristiques des supports sans fil

Dans le cas des supports sans fil, les ondes électromagnétiques se propagent au travers de l'environnement où elle sont réfléchies, réfractées ou diffractées par des objets présents dans l'environnement (sol, murs, arbres...). La résolution par les équations de Maxwell est généralement impossible. Il est cependant possible d'utiliser des approximations par tracé de rayons pour déterminer les caractéristiques de la transmission.

Les techniques par tracé de rayon utilisent la notion de rayon (les mêmes rayons que ceux utilisés en optique géométrique) pour modéliser une onde électromagnétiques. Les caractéristiques de la transmission peuvent alors être déterminées en considérant l'impact des réflexions et des réfractions (la diffraction n'est pas prise en compte).

On suppose que l'on souhaite transmettre un signal $s(t)$ à bande étroite. Nous avons vu que tout signal à bande étroite peut être exprimé en fonction de son enveloppe complexe :

$$s(t) = Re[\alpha_s(t) \exp(2j\pi f_0 t)]$$

où $s(t)$ possède une puissance P_s et occupe une bande B_s (attention, la puissance de $\alpha_s(t)$ est $2P_s$). Le signal reçu, $r(t)$ est lui aussi un signal à bande étroite et peut être exprimé par :

$$r(t) = Re[\alpha_r(t) \exp(2j\pi f_0 t)]$$

Nous allons à présent étudier la propagation en espace libre ainsi que la propagation avec des réflexions.

2.3.1 Propagation en espace libre

En espace libre, le signal reçu $r(t)$ peut être exprimé en fonction de l'enveloppe complexe de $s(t)$ multiplié par un facteur d'échelle :

$$r(t) = Re \left[\frac{\lambda \sqrt{G_t G_r} \exp(-2j\pi d/\lambda)}{4\pi d} \alpha_t(t) \exp(2j\pi f_0 t) \right]$$

On peut remarquer que cette réponse est celle d'un filtre équivalent défini par :

$$\tilde{H}(f) = \frac{\lambda \sqrt{G_t G_r}}{4\pi d} \exp(-2j\pi d/\lambda)$$

Ce filtre est caractérisé par un retard de phase et un retard de groupe de :

$$t_\phi(f_0) = -\frac{\phi(f_0)}{2\pi f_0} = d/c \quad t_g(f_0) = \frac{1}{2\pi f_0} \left[\frac{d\phi(f)}{df} \right]_{f_0} = d/c$$

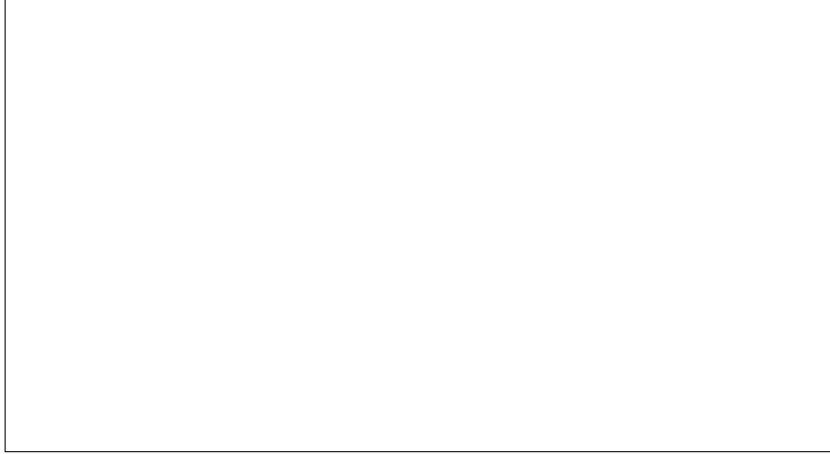


FIGURE 2.5 – Modèle à 2 rayons

La phase étant linéaire, ce filtrage n'introduit donc pas de distorsion de phase (on observe néanmoins une légère distorsion linéaire sur le gain car il est fonction de λ . La dépendance en λ vient du fait que la surface effective de l'antenne est proportionnelle à λ^2 (la propagation dans le vide n'engendre pas de distorsion).

Il est alors possible d'exprimer l'atténuation par :

$$P_L = \frac{P_s}{P_r} = G_t G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 \quad (2.7)$$

Cette équation est appelée équation de Friis (ou parfois équation des télécommunications). On peut remarquer qu'en espace libre l'atténuation est proportionnelle à $1/d^2$. Ainsi si la distance entre l'émetteur et le récepteur double, l'atténuation est multipliée par 4.

Enfin, la bande passante est théoriquement infinie.

2.3.2 Propagation avec le modèle à 2 rayons

Le modèle à 2 rayons est utilisé pour prendre en compte l'impact d'une seule réflexion en plus de la composante LOS. Cette réflexion est dans la majorité des cas introduite pour modéliser la réflexion du sol. La figure 2.5 présente la configuration étudiée.

Le signal reçu peut être exprimé par :

$$r(t) = Re \left[\frac{\lambda}{4\pi} \left(\frac{\sqrt{G_l} \alpha_s(t) \exp(-2j\pi l/\lambda)}{l} + \frac{\sqrt{G_n} R \alpha_s(t - \tau) \exp(-2j\pi(x + x')/\lambda)}{x + x'} \right) \exp(2j\pi f_0 t) \right]$$

où $\tau = (x + x' - l)/c$ est la différence de temps entre le rayon LOS et le rayon non-LOS, G_l est le produit des gains d'antenne pour le trajet LOS et G_n le produit des gain pour le trajet non-LOS. R est le coefficient de réflexion.

Si l'on suppose que la bande de cohérence $B_c = 1/\tau$ est bien plus grande que la bande B_s du signal alors $\alpha_s(t) \approx \alpha_s(t + \tau)$ et l'atténuation peut alors être exprimée par :

$$P_L = \frac{P_s}{P_r} = \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 \left| \frac{\sqrt{G_l}}{l} + \frac{\sqrt{G_n} R \exp(-j\Delta\phi)}{x + x'} \right|^2$$

où $\Delta\phi = 2\pi(x + x' - l)/\lambda$ est la différence de phase entre les 2 trajets. La figure 2.6 présente l'atténuation dans le modèle à 2 rayons en fonction du logarithme (base 10) de la distance (et pour les paramètres suivants $f = 900$ MHz, $R = -1$, $h_t = 50$, $h_r = 2$, $G_l = 1$, $G_n = 1$).

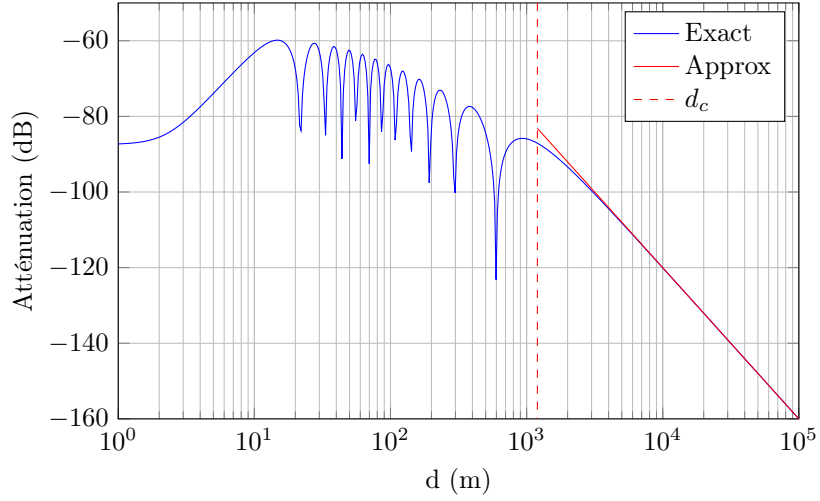


FIGURE 2.6 – Atténuation dans le modèle à deux rayons

On peut voir que pour une distance faible l'atténuation diminue, puis oscille à cause de combinaisons constructives et destructives. Enfin pour d grand, l'atténuation diminue avec la distance. On peut montrer que pour d asymptotiquement grand, que l'atténuation peut être approximée par :

$$P_L \approx G_l G_n \left(\frac{h_t h_r}{d^2} \right)^2$$

On peut alors voir que l'atténuation est proportionnelle à $1/d^4$ (ce qui est très différent du cas en espace libre). En pratique, on peut considérer que cette approximation est valable à partir de la distance critique d_c avec :

$$d_c = \frac{4h_t h_r}{\lambda} \quad (2.8)$$

Ainsi pour le modèle à 2 rayons, l'atténuation est plus importante de plus, il existe une distorsion de phase qui modifie la puissance reçue en fonction de la distance.

Pour des canaux présentant plusieurs réflexions et/ou réfractions, l'atténuation ne présente malheureusement pas d'expression analytique. Des modèles simplifiés sont souvent utilisés en pratique :

$$P_L = \frac{P_t}{P_r} = K \left(\frac{d_0}{d} \right)^\gamma \quad (2.9)$$

où γ est typiquement compris entre 2 et 6.

2.4 Propagation avec un modèle statistique à N réflexions

On modélise un canal de transmission en bande étroite par un système linéaire invariant dans le temps. Ce canal est alors entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle équivalente (en bande de base) que l'on peut écrire sans perte de généralité :

$$h(t) = \sum_{n=0}^N a_n \exp(-j\phi_n) \delta(t - \tau_n) \quad (2.10)$$

On peut voir que cette réponse impulsionnelle est constituée d'une somme de N trajets. Chaque trajet est retardé par un temps τ_n , atténué par un facteur a_n et déphasé d'une quantité ϕ_n (ϕ_n dépend de τ_n). Comme a_n dépend de l'atténuation du trajet et du blocage et que ϕ_n dépend du retard τ_n , on peut considérer que ces deux processus sont indépendants.

