CS322 – DS du 12/04/2022 – corrigé

Exercice 1 $\Sigma = \{a, b\}$

1. $\forall L, M \in \Sigma^*$, $(LM)^* \subset (L \cup M)^*$

Vrai : soit $w \in (LM)^*$, alors il existe $(l_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in L^n$ et $(m_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in M^n$ tels que $w = l_1 m_1 l_2 m_2 \dots l_n m_n$,

or pour $i \in [\![1,n]\!]$, $l_i \in L \cup M$ et $m_i \in L \cup M$,

donc $w \in (L \cup M)^*$ puisque c'est un produit de mots de $L \cup M$.

2. $\forall L, M \in \Sigma^*$, $(LM)^* = (L \cup M)^*$

Faux, l'inclusion $(L \cup M)^* \subset (LM)^*$ n'est pas systématique.

Par exemple pour $L = \{a\}$ et $M = \{b\}$, on a

$b \in (L \cup M)^*$ mais $b \notin (LM)^*$

3. $\forall L, M \in \Sigma^*$, $(L^* M^*)^* = (L \cup M)^*$.

C'est vrai, il s'agit des produits de mots de L ou de M, c'est clair pour $(L \cup M)^*$, et les mots de $(L^* M^*)^*$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $\prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{\alpha_i} l_{ij} \right) \left(\prod_{j=1}^{\beta_i} m_{ij} \right)$,

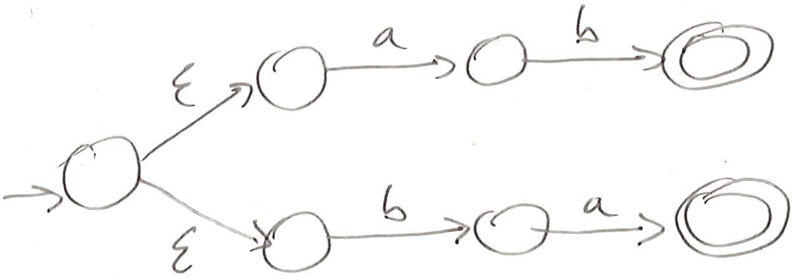
ce sont bien des produits de mots de L ou M, tous les produits de mots de L ou M.

Exercice 2

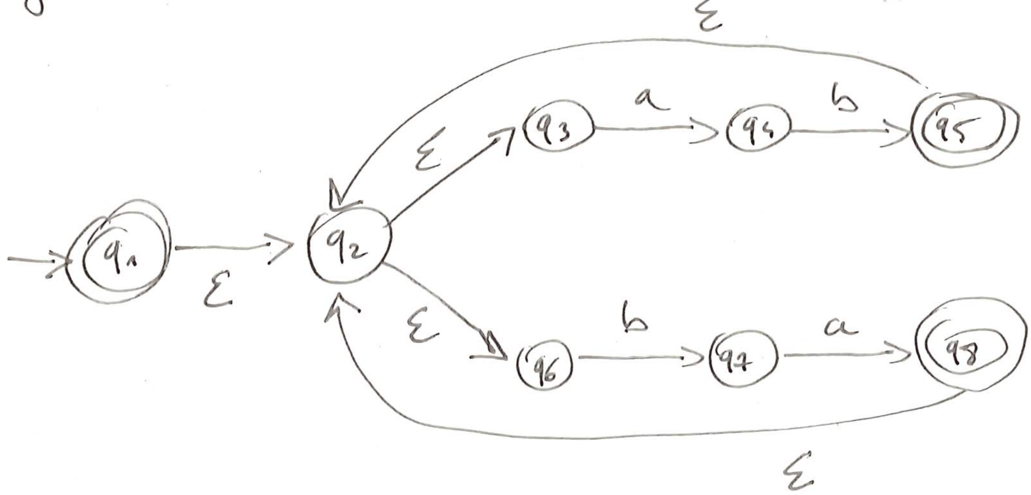
Automate qui reconnaît ab :

ba :

d'où un automate qui reconnaît ab + ba :

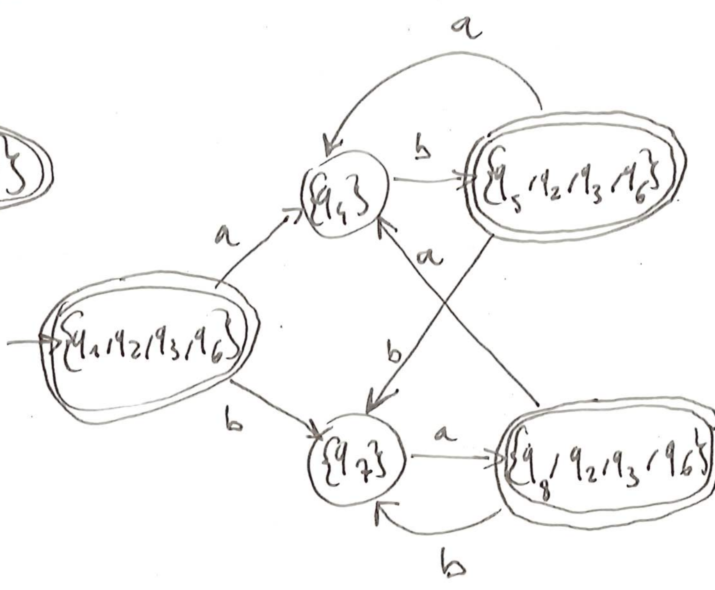


et enfin un automate qui reconnaît $(ab+ba)^*$:



