MA 332 : Modelisation et analyse des processus stochastiques

Examen - mai 2019

L'examen dure 1h30. Les calculatrices sont autorisees. L'etudiant peut disposer d'une feuille de notes manuscrites (recto et verso). **Il doit remettre cette feuille manuscrite avec sa copie e la fin de l'examen**.

Exercice 1 (Processus de Poisson - 8 points) Le nombre de mails arrivant sur votre messagerie est modelise par un processus de Poisson de parametre λ. Parmi ces mails, certains sont des spams. Sur les 24 heures precedentes, 2880 mails sont arrives, dont 2592 spams.

1. Quelle est la meilleure estimation possible pour λ (c'est-e-dire l'estimation non biaisee de variance minimale obtenue par la methode du maximum de vraisemblance)?
2. Quelle est la probabilite que 5 mails arrivent dans les dix prochaines minutes?
3. Soit p, la probabilite qu'un mail qui arrive soit un spam. Proposez une estimation non biaisee de variance minimale pour p.
4. Quelle est la probabilite qu'au moins un spam arrive dans la prochaine minute?
5. Sachant que 200 mails sont arrives ces 12 dernieres minutes, quel est le nombre moyen de spams (parmi ces 200 mails)
6. 60 mails sont arrives ces 8 dernieres minutes. Quelle est la probabilite que 50 spams soient arrives dans les 5 dernieres minutes?
7. Chaque spam vous fait perdre 1 seconde (detection et suppression). Combien de temps vous font perdre les spams en moyenne en une journee?

Exercice 2 (Chaene de Markov en temps discret - 8 points) On etudie la propagation des virus dans un reseau d'ordinateurs. Un ordinateur du reseau peut etre dans 4 etats :

- sain, avec un anti-virus obsolete (etat 0),
- sain, avec un anti-virus e mise e jour automatique (etat 1),
- infecte par un virus non pris en charge (etat 2) et
- detruit par un virus (etat 3, toutes les donnees ont ete detruites et l'ordinateur ne pourra etre repare).

On suppose que :

- si un ordinateur est infecte, il y a 20 % de chances la semaine d'apres que toutes les donnees qu'il contient soient detruites. Sur la moitie des ordinateurs "survivants" un anti-virus avec mise e jour automatique est installe, tandis que l'autre moitie est simplement reparee (debarassee de son virus, mais sans installation d'un nouvel anti-virus avec mise e jour automatique).
- Si un anti-virus avec mise e jour est installe sur un ordinateur, celui-ci n'est plus jamais infecte (ni, e fortiori, detruit).
- Si un ordinateur avec un anti-virus obsolete est sain une semaine, la semaine suivante il est infecte par un nouveau virus dans 20 % des cas, reeoit un anti-virus avec mise e jour automatique dans 40% des cas et reste sain sans anti-virus dans les autres cas.

1. Modeliser cette situation par une chaine de Markov dont on donnera la matrice de transition **et** le graphe
2. Supposons qu'e la semaine 0, le parc comporte 80% d'ordinateurs sains, avec un anti-virus obsolete (ou sans anti-virus) et 20% d'ordinateurs infectes. Un mois (quatre semaines) plus tard, quelle est la proportions d'ordinateurs avec anti-virus avec mise e jour automatique, sains sans anti-virus e mise e jour automatique, infectes et detruits ?
3. Montrer qu'au bout d'un certain temps, tous les ordinateurs sont necessairement detruits ou dotes d'anti-virus avec mise e jour automatique. Donner la valeur moyenne de ce temps
4. Votre ordinateur est sain et sans anti-virus installe. Quelle est la probabilite qu'il soit detruit ?

Exercice 3 (File avec impatience - 8 points) On considere une *file avec impatience*, i.e. une file dans laquelle un client qui arrive et voit n clients (dans le systeme) devant lui a une probabilite p_n de s'inserer dans la file (et une probabilite $1 - p_n$ de partir). Dans cet exercice, on considerera que les clients arrivent selon un processus de Poisson de parametre λ (avant de decider si ils entrent dans le systeme). Le temps de service d'un client est une variable aleatoire avec une distribution exponentielle de parametre μ. La probabilite d'entree effective dans le systemes pour un nouveau client arrivant vaut

$$p_n := \frac{1}{1+n} \ , \forall n \geq 0$$

oe n designe le nombre de clients deje dans le systeme lorsque le nouveau client arrive.

1. Modeliser cette file par une chaene de Markov e temps continu

2. Calculer la distribution stationnaire de probabilite associee e cette chaene

3. Calculer le taux moyen stationnaire d'entree (X_e) et le taux moyen stationnaire de sortie (X_s). A partir de ces deux resultats, discuter la stabilite de la file (eventuellement, en fonction des valeurs des parametres λ et μ)

4. calculer le nombre moyen de clients dans le systeme

5. calculer le temps de sejour moyen d'un client dans le systeme (lorsqu'il y entre effectivement)