Le signal reçu est obtenu en convoluant l'enveloppe complexe du signal émis $u(t)$ par la réponse impulsionnelle du filtre équivalent :

$$\begin{aligned}
r(t) &= Re \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \alpha_s(t - \tau) d\tau \right) \exp(2j\pi f_0 t) \right] \\
&= Re \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^N a_n \exp(-j\phi_n) \delta(\tau - \tau_n) \alpha_s(t - \tau) d\tau \right) \exp(2j\pi f_0 t) \right] \\
&= Re \left[\left(\sum_{n=0}^N a_n \exp(-j\phi_n) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - \tau_n) \alpha_s(t - \tau) d\tau \right) \right) \exp(2j\pi f_0 t) \right] \\
&= Re \left[\left(\sum_{n=0}^N a_n \exp(-j\phi_n) \alpha_s(t - \tau_n) \right) \exp(2j\pi f_0 t) \right]
\end{aligned}$$

Les effets de ces évanouissements dépendent du rapport entre la bande utile du signal B_s et la bande de cohérence B_c . La bande de cohérence est définie comme l'inverse de l'étalement temporelle de la réponse impulsionnelle du canal. On distingue alors 2 cas :

- si $B_c \gg B_s$, on parle d'évanouissement non sélectif en fréquence (évanouissement à bande étroite)
- si $B_c \ll B_s$, on parle d'évanouissement sélectif en fréquence (évanouissement bande large)

Dans le cas de l'évanouissement non sélectif en fréquence on peut faire l'hypothèse que $\alpha_t(t - \tau_n) \approx \alpha_t(t) \forall n$ car l'étalement temporel est faible par rapport à la vitesse de variation de $t(t)$ ainsi :

$$r(t) = Re \left[\left(\sum_{n=0}^N a_n \exp(-j\phi_n) \right) \alpha_s(t) \exp(2j\pi f_0 t) \right] \quad (2.11)$$

Si on transmet un signal $s(t) = \cos 2\pi f_0 t$ alors son enveloppe complexe vaut $\alpha_s = 1$ Le signal reçu peut être obtenu en remplaçant α_s par sa valeur dans l'équation (2.11) Ce signal est un signal à bande étroite et peut être exprimé en fonction de ses composantes en phase et en quadrature $r(t) = p(t) \cos 2\pi f_0 t - q(t) \sin 2\pi f_0 t$ avec :

$$p(t) = \sum_{n=0}^N a_n \cos \phi_n \quad (2.12)$$

et

$$q(t) = \sum_{n=0}^N a_n \sin \phi_n \quad (2.13)$$

Si N est grand, alors on peut utiliser le théorème central limite pour approximer $p(t)$ et $q(t)$ par deux processus conjointement gaussiens. De plus si on fait l'hypothèse d'une phase uniformément distribuée sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ on peut montrer que $p(t)$ et $q(t)$ sont centrés et indépendants.

L'enveloppe du signal reçu vaut alors :

$$|r(t)| = \sqrt{p^2(t) + q^2(t)} \quad (2.14)$$

et suit une distribution de Rayleigh. De plus, on peut montrer en calculant la fonction d'autocorrélation, que les échantillons de l'enveloppe sont décorrélés dès qu'il sont espacés de plus de 0.3λ . Ainsi, dans le cas d'évanouissement faible bande, le signal subit une atténuation qui varie très rapidement avec la position de l'émetteur et du récepteur. Le signal reçu est cependant peu déformé car le canal est plat en fréquence.

Dans le cas de l'évanouissement sélectif en fréquence, *i.e.* quand la bande du signal B_s est supérieure à la bande de cohérence du canal B_c , l'approximation $\alpha_s(t - \tau_n) \approx \alpha_s(t)$ n'est plus valable. Le signal reçu est alors constitué d'une somme de répliques de message émis retardés, atténués et déphasés. Le signal reçu est alors déformé, et le canal est dit *sélectif en fréquence*. Dans le cas d'une modulation numérique, l'étalement d'un symbole vient modifier les symboles suivants, on parle alors d'interférence entre symboles. L'évanouissement large bande peut être limité en réduisant le débit (ce qui diminue B_s)

et/ou en utilisant un filtre égaliseur permettant de compenser les effets du canal dans la bande passante.

En plus de l'atténuation due à la distance et aux évanouissements, les canaux sans fil sont aussi sujet à des phénomènes de blocage provoqués par des modifications du canal de transmission. Les phénomènes de blocage entraînent l'apparition d'une atténuation supplémentaire. En général, la valeur de l'atténuation supplémentaire n'est pas prédictible et des modèles statistiques sont alors utilisés. Le modèle le plus utilisé est un modèle log-normal.

Première partie

Communications Analogiques

Introduction

Les communications analogiques permettent de transmettre un message analogique d'un émetteur vers un (ou plusieurs) récepteur(s) sur un canal de transmission.

La bande passante du signal à transmettre est cependant rarement compatible avec la bande passante du canal de transmission. L'opération de modulation permet alors d'adapter le message au canal de transmission. La figure 2.7 présente le schéma d'une chaîne communication analogique.

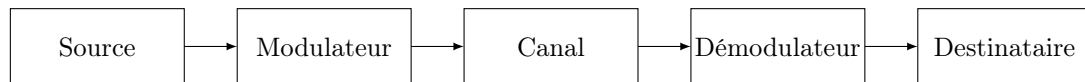


FIGURE 2.7 – Schéma d'une chaîne de communication analogique

La source émet un message en bande de base (dont le spectre est centré autour de 0 Hz). Le modulateur permet transformer ce message en un signal à bande étroite (centré autour de la fréquence porteuse f_0). Ce message peut alors être rayonné par l'antenne d'émission et transmis sur le canal. En réception, le démodulateur permet de ramener le signal à bande étroite reçu par l'antenne de réception en bande de base.

La modulation permet aussi de réaliser un multiplexage fréquentiel. Ainsi plusieurs signaux en bande de base (occupant la même bande passante) peuvent être transmis en même temps sur le canal de transmission (en utilisant des fréquences porteuses différentes).

Les communications analogiques ont été utilisées dès la fin du 19^{ème} siècle. Aujourd'hui, la quasi totalité des transmissions sont numériques. Les modulations analogiques restent néanmoins utilisées pour la radio diffusion à grande échelle (AM et FM).

Chapitre 3

Modulations linéaires

Les modulations linéaires modifient la valeur de l'enveloppe instantanée $a(t)$ en fonction du message à transmettre $m(t)$. Il existe quatre types de modulation linéaire :

- la modulation double bande sans porteuse (DBSP) ;
- la modulation double bande avec porteurs (DBAP) ;
- la modulation bande latérale unique (BLU) ;
- la modulation bande latérale résiduelle (BLR).

3.1 Modulation DBSP

3.1.1 Définition

La modulation DBSP permet de translater le spectre du message à transmettre $m(t)$ autour de f_0 . Cette translation dans le domaine spectral correspond à une convolution par un dirac. Pour le signal en bande étroite soit réel, il est nécessaire de réaliser cette convolution en f_0 et $-f_0$. L'expression du signal modulé s_{DBSP} dans le domaine temporel peut alors être obtenu par transformée de Fourier inverse :

$$s_{DBSP}(t) = Am(t) \cos 2\pi f_0 t \quad (3.1)$$

La figure 3.1 présente pour un message $m(t)$ donné, le signal $s(t)$ dans le domaine temporel. Le spectre du signal modulé peut être obtenu par transformée de Fourier :

