MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)
Séance de TD du 13 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 26 de la séance de TD consacrée aux chaînes de Markov à temps continu. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 26 (croissance logistique)
Nous nous intéressons dans cet exercice à l'évolution dynamique de la taille d'une population. Des modèles par chaînes de Markov sont fréquemment utilisés pour établir ces bilans de population, que ce soit en biologie (e.g. croissance bactérienne, modèles proies-prédateurs, etc.), en démographie humaine ou en physique (e.g. désintégration de particules radioactives). Dans notre cas, nous allons nous intéresser à un processus de naissances et de morts, pour lequel le générateur infinitésimal est tridiagonal : à partir d'une population de taille k, seules les transitions vers les tailles $k-1$ et $k+1$ sont possibles. Nous allons en particulier nous intéresser au *modèle logistique*. Dans celui-ci, la taille de la population peut évaluer entre une taille minimale $\underline{X}$ et une taille maximale $\overline{X}$ (avec $0 \leq \underline{X} < \overline{X}$). Dans le modèle logistique, le taux de naissance[1] d'une population de taille X est donné par :

$$\lambda = \alpha \left(\overline{X} - X\right)$$

où α est un paramètre réel positif qui représente la capacité de reproduction de l'espèce pour une population de taille donnée. Le taux de natalité λ

[1] Le taux de naissance se définit comme la variation par unité de temps de la taille de la population rapportée à la taille de la population

diminue donc au fur et à mesure que la population croit en taille, jusqu'à atteindre une valeur nulle pour $X = \overline{X}$ (valeur de saturation). C'est une manière de représenter la raréfaction des ressources nécessaires à la survie de la population quand la taille de celle-ci augmente. De même, le taux de mortalité d'une population de taille X, dans le modèle logistique, est donné par :

$$\mu = \beta\,(X - \underline{X})$$

où β est un paramètre réel positif. Le taux de mortalité diminue au fur et à mesure que la population diminue en taille, jusqu'à atteindre une valeur nulle pour $X = \underline{X}$ (valeur de saturation). C'est une manière de représenter l'abondance de ressources et la plus grande facilité à survivre quand la taille de la population est faible.

1. Modéliser par une CMTC l'évolution dans le temps de la taille de la population du modèle logistique. Donner le graphe associé et les taux de transition.

2. Calculer la distribution de probabilité limite de cette population

3. On considère le cas particulier où $\underline{N} = 0$ et où lorsque la taille de la population devient nulle, aucune reproduction n'est plus possible. Déterminer quelle est la probabilité P_k d'extinction de l'espèce si à l'instant initial la population est de taille k[2]. Calculer ensuite le temps moyen T_k d'extinction de l'espèce en partant d'une population initiale de taille k.

Correction de l'Exercice 26

1. La taille de la population est comprise entre $\underline{X}$ et $\overline{X}$. Nous choisirons l'écart par rapport à la population minimale, $X(t) := N(t) - \underline{X}$, comme état du système au temps t ($N(t)$ désigne la population totale au temps t, en valeur absolue). On a donc :

$$X(t) \in E := \{0, \ldots, N\}$$

où $N := \overline{X} - \underline{X}$. Les taux de transition de l'état n à l'état $n+1$ s'écrivent, sous les hypothèses d'une croissance logistique :

$$\lambda_{n,n+1} := \alpha(\underline{X} + n)(N - n),\ \forall n \in \{0, \ldots, N-1\}$$

[2] Passer par la caractérisation de la CMTC en termes de temps de séjour et de probabilités de transition. Résoudre le problème directement sur la CMTD induite par la CMTC

De même, sous les hypothèse de décroissance logisitique , les taux de transition de l'état n à l'état $n-1$ s'écrivent :

$$\lambda_{n,n-1} := \beta(\underline{X}+n)n, \, \forall n \in \{1,\ldots,N\}$$

La chaîne de Markov qui correspond au problème est représentée à la figure 1.

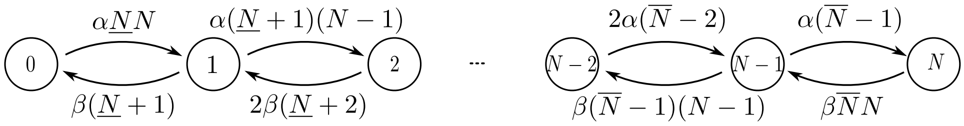

Figure 1: La chaîne de Markov associée au modèle logistique, avec une population totale comprise entre $\underline{X}$ et $\overline{X}$. La variable d'état est $X(t) := N(t) - \underline{X}$ où $N(t)$ désigne la quantité totale de population

2. Il s'agit d'une CMTC finie et irréductible. Tous les états sont récurrents non nuls. La distribution limite existe donc nécessairement. Elle est égale à la distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$. Les équations d'équilibre en chaque noeud sont des récurrences à trois termes. Il sera plus facile ici d'écrire plutôt les équations issues de la méthode des coupes. Les équations qui correspondent aux coupes C_{k+1}, pour $k \in \{0,\ldots,N-1\}$ s'écrivent :

$$\alpha\left(\underline{N}+k\right)(N-k)\boldsymbol{\pi}_k = (k+1)\beta\left(\underline{N}+k+1\right)\boldsymbol{\pi}_{k+1}$$

On obtient directement :

$$\boldsymbol{\pi}_k = \frac{N!}{k!(N-k)!}\frac{\underline{N}}{\underline{N}+k}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \boldsymbol{\pi}_0 = C_N^k \frac{\underline{N}}{\underline{N}+k}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \boldsymbol{\pi}_0$$

