# MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

**Chaînes de Markov à temps discret (CMTD)**
Séance de TD du 05 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 11 de la séance de TD consacrée aux chaînes de Markov à temps discret. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

**Exercice 11**

Les études dans une école d'ingénieurs durent 3 ans[1]. A l'issue de chaque année, un étudiant peut redoubler avec la probabilité $r$, passer dans la classe suivante avec la probabilité $p$, ou etre exclu avec la probabilité $e$. On supposera dans un premier temps que ces probabilités ne dépendent ni de l'année d'étude de l'étudiant, ni surtout du nombre de redoublements éventuels de celui-ci ... Ces hypothèses pourront être levées ensuite pour proposer un modèle plus réaliste!

1. Modéliser le cursus d'un élève par une chaîne de Markov à cinq états.

2. Quatre ans viennent de s'écouler depuis que Robert est entré à l'école. Que peut on savoir sur l'année d'étude dans laquelle se trouve Robert ?

3. Calculer la probabilité qu'un élève, venant de rentrer dans l'école, arrive à avoir son diplôme. Même question avec un élève de deuxième, puis de troisième année.

[1]Toute ressemblance avec des établissement actuels ou ayant existé serait purement fortuite et ne pourrait être que le fruit d'une pure coincidence...

4. Calculer la durée moyenne que passe un étudiant à l'école, avant l'obtention du diplôme ou son renvoi, en supposant qu'il entre en première année.

5. Proposez une modélisation plus réaliste du cursus "ingénieur" à L'ESISAR dans laquelle un seul redoublement est permis.

## Correction de l'Exercice 11

1. Soit $X_n \in E := \{1, 2, 3, d, e\}$, l'année d'étude dans laquelle se trouve un étudiant au cours de sa $n$-ième année passée dans l'école. L'état $d$ correspond à l'état *diplômé* et est absorbant, de même que l'état $e$ qui correspond à l'état *exclu*. Le parcours d'un étudiant dans cette école est modélisé comme une CMTD représentée à la figure 1. Les probabilités $p$, $r$ et $e$ satisfont les contraintes

$$r, p, e \in [0, 1]$$
$$p + r + e = 1$$

La matrice de passage associée à la chaîne de Markov représentée à la figure 1 est

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} r & p & 0 & 0 & e \\ 0 & r & p & 0 & e \\ 0 & 0 & r & p & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

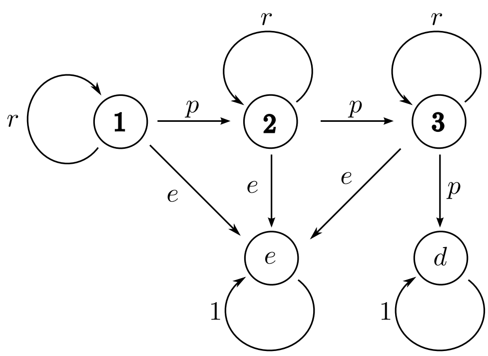


Figure 1: Le graphe associé à la CMTD qui modélise le parcours d'un élève dans une école d'ingénieur, dans l'exercice 11, parties 1 à 4

2. En utilisant l'approche algébrique, on obtient :

$$P\left(X_4 = j \,|\, X_0 = 1\right) = \left(\mathbf{P}^4\right)_{1,j}, \; \forall j \in E := \{1, 2, 3, d, e\}$$

Le calcul de $\mathbf{P}^4$ étant un peu fastidieux, on peut aussi utiliser le graphe de la CMTD et la formule de probabilité d'un chemin. On a ainsi, par exemple

$$P\left(X_4 = 1 \,|\, X_0 = 1\right) = P\left(1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1\right) = r^4$$

car il n'y a qu'un seul chemin possible, le chemin $1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1$, pour partir de l'année 1 et après 4 ans écoulés, y être toujours. Par contre, il y a quatre chemins différents pour aller de l'année 1 à l'année 2 en quatre ans : les chemins $1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 2$, $1 \to 1 \to 1 \to 2 \to 2$, $1 \to 1 \to 2 \to 2 \to 2$ et $1 \to 2 \to 2 \to 2 \to 2$. Chacun de ces chemins correspond à un passage et trois redoublements. On a donc :

$$P\left(X_4 = 2 \,|\, X_0 = 1\right) = 4pr^3$$

Pour aller en quatre ans de l'année 1 à l'année 3, il faut deux passage et deux redoublements. On a donc :

$$P\left(X_4 = 3 \,|\, X_0 = 1\right) = C_4^2 p^2 r^2 = 6p^2 r^2$$

où $C_4^2$ est le nombre de choix possibles des deux années réussies parmi les 4. On obtient par ailleurs pour la probabilité d'être diplômé après quatre ans :

$$P\left(X_4 = d \,|\, X_0 = 1\right) = p^3 + 3rp^3$$

qui correspond soit à la réussite des trois premières années sans redoublement, soit à un éventuel unique redoublement de la première, de la deuxième ou de la troisième année. Enfin, la probabilité de finir exclu est la probabilité complémentaire :

$$P\left(X_4 = e \,|\, X_0 = 1\right) = 1 - r^4 - 4pr^3 - 6p^2r^2 - p^3 - 3rp^3 = (1-e)^4 + ep^3$$