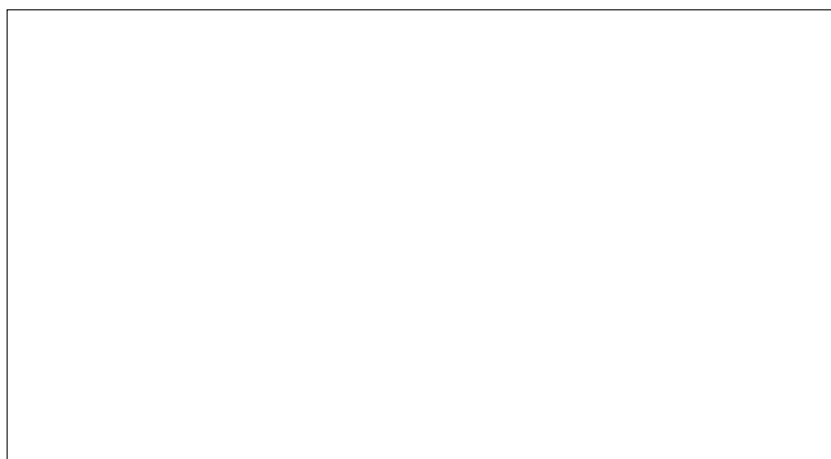


FIGURE 3.1 – Représentation temporelle d'un signal DBSP

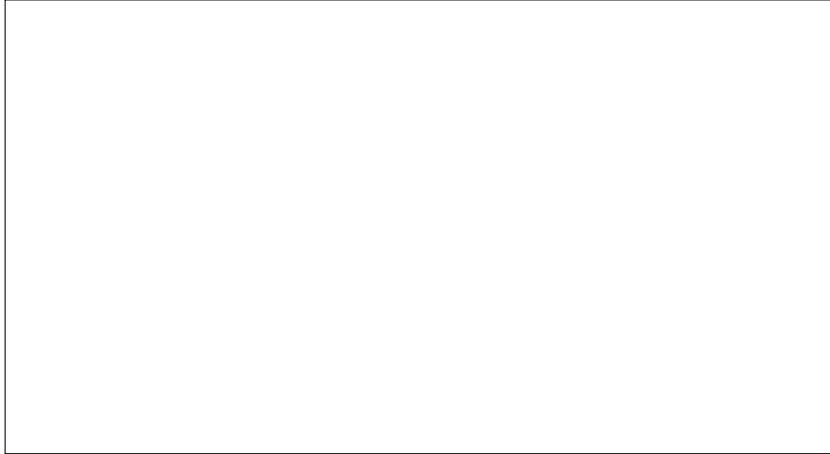


FIGURE 3.2 – Représentation fréquentielle d'un signal DBSP

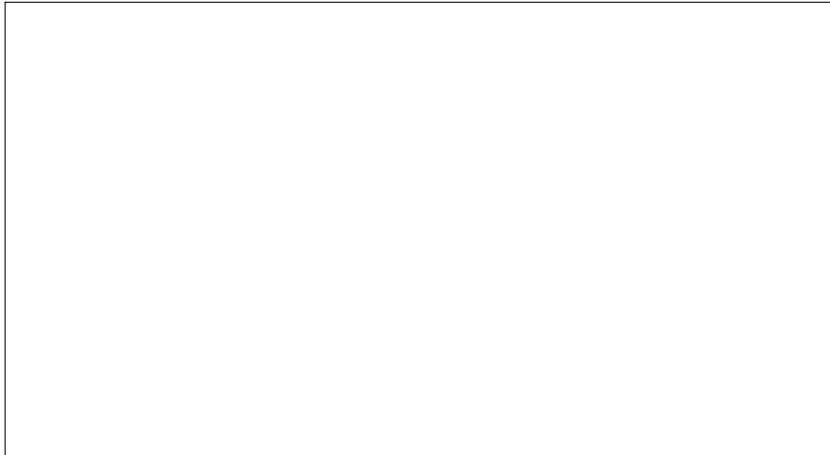


FIGURE 3.3 – Génération d'un signal DBSP avec le modulateur en anneau

La figure 3.2 présente pour le spectre d'un message $M(f)$ donné, le signal $S_{DBSP}(f)$ dans le domaine fréquentiel.

On peut voir que la bande occupée par le signal DBSP est deux fois plus importante que celle de $m(t)$:

$$B = 2b \quad (3.3)$$

De plus aucune raie n'est présente à la fréquence f_0 (d'où le nom de la modulation).

3.1.2 Génération du signal DBSP

La génération d'un signal DBSP peut être réalisée avec un mélangeur qui réalise la multiplication temporelle entre la porteuse et le signal modulant $m(t)$.

Si l'on ne dispose pas de mélangeur, il est toutefois possible de réaliser cette modulation à l'aide d'un modulateur en anneau. Le principe de ce modulateur est repose sur la commutation de signe du signal $m(t)$ au rythme de la porteuse. Un signal $c(t)$ carré d'amplitude $+1$ réalise une commutation de signe du signal $m(t)$. Ce spectre est composé de réplique du spectre $M(f)$ translaté autour des fréquences $+f_0; +2f_0; +3f_0 \dots$. Le signal DBSP est obtenu en filtrant ce signal à travers un filtre passe bande de largeur $B = 2b$ centré sur f_0 . La figure 3.3 représente les différentes étapes de la modulation en anneau.

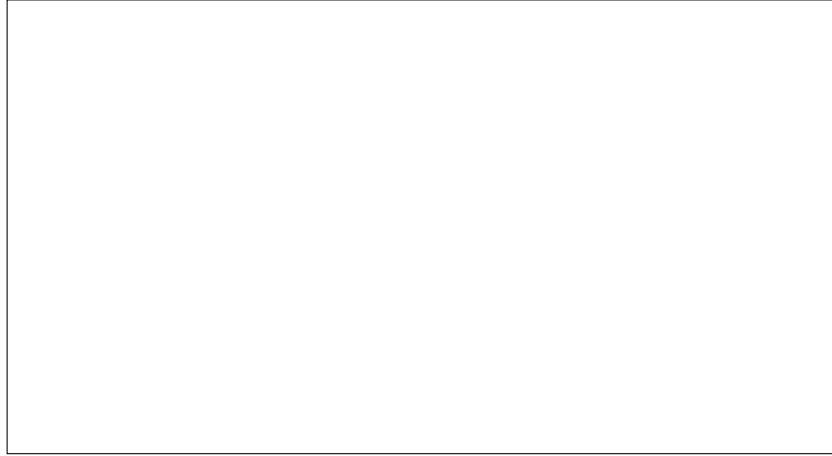


FIGURE 3.4 – Architecture du démodulateur cohérent

3.1.3 Démodulation du signal DBSP

Le démodulateur est chargé de récupérer le message $m(t)$ à partir du signal $s_{DBSP}(t)$ reçu. En effectuant la multiplication du signal s_{DBSP} par $2 \cos 2\pi f_0 t$, on a :

(3.4)

Il est donc possible de récupérer le message $m(t)$ par simple filtrage passe bas du signal précédent. La figure 3.4 présente l'architecture du démodulateur.

Ce démodulateur est appelé démodulateur cohérent car il nécessite la connaissance précise par le récepteur de la fréquence ainsi que de la phase de la porteuse utilisée lors de l'émission.

Dans le domaine fréquentiel, on peut retrouver de manière similaire :

(3.5)

La figure 3.5 présente le spectre des signaux mis en jeu lors de la démodulation cohérente.

La démodulation cohérente est une opération difficile à mettre en œuvre à cause de l'estimation de la phase utilisée en émission. A titre d'exemple une erreur d'estimation $\delta\phi$ de la phase produit alors le signal :

$$\begin{aligned} s_{DBSP}(t)2\cos(2\pi f_0 t + \delta\phi) &= Am(t)2\cos 2\pi f_0 t \cos(2\pi f_0 t + \delta\phi) \\ &= Am(t)\cos \delta\phi + Am(t)\cos(4\pi f_0 t + \delta\phi) \end{aligned}$$

Soit après filtrage :

$$r(t) = Am(t)\cos \delta\phi$$

ce qui réduit considérablement les performances de la démodulation cohérente (un déphasage de $\pi/2$ entraîne l'annulation complète du message).

3.2 Modulation DBAP

La modulation DBAP est la modulation d'amplitude la plus utilisée pour la radio diffusion à grande échelle.

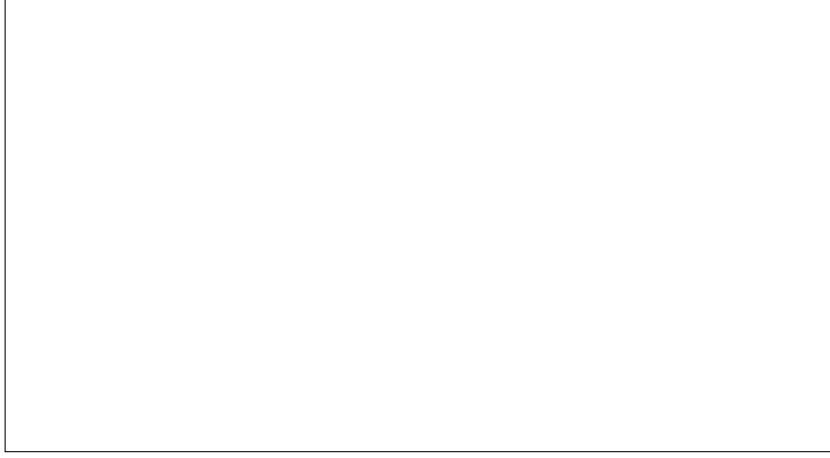


FIGURE 3.5 – Démodulation cohérente du signal DBSP

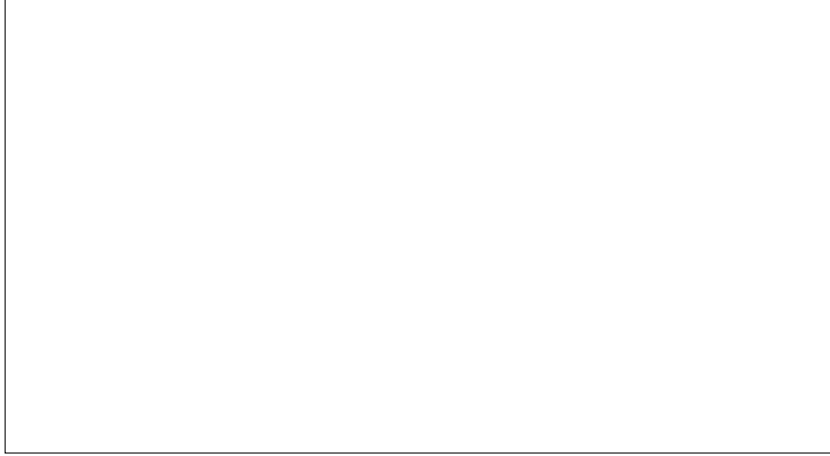


FIGURE 3.6 – Représentation temporelle d'un signal DBAP pour différentes valeurs de $|k_a m(t)|$

3.2.1 Définition

La modulation DBAP est semblable à la modulation DBSP i.e. le signal modulant est multiplié par la porteuse. Cependant, à la différence de la modulation DBSP le signal modulant est constitué du message $m(t)$ et d'une constante :

$$s_{DBAP}(t) = A(1 + k_a m(t)) \cos 2\pi f_0 t \quad \text{avec } |k_a m(t)| < 1 \quad (3.6)$$

La figure 3.6 présente l'allure temporelle d'un signal DBAP pour différentes valeurs de $|k_a m(t)|$. La contrainte $|k_a m(t)| < 1$ garantit que l'enveloppe du signal $s_{DBAP}(t)$ ne s'annule jamais (ce qui n'était pas le cas avec le signal $s_{DBSP}(t)$). Ainsi, c'est l'enveloppe du signal est proportionnelle au message $m(t)$. Le spectre du signal est obtenu en effectuant une transformée de Fourier du signal $s_{DBAP}(t)$:

La largeur de bande du signal DBAP est identique à la largeur de bande du signal DBSP et vaut :

$$B = 2b \quad (3.8)$$

La figure 3.7 présente l'allure fréquentielle d'un signal DBAP.

