Chapitre 3 – Echantillonnage

1. Principe théorique
2. Théorème de Shannon
3. Filtres anti-repliement
4. Echantillonneurs en pratiques
5. Echantillonnage des signaux à durée limitée
6. Conclusion

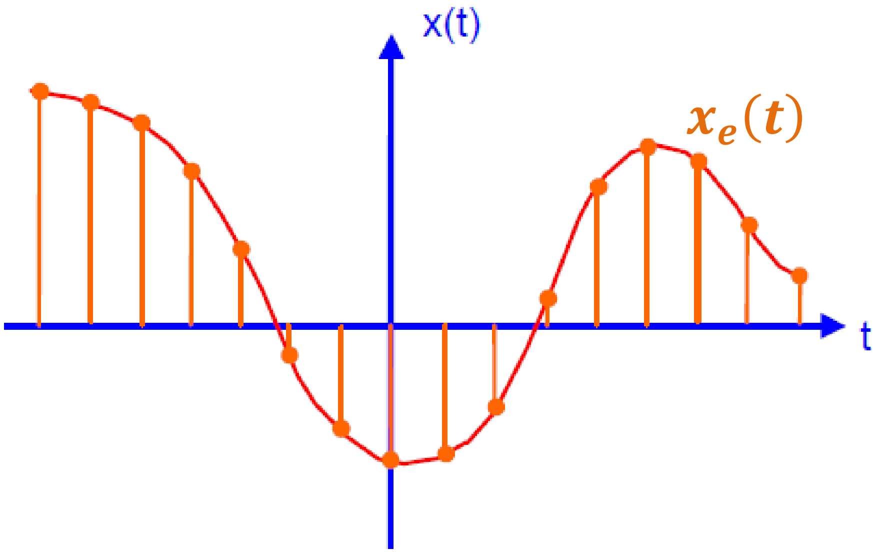
Définition de l'échantillonnage

Echantillonner
Discrétiser le temps de signaux analogiques

Signal échantillonné
Ensemble des échantillons prélevés

Période d'échantillonnage T_e
Période entre deux échantillons consécutifs

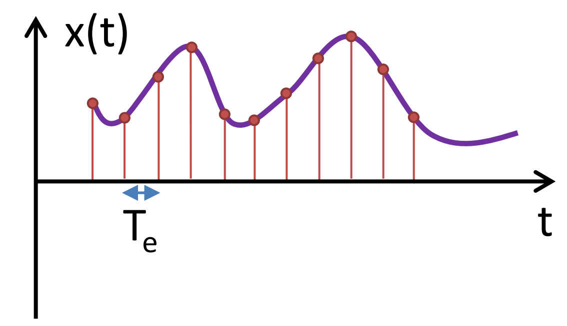
Fréquence d'échantillonnage
$F_e = 1/T_e$



$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nTe)$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nTe) \cdot \delta(t - nTe)$$

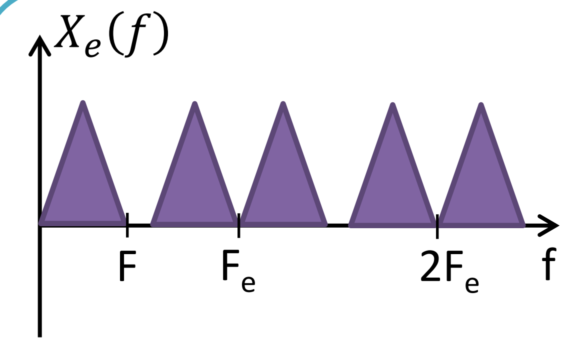
Spectre d'un signal échantillonné

$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nTe)$$



TF

$$X_e(f) = Fe \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(f - nFe)$$



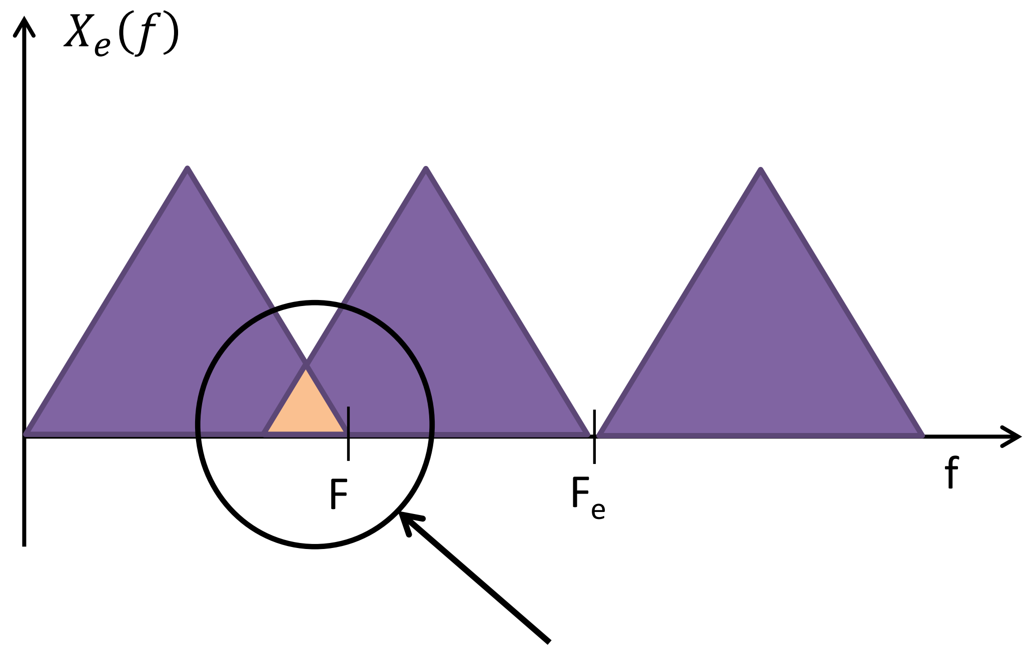
Somme de spectre élémentaires distribués sur l'axe des fréquences.

Echantillonner dans l'espace **temps** revient à **périodiser** dans l'espace des **fréquence**

Problématique : est-il possible de reconstituer le signal analogique après échantillonnage?

Si $F_e < 2.F$

F_e : fréquence d'échantillonnage
F : fréquence maximale du signal

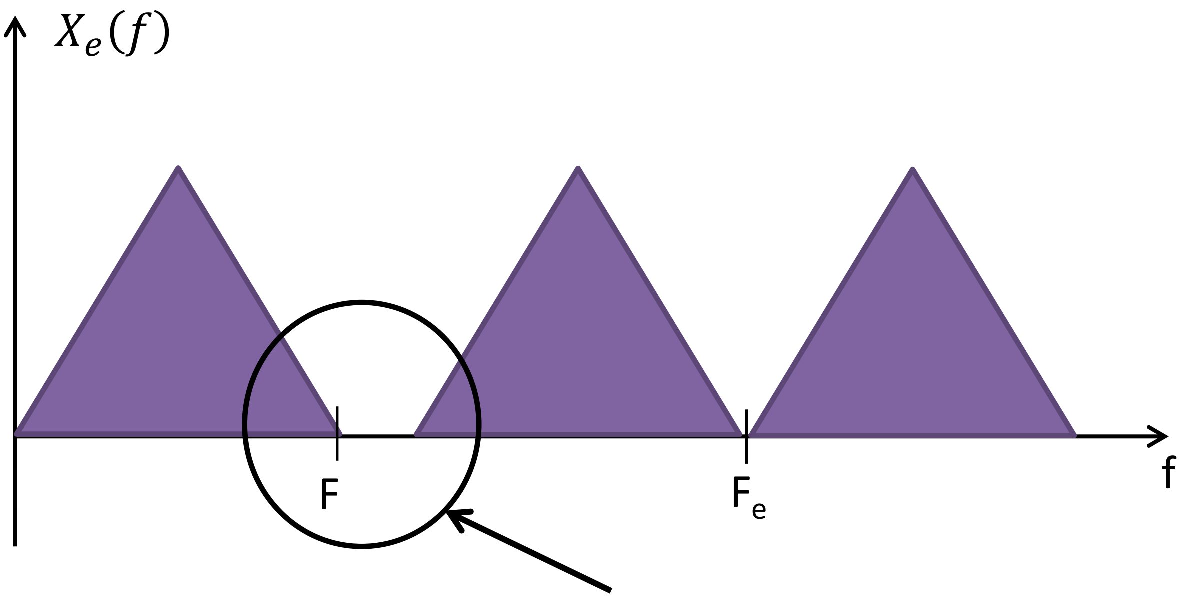


Recouvrement du spectre !

Problématique : est-il possible de reconstituer le signal analogique après échantillonnage?

Si $F_e > 2.F$

F_e : fréquence d'échantillonnage
F : fréquence maximale du signal



Spectre élémentaires disjoints !

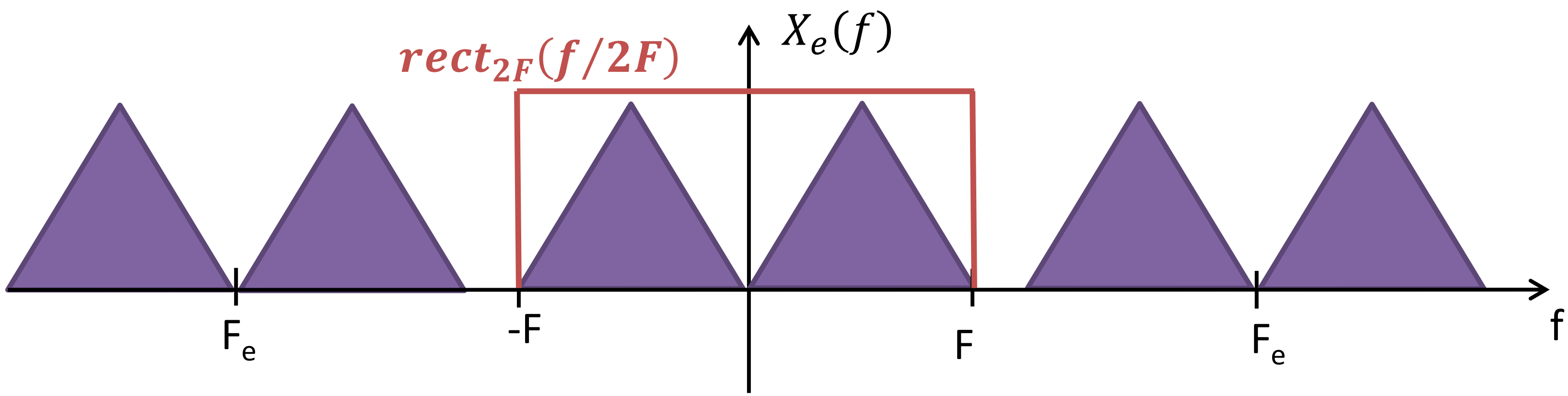
Possibilité de retrouver X_f à partir de X_e en utilisant une fenêtre rectangulaire du type $rect_{2F}(f/2F)$ et un gain T_e.

Théorème de Shannon

Un signal $x(t)$ d'énergie finie dont le spectre a un support borné $[-F;F]$ est entièrement défini par ses échantillons $x(nTe)$ prélevés à la fréquence d'échantillonnage F_e supérieure ou égale à $2F$.

Il est ainsi possible de reconstruire $x(t)$ à partir de ses échantillons par interpolation.

La façon la plus simple pour reconstituer le spectre du signal analogique est d'utiliser une fenêtre rectangulaire de gain Te. Il reste alors à déterminer $x(t)$ à l'aide de la transformée de Fourier inverse.