3. On demande ici les probabilités $f_{1,d}$, $f_{2,d}$ et $f_{3,d}$. En utilisant les formules du cours, on obtient :

$$\begin{aligned} f_{1,d} &= p_{1,d} + p_{1,1} f_{1,d} + p_{1,2} f_{2,d} + p_{1,3} f_{3,d} + p_{1,e} f_{e,d} \\ &= p_{1,1} f_{1,d} + p_{1,2} f_{2,d} \\ &= r f_{1,d} + p f_{2,d} \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$f_{2,d} = r f_{2,d} + p f_{3,d}$$

et

$$f_{3,d} = p + r f_{3,d}$$

En résolvant ces trois dernière équations, on obtient :

$$\begin{aligned} f_{3,d} &= \frac{p}{1-r} \\ f_{2,d} &= \frac{p^2}{(1-r)^2} \\ f_{1,d} &= \frac{p^3}{(1-r)^3} \end{aligned}$$

4. On demande ici les temps moyens d'entrée dans la sous-chaîne $F := \{e, d\}$, en partant de l'état $i \in \{1, 2, 3\}$, que nous noterons $\mathbf{T}_i$. En appliquant la formule vue en cours, on trouve :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & p & 0 \\ 0 & r & p \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \end{pmatrix}$$

   On trouve pour la solution :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_3 &= \frac{1}{1-r} \\ \mathbf{T}_2 &= \frac{1}{1-r}\left(1 + \frac{p}{1-r}\right) \\ \mathbf{T}_1 &= \frac{1}{1-r}\left(1 + \frac{p}{1-r}\left(1 + \frac{p}{1-r}\right)\right) \end{aligned}$$

5. Les probabilités de transition dépendent dans ce cas, non seulement de l'année d'étude dans laquelle se trouve l'élève, mais également du fait qu'il ait (ou non) déjà redoublé. Ainsi, si nous voulons maintenir la propriété markovienne, nous devons dédoubler les états $\{1, 2, 3\}$, pour distinguer les cas des élèves redoublants des autres. Le nouvel espace d'état est donc $E := \{1, 1_r, 2, 2_r, 3, 3_r, d, e\}$. Avec cet espace d'état étendu pour la chaîne, les probabilités de transition d'un état $i \in E$ vers un état $j \in E$ ne dépendent plus que de l'état initial et de l'état final. La propriété markovienne est donc restaurée. Le parcours d'un étudiant dans cette école est modélisé par la CMTD représentée à la figure 2. Les probabilités de transition des états $i \in \{1, 2, 3\}$ vers l'état $e$ valent $e + r$, la probabilité d'être exclu ou de rédoubler (ce qui pour un redoublant équivaut à une exclusion).

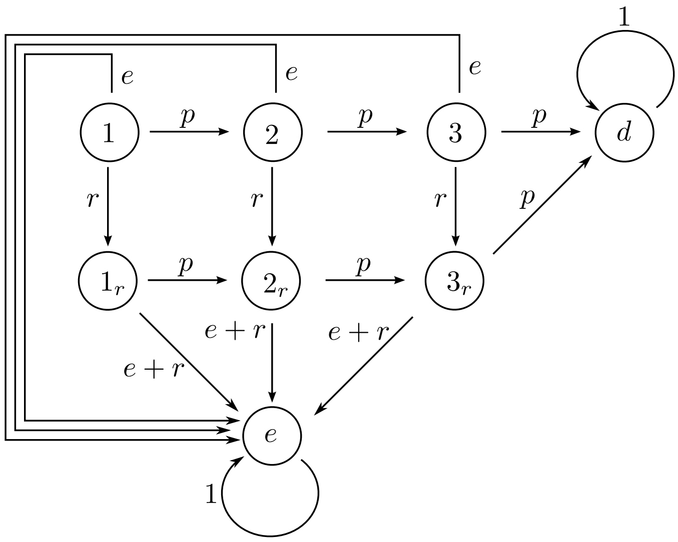


Figure 2: Le graphe associé à la CMTD qui modélise le parcours d'un élève dans une école d'ingénieur, dans l'exercice 11, partie 5