Document autorisé : Les tables des lois de probabilité
Calculatrice autorisée : type collège.
Le barème est donné à titre indicatif et peut subir éventuellement quelques modifications.

Exercice 1 *(8 points)*
Soit $x(t)$ et $y(t)$ les signaux définis par :

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} A & \text{si } t \in [-T - T/2; -T + T/2] \\ -A & \text{si } t \in [T - T/2; T + T/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut aussi écrire $x(t) = A \times \mathbb{1}_{[-T/2;T/2]}$ et $y(t) = A \times \mathbb{1}_{[-T-T/2;-T+T/2]} - A \times \mathbb{1}_{[T-T/2;T+T/2]}$

1. Calculer l'énergie et la puissance des signaux $x(t)$ et $y(t)$.
2. Déterminer X la transformée de Fourier du signal $x(t)$.
3. Déterminer $y(t)$ en fonction de $x(t - T)$ et $x(t + T)$. En déduire $Y(f)$ en fonction de $X(f)$.

Exercice 2 *(8 points)*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π périodique, impaire, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; \pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. Etudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f.
3. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 3 *(6,5 points)*
L'institut de sondage pour lequel il travaille, a confié à Robert le mission de savoir quelle est la proportion de français qui aime la tartiflette. Comme le sujet est sensible, on lui a demandé d'obtenir cette proportion à $0,01$ près au risque de 1%.

1. Combien de personnes doit-il interroger pour qu'il obtienne ce résultat?
2. Finalement, il n'a pu interroger que 12000 personnes, 8000 ont déclaré aimer la tartiflette. Donner un intervalle de confiance au risque de 1% de la proportion de personnes qui aiment la tartiflette.
3. Dans un deuxième temps on lui a demandé de connaitre cette proportion parmi les savoyards (ou savoisiens, utilisez le terme que vous préférez) toujours à $0,01$ près au risque de 1%. Or on sait, que parmi les savoyards (ou savoisiens) cette proportion est supérieure à 90%. Combien doit-il interroger de savoisiens (ou savoyards).

Exercice 4 *(10 points)*
Soit X une variable aléatoire continue, dont la densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^4} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Calculer la constante c. Donner la fonction de répartition F_X de X.
2. Calculer $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 3)$ et $\mathbb{P}(X = 4)$.

3. Calculer, quand ces quantités existent, $\mathbb{E}(X^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer, si ces quantités existent, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{E}(-3X-1)$ et $\mathbb{V}(-3X-1)$.
5. Soit $Y = X^2$, déterminer la densité de Y et calculer, quand elles existent les quantités $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Exercice 5 *(7,5 points)*
On souhaite comparer le temps d'exécution d'un algorithme dans les 2 cas suivants :

- lors d'une programmation séquentielle.
- lors d'une programmation parallèle (multithread)

Le temps d'exécution du programme est la somme :

- du temps de démarrage et de synchronisation X_n en secondes qui suit une loi exponentielle de paramètre λ/n où $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Les variables aléatoires (X_n) sont indépendantes.
- du temps de calcul Y_n en secondes qui suit une loi uniforme sur $[a/n; b/n]$ où $0 < a < b$. Les variables aléatoires (Y_n) sont indépendantes.

On suppose que pour $n \in \mathbb{N}^*$ X_n et Y_n sont indépendantes. n est le nombre de threads (le nombre de calculs en parallèle), dans le cas de la programmation séquentielle, on a $n = 1$. Soit T_n le temps d'exécution total du programme, c'est à dire $T_n = X_n + Y_n$.

1. Calculer la probabilité que le temps de démarrage et de synchronisation X_n dans le cas de programmation parallèle avec n threads ($n > 1$) soit inférieure au temps de démarrage X_1 dans le cas séquentiel.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le temps moyen d'exécution du programme en fonction de n. En déduire les valeurs de n pour lesquelles il serait préférable d'utiliser une programmation parallèle en fonction de a, b et λ.
3. Déterminer la densité de la variable aléatoire T_n.