

Exercice 1 Quantité d'information et entropie

Sur un disque dur se trouvent deux dossiers : **desktop** et **home**.

desktop contient 50 fichiers et **home** en contient 150.

1. Quelle est la quantité d'information I_1 associée à l'évènement E_1 "le fichier appartient au dossier **desktop**" ?
2. On suppose aussi que **desktop** contient 20 fichiers de type **.jpg** et 30 du type **.txt** et que **home** contient 110 fichiers de type **.jpg** et 40 du type **.txt**
 - (a) Quelle est la quantité d'information I_2 associée à l'évènement E_2 : "le fichier est du type **.jpg**".
 - (b) Quelle est la quantité d'information I_3 associée à l'évènement E_3 : "le fichier est du type **.jpg** et se trouve dans le dossier **desktop**".
 - (c) A-t-on $I_3 = I_1 + I_2$?
 - (d) Peut-on en déduire que les deux évènements E_1 et E_2 sont dépendants ou indépendants?
 - (e) Calculer l'entropie de la source $A = \{.jpg; .txt\}$ et de la source $B = \{desktop; home\}$.

Exercice 2 Jeu de dé

On lance deux dés et on s'intéresse à l'évènement constitué par la somme des deux nombres obtenus.

1. Calculer la quantité d'information apportée quand on apprend que la somme est égale six.
2. Calculer la quantité d'information apportée quand on apprend que cette somme est obtenue avec un deux et un quatre.

Exercice 3 Jeux de cartes

On considère une "main" de 4 cartes tirées au hasard d'un jeu de 32 cartes, soient les évènements :

- E_1 : La main ne contient aucune carte inférieure au valet d'après la hiérarchie 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as.
- E_2 La main ne contient pas de figure
- E_3 la main contient les 4 cartes de la même hauteur.
- E_4 : la main contient 4 as.

1. Calculer pour tout i la quantité d'information de E_i , ainsi que $I(E_1, E_3)$ et $I(E_1, E_4)$.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de rois dans une main, calculer l'entropie de X

Exercice 4

1. On lance une pièce biaisée de probabilité p . Calculer l'entropie de la source.
2. On lance un dé équilibré. Calculer l'entropie de la source.

Calculer l'information mutuelle entre la face du haut et la face du bas du dé.

Calculer l'information mutuelle entre la face du haut et celle face au joueur.

Exercice 5

Soit X et Y deux variables aléatoires binaires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X = 1) = p_X$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = p_Y$. Soit $Z = X \oplus Y$ leur somme modulo 2.

1. Déterminer $p_Z = \mathbb{P}(Z = 1)$, à quelle condition $p_Z = 1/2$.
2. Comparer $H(Z)$ et $H(X)$ dans le cas où $p_Y = p_X$.

Exercice 6

1. Soit X une V.A entière suivant une loi géométrique de paramètre p , définie par $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. Calculer la moyenne $\mathbb{E}(X)$ de X et son entropie $H(X)$.
2. On lance une pièce biaisée jusqu'à l'obtention d'une face. Soit X le nombre de lancers. Soit Y le nombre de lancers (total) jusqu'à l'obtention d'une seconde face.

Déterminer une majoration de $H(Y)$.

Exercice 7

On étudie dans cet exercice quelques modélisations d'une source binaire, (une source qui émet des symboles de l'alphabet $\{0, 1\}$. La probabilité d'émettre le symbole 0 à l'instant initial $p_0(0) = \alpha$ et la probabilité d'émettre le symbole 1 $p_0(1) = 1 - \alpha$.

1. On suppose que la source est une source simple (stationnaire et sans mémoire). Donner l'expression de son entropie. Quel est l'entropie maximale de cette source.
2. on suppose que cette source est avec mémoire fini d'ordre 1, i.e. la probabilité d'émission d'un symbole à l'instant n dépend du symbole émis à l'instant $n-1$. On donne la matrice de transition qui caractérise cette source

$X_n \backslash X_{n+1}$	"0"	"1"
"0"	p	$1 - p$
"1"	q	$1 - q$

Donner les probabilités $p_n(0)$ et $p_n(1)$ des symboles 0 et 1 à l'instant n en fonction de $p_{n-1}(0)$ et $p_{n-1}(1)$. Donner ces probabilités en fonction de α , p et q .

Donner l'expression de l'entropie $H_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Donner une condition pour que l'entropie de cette source soit définie.

3. Existe-t-elle une distribution de probabilité initiale qui rend cette source stationnaire.
4. Donner l'expression de l'entropie de cette source quand elle est stationnaire. Calculer le maximum de cette entropie.