MA 360 : Mathématiques appliquées (TDS)
Chapitre 1 : Signaux déterministes continus

Pierre-Alain TOUPANCE
pierre-alain.toupance@esisar.grenoble-inp.fr

Grenoble INP - ESISAR
$3^{\text{ième}}$ année

9 septembre 2021

Organisation

Organisation

- Enseignant : Pierre-Alain Toupance
- Volume horaire
  - 10 CM.
  - 8 TD.
  - Fin des cours de MA 360 : le 08/03

Organisation

Organisation

- Crédits : 2,5 ECTS
- UE : Mathématiques pour l'ingénieur (MA331 Théorie de l'information (3 ECTS), AC360 (2,5 ECTS) +Mathématiques appliquées (2,5 ECTS))
- Modalités d'évaluation :
  - DS de 1h30 et Examen de 1h30
  - Moyenne session1= 0,7 × Examen session1 + 0,3 × DS
  - Moyenne session2= Examen session2

Prérequis et objectifs

- Pré-requis : Mathématiques du 1er cycle (série, opérations ensemblistes, analyse (intégrales sur un intervalle quelconque, intégrales multiples).
- Objectifs :
  - Maitriser les outils mathématiques pour le TDS.
  - Etre capable de formuler un problème sous forme probabiliste dans le cas continue.
  - Etre capable en statistiques de définir les caractéristiques significatives d'une population de données (moments, intervalles de confiance, corrélations, etc.) qui permettent à un ingénieur d'en comprendre le sens, d'en saisir les limites et de les analyser avant de prendre des décisions.
- Ce cours est un pré-requis aux cours TDS AC360 et supports pour les communications" (SC311), Mathématiques appliquées à la sécurité (MA431),

Plan du cours

- Mathématiques pour le traitement du signal.
  1. Signaux déterministes continues
  2. Echantillonnage, transformées usuelles du TDS.
  3. Introduction à l'analyse spectrale
- Probabilités
  1. Variables aléatoires à densité.
  2. Vecteurs de variables aléatoires continues.
  3. Théorèmes de convergence.
  4. Estimation et intervalle de confiance.

Notation

On note D_T l'ensemble des applications $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\begin{cases} f \text{ est T périodique} \\ f \text{ est continue par morceau sur } \mathbb{R} \\ \forall t \in R,\ \ f(t) = \dfrac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)) \end{cases}$$

Remarque :

- On munit D_T du produit scalaire défini par $\forall (f,g) \in D_T^2,\ \ (f|g) = \dfrac{1}{T}\int_{[T]} \overline{f(t)} g(t) dt$
- La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée où $e_n(t) = e^{jn\omega t}$ avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$.
  $f = \dfrac{1}{T}$ est la fréquence du signal.

Définition : coefficients de Fourier

1. Soit $f \in \mathcal{D}_T$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on appelle nième coefficient de Fourier complexe de f le nombre c_n défini par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = (e_n|f) = \frac{1}{T}\int_{[T]} e^{-jn\omega t} f(t)dt$$

2. Soit $f \in \mathcal{D}_T$ telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les coefficients de Fourier réels ou trigonométriques de f notés a_n et b_n définies par :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{[T]} \cos(n\omega t) f(t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{[T]} \sin(n\omega t) f(t)dt$$

Propriété

$\forall f \in D_T$ telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$,

- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = c_n + c_{-n}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = j(c_n - c_{-n})$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} c_n = \dfrac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ c_{-n} = \dfrac{1}{2}(a_n + jb_n) \end{cases}$
- $b_0 = 0$
- si f est paire, $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 0$
- si f est impaire, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$

Exemple

Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction $f \in D_{2\pi}$ telle que $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0;\pi[\\ 0 & \text{si } t \in]-\pi;0[\end{cases}$.