Echantillonnage : $F_e > 2F$

Théorème de Shannon : reconstitution du signal analogique

$x(t)$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ à énergie finie et spectre borné entre $[-F; F]$

Echantillonnage

$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nTe)$$

TF

$$X_e(f) = TF(x_e(t)) = X(f) * Fe \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(f - nFe) = Fe \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(f - nFe)$$

Si le th. De Shannon est respecté

$$X(f) = Te \cdot Xe(f) \cdot rect_{2F}(f/2F)$$

TF inverse

$$x(t) = 2F \cdot Te \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nTe) \cdot sinc\big(2\pi F(t - nTe)\big)$$

Formule d'interpolation

Théorème de Shannon : reconstitution du signal analogique

Démonstration de la formule d'interpolation

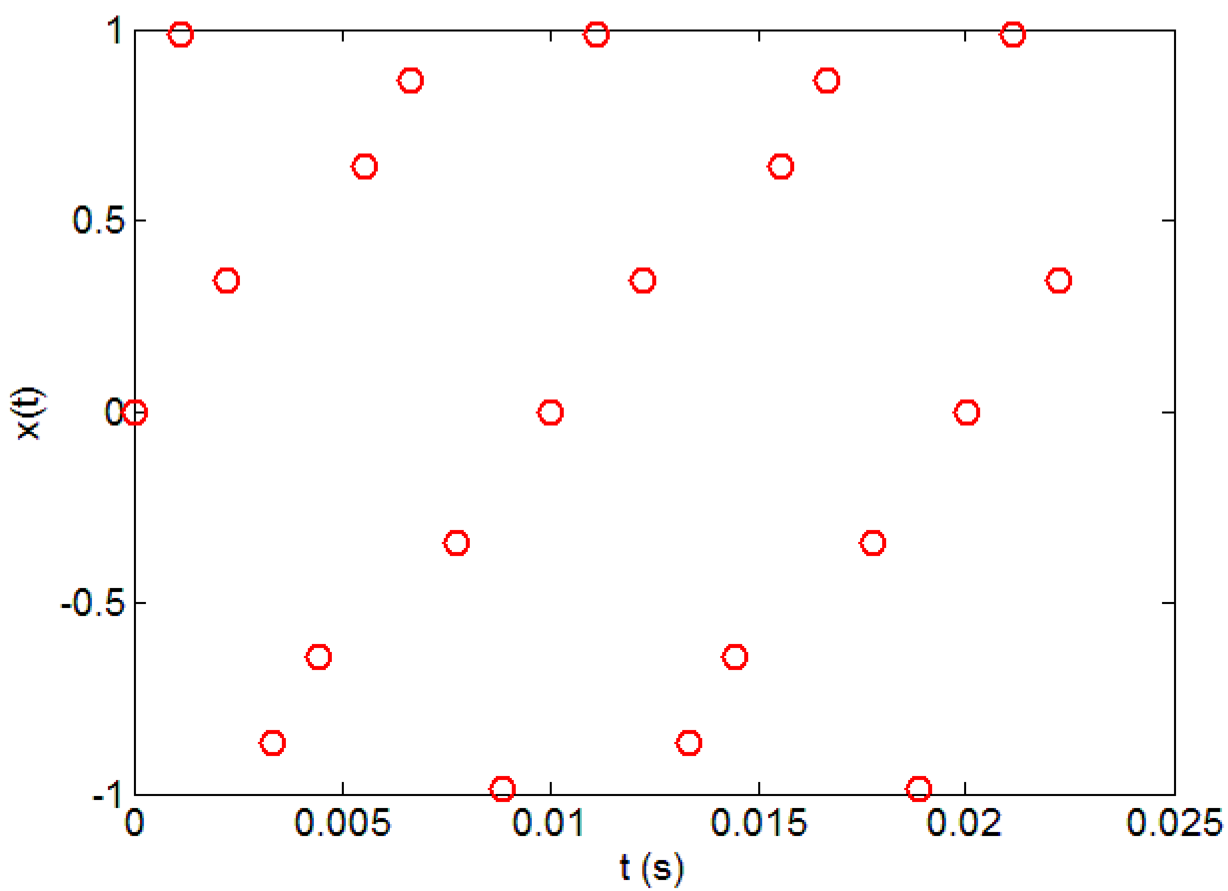
$$X(f) = Te \cdot Xe(f) \cdot rect_{2F}(f/2F)$$

⇩ ***TF inverse***

$$x(t) = 2F \cdot Te \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nTe) \cdot sinc\big(2\pi F(t - nTe)\big)$$

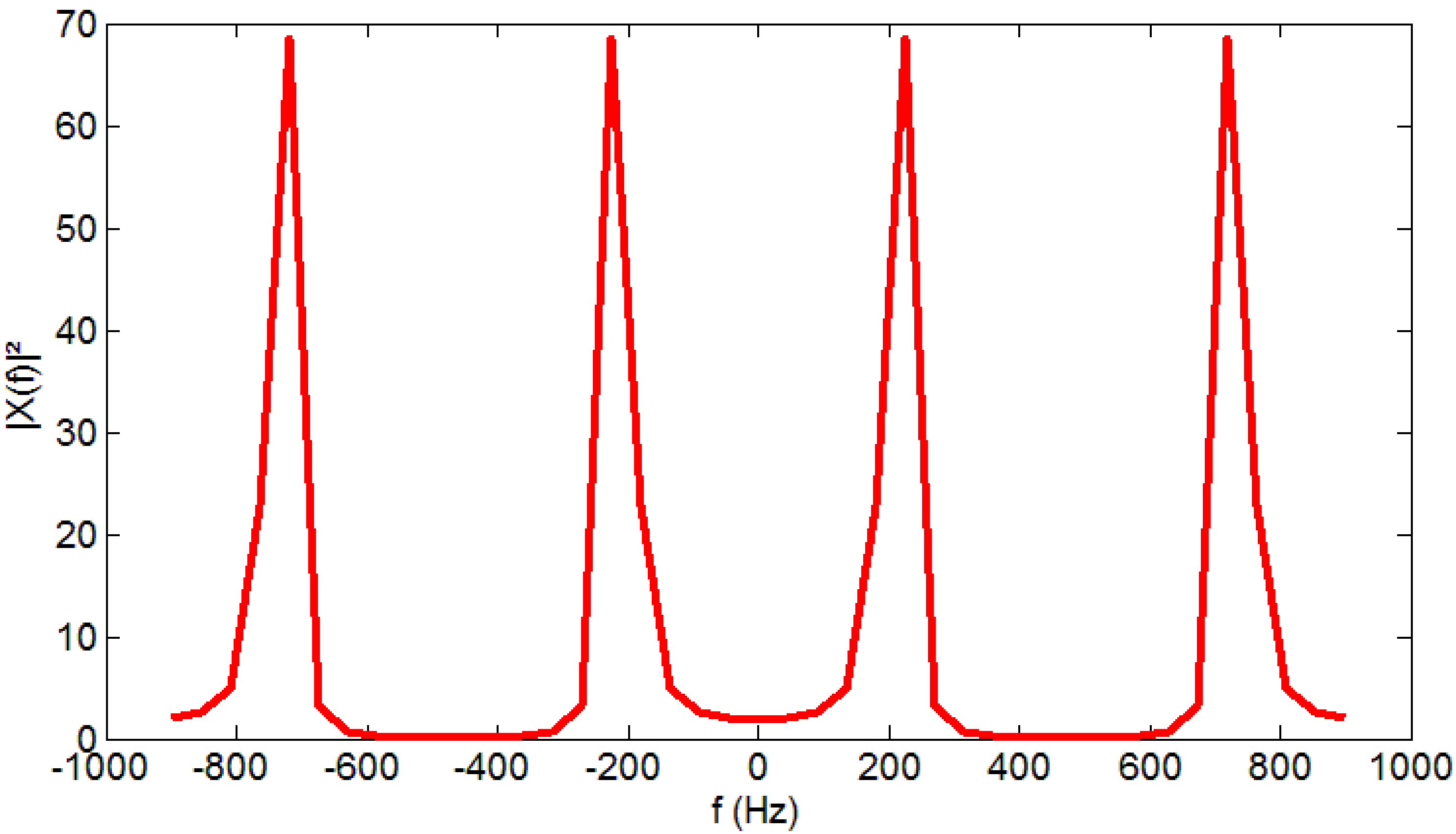
Théorème de Shannon : reconstitution du signal analogique

Que représente ces échantillons ?



Théorème de Shannon : reconstitution du signal analogique

La d-s-e du signal nous donne la courbe suivante :

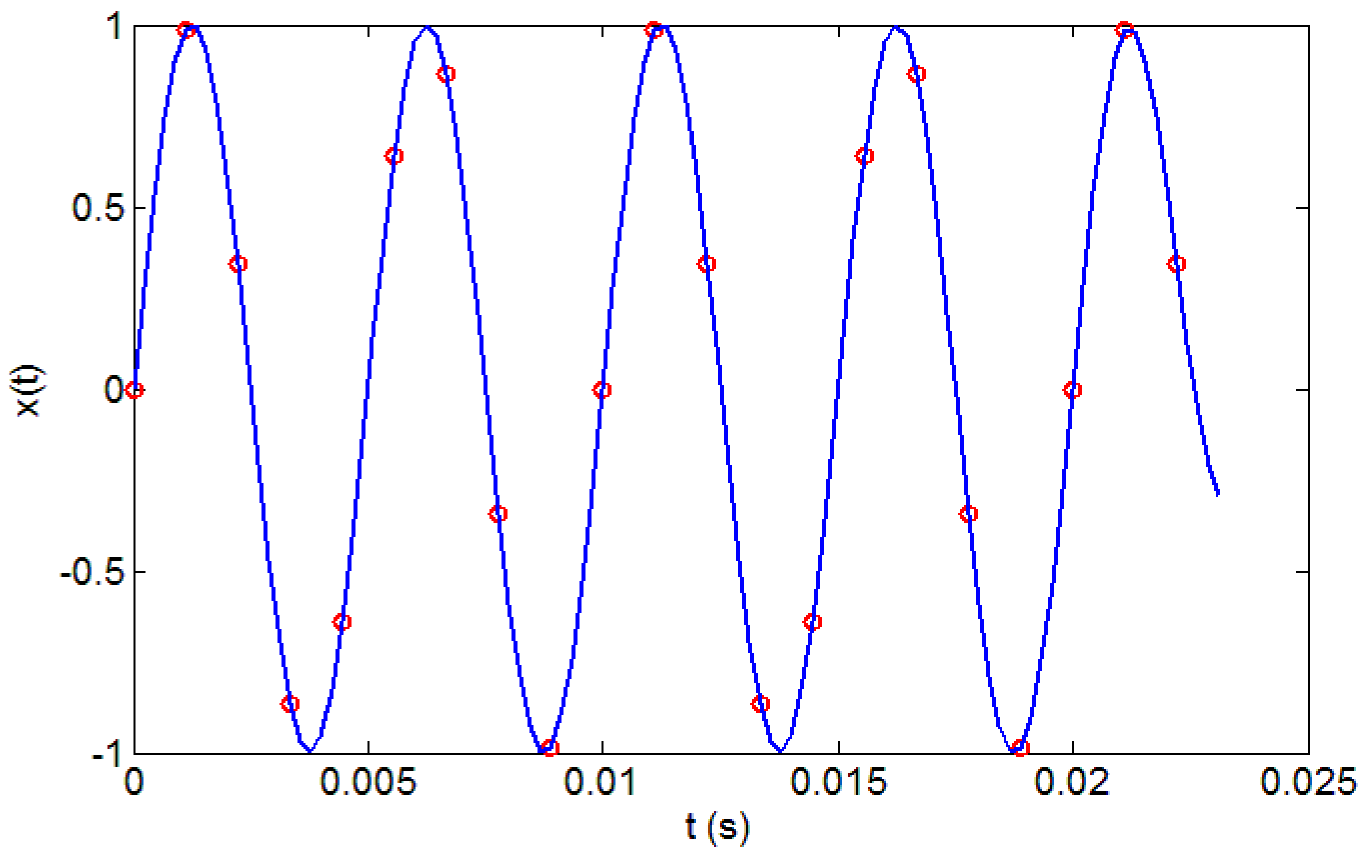


Le signal est :

La fréquence d'échantillonnage est :

