MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Processus de Poisson
Séance de TD du 26 mars 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 2 de la séance de TD consacrée aux processus de Poisson. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 2
On suppose que des foies arrivent à l'hôpital suivant un processus de Poisson de paramètre λ. Deux malades attendent d'être greffés. Leurs durées de vie suivent des lois exponentielles indépendantes entre elles (et indépendantes du processus d'arrivée des foies), respectivement de paramètres λ_1 et λ_2. Le premier foie va au premier patient, si celui est encore en vie; sinon au second (s'il est encore en vie...).

1. Calculer la probabilité que le premier patient soit greffé
2. Calculer la probabilité que le second patient soit greffé

Correction de l'Exercice 2

1. Notons D_1 la variable aléatoire "durée de vie du patient 1" et T_1 l'intervalle entre l'instant 0 et l'arrivée du premier foie. Par hypothèse, D_1 et T_1 sont deux variables aléatoires indépendantes, de distributions

exponentielles, respectivement de paramètres λ_1 et λ. La distribution conjointe du coupe (D_1, T_1) est donc :

$$f_{(D_1,T_1)}(x,y) = f_{D_1}(x) f_{T_1}(y) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } x \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La probabilité que le premier patient soit greffé s'écrit donc :

$$\begin{aligned} P\left(D_1 \geq T_1\right) &= \iint_{x \geq y} f_{(D_1,T_1)}(x,y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^x \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda e^{-\lambda y}\, dy\, dx \\ &= \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \left(1 - e^{-\lambda x}\right) dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda}} \end{aligned}$$

Cette probabilité tend vers 0 lorsque l'espérance de vie du patient 1 (en l'absence de greffe) tend vers 0 (i.e. $\frac{1}{\lambda_1} \to 0$), le paramètre $\lambda > 0$ étant par ailleurs fixé. Elle tend vers 1 lorsque la durée moyenne entre deux arrivées de foies à l'hôpital tend vers 0 (i.e. $\frac{1}{\lambda} \to 0$), le paramètre $\lambda_1 > 0$ étant par ailleurs fixé.

2. Le patient 2 sera greffé dans deux cas :

   - lorsque le patient 1 meurt avant l'arrivée du foie 1, alors que le patient 2 survit jusqu'à cette arrivée du foie 1
   - le patient 1 est greffé avec le foie 1 et le patient 2 survit jusqu'à l'arrivée du deuxième foie

   La probabilité totale de survie du patient 2 est la somme de ces deux probabilités (relatives à deux évènements disjoints). La probabilité que le patient 1 meure avant l'arrivée du foie 1 et que le patient 2 survive jusqu'à cette arrivée du foie 1 s'écrit [1] (voir calcul précédent) :

$$\begin{aligned} P\left(\{D_1 < T_1\} \cap \{D_2 \geq T_1\}\right) &= P\left(D_1 < T_1\right) \cdot P\left(D_2 \geq T_1\right) \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}\right) \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_2} \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda}{(\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda_2}{\lambda}} \end{aligned}$$

[1] Nous noterons D_2 la durée de vie du patient 2, distribuée suivant une exponentielle de paramètre λ_2

La probabilité que le patient 1 soit greffé avec le foie 1 et que le patient 2 survive jusqu'à l'arrivée du deuxième foie s'écrit :

$$\begin{aligned}
P\left(\{D_1 \geq T_1\} \cap \{D_2 \geq (T_1+T_2)\}\right) &= P\left(D_1 \geq T_1\right) \cdot P\left(D_2 \geq (T_1+T_2)\right) \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1} \cdot P\left(D_2 \geq (T_1+T_2)\right) \\
&= \frac{1}{1+\frac{\lambda_1}{\lambda}} \cdot P\left(D_2 \geq (T_1+T_2)\right)
\end{aligned}$$

avec $T_1 + T_2 =: A_2 \sim \Gamma(2, \lambda)$ (somme de deux variables alétoires exponentielles indépendantes de même paramètre λ) et

$$\begin{aligned}
P\left(D_2 \geq A_2\right) &= \iint_{x \geq y} f_{(D_2, A_2)}(x, y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^x \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \lambda^2 y e^{-\lambda y}\, dy\, dx \\
&= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \left(1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}\right) dx \\
&= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda+\lambda_2} + \frac{\lambda\lambda_2}{(\lambda+\lambda_2)^2} = 1 - \left(\frac{1}{1+\frac{\lambda}{\lambda_2}}\right)^2
\end{aligned}$$

La probabilité totale de survie du patient 2 s'écrit alors :

$$\frac{\lambda^3 + 2\lambda^2\lambda_2 + \lambda^2\lambda_1 + \lambda\lambda_1\lambda_2}{(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)^2}$$