Chapitre 4 : Automates à pile

Vincent Guisse
vincent.guisse@esisar.grenoble-inp.fr

Grenoble INP - ESISAR
3e année IR & C

29 mars 2022

Limite des automates finis

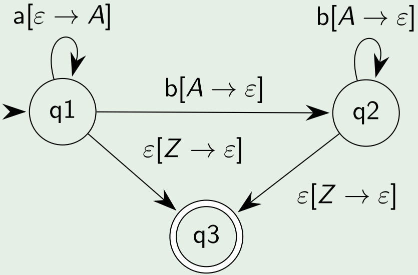
On a vu que la langage $\{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier :

- Il ne respecte pas le lemme de pompage pour les langages réguliers,
- et en effet, on ne conçoit pas comment le reconnaître en lisant les mots de gauche à droite et en disposant d'une **mémoire finie**.

Nouveau modèle de calcul : les automates à pile

On va considérer des automates disposant d'une mémoire avec un simple accès LIFO (pile).On va d'emblée généraliser les AFN et utiliser des ε-transition : **les automates à piles considérés sont a priori non déterministes**.

Un automate à pile qui reconnaît $\{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$



- Initialement, la pile contient le symbole initial de pile Z
- Chaque transition est accompagnée d'une action $[\alpha \to \beta]$ sur la pile :
  1. on consomme α sur la pile (et donc la transition n'a lieu que si α est sur la pile),
  2. et on écrit β sur la pile à la place de α.

Définition : automate à pile

Un automate à pile (non déterministe) $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \Gamma, Z, q_i, F)$ est un 7-uplet où :

Q est un ensemble fini d'états,

Σ est l'alphabet fini des mots lus,

Γ est l'alphabet fini des symboles de la pile (pas de contrainte a priori sur la position relative des ensembles Σ et Γ)

$Z \in \Gamma$ est le symbole initialement présent sur la pile,

$q_i \in Q$ est l'état initial,

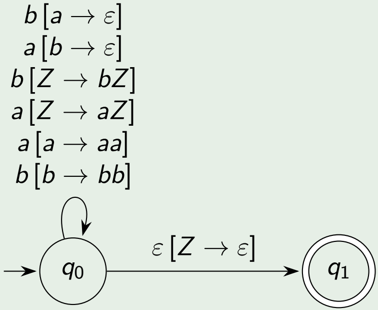
$F \subset Q$ est l'ensemble des états accepteurs,

$\delta \subset (Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Q \times \Gamma^*)$ est la relation de transition (finie) :

$((q, w, \alpha), (q', \beta)) \in \delta$ s'interprète de la manière suivante :
≪ si $\mathcal{A}$ est dans l'état q avec le mot α sur la pile, il consomme le mot w en entrée, passe dans l'état q' et remplace α par β sur la pile. ≫

Exercice

1. Donnez la description formelle de l'automate à pile ci-dessous :



2. Quel est le langage accepté par cet automate ?
3. Est-il régulier ?

Solution :

1.
   - $Q = \{q_0; q_1\}$
   - $\Sigma = \{a; b\}$
   - $\Gamma = \{a; b; Z\}$
   - $s = q_0$
   - $F = \{q_1\}$
   - $$\Delta = \{((q_0, b, a) ; (q_0, \varepsilon)) ; ((q_0, a, b) ; (q_0, \varepsilon)) ; \\ ((q_0, b, Z) ; (q_0, bZ)) ; ((q_0, a, Z) ; (q_0, aZ)) ; \\ ((q_0, a, a) ; (q_0, aa)) ; ((q_0, b, b) ; (q_0, bb)) ; \\ ((q_0, \varepsilon, Z) ; (q_1, \varepsilon))\}$$
2. La langage accepté est $\left\{w \in \{a, b\}^* \,,\, |w|_a = |w|_b\right\}$, le langage des mots sur $\{a, b\}$ qui ont autant de a que de b.
3. Non.

Définition : configuration d'un automate à pile

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, Z, q_i, F)$ un automate à pile. Une configuration de $\mathcal{A}$ est un triplet :

$$(q, w, \alpha) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

qui s'interprète en disant que q est l'état courant, α le contenu de la pile, et w le mot qui reste à lire.

Définition : relation de dérivation des configurations

Dire que la configuration $(q', w_2, \beta\gamma)$ se dérive en une étape de la configuration $(q, w_1 w_2, \alpha\gamma)$ se note :

$$(q, w_1 w_2, \alpha\gamma) \vdash_{\mathcal{A}} (q', w_2, \beta\gamma)$$

et signifie que $((q, w_1, \alpha), (q', \beta)) \in \delta$. On note $\vdash_{\mathcal{A}}^*$ la clôture réflexive transitive de cette relation sur l'ensemble des configurations.

Définition : langage accepté par un automate à pile

Un mot $w \in \Sigma^*$ est accepté par $\mathcal{A}$ si et seulement si on a :

$$(q_i, w, \Gamma) \vdash^*_{\mathcal{A}} (f, \varepsilon, \gamma), \text{ avec } f \in F \text{ et } \gamma \in \Gamma^*.$$

Le langage accepté par $\mathcal{A}$ est l'ensemble des mots acceptés par $\mathcal{A}$.

Remarques

1. Comme dans le cas des *AFN*, l'existence d'une dérivation vers un état acceptant suffit.
2. Il y a maintenant trois façons (combinables) de refuser un mot :
   - les dérivations se terminent dans un état non acceptant,
   - les dérivations ne consomment pas le mot en entrée car il n'y a plus de transitions possibles (exécutions bloquées),
   - les dérivations ne se terminent pas à cause des $\varepsilon-$ transitions qui peuvent changer le contenu de la pile : il y a un nombre arbitrairement grand de configurations différentes possibles donnant lieu à des « exécutions infinies ».