Théorème de Shannon : reconstitution du signal analogique

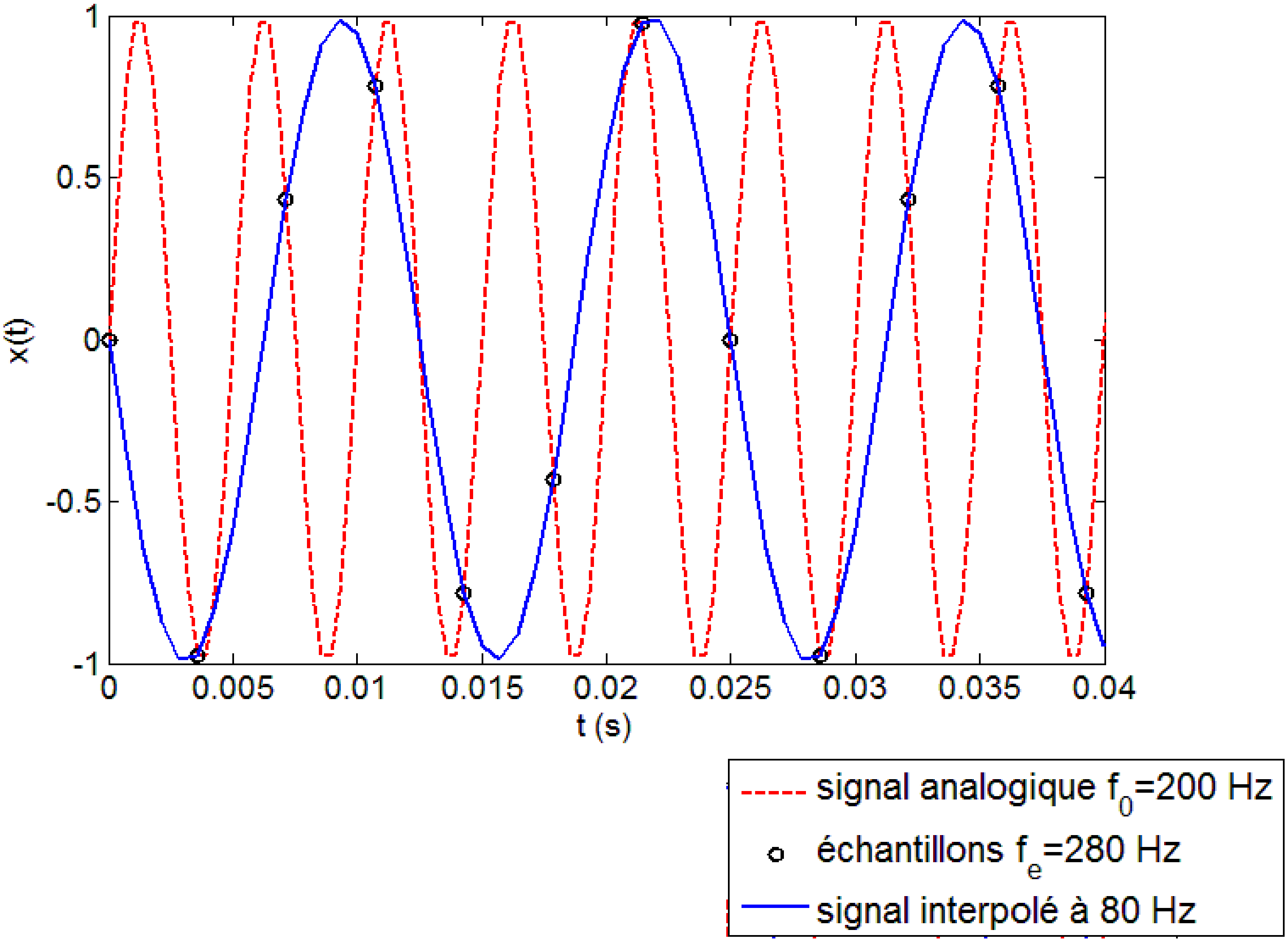
L'interpolation des échantillons nous donne :



Que pouvons nous conclure de l'échantillonnage lorsque le théorème de Shannon est respecté?

Théorème de Shannon : reconstitution du signal analogique

Exemple d’interpolation en sous échantillonnage :



Limites pratiques de l'échantillonnage idéal

En pratique,

Il faut s'assurer qu'il n'y ait **pas de recouvrement**

Un prélèvement d'échantillons instantané est impossible

Les signaux manipulés en pratique ont des **spectres infinis**

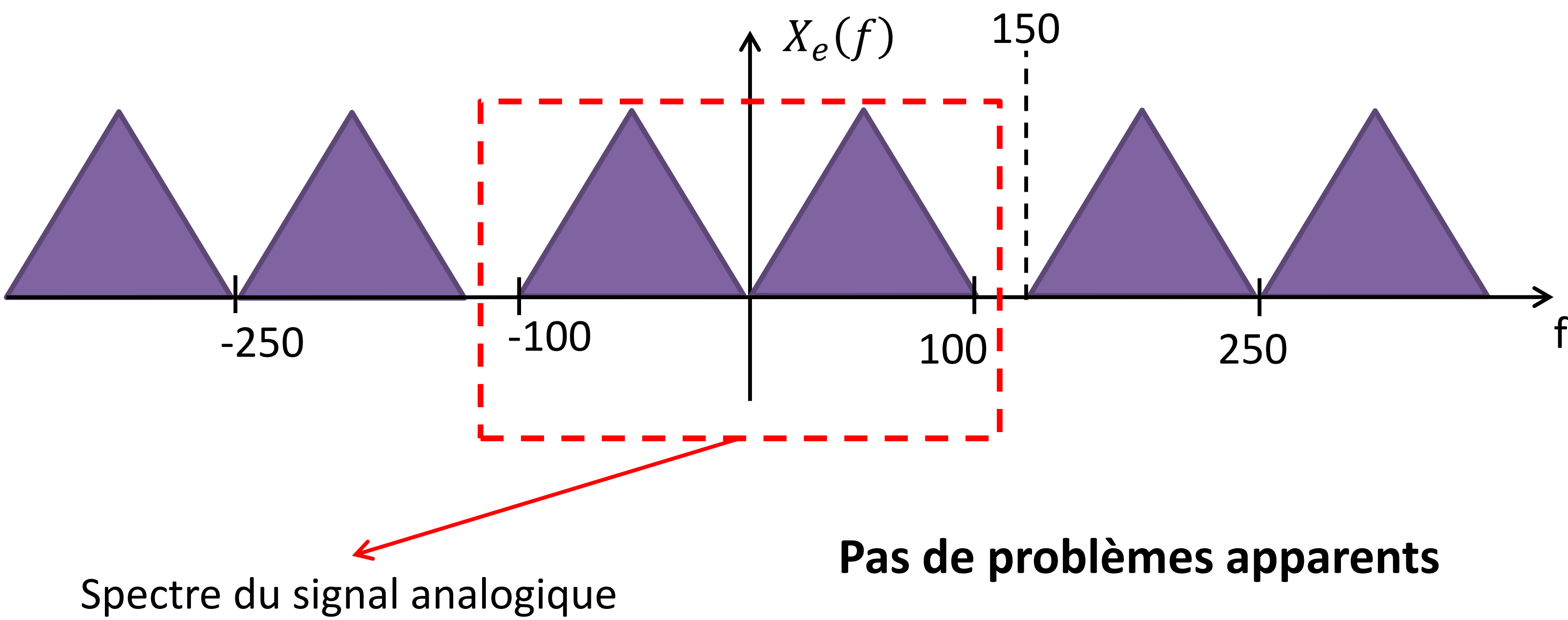
Comment les signaux sont-ils échantillonnés ?

Filtre anti-repliement

Problématique

Imaginons un signal utile sur la bande [0 – 100 Hz] que l'on veut échantillonner.
Théorème de Shannon : Fe > 200 Hz => nous choisissons 250 Hz

Le spectre du signal échantillonné est le suivant :



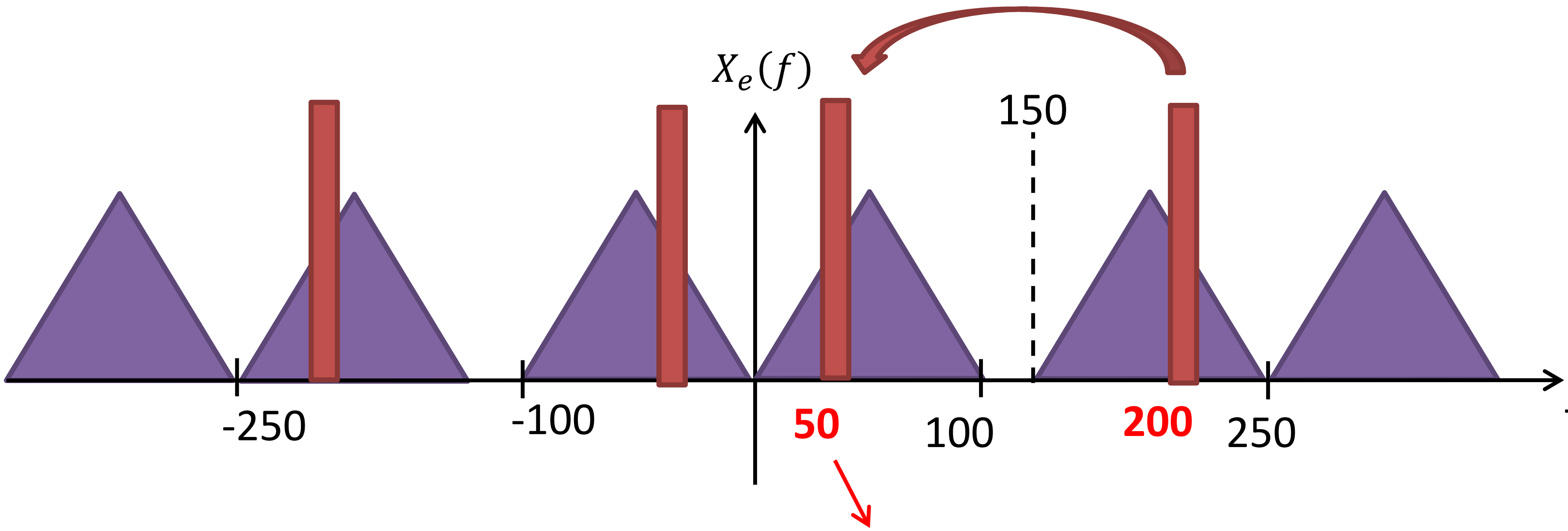
Pas de problèmes apparents

Filtre anti-repliement

Problématique

Imaginons que le système doivent cohabiter avec un système fonctionnant sur la bande [200-210 Hz].

Le spectre du signal échantillonné reçu est le suivant :



Repliement du spectre : perturbation du signal utile !!

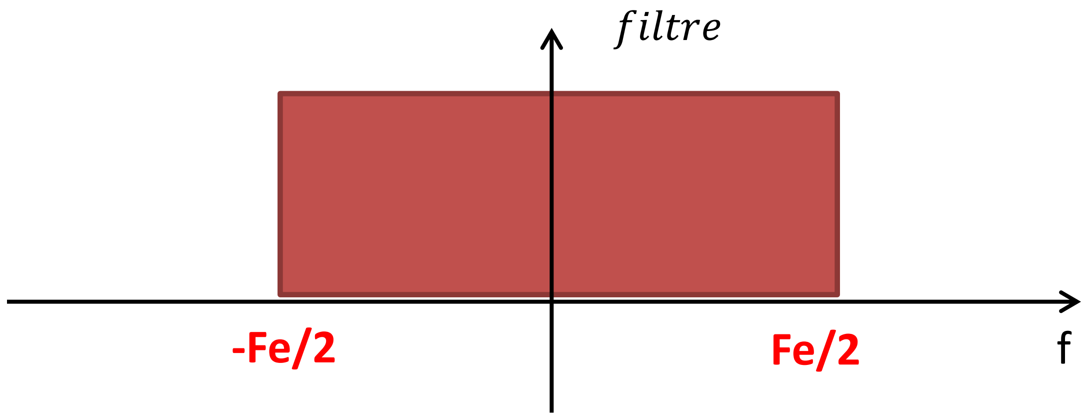
Comment éviter ce problème? => filtre anti-repliement

Filtre anti-repliement

Solution

En pratique, le signal est toujours filtré **AVANT** échantillonnage pour supprimer toutes les composantes au dessus de $F_e/2$

Le filtre anti-repliement est donc un filtre **passe-bas analogique** de fréquence égale **au maximum à $F_e/2$**