Exemple

Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction $f \in D_{2\pi}$ telle que $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0;\pi[\\ 0 & \text{si } t \in]-\pi;0[\end{cases}$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1dt = 1$$

$$\forall n \geqslant 1, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt)dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi = 0$$

$$\forall n \geqslant 1, b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt)dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \frac{1-(-1)^n}{n}$$

definition

Soit $f \in D_T$, on appelle série de Fourier de f la série d'applications :

$$c_0 e_0(t) + \sum_{n \geqslant 1} (c_n e_n(t) + c_{-n} e_{-n}(t))$$

remarque : Cette série peut être notée $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$

definition

Soit $f \in D_T$, telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, on appelle série de Fourier réelle de f la série d'application :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geqslant 1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

On note $S_p(f) = \sum_{n=-p}^{p} c_n e_n$ et on note $F_p = Vect(e_{-p}, ...e_p)$
$\forall p \in \mathbb{N}$ et $\forall f \in D_T$, la projection orthogonale de f sur F_p est $S_p(f)$

Egalité de Parseval (cas complexe)

Soit $f \in D_T$, la série $\sum_{n \geqslant 1} (|c_{-n}|^2 + |c_n|^2)$ converge et :

$$|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_{-n}|^2 + |c_n|^2) = \frac{1}{T} \int_{[T]} |f(t)|^2 dt$$

Egalité de Parseval (cas réel)

Soit $f \in D_T$, telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (a_n^2 + b_n^2)$ converge et :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T} \int_{[T]} (f(t))^2 dt$$

Théorème de convergence ponctuelle

Soit $f \in D_T$. Si f est de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et à pour somme f.

Théorème de Dirichlet

Soit $f \in D_T$. Si f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f.

remarque : Si f est T périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ alors la série de Fourier de f converge simplement vers sa régularisée g.

g étant une fonction de D_T définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

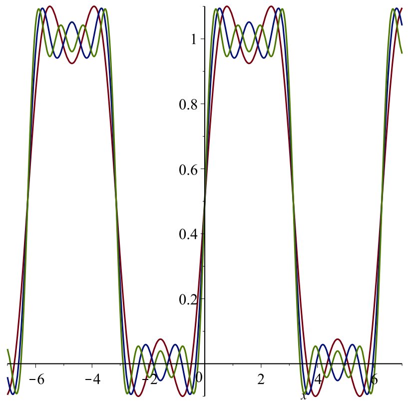

Figure – Somme de Fourier avec les 1ers harmoniques de la fonction créneau périodique.

Exemple

Soit $f \in D_{2\pi}$, telle que $\forall x \in]0;2\pi[,\ f(x) = x^2$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. La série de Fourier converge-t-elle vers f.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exemple

Soit $f \in D_{2\pi}$, telle que $\forall x \in]0; 2\pi[,\ f(x) = x^2$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. La série de Fourier converge-t-elle vers f.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

On a $a_0 = \dfrac{8}{3}\pi^2$ et $\forall n \geqslant 1 \begin{cases} a_n = \dfrac{4}{n^2} \\ b_n = -\dfrac{4\pi}{n} \end{cases}$

Comme f est C^1 par morceaux et $f \in D_{2\pi}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2}\cos(nt) - \frac{\pi}{n}\sin(nt)\right)$$

Résumé sur les séries de Fourier

Pour $f \in D_T$

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = (f|e_n) = \frac{1}{T}\int_{[T]} e^{-in\omega t} f(t)dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{T}\int_{[T]} \cos(n\omega t) f(t)dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{2}{T}\int_{[T]} \sin(n\omega t) f(t)dt$$

$$b_0 = 0$$

Si f est paire alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$.
Si f est impaire alors $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 0$.

Résumé sur les séries de Fourier (suite)

La somme de Fourier est : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t}$ ou

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ Théorème de Parseval : si $f \in D_T$ alors

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{T}\int_{[T]}(f(t))^2 dt \text{ (cas réel)}$$

$$|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(|c_{-n}|^2 + |c_n|^2) = \frac{1}{T}\int_{[T]}|f(t)|^2 dt \text{ (cas complexe)}$$

Théorème de Dirichlet : Si $f \in D_T$ est de classe C^1 par morceau sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$

Cette classification prend en compte la façon dont évolue le signal en fonction du temps :

- un signal qui évolue de façon continue en fonction du temps est un signal analogique
- un signal qui évolue de façon discontinue en fonction du temps est un signal numérique

Signal analogique et signal numérique

Un signal analogique est défini par un intervalle I et un fonction f définie et continue sur I. $f(t)$ est la valeur du signal à l'instant t.
Un signal numérique est définie par une suite $(x(n))_{n \in E}$ avec $E = \mathbb{N}$ ou $E = \mathbb{Z}$

