THEORIE DES COMMUNICATIONS

Cahier de Travaux Dirigés

3° année

Cours de Tronc Commun

Savoir que l'on sait ce que l'on sait, et savoir que l'on ne sait pas ce que l'on ne sait pas, voilà la véritable science

Confucius

Modélisation des Signaux à Bande Etroite

Exercice 1 : Signaux analytiques

1. Quels sont les signaux analytiques associés aux signaux réels suivants ?

$$x(t) = cos(2\pi f_0 t)\ ,\ \ y(t) = [1 + m\,cos(2\pi Ft)]cos(2\pi f_0 t)$$

où m, f_0 et F sont des constantes avec $F < f_0$.

2. Représenter schématiquement $x(t)$ et $y(t)$, leurs spectres et le spectre de leurs signaux analytiques associés.

Exercice 2 : Transformée de Hilbert

1. Déterminer et représenter la transformée de Hilbert d'une fonction rectangulaire d'amplitude A.

2. Donner l'expression du signal analytique correspondant et de son spectre.

Exercice 3 : Autocorrélation de la transformée de Hilbert

Montrer que l'autocorrélation du signal $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est identique à l'autocorrélation de la transformée de Hilbert de ce signal.

Exercice 4 : Signal analytique et transformée de Hilbert

1. Déterminer le signal analytique associé au signal réel x(t) de transformée de Fourier :

$$X(f) = \frac{1}{2} exp(-a|f|), a \in \mathbb{R}^{*+}$$

2. En déduire x(t) et sa transformée de Hilbert.

Communications Analogiques

Exercice 1 : Modulations d'amplitude

Soit le signal modulant $m(t)$ et le signal porteuse d'amplitude A et de fréquence f_0.

Les questions qui suivent doivent être résolues en considérant, d'une part une modulation d'amplitude sans porteuse, et d'autre part une modulation d'amplitude avec porteuse de ce signal.

1. Rappeler l'expression du signal modulé $x(t)$ et déterminer sa transformée de Fourier.

On suppose que $m(t)$ est un processus aléatoire stationnaire au sens large de densité spectrale de puissance $S_m(f)$ supposé nul hors de la bande $[-B, B]$ et de puissance P_m.

2. Déterminer l'expression de la densité spectrale de $x(t)$.

3. Déterminer l'expression de l'enveloppe complexe de $x(t)$ et la densité spectrale de puissance correspondante.

4. Quelle est la bande de fréquence D occupée par le signal modulé ?

5. Quelle la puissance transmise P ?

Remarque préalable pour l'étude des performances dans les deux exercices qui suivent

Pour comparer les performances, on se place dans le cas où le bruit sur le canal est additif, blanc, centré de densité spectrale de puissance égale à $N_0/2$ dans la bande occupée par le signal transmis $x(t)$. On calcule le rapport signal sur bruit ρ après démodulation en fonction du rapport signal sur bruit ρ_0 que l'on obtiendrait en bande de base si on disposait de la même puissance transmise et d'une bande $[-B, B]$ utile à la transmission sans distorsion du message :

$$\rho_0 = \frac{P}{2B \times N_0 / 2} = \frac{P}{BN_0}$$

Exercice 2 : Calcul des performances en AM

Soit $x(t)$ un signal modulé en amplitude avec porteuse, d'amplitude A, par $m(t)$ autour de f_0.

On suppose que le signal reçu est la somme du signal émis et d'un bruit blanc $n(t)$ de densité spectrale de puissance $N_0/2$.

1. Décrire le filtre de réception.

2. Déterminer l'expression du signal à démoduler (bruit compris) après filtrage, $r(t)$. Préciser la densité spectrale du bruit.

3. En déduire l'expression de l'enveloppe complexe de $r(t)$. Faire apparaître dans cette expression les composantes en phase et quadrature par rapport à f_0 du bruit et préciser leur densité spectrale de puissance.

4. Montrer qu'en négligeant les termes de second ordre : $|r_b(t)|^2 \approx A^2\left(1 + 2km(t) + \frac{2}{A} p(t)\right)$

5. Montrer que l'expression du signal $s(t)$ obtenu en sortie du détecteur d'enveloppe est : $s(t) = |r_b(t)| \approx A\left(1 + km(t) + \frac{1}{A} p(t)\right)$

6. Quelle est l'expression de $s(t)$ après filtrage passe haut ? Quel est le rapport signal sur bruit finalement obtenu ? Le comparer au cas en bande de base. Conclure.

