Chapitre 4 – Transformées usuelles en traitement du signal

1. Rappel échantillonnage
2. Transformée de Laplace, de Laplace discrète et de Fourier
3. Transformée en z
4. Transformée de Fourier à temps discret
5. Transformée de Fourier discrète
6. Transformée de Fourier Rapide (FFT)
7. Conclusion

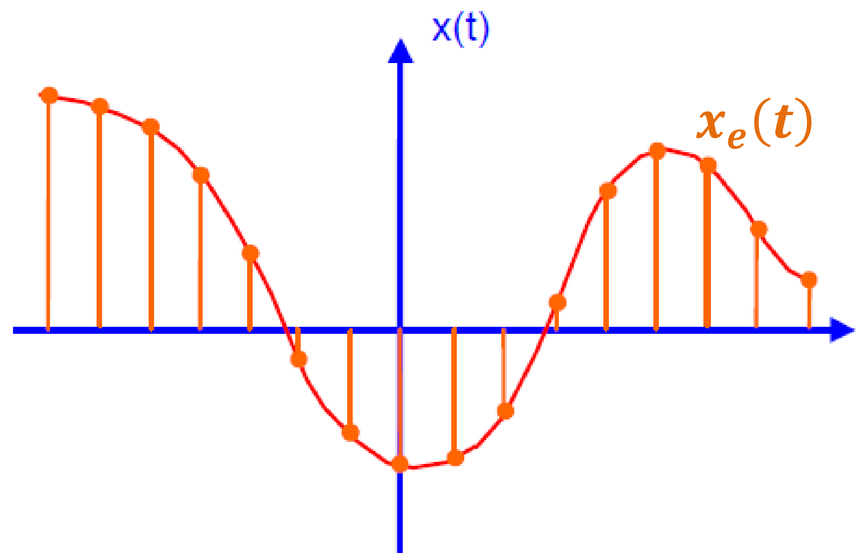
Rappel échantillonnage

Echantillonner
Discrétiser le temps de signaux analogiques

Signal échantillonné
Ensemble des échantillons prélevés

Période d'échantillonnage T_e
Période entre deux échantillons consécutifs

Fréquence d'échantillonnage
$F_e = 1/T_e$



$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nTe)$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nTe) \cdot \delta(t - nTe)$$

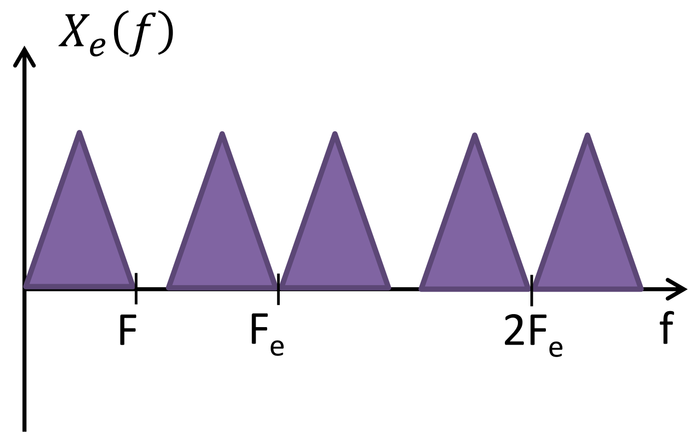
$x(nTe)$ est la suite des échantillons de $x(t)$. Notée $x(n)$ lorsque T_e est sous-entendue

Rappel échantillonnage

Echantillonner en temps T_e
=
Périodiser en fréquence F_e

Théorème de Shannon
$F < F_e/2$

Repliement de spectre
Filtre anti-repliement analogique



$$X_e(f) = Fe \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(f - nFe)$$

Transformées usuelles en TDS

Transformée de Laplace (TL)

TL: {t} ↔ {p}

$p = \sigma + 2\pi j f = \sigma + j\omega$

σ amortissement, f fréquence, ω pulsation

σ =0 →

Transformée de Fourier (TF)

TF: {t} ↔ {f}

signal ↔ spectre

Echantillonnage en temps ↓

Transformée de Laplace à temps discret (TLd)

TLd: $\{nT_e\} \leftrightarrow \{p\}$

↓

Transformée en z (Tz)

Tz: $\{nT_e\} \leftrightarrow \{z\}$

$|z| = |e^{pTe}| = e^{\sigma Te}$

$\arg(z) = 2\pi j f T_e$

Echantillonnage en temps ↓

Transformée de Fourier à temps discret (TFd)

TFd: $\{nT_e\} \leftrightarrow \{f\}$

$F \in [0 ; F_e[$, $F_e = 1/T_e$

Echantillonnage en fréquence ↓

Transformée de Fourier discrète (TFD)