Energie d'un signal

- Soit f un signal analogique, l'énergie dissipée entre les instants t_1 et t_2 est $\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$
- Soit x un signal numérique, l'énergie dissipée entre les instants n_1 et n_2 est $\displaystyle\sum_{p=n_1}^{n_2} |x(p)|^2$

Puissance d'un signal

- Soit f un signal analogique, la puissance dissipée entre les instants t_1 et t_2 est $\dfrac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$
- Soit x un signal numérique, la puissance dissipée entre les instants n_1 et n_2 est $\dfrac{1}{n_2 - n_1} \displaystyle\sum_{p=n_1}^{n_2} |x(p)|^2$

Energie d'un signal

- Un signal analogique f, est dit d'énergie finie si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$ converge, et dans ce cas la valeur E de cette intégrale s'appelle l'énergie de f.
- Un signal numérique x, est dit d'énergie finie si $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |x(p)|^2$ converge et la valeur E de cette série est appelée l'énergie du signal x.

Puissance moyenne d'un signal

- Un signal analogique f, est dit de puissance moyenne finie si $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f(t)|^2dt$ a une limite finie P quand t tend vers $+\infty$, et dans ce cas P s'appelle la puissance moyenne de f.
- Un signal numérique x, est dit de puissance moyenne si $\frac{1}{2n}\sum_{p=-n}^{+n}|x(p)|^2$ converge quand $n \to +\infty$ et la valeur P de cette série est appelée puissance moyenne du signal x.

Exemple

1. Soit le signal f tel que $f(t) = a\cos(\omega t)$ où $a > 0$, démontrer que l'énergie de ce signal est infinie et calculer sa puissance moyenne.
2. Soit le signal f défini par $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2; T/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   Calculer l'énergie de ce signal et sa puissance moyenne.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
$\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ sur Ω

Définition :

Une distribution T sur Ω est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$, c'est à dire :

- $T \ : \ \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$
- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$,

$$\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathcal{D}(\Omega))^2, T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha T(\varphi_1) + \beta T(\varphi_2)$$

- Pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$,
si $\varphi_n \to 0$, alors $T(\varphi_n) \to 0$

Exemple de distribution

Soit φ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, l'application T_φ de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in, T_\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f(t) dt$$

est une distribution.

Distribution de Dirac

On appelle distribution de Dirac en $a \in \mathbb{R}$ l'application T_{δ_a} de définie par :

$$\forall f \in C^{\infty},\ T_{\delta_a}(f) = f(a)$$

Pour $a = 0$, on notera cette distribution T_{δ}.

Suites de Dirac

Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)dt = 1$
- $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \lim \phi_n(t) = 0$
- $\lim \phi_n(0) = +\infty$

ces suites $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelées suites de Dirac.

Par exemple $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \phi_n(t) = \begin{cases} n & \text{si } t \in [-\frac{1}{2n};\frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour $f \in C^{+\infty}$, on a $\lim \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)f(t)dt = f(0)$

Impulsion de Dirac

On appelle impulsion de Dirac ou par abus de langage "fonction de Dirac" δ l'application δ de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ limite des suites de Dirac : $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$
On notera $\forall f \in C^\infty,\ \int_{\mathbb{R}} \delta(t) f(t) dt = f(0)$
Cette intégrale ne doit pas être prise au sens de Riemann mais au sens de distribution.

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t) f(t) dt = \lim \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t) f(t) dt$$

Représentation de l'impulsion de Dirac

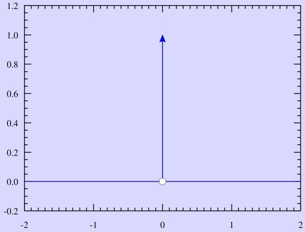

FIGURE – Représentation de l'impulsion de Dirac par une flèche verticale d'amplitude 1 localisée en 0.

Remarque : $t \mapsto \delta(t-a)$ est l'impulsion de Dirac en a associée à la distribution de Dirac en a, on la notera δ_a.

Définition : peigne de Dirac

La "fonction" peigne de Dirac, ou fonction shah est une somme de "fonctions" de Dirac espacées de T :

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Remarque : cette fonction est très utile dans les problème d'échantillonnage : remplacement d'une fonction continue par une suite de valeurs de la fonction scindée par un pas de temps T.