<u>Exercice 3</u> : Modulation BLU et étude de performance

Partie A : ***Expression d'un signal modulé en BLU***

Soit un signal d'information $m(t)$ de bande ($-B$, B) modulé en Bande Latérale Unique Supérieure (BLS) par une porteuse $p(t)$ de fréquence f_0 et d'amplitude A ; soit $p(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$.

Le signal modulé obtenu est noté $s(t)$.

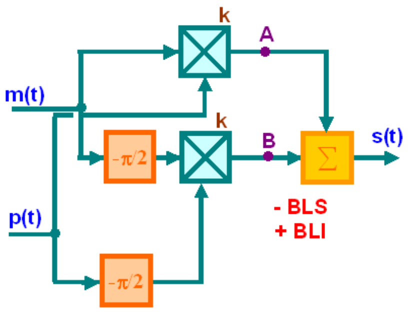
A1. Rappeler (sans calcul) le principe, les intérêts et les inconvénients, d'une modulation Bande Latérale Unique en comparant par rapport à une modulation d'amplitude sans porteuse. Donner un exemple d'application pratique (préciser les fréquences mises en jeu).

A2. Montrer que l'expression analytique de la transformée de Fourier du signal modulé en BLS, notée S(f), par un signal modulant quelconque est donnée par :

$$S(f) = A\left\{M^+(f-f_0) + M^-(f+f_0)\right\} \quad \mathrm{S(f)} = \mathrm{A}\left\{\mathrm{M}^+\left(\mathrm{f}\text{-}\mathrm{f}_0\right) + \mathrm{M}^-(\mathrm{f}+\mathrm{f}_0)\right\}$$

Aide :

- Le principe fonctionnel du modulateur BLS est rappelé sur la figure ci-dessous (où $k = 1$ pour simplifier les expressions) ;



- Si $u(t)$ est l'entrée d'un déphaseur pur de $-\pi/2$ et $v(t)$ est la sortie, on démontre que leurs transformées de Fourier respectives $U(f)$ et $V(f)$ sont reliées par : $V(f) = -j\,U(f)\,Sgn(f)$ où $Sgn(f)$ est la fonction « signe ».

- On note les transformées de Fourier $M^+(f)$ et $M^-(f)$ qui correspondent à $M(f)$ situé respectivement dans les fréquences positives et dans les fréquences négatives.

A3. En déduire les expressions analytiques de la transformée de Fourier :

- Du signal analytique correspondant à $s(t)$, soit $Z_s(f)$;
- De l'enveloppe complexe associée à $s(t)$, soit $S_b(f)$.

Représenter $M(f)$, $S(f)$, $Z_s(f)$ et $S_b(f)$.

Indication pour la représentation schématique :

Sans perte de généralités, et donc, pour et seulement pour les représentations graphiques, on suppose que la transformée de Fourier $M(f)$ de $m(t)$ est un triangle d'amplitude 1.

A4. En déduire que l'enveloppe complexe $s_b(t)$ est égale au signal analytique $z_m(t)$ de $m(t)$ à un facteur constant près que l'on précisera.

Déterminer alors l'expression analytique de $s_b(t)$ en fonction de $m(t)$ et de sa transformée de Hilbert notée $\hat{m}(t)\,\hat{\mathrm{m}}(\mathrm{t})$.

A5. Déterminer finalement l'expression de $s(t)$ en fonction de m(t) et de $\hat{\mathrm{m}}(\mathrm{t})$.

Partie B : ***Etude de Performance de la modulation BLU***

On utilise pour transmettre un message $m(t)$ de bande $2B$ (en tenant compte des fréquences positives et négatives) une modulation BLU supérieure sur une porteuse de fréquence f_0 et d'amplitude A. On note $s(t)$ le signal modulé. Ce signal est soumis à un bruit $b(t)$ additif, blanc, centré, de densité spectrale de puissance $N_0/2$. On note $r(t) = s(t) + b(t)$ le signal reçu. On note $y(t)$ le signal en sortie du filtre de réception.

B1. Quelles sont les caractéristiques précises du filtre de réception ?

B2. Déterminer l'expression analytique de la densité spectrale de puissance de la partie $w(t)$ de $y(t)$ due au bruit $b(t)$.