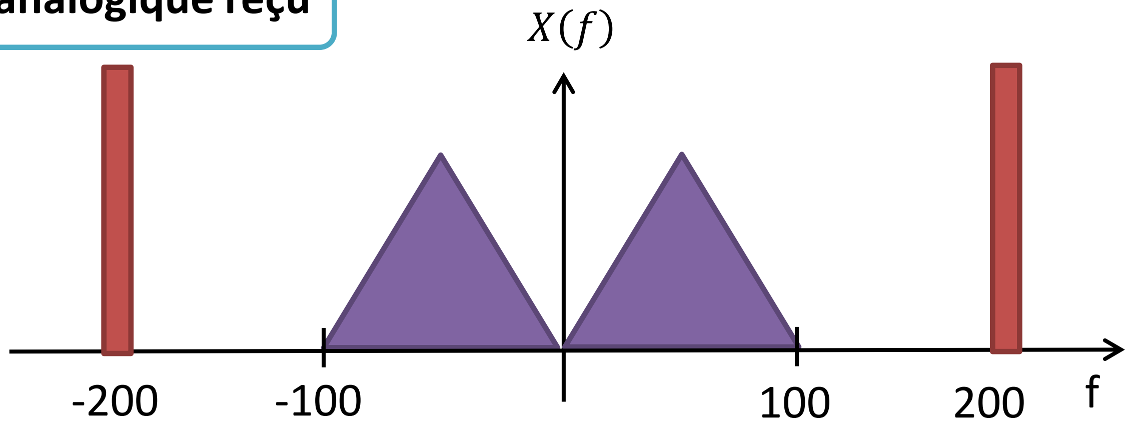


En pratique, le filtre n'est pas parfait. Sa fréquence de coupure est donc souvent choisi en dessous de $F_e/2$

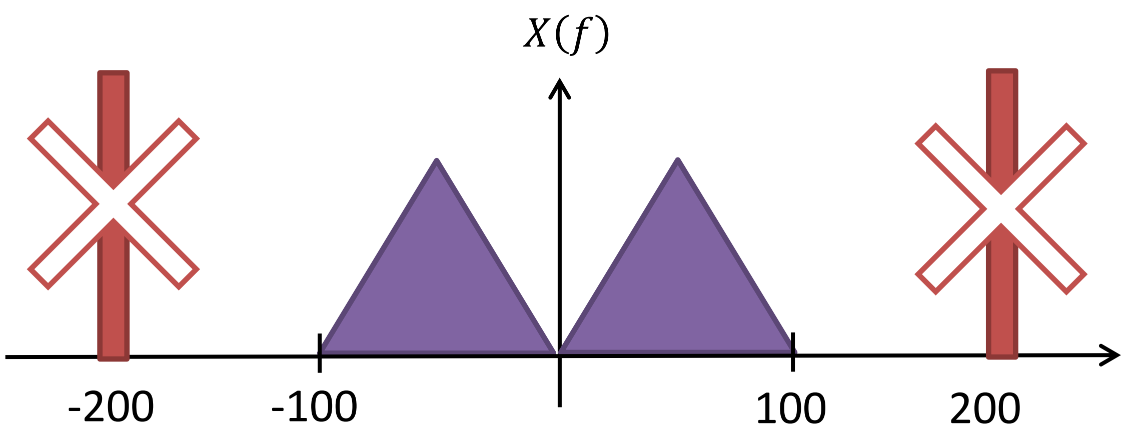
Filtre anti-repliement

Revenons à l'exemple précédent

Signal analogique reçu

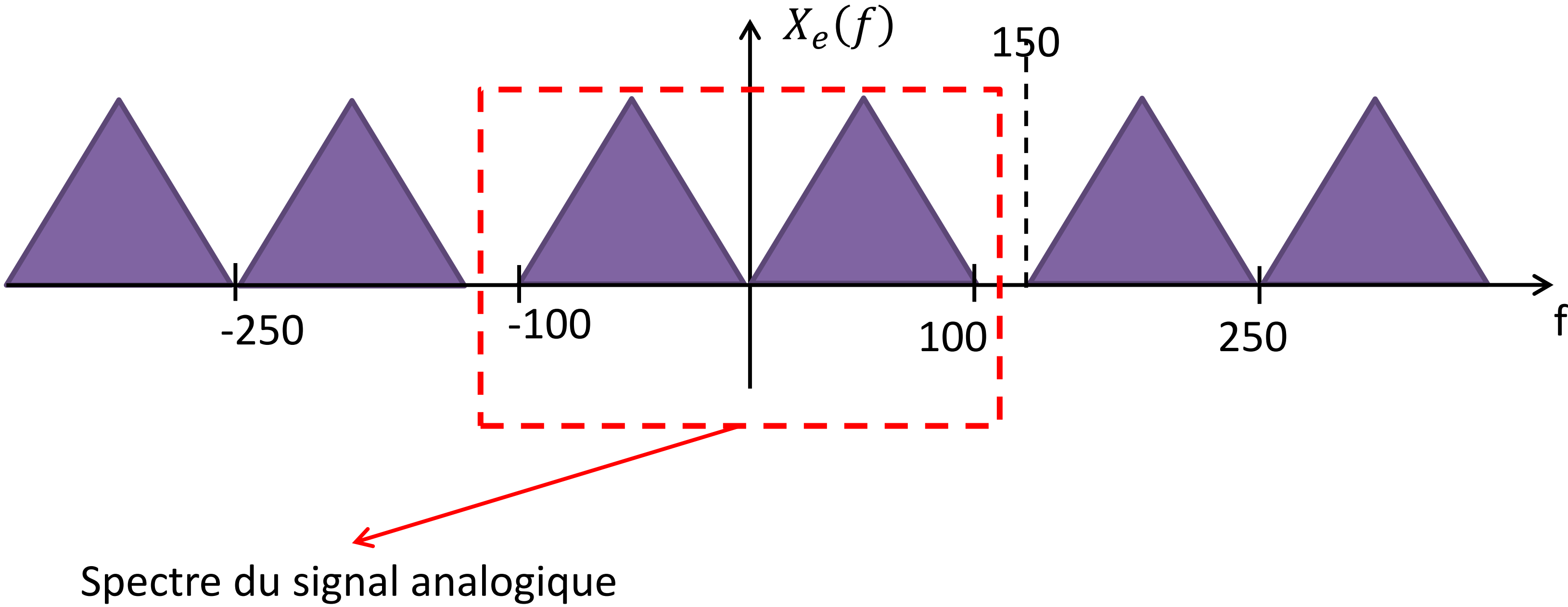


Filtre anti-repliement à $F_e/2$ = 125 Hz avant échantillonnage



Filtre anti-repliement

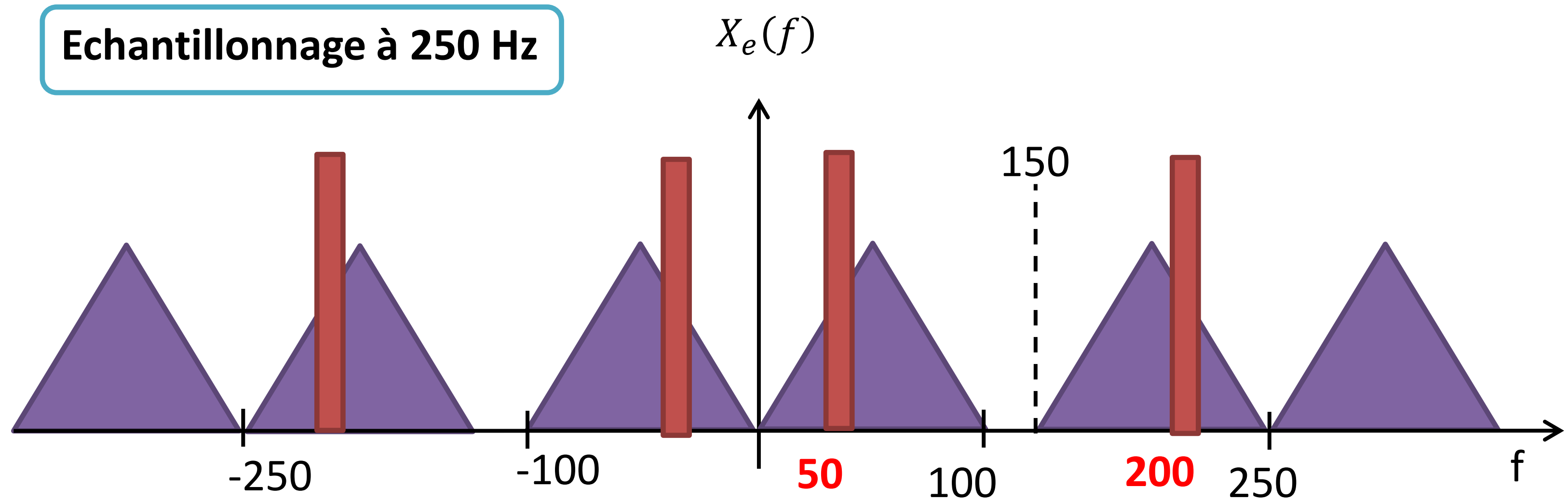
Echantillonnage à 250 Hz

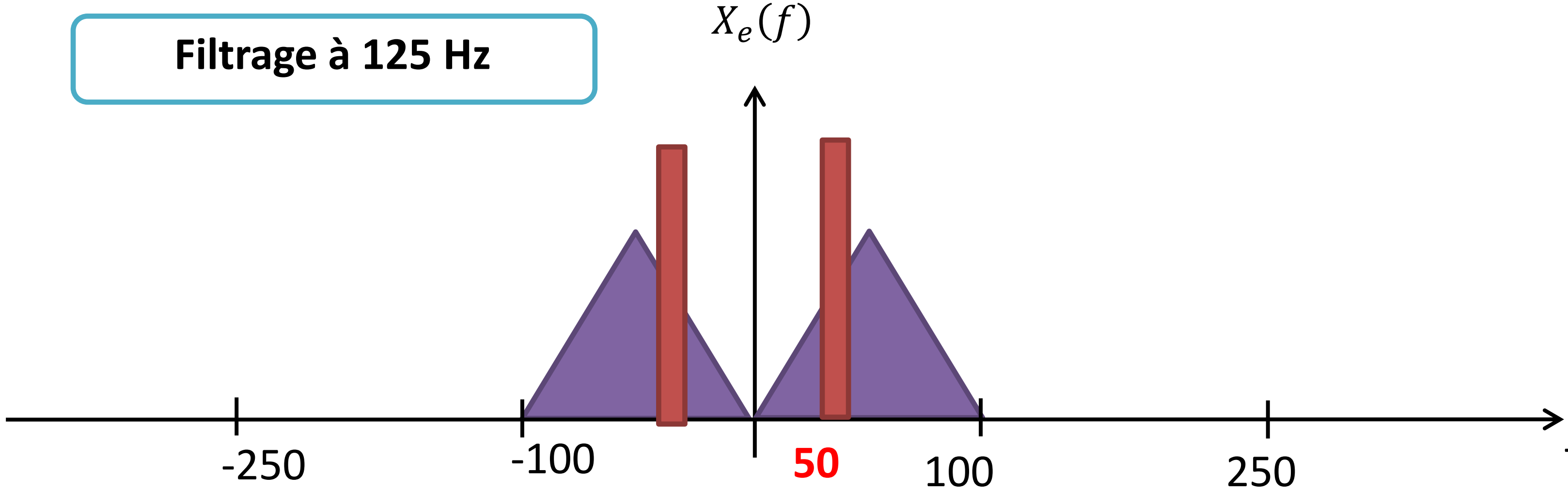


Plus de problème de repliement !

Que se passe-t-il si l'on place le filtre anti-repliement après l'échantillonnage?

Filtre anti-repliement





Le repliement est toujours là ! => **filtre anti-repliement = filtre analogique**

Exemples d'utilisation du filtre anti-repliement

Le réseau téléphonique numérique

Le signal analogique de parole nécessite un filtrage préalable dans la bande $[300\ Hz\ ; 3{,}4\ kHz]$ puis un échantillonnage à la fréquence 8 kHz.