Représentation du peigne de Dirac

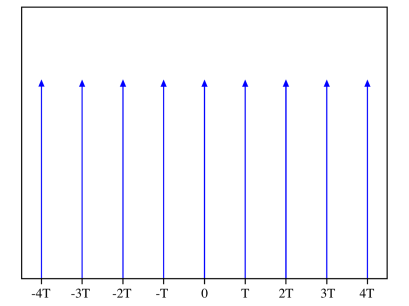

FIGURE – Représentation d'un peigne de Dirac.

Propriété du peigne de Dirac

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_T(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)$$

Définition de la transformée de Fourier

Soit un signal x , la transformée de Fourier (TF) de x, si elle existe est la fonction X définie par :

$$X(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi yt}dt$$

On note

1. $X = TF[x]$
2. $X(y) = A(y) + jB(y) = |X(y)|e^{j\varphi(y)}$
   où $A(y)$ est la partie réelle, $B(y)$ est la partie imaginaire et $\varphi(y)$ un argument.

Remarques :

- Condition suffisante d'existence : Si $x \in L^1(\mathbb{R})$ alors x admet une transformée de Fourier.
- La transformée de Fourier permet d'obtenir une représentation fréquentielle du signal appelée **spectre** du signal.

Exemple

Déterminer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

1. $x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2; T/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $x_2(t) = \begin{cases} e^{j2\pi f_0 t} & \text{si } t \in [-T/2; T/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
FT[x_1](y) &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2\pi jyt} dt \\
&= \left[\frac{e^{-2\pi jyt}}{-2\pi jy}\right]_{-T/2}^{T/2} \\
&= \frac{e^{-2\pi jyT/2} - e^{2\pi jyT/2}}{-2\pi jy} \\
&= \frac{e^{-\pi jyT} - e^{-\pi jyT/2}}{2\pi jy} \\
&= \frac{\sin(\pi yT)}{\pi y} \\
&= T\frac{\sin(\pi yT)}{\pi yT}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
FT[x_2](y) &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi f_0 t} e^{-2\pi j y t} dt \\
&= \left[\frac{e^{-2\pi j (y - f_0) t}}{-2\pi j (y - f_0)} \right]_{-T/2}^{T/2} \\
&= \frac{\sin(\pi(y - f_0)T)}{\pi(y - f_0)} \\
&= T \frac{\sin(\pi(y - f_0)T)}{\pi(y - f_0)T}
\end{aligned}
$$

Exemple

1. $x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2; T/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   On a $X_1(y) = T\dfrac{\sin(\pi y T)}{\pi y T} = T\text{sinc}(\pi y T)$ (sinus cardinal)

2. $x_2(t) = \begin{cases} e^{j2\pi f_0 t} & \text{si } t \in [-T/2; T/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   On a $X_2(y) = T\text{sinc}(\pi(y - f_0)T)$

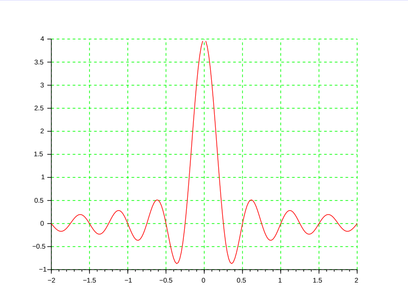

FIGURE – Transformée de Fourier de x_1 : $TF[x_1](y) = T\dfrac{\sin(\pi y T)}{\pi y T}$.

1. On a $\forall y \in \mathbb{R},\ TF[\delta](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi yt} dt = e^{-j2\pi y \times 0} = 1$
2. Quand T tend vers $+\infty$, $y \mapsto T\dfrac{\sin(\pi yT)}{\pi yT}$ tend vers l'impulsion de Dirac $\delta(y)$
3. Quand T tend vers $+\infty$, $y \mapsto T\mathrm{sinc}(\pi(y-f_0)T)$ tend vers $\delta(y-f_0) = \delta_{f_0}(y)$.

TF de fonctions usuelles

1. $TF[\delta] = 1$
2. $TF[1] = \delta$
3. $TF[e^{j2\pi f_0 t}] = \delta_{f_0}$

Transposition

Soit f un signal continu, et soit g le signal défini par $g(t) = f(-t)$.
Soient F et G les transformations de Fourier de f et g, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ G(y) = F(-y)$$

On note : $TF(x(-t)) = X(-y)$
où X est la transformée de Fourier de x.