TFD: $\{nT_e\} \leftrightarrow \{k\Delta f\}$

N, $k \in \{0, 1, ,..., N-1\}$, $\Delta f = F_e/N$

↓

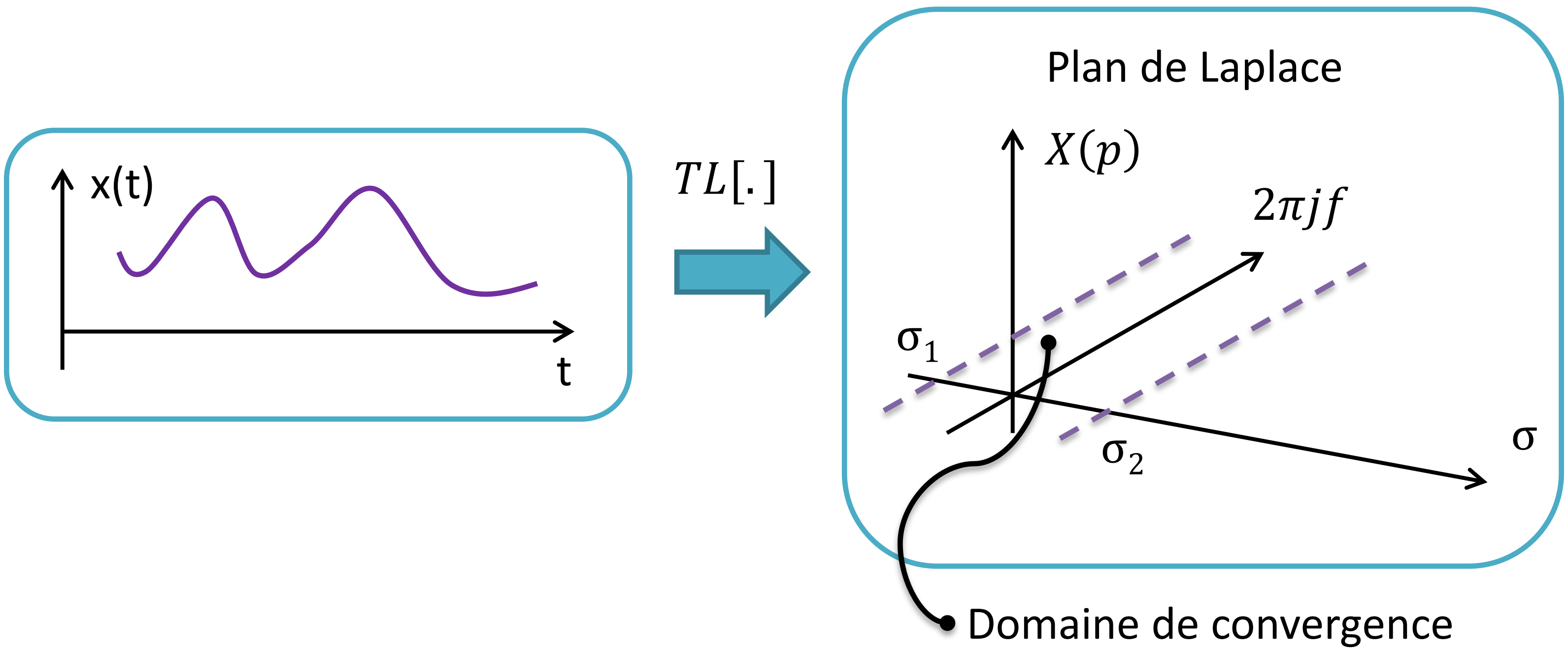
Algorithme de la Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Transformées de Laplace (TL)

Soit $x(t)$: un signal de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$X(p) = TL[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-pt}\,dt$$

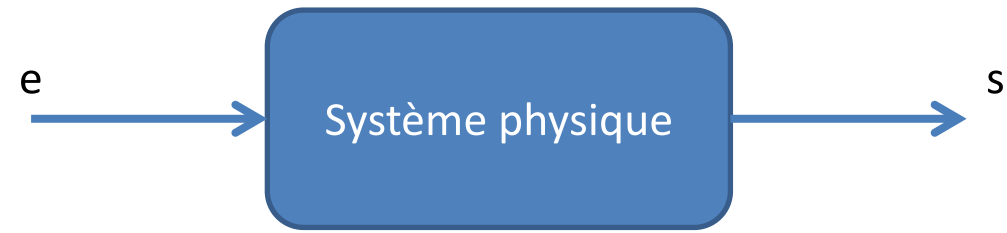
avec $p = \sigma + 2\pi jf = \sigma + j\omega$
Condition d'existence : convergence de l'intégrale



Pourquoi utiliser la TL ?

La majorité des systèmes physiques sont décrits par des équations différentielles :

$$b_j \frac{d^j s(t)}{dt^j} + b_{j-1} \frac{d^{j-1} s(t)}{dt^j} + \cdots + b_0 \cdot s(t) = aI \frac{d^I e(t)}{dt^I} + a_{I-1} \frac{d^{I-1} e(t)}{dt^I} + \cdots + a_0 e(t)$$



La transformée de Laplace permet de résoudre simplement l'équation différentielle en la transformant en équation polynomiale:

$$\begin{aligned} b_j \cdot p^j S(p) + b_{j-1} \cdot p^{j-1} S(p) + \cdots + b_0 \cdot S(p) \\ = aI \cdot p^I E(p) + a_{I-1} \cdot p^{I-1} E(p) + \cdots + a_0 \cdot E(p) \end{aligned}$$

La transformée de Laplace inverse permet de trouver la solution temporelle. La fonction de transfert est déduite de :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Pourquoi utiliser la TL ?