Exemples d'utilisation du filtre anti-repliement

Enregistrement d'un signal sonore

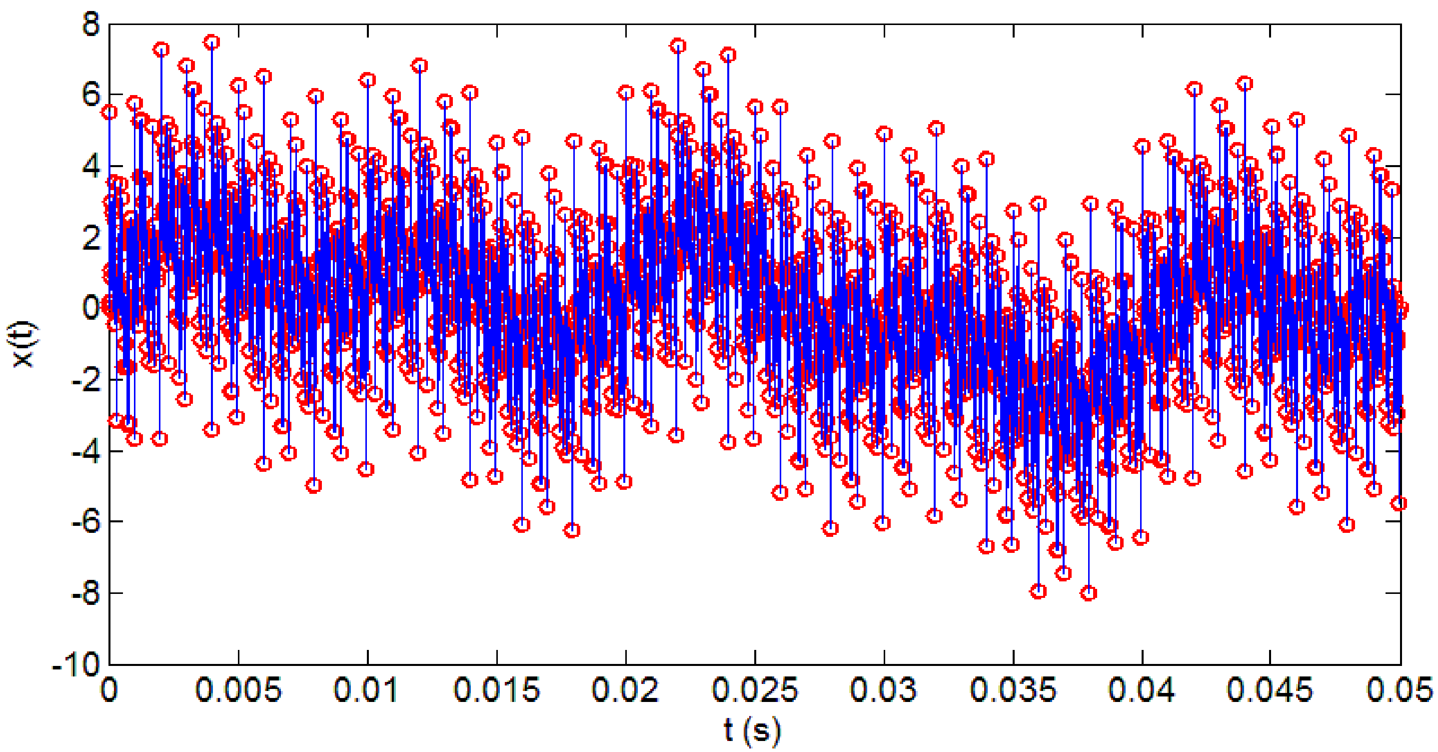
Un signal sonore est audible dans la bande $[20\ Hz\ ; 20\ kHz]$. En suivant le théorème de Shannon sur cette bande, une fréquence de $40\ \mathrm{kHz}$ est choisie.

Considérons un enregistrement sonore contenant une harmonique à $32\ kHz$ donc inaudible.

Echantillonné à $40\ \mathrm{kHz}$ puis restitué à l'aide d'un filtre passe-bas de bande passante $[-20\ kHz\ ; 20\ kHz]$, il fournit une composante sinusoïdale parasite à $8\ \mathrm{kHz}$ donc audible !!

Exemples d'utilisation du filtre anti-repliement

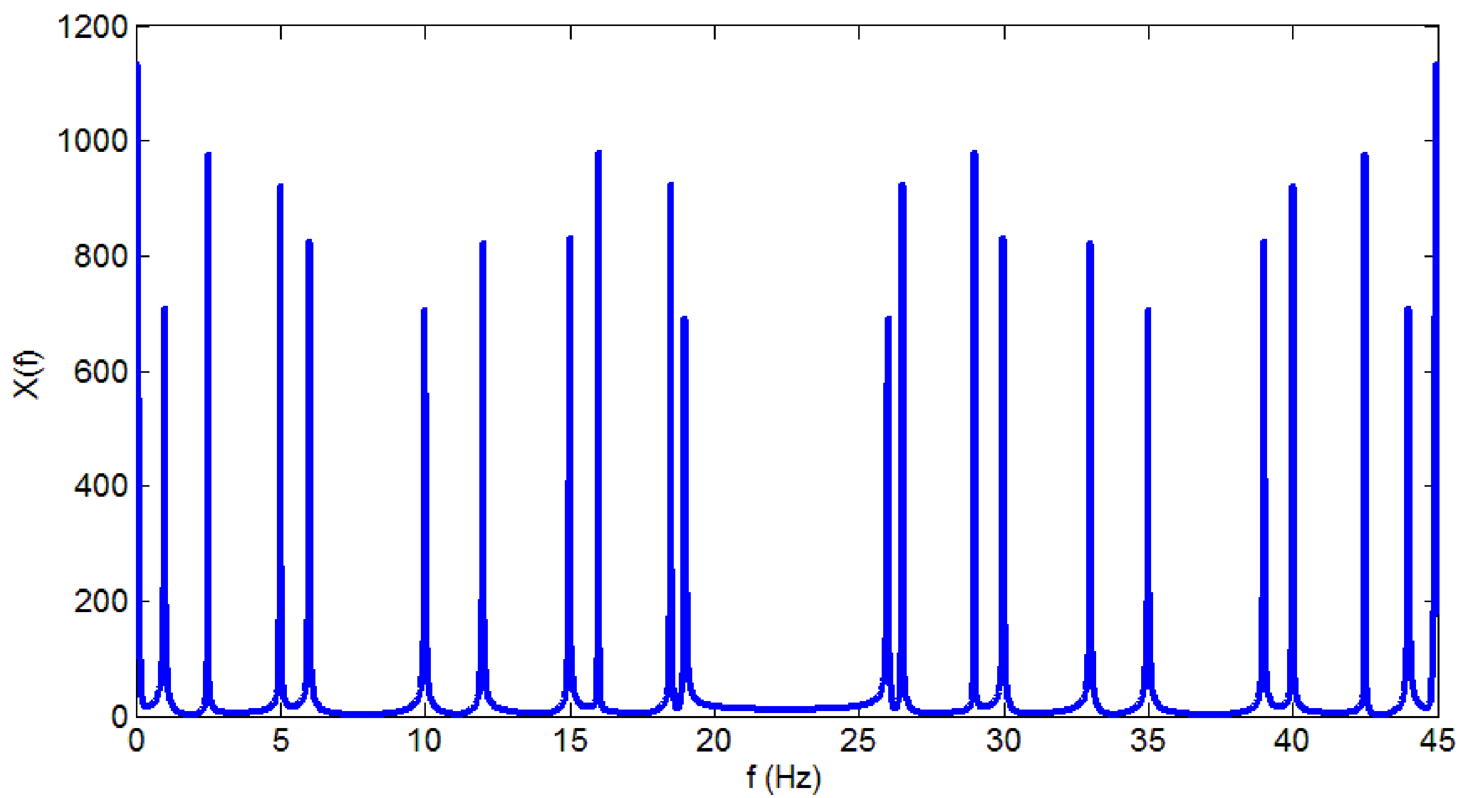
Enregistrement d'un signal sonore - Démonstration



Exemples d'utilisation du filtre anti-repliement

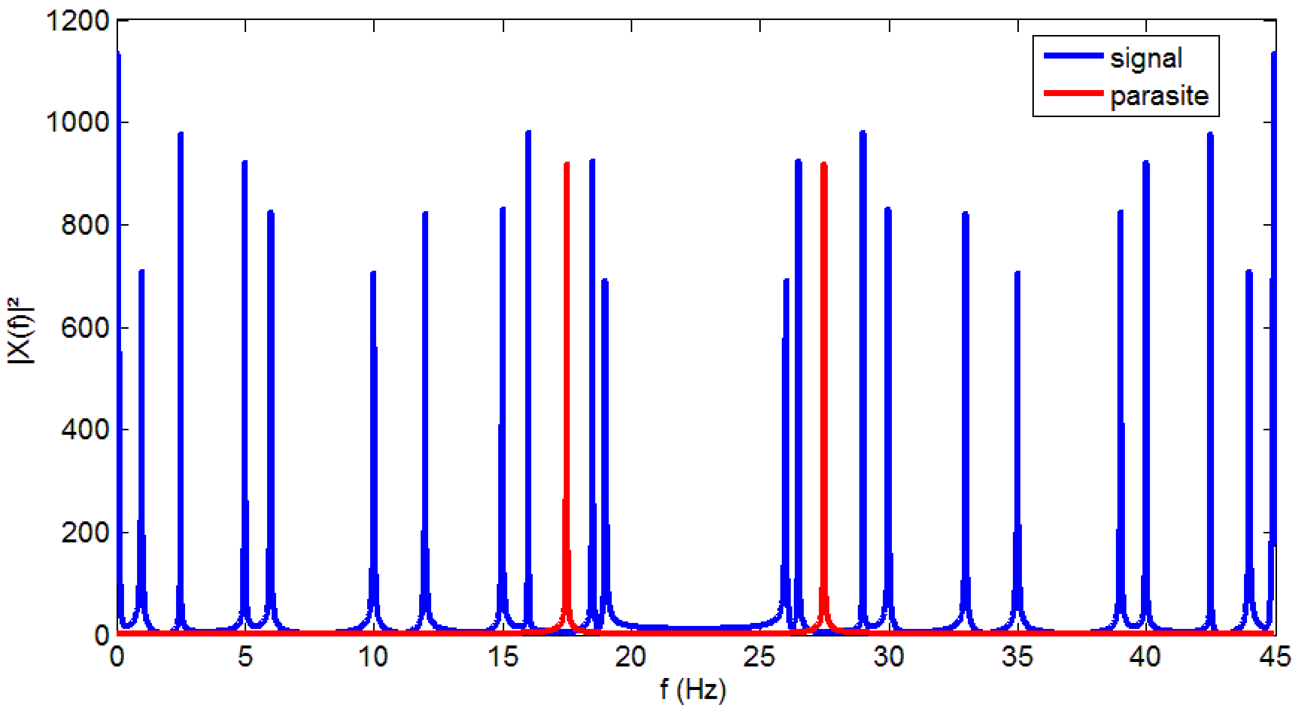
Enregistrement d'un signal sonore – d-e-s du signal utile

Bande passante entre 20 Hz et 20 kHz, échantillonnage à 45 kHz



Exemples d'utilisation du filtre anti-repliement

Si un signal parasite non audible à 27,5 KHz est présent lors de l'échantillonnage :



Apparition d'un signal à 17,5 kHz donc audible !!!

Utilisation d'un filtre anti-repliement avant échantillonnage pour supprimer cette fréquence.

Echantillonneurs

Processus d'échantillonnage idéal non réaliste en pratique

Impossibilité de prélever un échantillon d'un signal en un temps infiniment court.

Echantillonneur en pratique

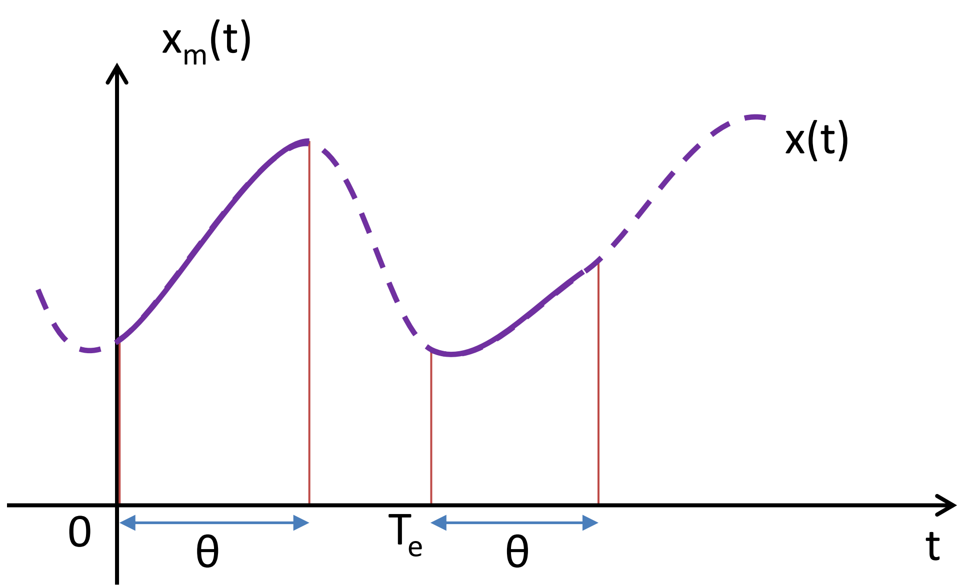
Porte analogique qui s'ouvre un court instant τ pendant lequel le signal est mis en mémoire.