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
TF[g](y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)e^{-2\pi j y t)}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi j y(-u)}dt \text{ (chgt de variable } u = -t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi j(-y)u}dt \\
&= TF[f](-y)
\end{aligned}
$$

Linéarité de transformée de Fourier

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$ et soient f et g deux signaux continus de transformés respectives F et G.
On a

$$TF[\alpha f + \beta g] = \alpha TF[f] + \beta TF[g] \quad (1)$$
$$= \alpha F + \beta G \quad (2)$$

C'est une conséquence de la linéarité de l'intégrale.

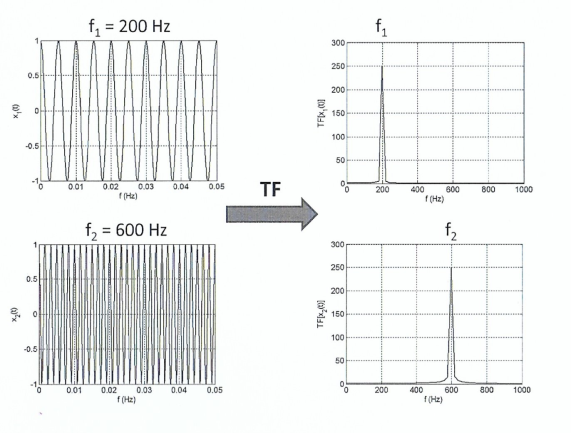

FIGURE – Transformée de Fourier de 2 signaux f et g.

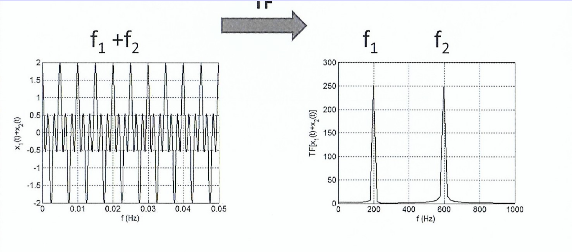

FIGURE – Transformée de Fourier de $f + g$.

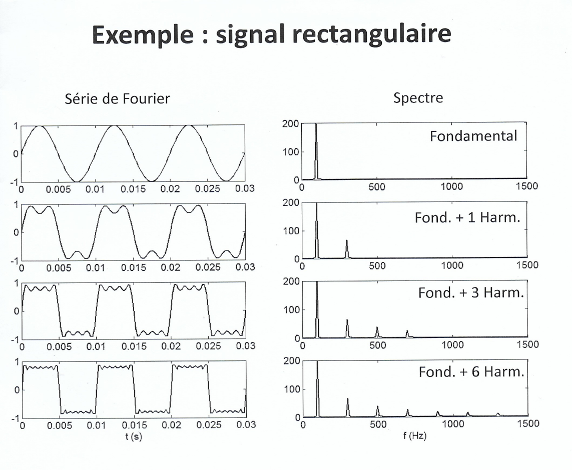

FIGURE – Transformée de Fourier d'une somme de Fourier

TF de la conjuguée d'une fonction

Soit f un signal, et soit $g = \overline{f}$, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \; TF[g](y) = \overline{TF[f](-y)}$$

On note : $TF[\overline{x(t)}] = X(-y)$
où X est la transformée de Fourier de x.

Translation (théorème du retard)

Soit f un signal continu et soit g définie par $g(t) = f(t - t_0)$ où $t_0 \in \mathbb{R}$.
On a

$$\forall y \in \mathbb{R},\ TF[g](y) = e^{-2\pi j y t_0} TF[f](y)$$

Un décalage dans le temps du signal ne modifie pas le module de son spectre. Il engendre un déphasage fréquentiel.
On note $TF[x(t - t_0)] = e^{-2\pi j y t_0} X(y)$

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
TF[g](y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-2\pi jyt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi jy(u+t_0)}du (\text{chgt de variable } u = t - t_0) \\
&= e^{-2\pi jyt_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi jy(u+t_0)}du \\
&= e^{-2\pi jyt_0}TF[f](y)
\end{aligned}
$$

Modulation

Soit f un signal continu, et soit g le signal défini par $g(t) = f(t)e^{2\pi j f_0 t}$, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ TF[g](y) = TF[f](y - f_0)$$

