MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Chaînes de Markov à temps discret (CMTD)
Séance de TD du 05 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 17 de la séance de TD consacrée aux chaînes de Markov à temps discret. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 17 (Les urnes d'Ehrenfest)
On considère deux urnes A et B contenant initialement b boules chacune. A chaque étape, on choisit une boule parmi les $2b$ et on la change d'urne. On note X_n le nombre de boules dans l'urne A à l'étape n.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov, et determiner les probabilités de transition de cette chaîne.

2. On prend $b = 5$. Calculer la distribution stationnaire de la chaîne. Est elle la loi limite ?

3. Si $b = 5$, determiner le nombre moyen de transitions avant que l'une des deux urnes ne se vide.

Correction de l'Exercice 17

1. Soit $X_n \in E := \{0, 1, \ldots, 2b\}$ le nombre de boules contenues dans l'urne A à l'étape n (après le $n^{\text{ième}}$ tirage). Les états de E et le probabilités de transition sont représentées à la figure 1. Les probabilités

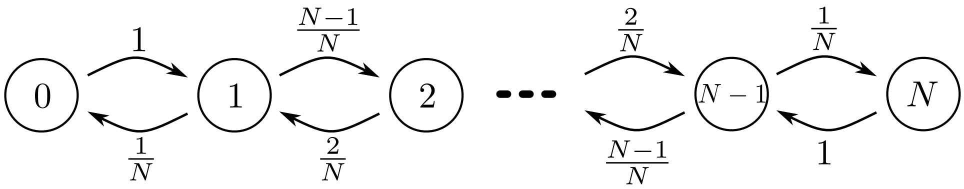

Figure 1: Le graphe associé à la CMTD qui modélise le tirages aléatoires successifs dans le problème des urnes d'Ehrenfest avec $N := 2b$ boules (exercice 17).

de transitions au $n^{\text{ième}}$ tirage ne dépendent que du nombre de boules dans chacune des urnes au moment du tirage, c'est-à-dire de l'état de la chaîne au temps $n-1$. Il s'agit donc bien d'un processus markovien. La matrice de transition associée est :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2b} & 0 & \frac{2b-1}{2b} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{2}{2b} & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \frac{2}{2b} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \frac{2b-1}{2b} & 0 & \frac{1}{2b} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La CMTD de la figure 1 est finie et irréductible (une seule classe d'équivalence). Tous les états sont récurrents non nuls. Cependant, elle est aussi périodique, de période 2. La distribution limite n'existe donc pas. La distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ est solution des équations :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}_0 = \frac{1}{2b}\boldsymbol{\pi}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi}_k = \frac{2b-(k-1)}{2b}\boldsymbol{\pi}_{k-1} + \frac{k+1}{2b}\boldsymbol{\pi}_{k+1}, \text{ pour } k \in \{1, \dots, 2b-1\} \\ \vdots \\ \frac{1}{2b}\boldsymbol{\pi}_{2b} = \frac{1}{2b}\boldsymbol{\pi}_{2b-1} \end{cases} \tag{1}$$

avec la condition de normalisation

$$\sum_{i=0}^{2b} \boldsymbol{\pi}_i = 1 \tag{2}$$

En résolvant les équations (1), on trouve

$$\boldsymbol{\pi}_k = \frac{k+1}{2b-k}\boldsymbol{\pi}_{k+1}, \ \forall k \in \{0, \dots, 2b-1\}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de normalisation (2), on otbient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2b} \boldsymbol{\pi}_i &= \left[\sum_{k=0}^{2b} \frac{(2b)!}{k!(2b-k)!}\right] \boldsymbol{\pi}_{2b} \\ &= 2^{2b} \boldsymbol{\pi}_{2b} \\ &= 1\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\boldsymbol{\pi}_{2b} = \frac{1}{2^{2b}}$$

et

$$\boldsymbol{\pi}_{2b-k} = \frac{(2b)!}{k!(2b-k)!} \frac{1}{2^{2b}}, \ \forall k \in \{1, \ldots, 2b\} \tag{3}$$

En particulier, dans le cas $b = 5$, on trouve :

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{1024} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

D'une manière générale, la distribution stationaire (3) est une loi binomiale $B(2b, \frac{1}{2})$. Dans ce modèle, en régime stationnaire, les configurations proches de l'équilibre, où le nombre de boules dans chacune des deux urnes est sensiblement le même, sont docn plus probables que les configurations déséquilibrées.

3. On cherche à déterminer $\mathbf{T}_i$, les temps moyens de séjour dans la classe $\bar{F} := \{1, \ldots, 2b-1\}$, sachant que $X_0 = i$ (pour $i \in \bar{F}$). On sait que (voir cours) :

$$\mathbf{T} = \mathbb{1} + \mathbf{P}|_{\bar{F}} \, \mathbf{T}$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{T} = \left(\mathbf{I}_{2b-1} - \mathbf{P}|_{\bar{F}}\right)^{-1} \mathbb{1}$$

avec

$$\mathbf{P}|_{\bar{F}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2b-1}{2b} & & & \\ \frac{2}{2b} & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & \frac{2}{2b} \\ & & & \frac{2b-1}{2b} & 0 \end{pmatrix}$$

et où $\mathbf{I}_{2b-1}$ désigne la matrice identité de taille $(2b-1) \times (2b-1)$. Dans le cas particulier où $b = 5$, on trouve

$$\mathbf{T}_b = \mathbf{T}_5 = 584.33..$$