Exercice

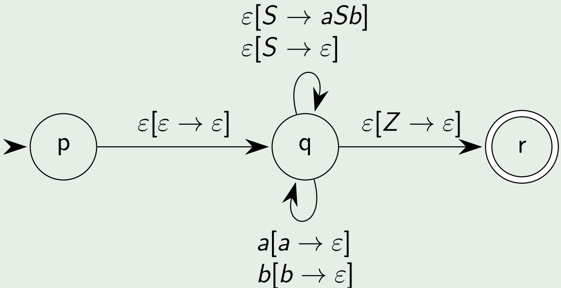
1. Construire un automate à pile qui accepte les palindromes pairs sur $\{a, b\}$:
$$\{ww^R,\ w \in \{a, b\}^*\}$$
2. Écrire la dérivation qui prouve que *abba* est accepté.
3. Modifier l'automate pour qu'il accepte tous les palindromes.

Théorème

Un langage est hors-contexte si et seulement si il est reconnu par un automate à pile.

Exemple : hors-contexte $\Rightarrow$ reconnu par un automate à pile

Commençons avec un exemple : $\mathcal{L} = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est un langage hors contexte. Il est généré par la grammaire $G = (\{S, a, b\}, \{a, b\}, S, \mathcal{R})$ avec $\mathcal{R} = \{S \to aSb|\varepsilon\}$.



Preuve : hors-contexte $\Rightarrow$ reconnu par un automate à pile

Soit $\mathcal{L}$ un langage hors contexte sur l'alphabet Σ, généré par la grammaire $(V, \Sigma, S, \mathcal{R})$. Alors l'automate à pile

$$\mathcal{A} = (\{p, q, r\}, \Sigma, V \cup \{Z\}, \delta, Z, q, \{r\})$$

avec

$$\begin{aligned}\delta = & \{((p, \varepsilon, \varepsilon), (q, S))\} \\ & \cup \{((p, \varepsilon, A), (p, w)),\ (A \to w) \in \mathcal{R}\} \\ & \cup \{((q, \varepsilon, Z), (r, \varepsilon))\}\end{aligned}$$

Reconnaît $\mathcal{L}$.

On admet la réciproque : reconnu par un automate à pile $\Rightarrow$ généré par une grammaire hors-contexte.

Théorème

Soit $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ des langages hors-contexte.
Alors $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_1^*$ sont hors-contexte.

Preuve

Soit $G_1 = (V_1, \Sigma_1, S_1, \mathcal{R}_1)$ et $G_2 = (V_2, \Sigma_2, S_2, \mathcal{R}_2)$ des grammaires générant $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. On construit des grammaires générant la réunion, l'intersection, l'étoile.

Attention, on verra que l'intersection de deux langages hors-contexte, ou que le complémentaire d'un langage hors-contexte ne sont pas nécessairement hors-contexte.

Théorème

Si le langage $\mathcal{L}_1$ est hors-contexte et que le langage $\mathcal{L}_R$ est régulier, alors $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_R$ est hors-contexte.

Preuve

Soit $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma, \delta_1, Z, s_1, F_1)$ un automate à pile acceptant $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, s_2, F_2)$ un AFD acceptant L_R. On utilise une construction analogue à celle du produit cartésien de deux AFN, pour obtenir un automate à pile

$$\mathcal{A} = (Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \Gamma, \delta, Z, (s_1, s_2), F_1 \times F_2) \text{ avec :}$$

$$(((q_1, q_2), w, \alpha), ((q_1', q_2'), \beta)) \in \delta \Leftrightarrow \begin{cases} (q_2, w) \vdash^*_{\mathcal{A}_2} (q_2', \varepsilon) \\ ((q_1, w, \alpha), (q_1', \beta)) \in \delta_1 \end{cases}$$

qui reconnaît $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_R$.

Théorème

Soit $\mathcal{L}$ un langage hors contexte sur l'alphabet Σ. Alors il existe un entier K tel que pour tout $w \in \Sigma^*$, si $|w| \geqslant K$ alors on peut écrire $w = xuyvz$ avec u ou v non vide, $|uyv| \leqslant K$ et $xu^nyv^nz \in \mathcal{L}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Idée de la preuve

Soit m la longueur maximale des productions de $G = (V, \Sigma, S, \mathcal{R})$ générant $\mathcal{L}$. Alors un arbre de dérivation de profondeur r génère des mots de longueur majorée par m^r. Un mot w de longueur supérieur à $K = m^{|V \setminus \Sigma|+1}$ est donc généré par un arbre de profondeur supérieure au nombre de non terminaux. Il existe donc dans l'arbre de dérivation un chemin de longueur supérieure aux nombre de non terminaux, et où l'un d'entre eux est donc répété.

Exercice

1. Montrer que $L = \{a^n b^n c^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas un langage hors-contexte.
2. En déduire que l'intersection de 2 langages hors-contexte n'est pas nécessairement hors-contexte.
3. Que peut-on dire du complémentaire d'un langage hors-contexte ?

Définition : Automates à pile déterministes

Un automate à pile est déterministe si et seulement dans chaque configuration au maximum une seule transition est possible.

Définition : Langage hors contexte déterministe

Un langage hors contexte est si et seulement si il est reconnu par un automate à pile déterministe.

Exemples

Le langage

$$\mathcal{L}_1 = \left\{wcw^R,\ w \in \{a, b\}^*\right\}$$

est hors-contexte déterministe.

Le langage

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ww^R,\ w \in \{a, b\}^*\right\}$$

n'est pas hors-contexte déterministe.