On note $TF[x(t)e^{2\pi j f_0 t}] = X(y - f_0)$

Démonstration :

$$\begin{aligned} TF[g](y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2\pi j f_0 t} e^{-2\pi j y t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi j (y - f_0) t} dt \\ &= TF[f](y - f_0) \end{aligned}$$

Contraction

Soit f un signal continu, et soit g le signal défini par $g(t) = f(at)$ avec $a > 0$, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ TF[g](y) = \frac{1}{|a|} TF[f]\left(\frac{y}{a}\right)$$

On note $TF[x(at)] = \dfrac{1}{|a|} X\left(\dfrac{y}{a}\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi j(y/a)u}du$$
$$= \frac{1}{|a|}TF[f](y/a)$$

TF d'une dérivée

Soit f un signal C^∞ sur $\mathbb{R}$, tel que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ on a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ TF[f'](y) = (2\pi jy)\big(TF[f](y)\big)$$

et

$$\forall y \in \mathbb{R},\ TF[f^{(n)}](y) = (2\pi jy)^n\big(TF[f](y)\big)$$

On note :

$$TF[x'(t)] = (2\pi jy)X(y)$$

$$TF[x^{(n)}(t)] = (2\pi jy)^n X(y)$$

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
TF[f'](y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-2\pi jyt}dt \\
&= \left[f(t)e^{-2\pi jyt}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-2\pi jy)e^{-2\pi jyt}dt(\text{IPP}) \\
&= (2\pi jy)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi jyt}dt \\
&= (2\pi jy)TF[f](y)
\end{aligned}
$$

Dérivée d'une TF

Soit f un signal continu C^∞ sur $\mathbb{R}$ tel que $f \in L_1(\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ t \mapsto t^n f(t)$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de f est C^∞ et on a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \left(TF[f]\right)'(y) = TF[g](y)$$

où $g(t) = (-2\pi j t)f(t)$
On a aussi :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \left(TF[f]\right)^{(n)}(y) = TF[h](y)$$

où $h(t) = (-2\pi j t)^n f(t)$ et $n \in \mathbb{N}$

On note $X'(y) = TF[(-2\pi j t)x(t)]$
$X^{(n)}(y) = TF[(-2\pi j t)^n x(t)]$

Démonstration : On utilise le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

$$
\begin{aligned}
(TF[f])'(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y}(f(t)e^{-2\pi jyt})dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-2\pi jt)e^{-2\pi jyt}dt \\
&= TF[f](g(t)) \text{ avec } g(t) = (-2\pi jt)f(t)
\end{aligned}
$$

Propiétés de la transformée de Fourier

Soient x, x_1 et x_2 des signaux C^∞, soit X la transformée de Fourier de x.

1. Linéarité :
   $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, TF[\alpha x_1 + \beta x_2] = \alpha TF[x_1] + \beta TF[x_2]$
2. Transposition $TF[x(-t)](y) = TF[x](-y)$
3. Conjugaison : $TF[\overline{x(t)}] = \overline{X(-y)}$
4. Translation $TF[x(t-t_0)] = e^{-2\pi j y t_0} X(y)$
5. Modulation : $TF[x(t)e^{2\pi j f_0 t}](y) = X(y - f_0)$
6. Dilatation/contraction : $TF(x(at)](y) = \dfrac{1}{|a|} X\left(\dfrac{y}{a}\right)$
7. TF d'une dérivée : $(TF[x'(t)]) = (2\pi j y)X(y)$
8. Dérivée d'une TF : $\big(X\big)'(y) = TF[(-2\pi j t)x(t)](y)$

Propriétés de parité

Soit f un signal continu,

- si x est réelle et paire alors $TF[x]$ est réelle et paire.
- si x est réelle et impaire alors $TF[x]$ est imaginaire pure et impaire.

Définition de la transformée de Fourier inverse

Soit X , la transformée de Fourier inverse de X, si elle existe est la fonction, notée $\overline{TF}(X)$ définie par :

$$\overline{TF}[X](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(y)e^{j2\pi yt}dy$$

Propriété

La transformée de Fourier inverse permet, à partir du spectre, d'obtenir le signal aux instants où il est continu.
On a $x(t) = \overline{TF}[X](t)$

En effet, soit x un signal continu, sa transformée de Fourier est

$$X(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi yt}dt$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} X(y)e^{2\pi jyt}dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-2\pi jy\tau}d\tau\Big)e^{2\pi jyt}dt && (3)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi jy(t-\tau)}dy\Big)d\tau && (4)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau && (5)\\
&= x(t) && (6)
\end{aligned}$$

Remarque : Le spectre d'un signal continu possède toutes les informations du signal.