Aussi petit que soit τ, ce n'est pas $x(n \cdot Te)$ qui est mis en mémoire mais une certaine fonction de $x(t)$ entre les instants $"\mathrm{kTe} - \tau/2"$ et $"\mathrm{kT_e} + \tau/2"$.

Echantillonneur moyenneur ou suiveur

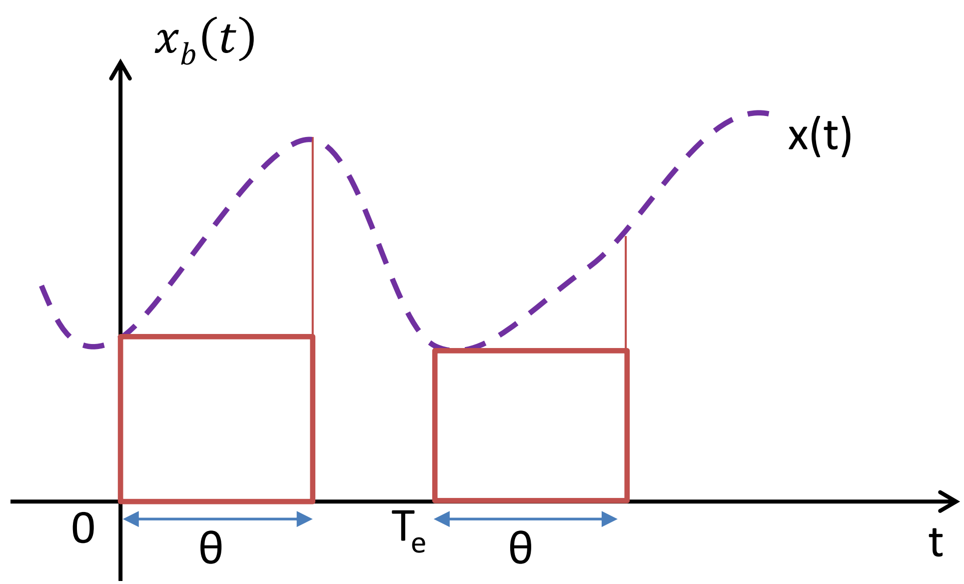
Pendant l'ouverture de la porte, le signal prélevé recopie le signal d'entrée.

L'échantillon est obtenu en réalisant la **moyenne** du signal sur le temps d'ouverture de la porte.



Echantillonneur bloqueur

Le signal est bloqué pendant une durée θ de mise en mémoire de sa valeur.

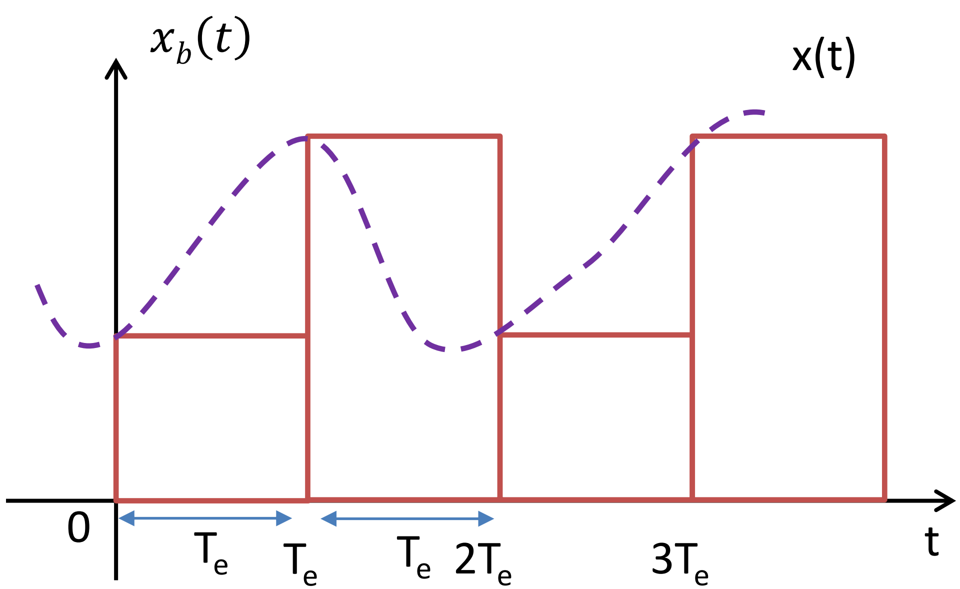


Echantillonneur bloqueur d'ordre 0

Cas particulier de l'échantillonneur bloqueur quand : $\theta = Te$

Le signal est bloqué pendant une durée θ égale à T_e de mise en mémoire de sa valeur.

$$x_b(t) = \sum_k \left(x(kT_e)\right) . rect_{Te}\left(\frac{t-(k+{}^1/_2)T_e}{T_e}\right)$$

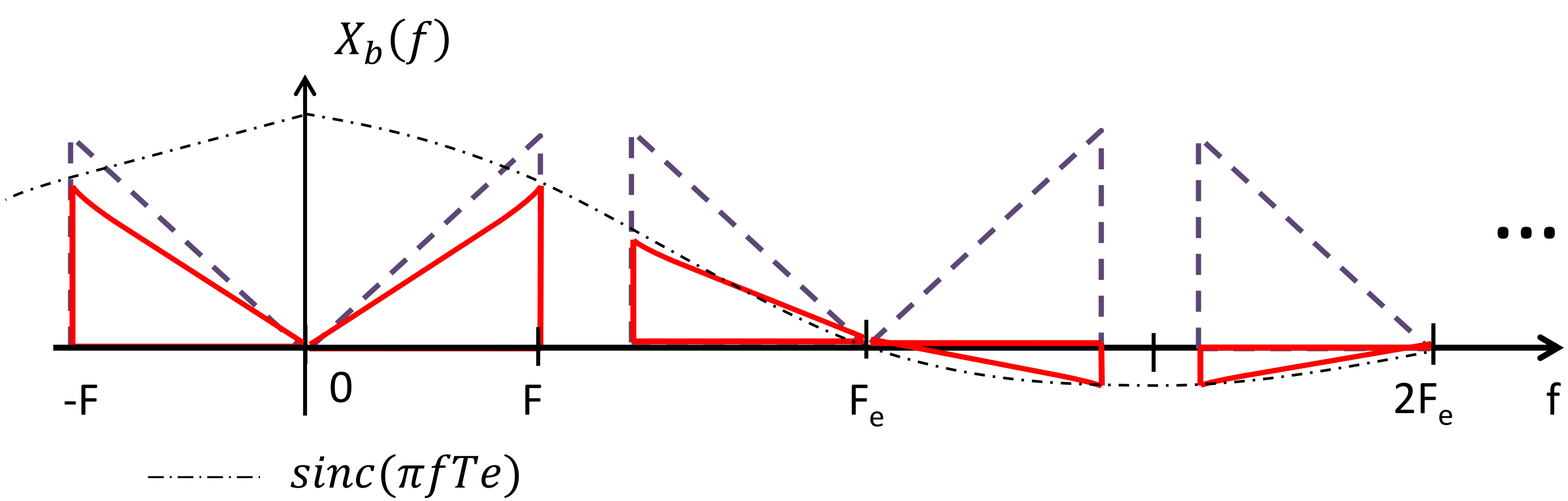


Echantillonneur bloqueur d'ordre 0

Le spectre du signal échantillonné bloqué est alors :

$$X_b(f) = \sum_k X(f - kFe) \cdot sinc(\pi f Te) \cdot e^{-\pi j f Te}$$

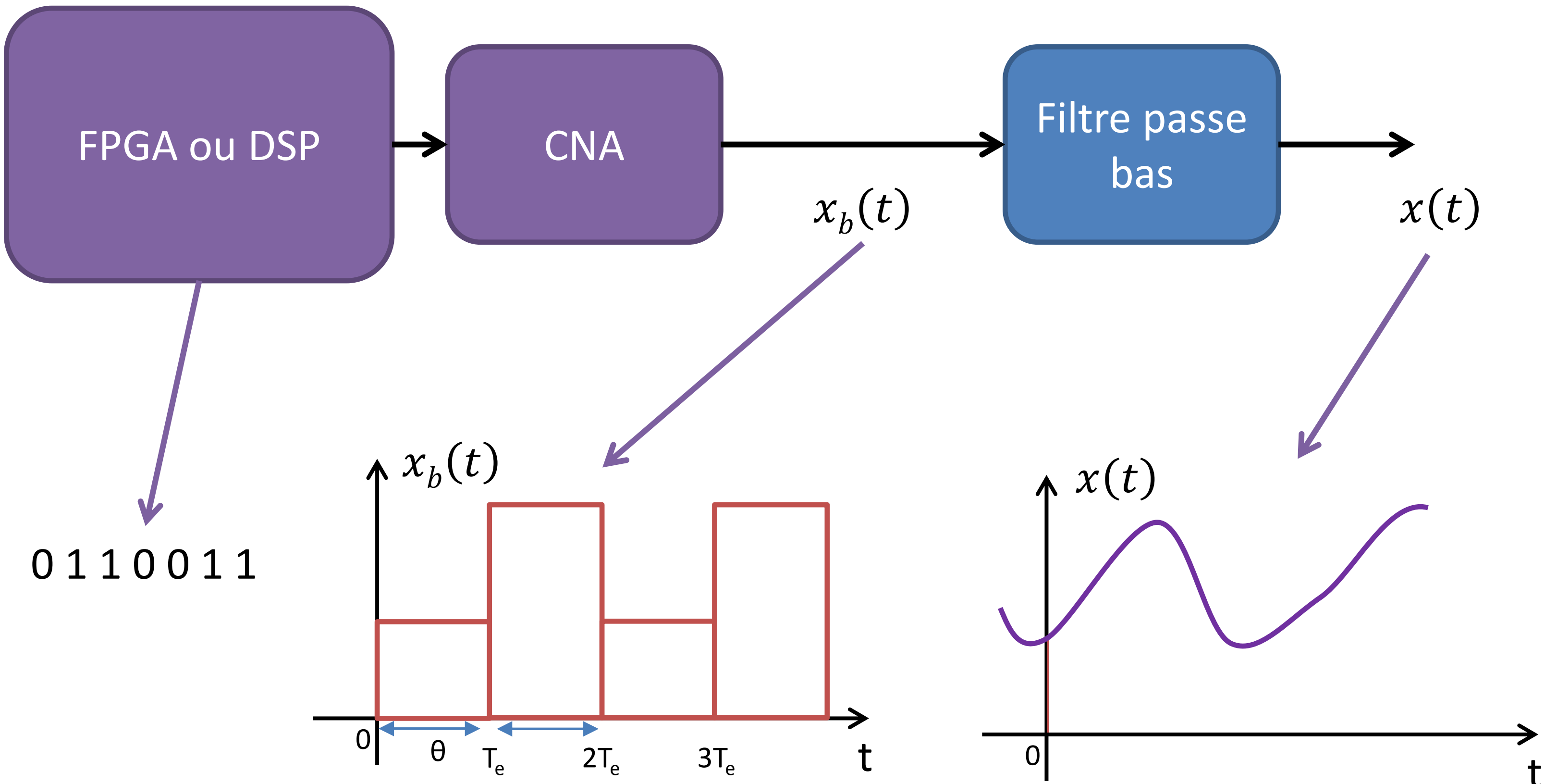
La périodisation du spectre est fortement atténuée mais le spectre d'origine entre –F et +F est très peu modifié



Echantillonneur bloqueur d'ordre 0

En pratique, c'est l'échantillonneur le plus utilisé :

- Pour restituer x(t), il suffit d'utiliser un filtre passe-bas pour « lisser » les marche à la sortie du CNA



Echantillonnage des signaux à durée limitée

Aspect théorique

Soit $x(t)$, un signal à support infini
et $x(t,T) = \mathrm{x(t)} \cdot rectT({}^{t}/_{T})$, le signal tronqué de support $[{}^{-T}/_{2}\,;{}^{T}/_{2}]$

Le spectre du signal tronqué est donc :

$$X(f,T) = X(f) * Tsinc(\pi f T)$$

Où $X(f)$ a un support fini et $Tsinc(\pi f T)$ a un support infini.
Donc $\boldsymbol{X(f,T)}$ a un support infini.