Et la condition de normalisation s'écrit

$$\sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_0 \sum_{k=0}^{N} C_N^k \frac{\underline{N}}{\underline{N}+k}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k = 1$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} C_N^k \frac{\underline{N}}{\underline{N}+k}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k}$$

3. Dans le cas où $\underline{N}=0$, la CMTC se réduit à celle représentée à la figure 2. L'état 0 devient un état absorbant. Il correspond à l'extinction de l'espèce. On peut calculer la représentation équivalente de la CMTC de la figure 2 en termes de probabilités de transition et de temps de

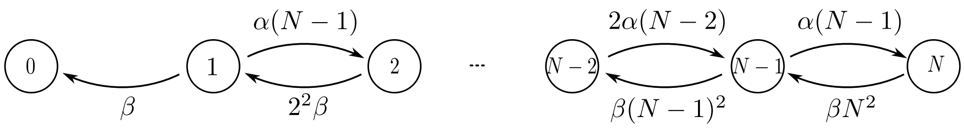

Figure 2: La chaîne de Markov associée au modèle logistique, avec une population totale comprise entre $\underline{X} = 0$ et $\overline{X} = N$.

séjour. Le temps de séjour dans l'état k est distribué selon une variable exponentielle $\mathrm{Exp}(\mu_k)$ de paramètre :

$$\mu_k = \lambda_{k,k+1} + \lambda_{k,k-1} = k\,(\alpha(N-k) + \beta k)$$

Les probabilités de transition d'un état k vers ses voisins $k-1$ et $k+1$ s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} p_{k,k-1} &= \frac{\beta k}{\alpha(N-k) + \beta k} \\ p_{k,k+1} &= \frac{\alpha(N-k)k}{\alpha(N-k) + \beta k} \end{aligned}$$

On obtient ainsi la figure 3 où sont représentées les probabilités de transition entre états (et donc la CMTD induite de la CMTC). L'état 0 devient un état absorbant. Il correspond à l'extinction de l'espèce. On sait donc par avance que $P_k = 1$ (pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$). On peut

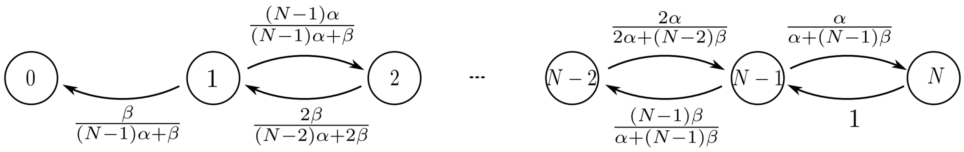

Figure 3: La chaîne de Markov à temps discret induite par la CMTC du modèle logistique pour le problème de l'extinction de l'espèce

d'ailleurs facilement retrouver ce résultat en appliquant la formule de calcul des probabilités $f_{k,0} = P_k$ vue en cours. L'application de cette formule donne ici

$$\begin{aligned} ((N-1)\alpha + \beta)P_1 &= \beta + (N-1)\alpha P_2 \\ &\vdots \\ ((N-k)\alpha + k\beta)P_k &= k\beta P_{k-1} + (N-k)\alpha P_{k+1} \\ &\vdots \\ (\alpha + (N-1)\beta)P_{N-1} &= (N-1)\beta P_{N-2} + \alpha P_N \\ P_N &= P_{N-1} \end{aligned}$$

dont la seule solution est bien

$$P_k = 1, \forall k \in \{1, \ldots, N\}$$

Le calcul du temps moyen T_k avant l'extinction, partant de l'état k suit le même raisonnement mais est un peu plus compliqué car il faut intégrer les temps moyen de séjour dans les états visités. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{\beta}{(N-1)\alpha+\beta}\cdot\frac{1}{\mu_1} + \frac{(N-1)\alpha}{(N-1)\alpha+\beta}\cdot\left(\frac{1}{\mu_1}+T_2\right)\\
&\vdots\\
T_k &= \frac{k\beta}{(N-k)\alpha+k\beta}\cdot\left(\frac{1}{\mu_k}+T_{k-1}\right) + \frac{(N-k)\alpha}{(N-k)\alpha+k\beta}\cdot\left(\frac{1}{\mu_k}+T_{k+1}\right)\\
&\vdots\\
T_{N-1} &= \frac{(N-1)\beta}{\alpha+(N-1)\beta}\cdot\left(\frac{1}{\mu_{N-1}}+T_{N-2}\right) + \frac{\alpha}{\alpha+(N-1)\beta}\cdot\left(\frac{1}{\mu_{N-1}}+T_N\right)\\
T_N &= \frac{1}{\mu_N}+T_{N-1}
\end{aligned}$$

qui s'écrit, après simplifications :

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{\mu_1} + \frac{(N-1)\alpha}{(N-1)\alpha+\beta}T_2\\
&\vdots\\
T_k &= \frac{1}{\mu_k} + \frac{k\beta}{(N-k)\alpha+k\beta}T_{k-1} + \frac{(N-k)\alpha}{(N-k)\alpha+k\beta}T_{k+1}\\
&\vdots\\
T_N &= \frac{1}{\mu_N}+T_{N-1}
\end{aligned}$$

En posant $W_k := T_k - T_{k+1}$, pour $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ et $T_0 = 0$, on obtient

$$W_{N-1} = -\frac{1}{\mu_N}$$

et

$$W_{N-(k+1)} = \frac{k\alpha}{(N-k)\beta}\left(W_{N-k} - \frac{1}{\mu_{N-k}}\right) - \frac{1}{\mu_{N-k}}$$

qui permet de calculer à rebours toutes les grandeurs W_k jusqu'à $W_0 = T_1$. On retrouve ensuite les temps moyen d'extinction demandé en calculant successivement

$$T_k = T_{k-1} - W_{k-1}$$

pour k allant de 2 à N.