MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Chaînes de Markov à temps discret (CMTD)
Séance de TD du 05 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 15 de la séance de TD consacrée aux chaînes de Markov à temps discret. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 15
Une information (de type binaire 0 ou 1) est transmise d'un émetteur R_0, jusqu'à un récepteur R_n à travers une suite de n relais intermédiaires désignés par $R_1, R_2, ..., R_{n-1}$ ($n \geq 2$). Chaque relais R_k transmet l'information reçue de R_{k-1} au suivant R_{k+1} avec la probabilité p ($0 < p < 1$). Il transmet donc l'information contraire à celle reçue (erreur) avec la probabilité $1 - p$. Ces probabilités sont indépendantes des informations transmises par les autres relais, en amont ou en aval de la chaîne.

1. Modéliser ce problème par une chaîne de Markov.
2. Calculer p_n la probabilité pour l'information initiale soit correctement transmise de R_0 à R_n.
3. Calculer la limite de p_n, pour $n \to \infty$

Correction de l'Exercice 15

1. Une des solutions les plus simples consiste à représenter cette chaîne de transmission comme une CMTD avec un espace d'état binaire $E := \{0, 1\}$. On notera alors X_n $(n \geq 1)$ la valeur de l'information transmise par le relais R_{n-1} au relais R_n (X_0 représentera l'information initiale à transmettre). Les probabilités d'état "au temps" n sont

$$\boldsymbol{\pi}_i^{(n)} := P\left(X_n = i\right), \, i \in \{0, 1\}$$

La position n dans la chaîne est donc représentée par le "temps" ou encore le nombre de transitions. Le graphe associé à la chaîne de Markov qui modélise cette transmission d'information est donné à la figure 1. La matrice des probabilités de transition associée est

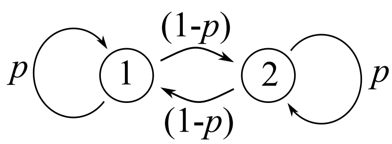

Figure 1: Le graphe associé à la CMTD qui modélise la transmission d'une information binaire à travers n relais, avec une probabilité d'erreur $(1 - p)$ à chaque relais (exercice 15).

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Dans la suite, on s'intéressera au cas non trivial où $0 < p < 1$. Les résultats s'obtiennent très facilement pour les deux chaînes (déterministes) $p = 0$ et $p = 1$.

2. On s'intéresse aux probabilités d'état après n transitions, données par la formule de Chapman-Kolmogorov :

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_0^{(0)} & \boldsymbol{\pi}_1^{(0)} \end{pmatrix} \mathbf{P}^n$$

La matrice $\mathbf{P}$ se diagonalise sous la forme :

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathbf{U} := \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{D} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$$

où est unitaire, c'est-à-dire

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I}_2$$

On obtient donc

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La probabilité demandée s'écrit, dans le cas où $X_0 = 1$:

$$\begin{aligned} p_n &= P\left(X_n = 1 \,|\, X_0 = 1\right) \\ &= \left(\mathbf{P}^n\right)_{2,2} \\ &= \frac{1 + (2p-1)^n}{2} \qquad (1) \end{aligned}$$

On trouve la même valeur dans le cas où $X_0 = 0$:

$$\begin{aligned} p_n &= P\left(X_n = 0 \,|\, X_0 = 0\right) \\ &= \left(\mathbf{P}^n\right)_{1,1} \\ &= \frac{1 + (2p-1)^n}{2} \qquad (2) \end{aligned}$$

Donc, dans tous les cas :

$$p_n = \frac{1 + (2p-1)^n}{2}$$

3. Pour $0 < p < 1$, on a $-1 < (2p-1) < +1$ et donc $(2p-1)^n \to 0$. Ainsi

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \frac{1}{2}$$

C'est assez logique. La probabilité p_n diminue lorsque le nombre de relais n augmente. Elle tend vers $\frac{1}{2}$ qui est la valeur obtenue dans le cas où la valeur de sortie est choisie totalement au hasard (avec une distribution uniforme de probablilité).