D’après le théorème de Shannon, la fréquence d’échantillonnage doit être supérieur à deux fois la fréquence la plus haute du signal.

$\Rightarrow$ Nous arrivons à la conclusion d’une fréquence d’échantillonnage infinie.
$\Rightarrow$ Comment choisie-t-on la fréquence d’échantillonnage en pratique?

Echantillonnage des signaux à durée limitée

Aspect pratique

En pratique, la fonction sinus cardinal peut être approximée par son lobe principal (on peut ajouter des lobes secondaires)

Le spectre du signal tronqué est donc :

$$X(f,T) = X(f) * T \cdot \text{"}lobe\ principal\ sinc(\pi f T)\text{«}$$

Où $X(f)$ a un support fini entre $[-F; F]$
Et $T \cdot \text{lobe principal sinc}(\pi f T)$ a un support fini entre $[{}^{-1}/_{T}\,; {}^{1}/_{T}]$.

Le spectre est alors défini sur : $[{}^{-1}/_{T} - F\ ;\ {}^{1}/_{T} + F]$

La fréquence d’échantillonnage est alors choisie comme : $\text{Fe} \geq 2 \cdot ({}^{1}/_{T} + F\ )$

Dans le cas où T est suffisamment grand, il est possible d’échantillonner le signal à une fréquence légèrement supérieur à $2F$.

Transformation de Fourier discrète : TFD

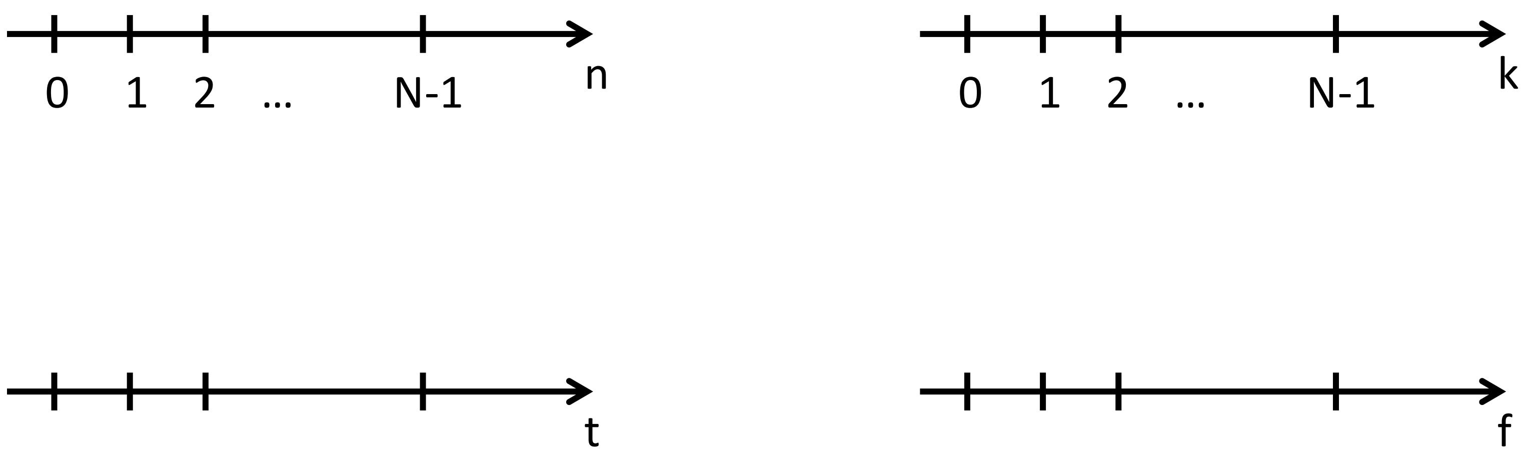
Signal discret
$x(n)$

$\xrightarrow{\text{TFD}}$

Spectre discret
$X(k)$

N échantillons

N échantillons



Le nombre d’échantillons détermine la résolution fréquentielle

Transformation de Fourier discrète : TFD

Définition

La TFD se déduit de la TFd par le changement de variable : $f = k \cdot \frac{F_e}{N}$

$$\mathrm{X}(k) = TFD\{x(n)\} =$$

$$\mathrm{x}(n) = \overline{TFD}\{X(k)\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi\frac{k \cdot n}{N}} \ , \forall n \in [0; N-1]$$

Notations

La notation suivante est souvent utilisé en pratique : $W_N^1 = e^{\frac{2\pi j}{N}}$

$$\mathrm{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{-k \cdot n}$$

Transformation de Fourier discrète : TFD

Propriétés

- **Linéarité**

- **Translation**

$$TFD\big(x(n-n_0)\big) = W_N^{-k\cdot n_0} \cdot X(k), \forall\, k \in [0; N-1]$$

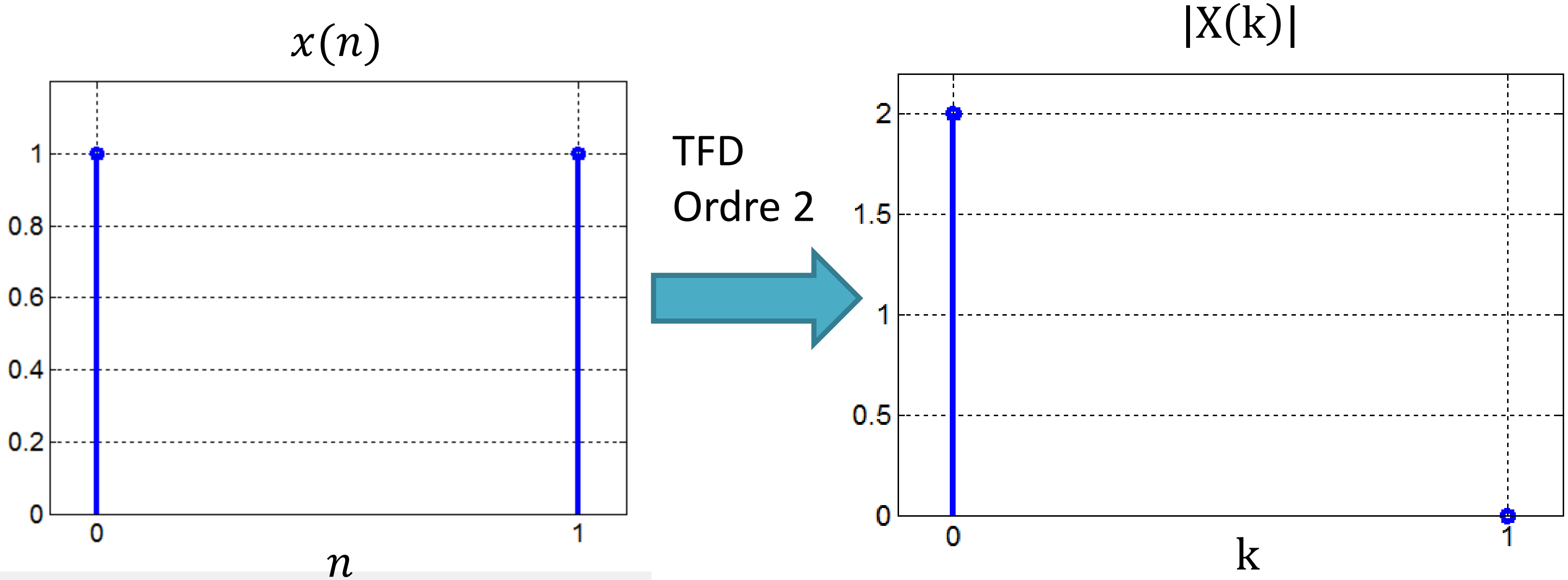
- **Symétrie**

Si $\{x(n)\}$ est formé d'échantillons réels $(x(n) = x^*(n))$

Alors : $X(N-k) = X^*(k)$

Exemple de TFD

Soit le signal $x(n)$ suivant :



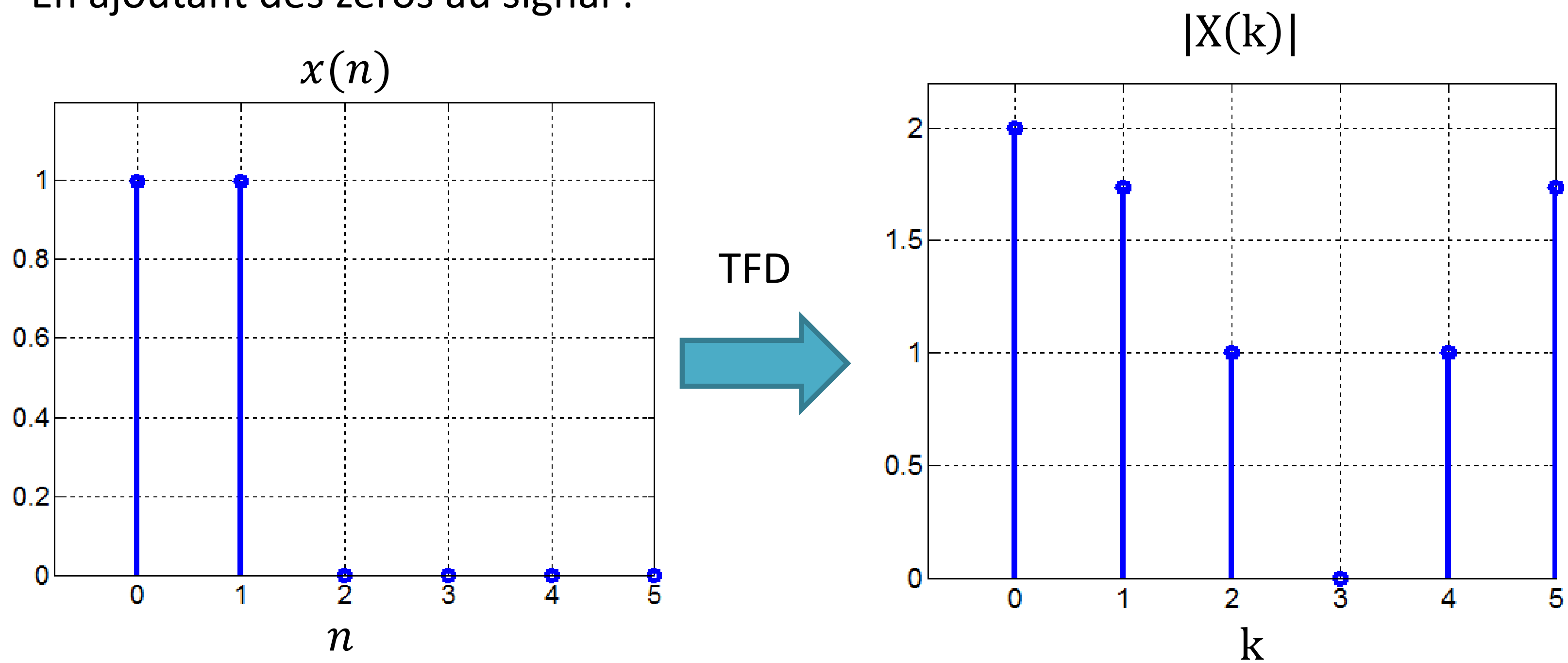
$$X(k) = \sum_{n=0}^{1} x(n) \cdot W_2^{-nk}, \forall\, k \in [0;1]$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{1} x(n) = 1 + 1 = 2 \qquad X(1) = \sum_{n=0}^{1} x(n)\, W_2^{-n} = 1 - 1 = 0$$

Comment améliorer la résolution du spectre?