On note $p(t)$ et $q(t)$ les composantes en phase et en quadrature de $w(t)$ par rapport à f_0. Donner l'expression de $w(t)$ en fonction de $p(t)$ et $q(t)$.

B3. Déterminer les expressions de la densité spectrale de puissance de $p(t)$ et $q(t)$, et les représenter. En déduire la puissance de $p(t)$ et $q(t)$.

B4. En supposant que l'enveloppe complexe de $s(t)$ est donnée par $s_b(t)=A\{m(t)+j\hat{m}(t)\}$ $s_b(t) = A\{m(t) + j\hat{m}(t)\}$, avec $\hat{m}(t)=\mathrm{TH}[m(t)]$, déterminer en fonction de $m(t)$, $p(t)$ et $q(t)$, l'expression de l'enveloppe complexe $y_b(t)$ par rapport à f_0 de $y(t)$.

B5. Rappeler le schéma de principe d'un démodulateur synchrone.

En déduire l'expression du signal $d(t)$ en sortie d'un démodulateur synchrone.

B6. En déduire l'expression, en fonction de A, P_m, B et N_0, du rapport signal sur bruit en sortie du récepteur.

B7. Déterminer le gain de modulation par rapport à une transmission en bande de base utilisant la même puissance pour transmettre.

B8. Conclure en présentant un tableau indiquant de façon synthétique l'expression générale du signal transmis, la bande occupée, le gain de modulation dans les cas suivants : bande de base, modulation d'amplitude sans et avec porteuse, modulation de fréquence, modulation à bande latérale unique (supérieure et inférieure).

Les résultats présentés ici ne sont pas à démontrer obligatoirement : certains cas ont été traités en travaux dirigés, les autres se retrouvent rapidement.

Exercice 4 : Calcul des performances en FM

Soit $x(t)$ un signal modulé en fréquence par $m(t)$ autour de f_0, et d'amplitude A. On note $\phi(t) = 2\pi k\int^{t} m(u)du$. On suppose que ce signal est perturbé par un bruit additif, centré, blanc, de densité spectrale de puissance $N_0/2$. On admet que le démodulateur effectue l'opération suivante : si $e(t) = R(t)exp(j\psi(t))$ est l'entrée, le signal en sortie est $s(t) = d\psi(t)/dt$.

1. Décrire le filtre de réception.

2. Montrer que le signal en sortie de ce filtre a pour décomposition en phase et quadrature par rapport à f_0 :

$$x_b(t) = A\,exp(j\phi(t)) + p(t) + jq(t) = R(t)exp(j\psi(t))$$

où $p(t)$ et $q(t)$ sont deux processus aléatoires stationnaires au sens large dont on déterminera la densité spectrale de puissance.

3. En admettant tout d'abord que le bruit est nul, déterminer la puissance P_S du signal obtenu en sortie du démodulateur.

4. On suppose à présent que $m(t) = 0$.

41) Montrer que si les composantes de bruit peuvent être négligées par rapport à l'amplitude de la porteuse, s(t) s'exprime sous la forme approchée suivante : $s(t) \approx \frac{1}{A}\frac{dq(t)}{dt}$

42) En déduire que la densité spectrale (parfois appelé spectre) de $s(t)$, en sortie du démodulateur, a pour expression : $S_s(f) = (4\pi^2 f^2 / A^2) N_0 rect_{2B}(f / 2B)$.

43) En déduire la puissance P_b en sortie dans la bande du message [$-B$, B].

5. En considérant que le rapport signal sur bruit est donné par P_S/P_b, déterminer son expression. La relier à l'indice de modulation (noter que $k^2 P_m \sim \Delta f^2$).

<u>Exercice 5</u> : Réception superhétérodyne

On considère le problème de la possibilité de réception, avec un même récepteur, de plusieurs stations émettant sur des porteuses situées dans une bande $D = (f_{min} - f_{max})$; par exemple en radiodiffusion FM la bande commerciale est $D = (88 - 108\ MHz)$.

Les modulations considérées ont pour expression $x(t) = a(t) cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$ où $a(t)$ et $\phi(t)$, qui contiennent le message $m(t)$, sont des signaux dont la largeur de bande B est très petite devant f_0. Cette expression englobe les modulations d'amplitude et de fréquence.