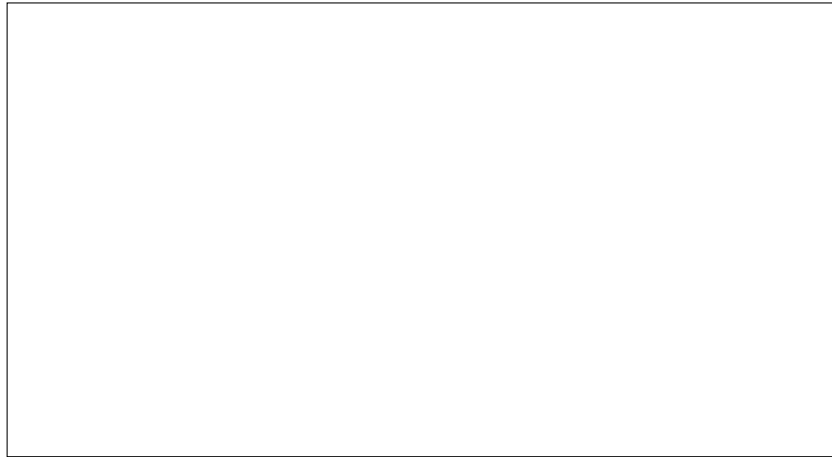


FIGURE 3.7 – Représentation fréquentielle d'un signal DBAP

3.2.2 Génération du signal DBAP

La génération du signal DBAP peut être effectuée à l'aide d'un modulateur DBSP en prenant soin d'ajouter une constante suffisante au message $m(t)$.

Une seconde méthode consiste à commander le gain d'un amplificateur de puissance en fonction du message à transmettre.

Enfin, une dernière méthode consiste à utiliser une non linéarité (d'ordre 2 minimum) pour introduire un terme d'intermodulation entre le message et la porteuse. La figure 3.8 présente l'architecture d'un tel modulateur.

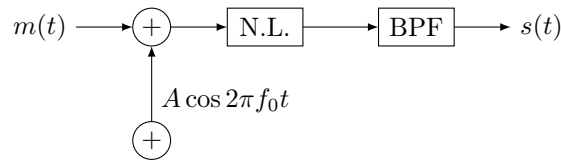


FIGURE 3.8 – Génération du signal DBAP

La réalisation du modulateur BDAP ne pose pas de problème majeur. Cependant le fait de transmettre la porteuse gaspille la puissance d'émission car la porteuse ne contient pas d'information. La présence de cette porteuse présente néanmoins un avantage pour la démodulation du signal DBAP.

3.2.3 Démodulation du signal DBAP

La démodulation du signal DBAP peut être réalisée simplement en suivant l'enveloppe de la porteuse. On utilise pour cela un détecteur d'enveloppe, le circuit de ce détecteur est si simple qu'il peut être réalisé avec une diode, une résistance et une capacité. La figure 3.9 présente le détecteur d'enveloppe.

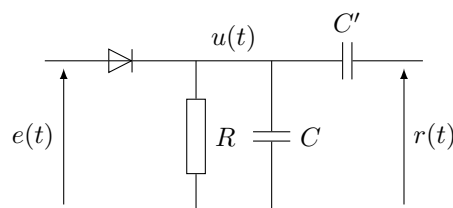


FIGURE 3.9 – Détecteur d'enveloppe

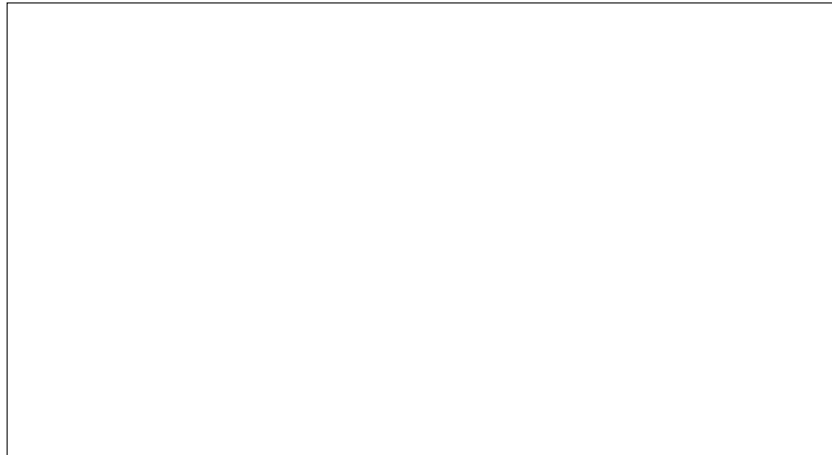


FIGURE 3.10 – Détection d’enveloppe du signal BDAP

La diode est chargée du redressement simple alternance du signal reçu par l’antenne. Les éléments R et C constituent un filtre passe bas permettant de lisser les variations du signal redressé. La fréquence de coupure de ce filtre $f_c = 1/(2\pi RC)$ doit être calculée pour respecter $b < f_c < f_0$. La capacité C' permet de supprimer la composante continue. La figure 3.10 présente l’allure temporelle des signaux mis en jeu lors de la détection d’enveloppe.

La modulation DBAP possède une démodulation extrêmement simple et permet de produire des récepteurs bas coût. Cependant, la performance de cette modulation reste modeste car une grande partie de la puissance d’émission est “perdue” pour transmettre la porteuse. De plus, les deux modulations étudiées précédemment nécessitent une largeur de bande deux fois plus grande que le spectre du message.

Calculez l’expression de $s_{DBAP}(t)$ et $S_{DBAP}(f)$ lorsque $m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$.

Calculez alors la puissance utile ainsi que la puissance allouée à la porteuse.

En déduire l’expression du rendement ainsi que le rendement maximal.

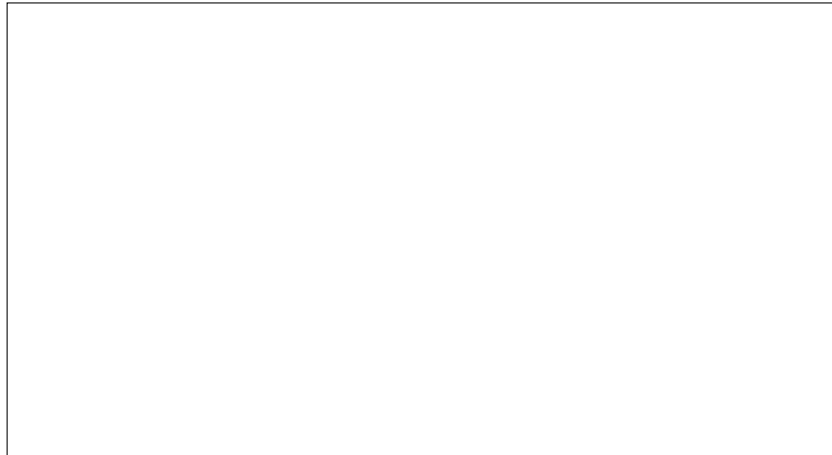


FIGURE 3.11 – Représentation fréquentielle d'un signal BLU

Pour la radiodiffusion en ondes longues (AM), la bande du signal modulant a été fixée entre 50 et 4500 Hz. La bande de fréquence autorisée s'étend de 144 kHz à 290 kHz. Déterminer le nombre maximal de station.

3.3 Modulation BLU

La modulation BLU permet de diviser la largeur de bande du signal modulé par deux. En effet, on peut remarquer que dans les modulations DBSP et DBAP, que les parties à droite et à gauche de f_0 contiennent exactement la même information. Cette propriété est due au fait que le message $m(t)$ est réel et possède donc une symétrie hermitienne. L'idée de la modulation BLU consiste à supprimer l'une des deux bandes latérale pour réduire la bande passante de la transmission. On distingue alors deux cas, la suppression de la bande inférieure, qui engendre une modulation BLUS et la suppression de la bande supérieure, qui engendre une modulation BLUI. La figure 3.11 présente le spectre des deux types de signaux.

La bande passante d'un signal BLU est donc deux fois moins importante que les signaux DBSP et DBAP et vaut :

$$B = b \quad (3.9)$$

Dans le domaine temporel, et contrairement aux signaux DBSP et DBAP, la forme du signal BLU n'a rien à voir avec celle du message $m(t)$.

