MA 332 — Correction de l'examen de mai 2019

Exercice 1 – processus de Poisson

1. $\hat{\lambda} = \frac{N(T)}{T} = \frac{2880}{24}\ h^{-1} = 120\ h^{-1} = 2\ min^{-1}$

2. $\mathbb{P}[N(10\,min) = 5] = \frac{e^{-20} \cdot 20^5}{5!} \simeq 5{,}49 \cdot 10^{-5}$

3. Le processus d'arrivées des spams est aussi un PP de paramètre λp (probabilité indépendante du temps)

$\Rightarrow \quad \widehat{\lambda p} = \frac{2592}{24} = 108\ h^{-1} = 1{,}8\ min^{-1}$

$\Rightarrow \quad \hat{p} = 0{,}9$

4. Soit $\tilde{N}(t)$, le nombre de spams arrivés sur $[0,t]$

$\mathbb{P}[\tilde{N}(1\,min) \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[\tilde{N}(1\,min) = 0]$

$= 1 - e^{-1 \cdot 1{,}8} \simeq 0{,}83\ldots$

5. $200 \cdot 0{,}9 = 180$ spams, en moyenne

6. $\mathbb{P}[50 \text{ spams sur } t \in [3,8]] = \sum_{m=0}^{10} \mathbb{P}\left[\begin{matrix}50 \text{ spams} \\ \text{parmi} \\ 50+m \text{ mails}\end{matrix} \middle| \begin{matrix}50+m \text{ mails} \\ \text{dans} \\ [3,8]\end{matrix}\right] \cdot \mathbb{P}\left[\begin{matrix}50+m \text{ mails} \\ \text{dans} \\ [3,8]\end{matrix}\right]$

probabilités totales

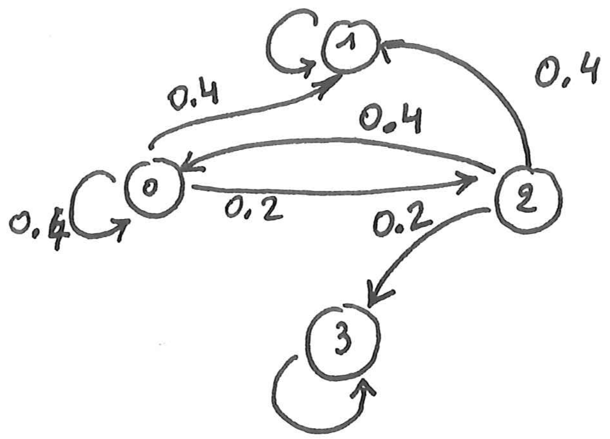
$= \sum_{m=0}^{10} C_{50+m}^{m}\, 50^p\, m^{(1-p)} \cdot \mathbb{P}[10-m \text{ mails dans } [0,3]]$

$= \sum_{m=0}^{10} C_{50+m}^{m}\, 50^p\, m^{(1-p)} \cdot \frac{e^{-6} \cdot 6^{10-m}}{(10-m)!}$

7. 2592 secondes

Exercice 2 - CMTD

1.



$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $\pi_0 = [0.8 \quad 0 \quad 0.2 \quad 0]$

$$\pi_4 = \pi_0 \, \underline{P}^4 = [0.06656 \,;\, 0.81216 \,;\, 0.02432 \,;\, 0.09696]$$

3. Les états 1 et 3 sont les seuls états absorbants

Soit T_i := temps moyen pour un ordinateur avant d'être dans les états 1 ou 3, partant de l'état i

$$T_0 = 0.4\,(1+T_0) + 0.2\,(1+T_2) + 0.4$$
$$T_2 = 0.4\,(1+T_0) + 0.4 + 0.2$$

$$\Rightarrow \quad T_0 \simeq 2.308$$
$$T_2 \simeq 1.923$$

4. $t_{03} = 0.4\, t_{03} + 0.2\, t_{23}$

$t_{23} = 0.2 + 0.4\, t_{03}$

$\Rightarrow \; t_{03} \simeq 0.0769$

Exercice 3

1. 

2. En utilisant la méthode des coupes, on obtient :

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!}\pi_0 \quad \text{pour} \quad n \geq 1 \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\sum_{k \geq 0} \pi_k = \pi_0 \left(\sum_{k \geq 0} \frac{\rho^k}{k!} \right) = \pi_0 e^{\rho} = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = e^{-\rho}$$

3. Taux effectif d'entrée

$$X_e = \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda}{(k+1)} \cdot \pi_k = \frac{\lambda e^{-\rho}}{\rho} \sum_{k \geq 0} \frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{\lambda e^{-\rho}}{\rho}(e^{\rho} - 1)$$

$$= \frac{\lambda}{\rho}(1 - e^{-\rho}) = \mu(1 - e^{-\rho})$$

$$X_s = \mu(1 - \pi_0) = \mu(1 - e^{-\rho})$$

Donc $X_e = X_s$ quels que soient λ et μ.
La file est toujours stable

4. $$Q = \sum_{n \geq 0} n \pi_n = e^{-\rho} \sum_{n \geq 1} \frac{\rho^n}{(n-1)!} = \rho$$

5. $$R = \frac{Q}{X} = \frac{\rho}{\mu(1 - e^{-\rho})}$$ (avec $X = X_e = X_s$)