TF d'un Dirac, peigne de Dirac, ...

- $TF[\delta(t)](y) = 1$
- $TF[1](y) = \delta(y)$
- $TF[\delta_T(t)](y) = TF[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT)](y) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(y-n/T)$

$$= \frac{1}{T}\delta_{1/T}(y)$$

- $TF[\delta(t-t_0)](y) = e^{2\pi j y t_0}$ (Translation)
- $TF[e^{2\pi j f_0 t}](y) = \delta(y-f_0)$ (modulation)

Remarques :

- Un signal impulsionnel renferme toutes les fréquences.
- Un signal constant ne contient pas de fréquence, hors celle en 0.
- La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac en temps est un peigne de Dirac en fréquence.

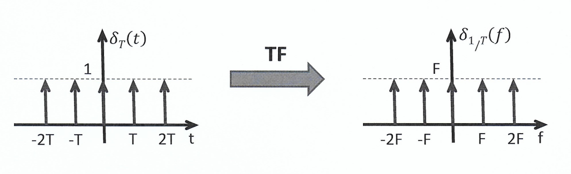

FIGURE – Transformée de Fourier du peigne de Dirac.

TF des fonctions cosinus et sinus

- cosinus : $TF[\cos(2\pi f_0 t)](y) = \dfrac{1}{2}(\delta(y - f_0) + \delta(y + f_0))$
- sinus : $TF[\sin(2\pi f_0 t)](y) = \dfrac{1}{2j}(\delta(y - f_0) - \delta(y + f_0))$

Soit $f(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}(e^{2\pi f_0 t} + e^{-2\pi f_0 t} 2)$

On a donc $TF[f](y) = \frac{1}{2}(TF[e^{2\pi f_0 t}](y) + TF[e^{-2\pi f_0 t}](y))$

D'où $TF[f](y) = \frac{1}{2}(\delta(y - f_0) + \delta(y + f_0))$

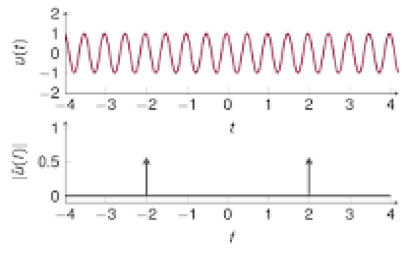

Figure – Spectre de la fonction cosinus.

TF des fonctions cosinus et sinus

- cosinus : $TF[\cos(2\pi f_0 t)](y) = \dfrac{1}{2}(\delta(y - f_0) + \delta(y + f_0))$
- sinus : $TF[\sin(2\pi f_0 t)](y) = \dfrac{1}{2j}(\delta(y - f_0) - \delta(y + f_0))$

Définition

Soient f et g deux fonctions, on appelle produit de convolution de f et g, si elle existe, la fonction, notée $f * g$ définie par :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

Remarques :

- Si $(f, g) \in (L^2(\mathbb{R}))^2$ (c'est à dire de carré intégrable sur $\mathbb{R}$), alors $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- Le produit de convolution est commutatif $f * g = g * f$

Exemples

Déterminer le produit de convolution $f * g$ dans les cas suivants :

1. $f(t) = rect_T(t/T)$ et $g(t) = rect_T(t/T) = \mathbb{I}_{[-T/2;T/2]}(t)$
2. $f(t) = e^{-at}\mathbb{I}_{[-T/2;T/2]}(t)_{[0;+\infty[}(t)$ et $g(t) = rect_T(t/T)$.