3.3.1 Génération du signal BLU

La méthode la plus couramment utilisée pour produire un signal BLU consiste à moduler le message $m(t)$ avec une modulation DBSP puis à éliminer une bande au moyen d'un filtre passe bande (centré sur la bande inférieure ou supérieure).

La principale difficulté de cette méthode réside dans le fait qu'il est difficile de produire une filtre coupe bande de sélectivité suffisante. Des modulateurs BLU à 2 étages peuvent aussi être utilisés pour relâcher la contrainte sur la sélectivité du filtre.

Une seconde méthode consiste à réaliser le filtrage directement en bande de base. Pour cela, il est nécessaire de déterminer l'expression du signal BLU en temporel. Le signal $m^+(t)$ correspondant au spectre sur les fréquences positives de $m(t)$ a pour expression :

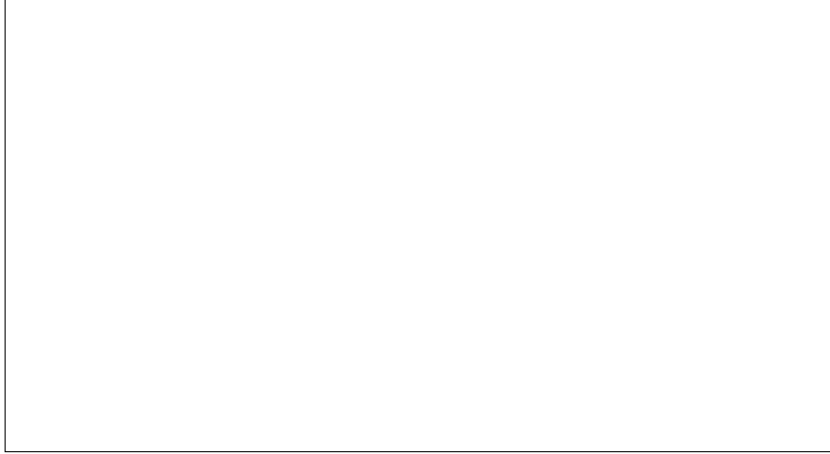


FIGURE 3.12 – Génération du signal BLU par filtrage de Hilbert

De manière similaire, le signal $m^-(t)$ correspondant au spectre sur les fréquences négatives de $m(t)$ a pour expression :

Le signal BLUS peut être obtenu en translatant $M^+(f)$ de f_0 et $M^-(f)$ de $-f_0$ ce qui correspond dans le domaine temporel à une multiplication par $e^{2j\pi f_0 t}$ et $e^{-2j\pi f_0 t}$ respectivement. L'expression du signal BLUS vaut alors :

(3.10)

Pour la modulation BLUI, le signe $-$ de l'équation 3.10 est remplacé par un signe $+$. La figure 3.12 présente l'architecture d'un modulateur BLU basé sur l'équation précédente.

La difficulté principale liée à ce type de structure est la réalisation du filtre de Hilbert sur la bande b . Cependant, pour des signaux présentant une énergie faible autour de 0, la modulation BLU est généralement réalisable.

3.3.2 Démodulation du signal BLU

La démodulation du signal BLU repose sur une détection cohérente : $m(t)$ est porté par la composante en phase.

Le signal est ensuite filtré par un filtre passe bas :

Comme dans le cas de la modulation DBSP, la principale difficulté consiste à disposer d'un oscillateur local verrouillé en fréquence et en phase. Si on considère une erreur de phase $\delta\phi$ le signal reçu devient alors :

$$r(t) = A(m(t) \cos \delta\phi - \hat{m}(t) \sin \delta\phi)$$

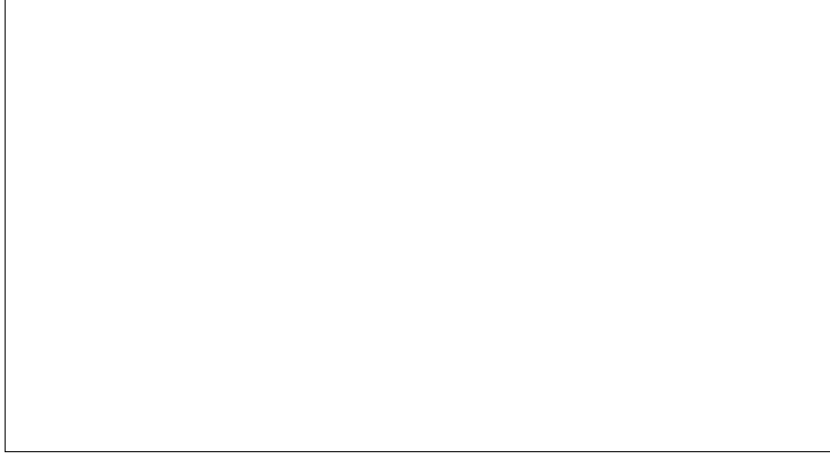


FIGURE 3.13 – Représentation fréquentiel d'un signal BLR

Pour mémoire, une erreur de phase en DBSP entraîne une simple atténuation. Cependant en passant dans le domaine des fréquences :

$$\begin{aligned} R(f) &= A(M(f) \cos \delta\phi + j \operatorname{sign}(f) M(f)) \sin \delta\phi \\ &= \begin{cases} AM(f)e^{j\delta\phi} & \text{si } f > 0 \\ AM(f)e^{-j\delta\phi} & \text{si } f < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En considérant le module de l'expression précédente, on trouve :

$$|R(f)| = A|M(f)|$$

Ainsi une erreur de phase $\delta\phi$ ne modifie pas la densité spectrale de puissance du message reçu (seule la phase est modifiée). Si l'on se souvient que l'oreille humaine est très peu sensible à la phase des signaux, la modulation BLU devient une modulation de choix pour transmettre des signaux de parole.

On peut hélas montrer qu'une erreur de fréquence δf entraîne un décalage en fréquence du signal $r(t)$. Une erreur de seulement à 20 Hz rend le signal reçu incompréhensible.

3.4 Modulation BLR

3.4.1 Définition

La modulation BLR permet de transmettre des signaux possédant une énergie non nulle autour de 0 (ce qui n'est pas le cas avec la modulation BLU). Cette modulation est typiquement utilisé pour les signaux de données ou les signaux vidéo. Elle peut être vue comme un compromis entre la modulation BLU et la modulation DBSP. La figure 3.13 présente le spectre d'un signal BLR.

La bande passante est composée d'une bande latérale complète de largeur b alors que l'autre n'est transmise que partiellement de largeur αb (d'où le nom de la modulation). La largeur de bande est donc égale à :

$$B = (1 + \alpha)b \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \quad (3.11)$$

3.4.2 Génération d'un signal BLR

Le signal BLR peut être généré de la même manière que le signal BLU. On peut donc réaliser le modulateur BLR en utilisant un filtre passe bande après une modulation DBSP ou en effectuant un filtrage proche du filtrage de Hilbert en bande de base.

Cependant, dans les deux cas, le filtre doit permettre de reconstruire le signal $m(t)$ en utilisant une démodulation cohérente. On doit donc avoir si l'on veut récupérer $m(t)$ sans distorsion :

$$H(f - f_0) + H(f + f_0) = 1 \text{ pour } -b < f < b$$

Le filtre doit donc présenter une symétrie autour du point $(f_0, 1/2)$ (en module et en phase).

3.4.3 Démodulation des signaux BLR

La démodulation des signaux BLR peut être effectuée, comme pour toutes les modulations linéaires, par une détection cohérente.

En pratique, on superpose parfois la porteuse sur le signal BLR (c'est le cas pour les signaux de télévision analogiques). Le signal BLR accompagné de sa porteuse peut être exprimé par :

$$s_{BLR} = A(1 + km(t)) \cos 2\pi f_0 t \pm kAm_q(t) \sin 2\pi f_0 t$$

où k représente le rapport entre la puissance de la porteuse et celle du signal BLR.

L'ajout de la porteuse permet de démoduler le signal BLR avec une simple détection d'enveloppe. À partir du signal précédent, on peut montrer que l'enveloppe suit :

$$u(t) = A(1 + km(t)) \sqrt{1 + \left(\frac{km_q(t)}{1 + km(t)} \right)^2}$$

Les performances de cette détection restent cependant inférieures à celles obtenues par une démodulation cohérente mais peuvent être limitées en réduisant k (ce qui diminue le rendement) soit en augmentant la bande résiduelle (ce qui revient à diminuer $m_q(t)$). Pour la télévision analogique, le compromis est de $\alpha = 15\%$ et $P_c = P_u$.

Chapitre 4

Modulation angulaires

4.1 Définitions

Un signal en bande étroite peut toujours se mettre sous la forme :

$$s(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

Les modulations linéaires permettent de faire varier l'enveloppe $a(t)$ en fonction du message alors que les modulation angulaires (fréquence et phase) modifient la phase $\phi(t)$ de ce signal (laissant l'enveloppe constante).