Déterminisons-le :

$q' \backslash \sigma$	a	b
$\{q_1,q_2,q_3,q_6\}$	$\{q_4\}$	$\{q_7\}$
$\{q_4\}$		$\{q_5,q_2,q_3,q_6\}$
$\{q_7\}$	$\{q_8,q_2,q_3,q_6\}$	
$\{q_5,q_2,q_3,q_6\}$	$\{q_4\}$	$\{q_7\}$
$\{q_8,q_2,q_3,q_6\}$	$\{q_4\}$	$\{q_7\}$



<u>Exercice 3</u> $L = \{ww,\ w \in \{a,b\}^*\}$ est-il régulier.

Non car il ne vérifie pas le lemme de pompage pour les langage réguliers :

$\exists n \in \mathbb{N}$ tq $\forall w \in L$, $|w| \geq l \Rightarrow w = xuy$

avec $|xu| \leq n$, $|u| \geq 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $xu^k y \in L$.

En effet, soit $n \in \mathbb{N}$, alors pour $w = a^n b a^n b$,

on a $|w| \geq n$ et pour toute décomposition $w = xuy$

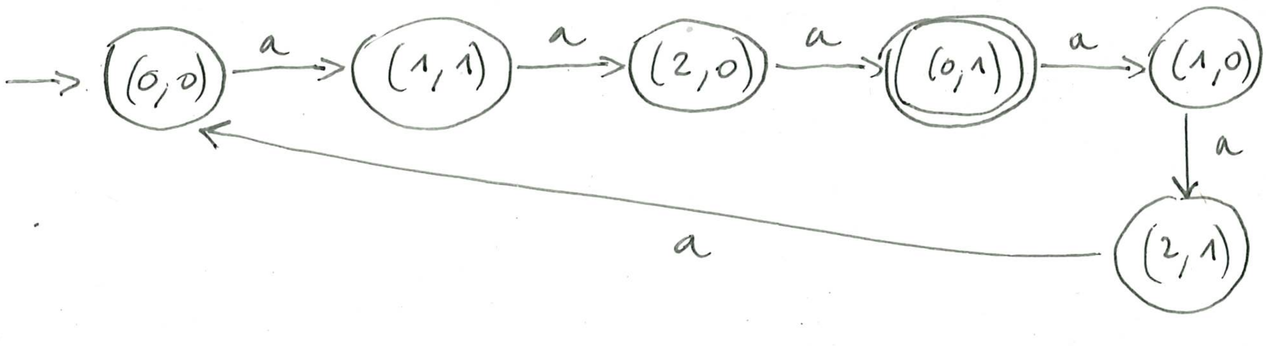
avec $|xu| \leq n$ et $u \geq 1$, $xu^2y = a^{n+|u|} b a^n b \notin L$.

<u>Exercice 4</u>

1. L_1 et L_2 sont respectivement les langages des expressions régulières $(aaa)^*$ et $(aa)^*$, il sont donc réguliers.

2. $L = L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2} = \{a^n,\ n \in \mathbb{N},\ n \equiv 0\ [3] \text{ et } n \equiv 1\ [2]\}$

On construit l'automate avec des états de la forme (x,y), où si $w = a^n$ est le mot lu jusqu'ici, $n \equiv x\ [3]$ et $n \equiv y\ [2]$.



3. Une expression régulière dont le langage est L est :

$$(aaaaaa)^* aaa$$

<u>Exercice 5</u> $L = \{a^i b^j, (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } i \neq j.\}$.

<u>1.</u> L est généré par la grammaire :

$S \to aSb \mid A \mid B$
$A \to aA \mid a$
$B \to bB \mid b$

qui est hors-contexte, il est donc hors-contexte.

<u>2.</u> On a $M = \{a^i b^j, (i,j) \in \mathbb{N}^2\}$,

de sorte que $M - L = \{a^i b^j, (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ et non}(i \neq j)\}$
$= \{a^i b^j, (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } i = j\}$
$= \{a^i b^i, i \in \mathbb{N}\}$

<u>3.</u> M est régulier, si L était régulier, alors $\overline{L}$ et donc $M \cap \overline{L}$ seraient réguliers. Or $M \cap \overline{L} = \{a^i b^i, i \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier (cours), donc L n'est pas régulier.