En réception superhétérodyne, on utilise à la réception, quelle que soit la fréquence de la porteuse f_0 choisie dans la bande D, un filtre $H_r(f)$ passe-bande unique de bande D suivi d'une translation autour d'une fréquence f_{FI} fixe prédéfinie appelée dans la littérature fréquence intermédiaire. Cela simplifie le récepteur dans la mesure où les traitements qui suivent sont les mêmes quelle que soit la fréquence porteuse choisie dans la bande D.

1. A quoi sert le filtre $H_r(f)$?

2. Montrer que l'opération de translation en fréquence intermédiaire peut s'obtenir par un oscillateur local (OL) dont la fréquence est $f_{OL} = (f_0 + f_{FI})$ suivi d'un filtre passe-bande $H_{FI}(f)$ dont on précisera la bande. On parle alors de récepteur super-hétérodyne (le préfixe super provient de ce que l'oscillateur local a pour fréquence $(f_0 + f_{FI})$). Déterminer, en fonction de f_{min}, f_{max}, et f_{FI} le rapport $\rho_s = f_{OLmax} / f_{OLmin}$.

3. Montrer qu'un traitement analogue au précédent peut être obtenu avec un récepteur sous-hétérodyne pour lequel $f_{OL} = (f_0 - f_{FI})$. Déterminer, en fonction de f_{min}, f_{max}, et f_{FI} le rapport $\rho_i = f_{OLmax} / f_{OLmin}$. Comparer les rapports ρ_s et ρ_i.

4. Montrer qu'il existe une fréquence porteuse f_i autre que f_0 qui, après passage à travers le dispositif superhétérodyne, donne un signal $s(t)$ dans la bande du filtre $H_{FI}(f)$. Cette fréquence porteuse s'appelle la fréquence image de f_0. Quel est l'inconvénient ?

(Pour cela, on pourra envisager le signal reçu : $x(t) = a_1(t) cos(2\pi f_0 t + \phi_1(t)) + a_2(t) cos(2\pi f_i t + \phi_2(t))$)

5. En déduire une condition sur f_{FI} qui assure que toutes les fréquences images de la bande D tombent hors de cette même bande. Faire le calcul dans le cas de la radiodiffusion.

Communications Numériques

Exercice 1 : Détermination de la probabilité d'erreur

Si en pratique, on souhaite déterminer la fiabilité d'une transmission. Il est possible par exemple d'émettre une suite de N bits connus et de comptabiliser en réception les erreurs N_e. Ainsi le rapport N_e/N donne une estimation de la probabilité d'erreur. Cependant pour obtenir une précision donnée sur la probabilité d'erreur P_E avec une confiance donnée, il sera nécessaire d'utiliser une séquence de test de longueur suffisante. Il s'agit de savoir la déterminer.

Soit B une variable aléatoire suivant une loi de Bernouilli. B prend pour seules valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $P[b = 1] = p$ et $P[b = 0] = 1 - p$.

Soient N variables aléatoires de Bernouilli B_n indépendantes.

1. Déterminer la moyenne, le moment quadratique, la variance et la fonction d'autocorrélation de B_n.

2. La moyenne empirique est donnée par : $S = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} B_n$ **.** Déterminer la moyenne, le moment quadratique et la variance de S.

3. Pour N grand, 95% des valeurs sont supposées se trouver dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$. La précision de la mesure μ est définie par le rapport $\varepsilon_r = 2\sigma/\mu$.

Quelle est la longueur de la suite binaire à considérer pour estimer une probabilité p, supposée petite, avec une précision de 10% dans un intervalle de confiance de 95% ?

4. Dans le cas où l'intervalle de confiance est de 70%, l'intervalle devient $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$. Quelle est alors la longueur de la suite binaire à utiliser pour obtenir la même précision (10%) ?

Exercice 2 : Spectre et puissance d'un signal biphasé

Montrer que :

$$V_x(0) = A^2$$

$$S_x(f) = 4A^2T\,\frac{\sin^4(\pi fT/2)}{(\pi fT)^2}$$

Exercice 3 : Spectre et puissance d'un signal AMI (Alternative Mark Inversion)

Le codage AMI utilise un alphabet ternaire $a_k \in \{-1, 0, +1\}$ où les bits « 0 » sont codés par le symbole 0 et les bits « 1 » alternativement par $+1$ et -1. Ce type de code ligne est particulier dans le sens où les symboles a_k ne sont pas indépendants bien que la source de message soit toujours à éléments binaires indépendants et identiquement distribués.