Exemple de TFD

En ajoutant des zéros au signal :

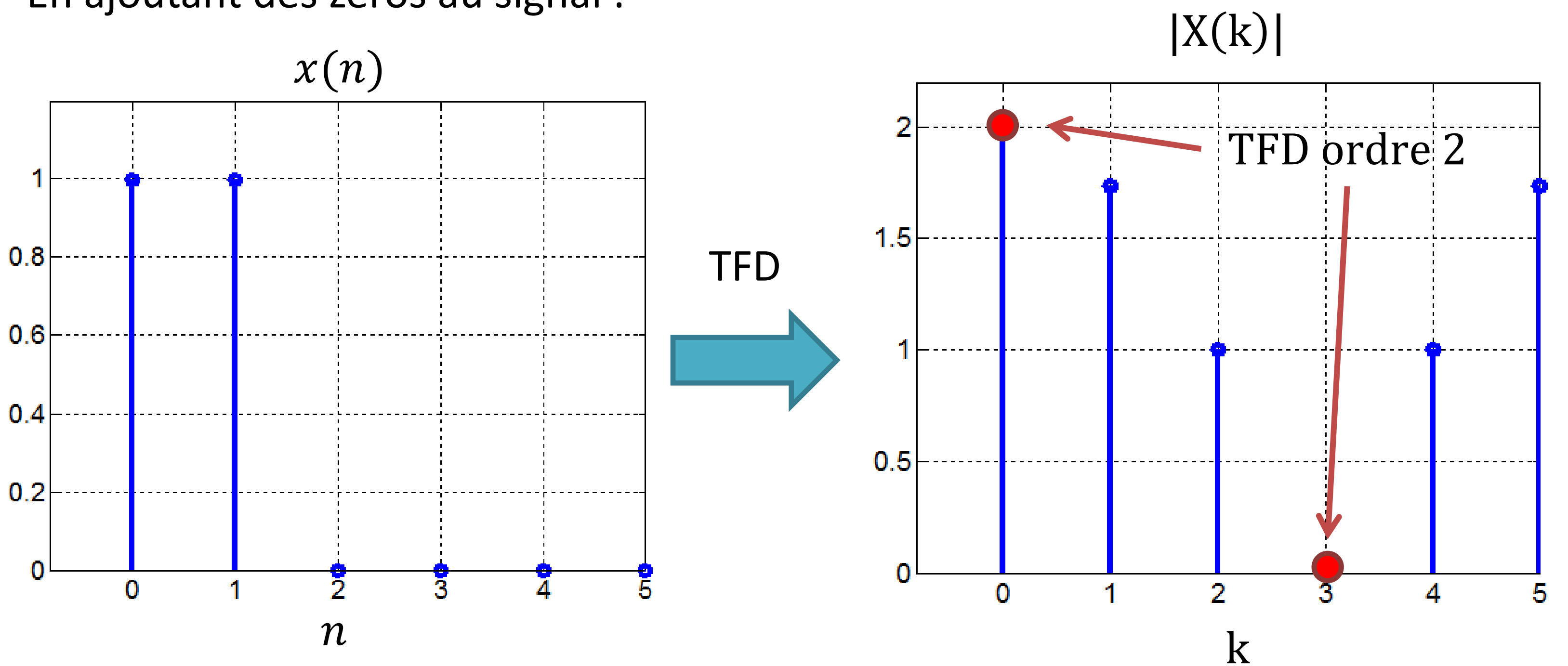


$$\mathrm{X(k)} = \sum_{n=0}^{5} x(n) \cdot W_6^{-\mathrm{n}k} \,, \forall\, k \in [0;5]$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{6} x(n) = 1 + 1 = 2 \qquad X(1) = \sum_{n=0}^{6} x(n)\, W_6^{-\mathrm{n}} = 1 + W_6^{-1} = 1{,}5 - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemple de TFD

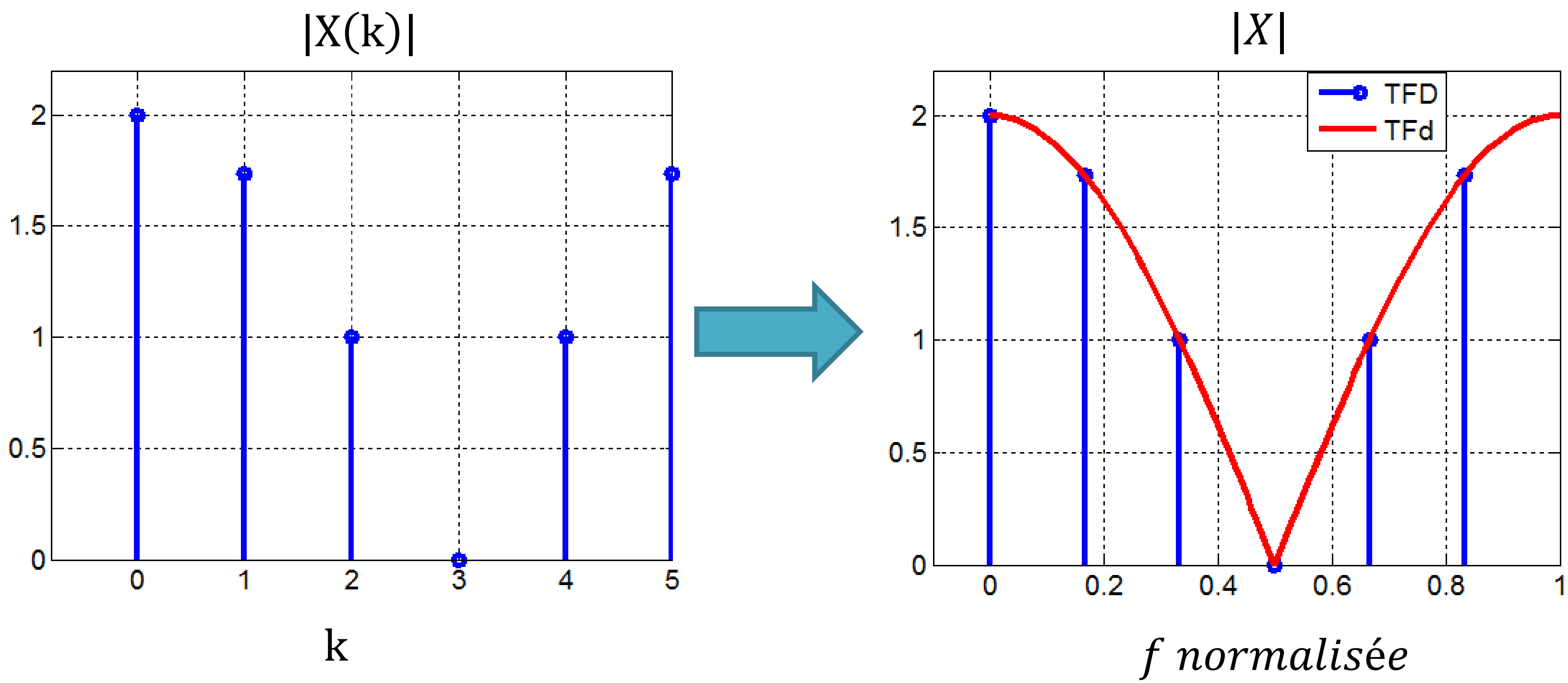
En ajoutant des zéros au signal :



Nous retrouvons les échantillons de la TFD à l'ordre 2 pour k = 0 et k = 3

Comment faire le lien entre l'indice k et une fréquence?
Retrouve-t-on le même résultat que par le TFd?

Exemple de TFD



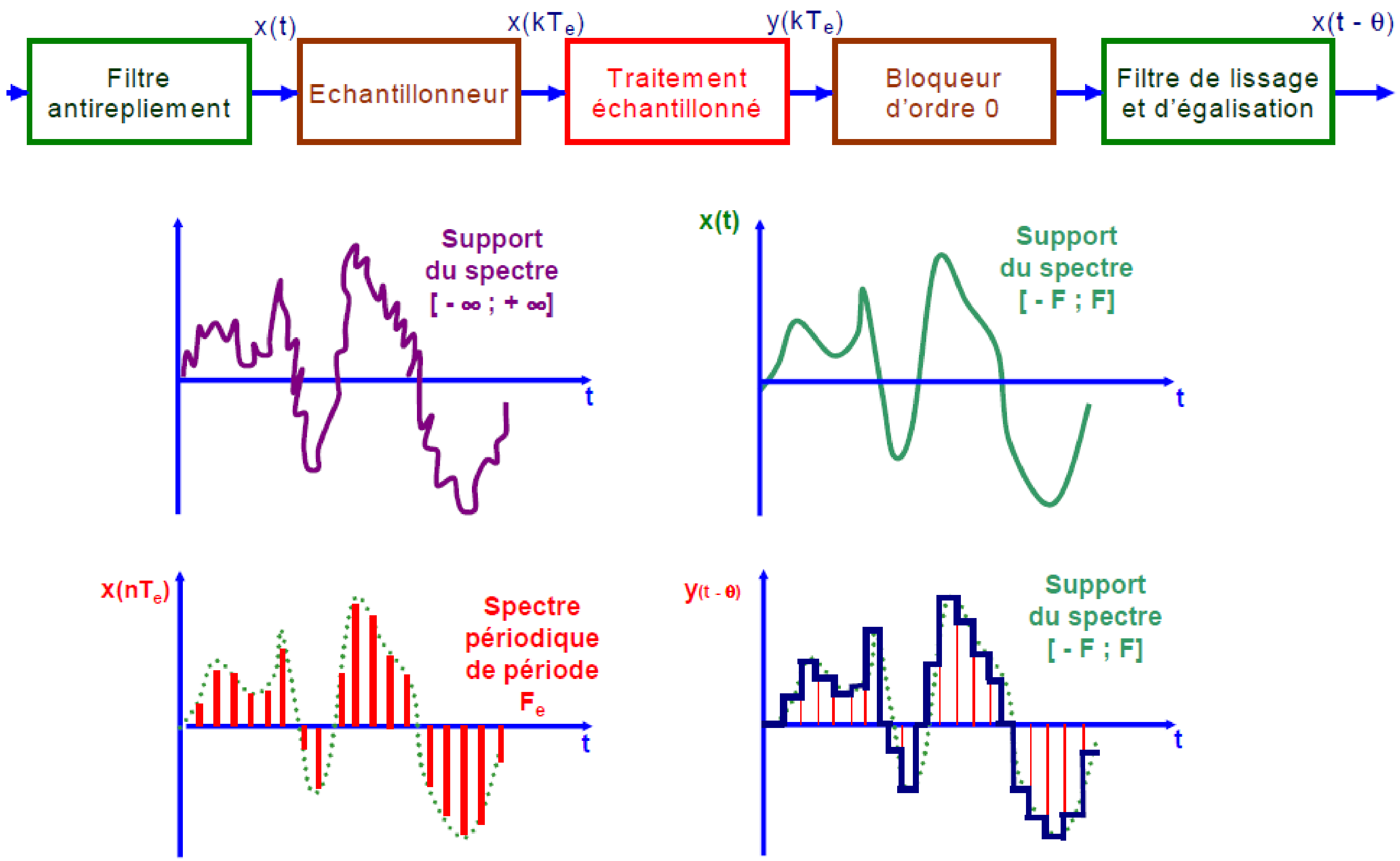
Le signal et échantillonné à une fréquence F_e. L'incrément fréquentiel est donc égale à F_e/N.

Ex : N = 6 ; si la fréquence est normalisée : f/F_e.

Alors le spectre est affiché entre $[0; 1 - 1/N]$.

Conclusion

Chaine de traitement numérique



Conclusion

Remarque

Son audio téléphonique

Échantillonnage à 8 kHz et quantification sur 8 bits

Débit : $8 \cdot 10^3 \times 8 = 64\ kbit/s$

Volume en 1 minute : $3{,}84 \cdot 10^6\ bits \sim 480\ ko$

Son audio qualité CD

Échantillonnage à 44,1 kHz et quantification sur 16 bits

Débit : $705{,}6\ kbit/s$

Volume en 1 minute : $\sim 5\ Mo$

$\Rightarrow$ Influence de la technique de numérisation sur le débit et le volume de stockage
$\Rightarrow$ Fréquence d'échantillonnage et quantification en fonction de l'usage
$\Rightarrow$ Fréquence d'échantillonnage minimale donnée par Shannon

Conclusion

A retenir

Echantillonnage

Prélèvement des valeurs d'un signal tous les $1/F_e$

Effet

Périodisation du spectre de période F_e

Préconisation

Théorème de Shannon : $F_e > 2\ F_{max}$ du signal

Filtre anti-repliement :

Filtre passe bas analogique de fréquence de coupure : $F_c = F_e/2$