On définit alors la phase instantanée $\Phi_i(t)$ ainsi que la fréquence instantanée $F_i(t)$ par :

$$\Phi_i(t) = 2\pi f_0 t + \phi(t) \quad (4.1)$$

$$F_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_i(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (4.2)$$

La modulation de fréquence est engendrée lorsque une variation du signal $m(t)$ entraîne une variation de la fréquence instantanée $F_i(t)$ du signal à bande étroite. Cette transformation est en pratique toujours linéaire :

$$F_i(t) = f_0 + k_f m(t) \quad (4.3)$$

où k_f est la sensibilité du modulateur en Hz/V. La phase instantanée $\Phi_i(t)$ est quant à elle obtenue par intégration de la fréquence instantanée $F_i(t)$:

L'expression du signal MF $s_{MF}(t)$ vaut alors :

On peut alors voir en modulation de fréquence, que l'impact du signal $m(t)$ apparaît dans le terme de phase.

La modulation de phase est quant à elle engendré lorsque une variation du signal $m(t)$ entraîne une variation de la phase instantanée $\Phi_i(t)$ du signal à bande étroite. Là encore, cette transformation est en pratique toujours linéaire :

L'expression du signal MP $s_{MP}(t)$ est alors égale à :

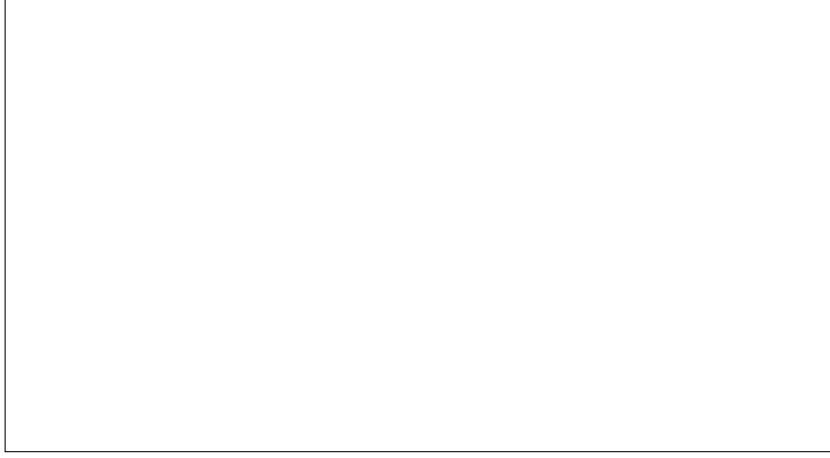


FIGURE 4.1 – Représentation temporelle des signaux $s_{MF}(t)$ et de $s_{MP}(t)$

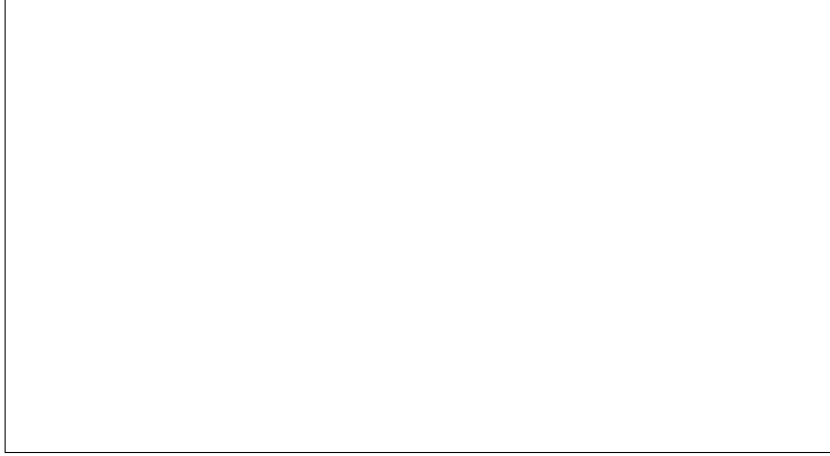


FIGURE 4.2 – Équivalence entre MF et MP

La figure 4.1 présente l'allure temporelle des signaux $s_{MF}(t)$ et de $s_{MP}(t)$ pour un même message $m(t)$. En comparant les expressions de $s_{MF}(t)$ et de $s_{MP}(t)$, on peut voir que la phase instantanée est proportionnelle à $m(t)$ dans la modulation de phase alors qu'elle est proportionnelle à l'intégrale de $m(t)$ dans la modulation de fréquence. La fréquence instantanée est quant à elle proportionnelle à $m(t)$ dans la modulation de fréquence alors qu'elle est proportionnelle à la dérivée de $m(t)$ dans la modulation de phase. La figure 4.2 présente l'équivalence entre les modulations MF et MP.

La modulation de fréquence étant bien plus courante que la modulation de phase, la suite de l'étude ne considère que la modulation de fréquence.

4.2 Analyse spectrale de la modulation de fréquence

La détermination du spectre d'un signal modulé en fréquence $s_{MF}(t)$ modulé par un message $m(t)$ quelconque reste souvent inconnu car il est nécessaire de réaliser la transformée de Fourier du signal

$$s_{MF}(t) = A \cos(2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_0^t m(u) du) \quad (4.6)$$

où le message $m(t)$ intervient dans l'argument de la fonction $\cos()$.

4.2.1 Cas d'un signal sinusoïdale

Il est cependant possible de déterminer une expression analytique pour des signaux $m(t)$ simples. Pour un message sinusoïdale on a :

$$m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$$

La fréquence instantanée $F_i(t)$ (et non la fréquence au sens de Fourier) vaut alors :

et varie dans l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ avec $\Delta f = k_f A_m$.
La phase instantanée $\Phi_i(t)$ est obtenue par intégration de $F_i(t)$:

On définit alors l'indice de modulation β comme le rapport entre l'excursion maximale et la fréquence du message :

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f A_m}{f_m} \quad (4.7)$$

Le signal modulé $s_{MF}(t)$ se met alors sous la forme :

L'enveloppe complexe de ce signal s'écrit :

$$\alpha_s(t) = A e^{j\beta \sin 2\pi f_m t}$$

Comme $s_{MF}(t)$, $\alpha_s(t)$ est un signal périodique de période f_m et peut donc être décomposé en série de Fourier :

$$\alpha_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2j\pi n f_m t} \text{ avec } c_n = f_m \int_{-1/(2f_m)}^{+1/(2f_m)} \alpha_s(t) e^{-2j\pi n f_m t} dt$$

En remplaçant $\alpha_s(t)$ par sa valeur :

$$c_n = f_m \int_{-1/(2f_m)}^{+1/(2f_m)} A e^{j(\beta \sin 2\pi f_m t - 2\pi n f_m t)} dt$$

On peut reconnaître en posant $x = 2\pi f_m t$, la définition des fonction de Bessel de première espèce d'ordre n : $J_n(\beta)$. On peut alors réécrire la série de Fourier :

$$\alpha_s(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{2j\pi n f_m t}$$

ce qui donne en revenant au signal $s_{MF}(t)$:

(4.9)

Pour information, les fonctions de Bessel de première espèce sont présentées sur la figure 4.3
L'expression du spectre est finalement obtenue en effectuant une transformée de Fourier :

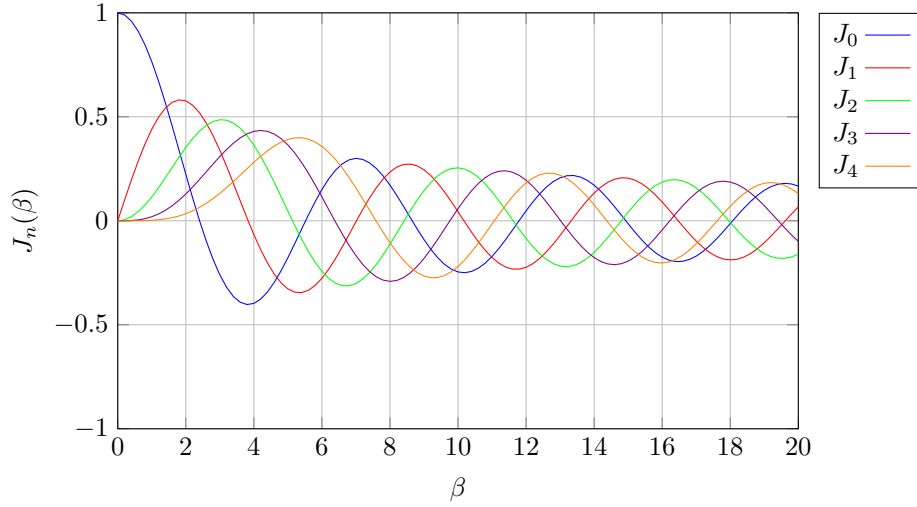


FIGURE 4.3 – Fonctions de Bessel de première espèce $J_n(\beta)$

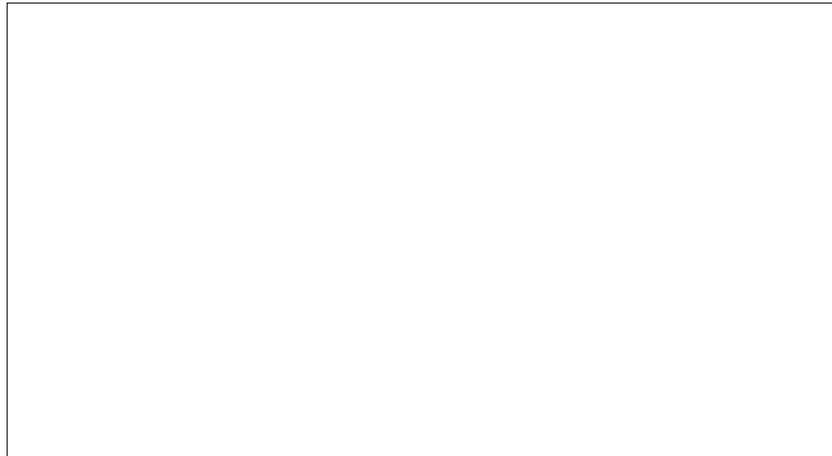


FIGURE 4.4 – Spectre du signal $s_{MF}(t)$ pour $m(t)$ sinusoïdale et différentes valeur de β

Ce spectre est constitué d'une infinité de raies de fréquences $f_0 \pm n f_m$ d'amplitude $J_n(\beta)$. Les raies en $f_0 + n f_m$ et $f_0 - n f_m$ ont un module identique mais sont en opposition de phase pour n impair. Le spectre d'un signal MF peut, en pratique, être considéré un signal à bande limitée.