Le codage AMI peut s'obtenir de façon itérative par les deux expressions suivantes :

$$\begin{cases} a_n = d_n s_{n-1} \\ s_n = (1 - 2d_n)s_{n-1} \end{cases}$$

où s_n est une variable d'état à valeurs dans $\{-1, +1\}$ et où les variables aléatoires d_n sont supposées à valeurs dans $\{0,1\}$ indépendantes et équiprobables.

L'objectif du problème est de calculer le spectre et la puissance d'un signal AMI.

1. Remarquer que les symboles a_n peuvent s'écrire sous la forme :

$$a_n = d_n(1-2d_{n-1})(1-2d_{n-2})\ldots(1-2d_{n-m})\ldots$$

2. Déterminer l'expression de la fonction d'autocorrélation des a_n. Pour cela, il sera intéressant de déterminer préalablement les moments d'ordre *1* et *2* de d_n et $(1\text{-}2d_n)$.

3. En considérant que l'impulsion est de type rectangulaire NRZ, en déduire la puissance moyenne d'un signal AMI et l'expression de sa densité spectrale de puissance. En donner une représentation graphique.

Exercice 4 : Probabilité d'erreur

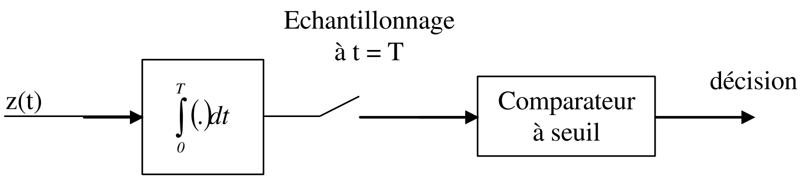
Un signal bipolaire $x_i(t)$ est constitué d'impulsions d'amplitude $+1V$ ou $-1V$ de durée T.

Un bruit blanc gaussien additif de densité spectrale de puissance $N_0/2 = 10^{-5}\ W/Hz$ s'ajoute au signal.

Déterminer le débit maximal transmissible avec une probabilité d'erreur inférieure à 10^{-4}.

Exercice 5 : Récepteur optimal

Un signal binaire $s_i(t)$ prend les valeurs $+A$ et $-A$ volts sur l'intervalle de temps $[0, T]$. Le filtre linéaire est dans le cas présent un intégrateur.



1. En supposant que la variance du bruit en sortie du filtre (ici l'intégrateur) est $\sigma_{ns}^2 = 0{,}1$, déterminer le seuil optimal de détection noté λ, lorsque la probabilité de détection a les valeurs suivantes : a) $P(s1) = 0{,}5$; b) $P(s1) = 0{,}7$; c) $P(s1) = 0{,}2$.

Expliquer la cohérence des résultats obtenus (signe du seuil).

2. Montrer que la probabilité d'erreur P_e du système binaire a pour expression :

$$P_e = Q\left(\sqrt{2A^2T/N_0}\right)$$

On précisera ce que représente N_0.

3. On suppose maintenant que :

$P(s_1) = P(s_2) = 0{,}5$; $N_0/2 = 10^{-9}W/Hz$; $A = 10mV$ avec un débit de 10^4 *bits/s*.

31) Calculer la probabilité d'erreur P_e du système.

32) Si le débit passe à 10^5 *bits/s*, quelle doit être la valeur de A pour que P_e ait la même valeur qu'à la question précédente ?

Exercice 6 : Filtrage adapté dans le cas où le bruit n'est pas blanc

Dans le cadre d'une transmission numérique, on se propose de calculer la réponse impulsionnelle en fréquence qui maximise le rapport signal sur bruit en sortie lorsque le bruit en entrée n'est pas blanc.

1. Déterminer l'expression du signal de sortie $a(t)$ du filtre à $t = T$ en fonction des transformées de Fourier du signal d'entrée $s(t)$ et de la réponse impulsionnelle du filtre $h(t)$.

2. Déterminer l'expression de la puissance du bruit en sortie du filtre sans faire d'hypothèse de bruit blanc à l'entrée.

3. En déduire l'expression du rapport signal sur bruit.

4. Déterminer l'expression de la fonction de transfert du filtre adapté.