Exercice 1
Soit le signal $f(t) = \sup(\sin(t), 0)|$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Exercice 2
Soit le signal f 2π périodique telle que sur $\forall t \in [-\pi;\pi], f(t) = t(\pi - t)(\pi + t)$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire les sommes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$

Exercice 3
Soit f la fonction 2 périodique définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-1;0] \\ -x+1 & \text{si } x \in [0;1] \end{cases}$

(a) Calculer les coefficients de Fourier.
(b) Quelle est la convergence de la série de Fourier de f?
(c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Exercice 4 Signal à énergie finie
Calculer l'énergie du signal défini par $f(t) = e^{-at}H(t)$ avec $a > 0$ et H est la fonction d'Heaviside :

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note aussi $H(t) = \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t)$

Exercice 5
Tracer et calculer la transformée de Fourier des signaux suivants :

1. $f(t) = \cos(2\pi f_0 t) \times \mathrm{rect}_T(t/T)$ avec $\mathrm{rect}_T(t/T) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leqslant T/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $g(t) = tri_T(t/T)$ avec $tri_T(t/T) = \begin{cases} t+T & \text{si } -T \leqslant t \leqslant 0 \\ -t+T & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 & \text{si} |t| > T \end{cases}$
3. $h(t)te^{-at}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t)$ avec $a > 0$.

Exercice 6

1. Déterminer la fonction x dont la transformée de Fourier est $X(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \in [-\alpha;\alpha] \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$
2. En déduire la valeur des intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$$

Exercice 7
Soit le signal f défini par

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter les signaux $f(t), f(-t),\ f(t-t_0),\ f(t+t_0),\ f(-t-t_0),\ f(-t+t_0),\ f(2t), f(2t-t_0)$ avec $t_0 > 0$.

2. Soit le signal g défini par $g(t) = f(t-t_0)$, comme s'exprime $g(-t)$ en fonction de f.

Exercice 8
Soient deux signaux de supports respectifs $[a;b]$ et $[c;d]$ tels que $c \in [a;b]$ et $d > b$.

1. Rappeler les expressions sous forme d'intégrale du produit de convolution $f * g$ et de $f * h$ où $h(t) = g(-t)$.

2. Déterminer et représenter le support sur x de $t \mapsto g(t-x)$ et $t \mapsto g(x-t)$.

Exercice 9
Soient les signaux f et g définis par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [1;3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } g(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0;1] \\ 2-t & \text{si } t \in [1;2] \\ 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t > 2 \end{cases}$$

1. représenter les signaux f et g.

2. Calculer le produit de convolution $h = f * g$.

Exercice 10
Soient a et b 2 réels strictement positifs, et soient f et g deux signaux définis par :

$$f(t) = e^{-at}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t) \text{ et } g(t) = e^{-bt}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t)$$

Calculer $f * g$