Le spectre est aussi très sensible à la valeur de l'indice de modulation β . Pour β faible ($\beta \ll 1$) on peut montrer que $J_0(\beta) \approx 1$; $J_1(\beta) \approx \beta/2$; $J_n(\beta) \approx 0$. Le spectre est alors constitué d'une raie à la fréquence de la porteuse et de deux raies latérales en opposition de phase. Il ressemble donc très fortement au spectre du signal DBAP. Cependant, lorsque la valeur de β augmente, la bande occupée par le signal MF augmente aussi. En pratique, la bande utilisée par la modulation de fréquence est bien plus large que la bande occupée par une modulation linéaire.

Dessiner sur la figure 4.4 le spectre du signal $s_{FM}(t)$ pour un signal modulant sinusoïdale et pour les valeurs suivantes de l'indice de modulation : $\beta = 1.5, 2.4, 3.83$.

Pour un signal $m(t)$ quelconque et sans hypothèses supplémentaires, nous avons vu que l'expression du spectre du signal modulé était en général inconnue. En définissant de manière empirique un indice de modulation généralisé par :

$$\beta = \frac{\Delta f}{b} = \frac{k_f |m(t)|_{max}}{b} \quad (4.11)$$

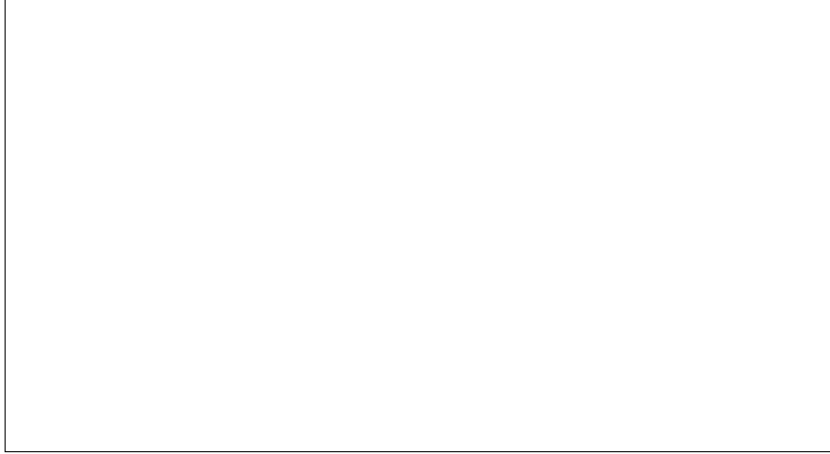


FIGURE 4.5 – Représentation du spectre d'un signal MF avec β faible

il est cependant possible de déterminer une expression analytique dans deux cas particuliers *i.e.* lorsque l'indice de modulation généralisé est faible et lorsqu'il est élevé.

4.2.2 Cas d'une modulation à faible indice

Pour un indice de modulation généralisé suffisamment faible ($\beta < 0.5$) on peut déterminer l'expression du spectre du signal MF pour un message quelconque. Le signal MF $s_{MF}(t)$ a pour expression :

$$s_{MF}(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

et peut se mettre sous la forme :

Si β est suffisamment faible, on peut poser :

$$\cos \phi(t) \approx 1 \quad \sin \phi(t) \approx \phi(t)$$

ce qui conduit à :

On peut remarquer que $s_{MF}(t)$ dépend linéairement de $\phi(t)$. L'expression du spectre vaut alors :

Sachant que $\Phi_i(t)$ est proportionnelle à l'intégrale de $m(t)$, il vient :

La figure 4.5 présente le spectre du signal MF pour un indice faible.

4.2.3 Cas d'une modulation à grand indice

Pour un indice de modulation élevé, le théorème de Woodward indique que la densité spectrale de puissance du signal MF est déterminée par, et à la même forme que la densité de probabilité de $m(t)$:

$$|S_{MF}(f)|^2 = \frac{A^2}{4k_f} \left(p_m\left(\frac{f-f_0}{k_f}\right) + p_m\left(\frac{f+f_0}{k_f}\right) \right) \quad (4.16)$$

où $p_m(x)$ est la densité de probabilité du message $m(t)$. La figure 4.6 présente le spectre du signal MF pour un indice élevé.

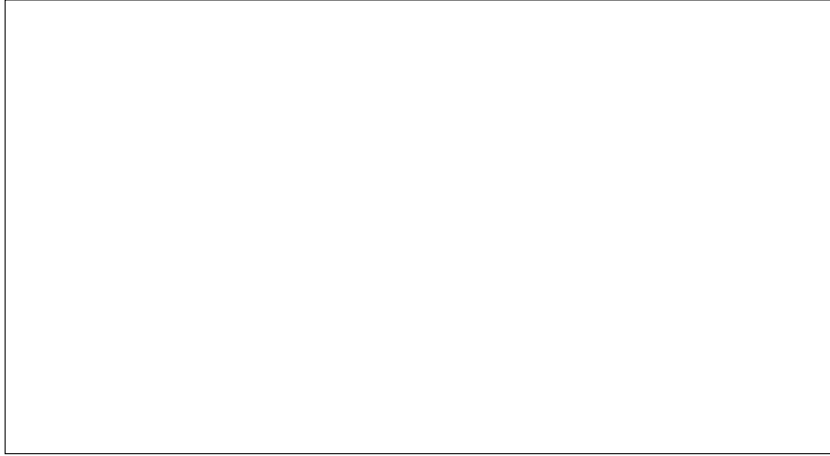


FIGURE 4.6 – Représentation du spectre d'un signal MF avec β faible

4.3 Largeur de bande utile du signal MF

Nous avons vu que le signal FM engendré par un message $m(t) = A_m \cos 2\pi f_0 t$ possède une largeur de bande théorique infinie. Cependant, l'amplitude des raies $J_n(\beta)$ diminue avec n ce qui permet de considérer le signal FM comme un signal à bande étroite. Il se pose alors la question de déterminer la largeur de bande utile du signal. Intuitivement, on peut se douter qu'il existe un compromis entre la bande du signal et le taux de distorsion.

Si l'on désigne par $N(\beta)$ le nombre de paires de raies d'amplitude significative, la largeur de bande peut être exprimé par :

$$B = 2N(\beta)f_m$$

et où une raie possède une amplitude significative si la somme des puissances des raies inférieures (elle y compris) contiennent au moins 98% de la puissance totale du signal MF.

La puissance du signal MF peut être déterminé à partir de son expression temporelle (ou fréquentielle) :

Le nombre $2N(\beta)$ de raies significatives est donc le nombre minimum tel que :

$$\sum_0^N J_n^2(\beta) > 0.98$$

Le tableau 4.1 présente les valeurs de $J_n(\beta)$ pour différentes valeurs de n et de β .

On peut alors remarquer que le nombre $N(\beta)$ vérifie la relation :

La largeur de bande utile d'un signal MF modulé par une sinusoïde en considérant un indice de modulation β vaut donc :

$$(4.17)$$

$$(4.18)$$

La bande B ainsi mesurée est appelée bande de Carson. On peut voir qu'elle dépend à la fois de l'amplitude de $m(t)$ et de sa fréquence.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0.765 | 0.224 | -0.260 | -0.397 | -0.178 | 0.151 | 0.300 | 0.172 | -0.090 | -0.246 |
| 1 | 0.440 | 0.577 | 0.339 | -0.066 | -0.328 | -0.277 | -0.005 | 0.235 | 0.245 | 0.044 |
| 2 | 0.115 | 0.353 | 0.487 | 0.364 | 0.046 | -0.243 | -0.301 | -0.113 | 0.145 | 0.255 |
| 3 | 0.0195 | 0.129 | 0.309 | 0.430 | 0.365 | 0.115 | -0.168 | -0.291 | -0.181 | 0.058 |
| 4 | 0.0025 | 0.0340 | 0.132 | 0.281 | 0.391 | 0.358 | 0.158 | -0.106 | -0.266 | -0.219 |
| 5 | | 0.0070 | 0.0430 | 0.132 | 0.261 | 0.362 | 0.348 | 0.186 | -0.055 | -0.234 |
| 6 | | 0.0012 | 0.0114 | 0.0491 | 0.131 | 0.246 | 0.339 | 0.338 | 0.204 | -0.014 |
| 7 | | | 0.0025 | 0.0151 | 0.0534 | 0.130 | 0.234 | 0.320 | 0.328 | 0.217 |
| 8 | | | | 0.0040 | 0.0184 | 0.0565 | 0.128 | 0.223 | 0.305 | 0.318 |
| 9 | | | | | 0.0055 | 0.0211 | 0.0589 | 0.127 | 0.215 | 0.292 |
| 10 | | | | | 0.0015 | 0.0069 | 0.0236 | 0.0607 | 0.125 | 0.208 |
| 11 | | | | | | 0.0020 | 0.0083 | 0.0256 | 0.0622 | 0.123 |

TABLE 4.1 – Valeurs des fonctions de Bessel $J_n(\beta)$

La bande de Carson peut notamment être étendue au cas d'un signal $m(t)$ quelconque de bande b . Dans ce cas l'indice de modulation est remplacé par l'indice de modulation généralisé ce qui donne :

$$B = 2(\beta + 1)b \quad (4.19)$$

$$= 2(\Delta f + b) \text{ avec } \Delta f = k_f |m(t)|_{max} \quad (4.20)$$

En remarquant que la bande peut aussi être exprimée par :

$$B = 2\Delta f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

On peut retrouver que la largeur de bande pour un indice de modulation élevé ne dépend plus de la fréquence et vaut $2\Delta f$. A l'inverse, pour un indice de modulation faible, la bande de dépend plus de l'amplitude du message et vaut $2b$.