Exemple 1 : On a $f(t) = g(t) = \mathbb{I}_{[-T/2;T/2]}(t)$, ainsi

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{[-T/2;T/2]}(x)\mathbb{I}_{[-T/2;T/2]}(t-x)dx\end{aligned}$$

Or $-T/2 \leqslant t - x \leqslant T/2 \Leftrightarrow t - T/2 \leqslant x \leqslant t + T/2$,
on a donc :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{[-T/2;T/2]}(x)\mathbb{I}_{[t-T/2;t+T/2]}(x)dx$$

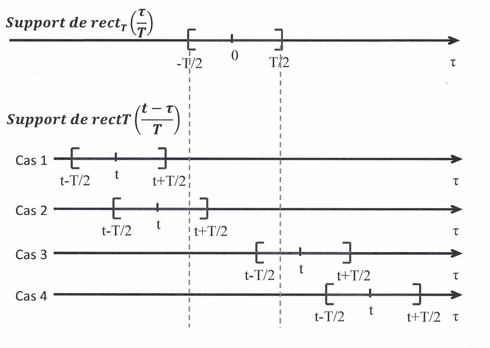

FIGURE – Supports de $\tau \mapsto f(\tau)$ et de $\tau \mapsto g(t-\tau)$.

- Cas 1 : $t < -T$ les supports sont disjoints, ,$f * g(t) = 0$
- cas 2 : $-T \leqslant t \leqslant 0,\ f * g(t) = \int_{-T/2}^{t+T/2} dx = t + T$
- cas 3 : $0 \leqslant t \leqslant T,\ f * g(t) = \int_{t-T/2}^{T/2} dx = -t + T$
- Cas 4 : $t > T$ les supports sont disjoints ,$f * g(t) = 0$

Exemple 2 : On a $f(t) = e^{-at}\mathbb{I}_{[0;+\infty[}(t)$ et $g(t) = \mathbb{I}_{[-T/2;T/2]}(t)$, ainsi :

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax}1_{[0;+\infty[}(x)1_{[-T/2;T/2]}(t-x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax}1_{[0;+\infty[}(x)1_{[t-T/2;t+T/2]}(x)dx\end{aligned}$$

Car $-T/2 \leqslant t - x \leqslant T/2 \Leftrightarrow t - T/2 \leqslant x \leqslant t + T/2$

- Cas 1 : $t < -T/2$ les supports sont disjoints, ,$f * g(t) = 0$
- cas 2 : $-T/2 \leqslant t \leqslant T/2$

$$f * g(t) = \int_0^{t+T/2} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(t+T/2)})$$

- cas 3 : $t > T/2$

$$\begin{aligned} f * g(t) &= \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{-ax} dx \\ &= \frac{1}{a}(e^{-a(t-T/2)} - e^{-a(t+T/2)}) \\ &= \frac{2e^{-at}}{a} \sinh(aT/2) \end{aligned}$$

Propriétés algébriques

Soient f, g et h trois fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, on a :

- Commutativité : $f * g = g * f$
- Associativité : $f * (g * h) = (f * g) * h$
- Distributivité : $f * (g + h) = f * g + f * h$
- L'impulsion de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution

$$f * \delta = f$$

Transformée de Fourier et produit de convolution

- $TF[f * g](y) = TF[f](y).TF[g](y) = F(y).G(y)$
- $TF[f(t).g(t)] = TF[f] * TF[g])$
- $\overline{TF}[(F * G)(y)] = \overline{TF}[f].\overline{TF}[g])$
- $\overline{TF}[(F(y).G(y)] = \overline{TF}[F(y)] * \overline{TF}[G(y)] = (f * g)(t)$

Remarques : Ces propriétés permettent parfois de simplifier les calculs de transformées de Fourier.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
TF[f*g](t) &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)dx \Big) e^{-2\pi jyt} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} g(t-x)e^{-2\pi jyt} dt \Big) f(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi jyx} G(y) f(x)dx \text{ (Théorème du retard)} \\
&= G(y) \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi jyx} f(x)dx \\
&= F(y).G(y)
\end{aligned}$$

Spectre d'un signal périodique

Soit f un signal périodique de période T :
$(\forall t \in \mathbb{R}),\ (\forall k \in \mathbb{Z}),\ f(t+kT) = f(t)$.

En notant f le signal tel que : $f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0;T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Le signal f peut s'écrire :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0(t) * \delta(t - nT)$$

On en déduit ainsi le spectre de f :

$$TF[f](y) = X_0(y)\frac{1}{T}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(y - \frac{n}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{n \in \mathbb{Z}} X_0(\frac{n}{T})\delta(y - \frac{n}{T})$$

Le spectre d'un signal périodique est un spectre de raie.

Théorème de Parseval

L'énergie d'un signal x se retrouve intégralement dans son spectre X :

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(y)|^2 dy$$