Pour la radiodiffusion FM (bande 88-108 MHz), les normes fixent l'excursion de fréquence maximum à 75 kHz de plus on considère que la bande des signaux modulant est de 15 kHz. Calculer la bande utile occupé par le signal.

$$B = 2(\Delta f + b) = 190\text{kHz}$$

4.4 Génération des signaux MF

Il existe 2 méthode permettant de réaliser un modulateur MF. La première est basé sur un oscillateur contrôlé en tension (méthode directe). La seconde est basé sur la formule (4.13) (méthode indirecte). La méthode directe est basé sur la modification de la fréquence d'accord d'un oscillateur. Dans le cas où l'oscillateur est accordé avec un circuit LC , la fréquence de résonance est donnée par :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Si on utilise un condensateur dont la capacité dépend d'une tension de commande v par une relation du type :

$$C(v) = C_0 - \alpha v$$

alors la fréquence de l'oscillateur sera commandé par la tension v :

$$f(v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L}}(C_0 + \alpha v)^{-1/2}$$

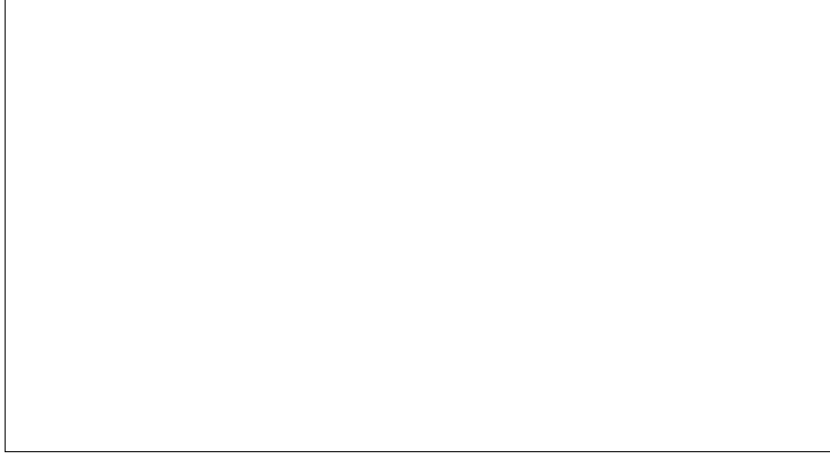


FIGURE 4.7 – Architecture d'un modulateur de fréquence faible indice

Pour une tension suffisamment faible, il est possible de réaliser un DL autour 0 :

$$f(v) \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{L}} \left(1 + \frac{\alpha}{2C_0} v\right)$$

La fréquence centrale ainsi que la sensibilité étant données par :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad k_f = \frac{f_0\alpha}{2C_0}$$

En pratique la capacité variable est une diode “Varicap”. Les modulateurs construits sur ce principe sont simples mais souffrent d'instabilités et de dérives.

La méthode indirecte a été proposée par Armstrong en 1936. Le principe de cette méthode repose sur la modulation de fréquence à faible indice. En effet dans ce cas le signal MF peut être mis sous la forme :

$$s_{MF}(t) \approx A \cos 2\pi f_0 t - A\phi(t) \sin 2\pi f_0 t$$

Le signal MF peut alors être généré sans oscillateur contrôlé en tension (et donc sans instabilité). La figure 4.7 présente l'architecture du modulateur de fréquence à faible indice.

La suppression de l'intégrateur produit alors une modulation de phase (à faible indice aussi). Dans le but d'augmenter l'indice de modulation le signal en sortie du modulateur à faible indice est en général envoyé dans un multiplicateur de fréquence (permettant de multiplier l'indice de modulation par n) puis ramené sur la fréquence porteuse f_0 par un mélangeur.

4.5 Démodulation du signal MF

La démodulation d'un signal modulé en fréquence (ou en phase) peut être effectuée en utilisant un discriminateur ou une boucle à verrouillage de phase.

Le discriminateur est le montage le plus simple et consiste à transformer la modulation de fréquence en modulation d'amplitude. Le signal FM a pour expression :

$$s_{MF}(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi(t)) \text{ avec } \phi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(u) du \quad (4.21)$$

En dérivant le signal par rapport au temps, on obtient :

$$s'_{MF}(t) = -A \sin(2\pi f_0 t + \phi(t)) (2\pi f_0 + \phi'(t)) \quad (4.22)$$

$$= -A(2\pi f_0 + 2\pi k_f m(t)) \sin(2\pi f_0 t + \phi(t)) \quad (4.23)$$

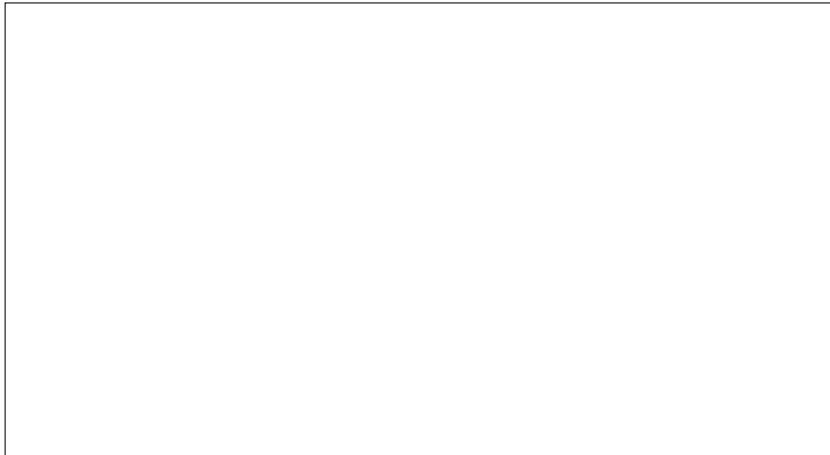


FIGURE 4.8 – Démodulation de fréquence par discriminateur

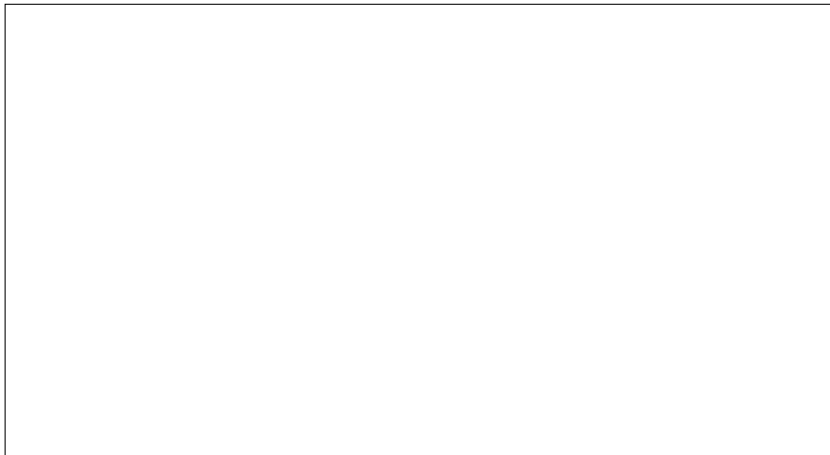


FIGURE 4.9 – Principe d'une boucle à verrouillage de phase

Le signal $s'_{MF}(t)$ est toujours modulé en fréquence cependant son enveloppe est une fonction linéaire de $m(t)$ et peut ainsi être récupéré avec un simple détecteur d'enveloppe (comme dans la modulation AM). La figure 4.8 présente l'allure temporelle des signaux mis en jeu.

Un discriminateur est donc composé d'un filtre dérivateur suivi d'un détecteur d'enveloppe. Le filtre dérivateur peut être créer à partir de la pente d'un filtre passe bande.

En pratique, les performances de ce montage restent médiocres car le message est sensible aux variations d'amplitude parasites de la porteuse. Ce défaut peut néanmoins être corrigé en insérant un montage limiteur avant le filtre dérivateur. Ce montage (non linéaire) permet d'éliminer les variations d'amplitude de la porteuse en écrétant le signal reçu.

La boucle à verrouillage de phase utilise un principe complètement différent. Elle est constituée (principalement) d'un oscillateur commandé en tension ainsi que d'un comparateur de phase. La figure 4.9 présente l'architecture d'une boucle à verrouillage de phase.

Le comparateur de phase fournit un signal directement proportionnel à $m(t)$.

La boucle à verrouillage de phase est utilisé dans les applications où le discriminateur ne permet pas d'obtenir des performances acceptables. De nos jour, la plupart des récepteur MF utilisent une boucle à verrouillage de phase.