Exemple d'un système du premier ordre :

Rappel : $\overline{TL}\left[\frac{1}{p+a}\right] = e^{-at} \cdot u(t) \quad avec\ a > 0$

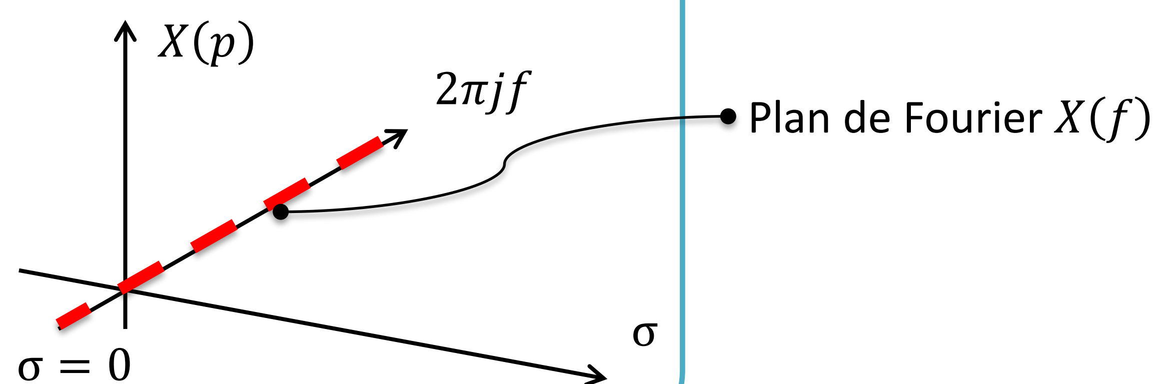
Lien entre la transformée de Laplace et de Fourier

La TF correspond à la TL obtenue pour $\sigma = 0$ (axe imaginaire du plan de Laplace)

$$X(f) = TF[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2\pi jft}\,dt = X(p)\Big|_{\sigma=0}$$

$$x(t) = \overline{TF}[X(f)] = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{2\pi jft}\,df$$

Plan de Laplace



Transformées de Laplace discrète (TLd)

Pour un signal discret, $x(n)$, de période d'échantillonnage T_e, la TLd est :

$$X(p) = TLd[x(n)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{-pnT_e}$$

Il est important de comprendre que $X(p)$ est continue

Propriété :
La TLd est périodique de période F_e

$$X(p) = X_{Fe}(p) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(f - kF_e) \quad \text{avec } X_{Fe}(p) = \begin{cases} X(p), \forall f \in [0; Fe[\\ 0\ , ailleurs \end{cases}$$

La TLd inverse est définie par : $$x(n) = \frac{1}{F_e} \int_0^{F_e} X(p) e^{pnT_e} df$$

avec $p = \sigma + 2\pi jf = \sigma + j\omega$

Transformée en z

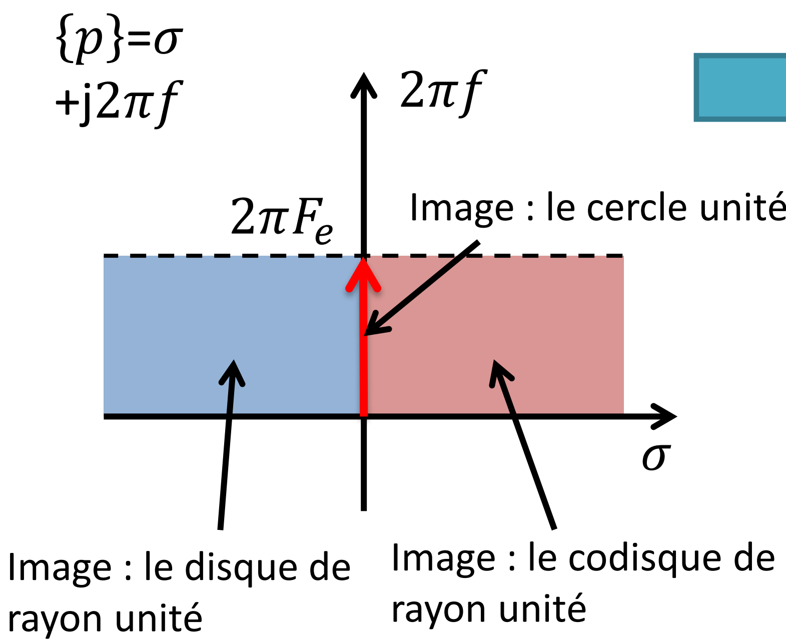
Transformée en z d'une suite $\{x(n)\}$: fonction de variable complexe définie par :

$$X(z) = Tz\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$$

Attention : il est nécessaire d'associer à la transformée en z une région de convergence (voir suite)
Dans le cas général, cette région est une couronne.

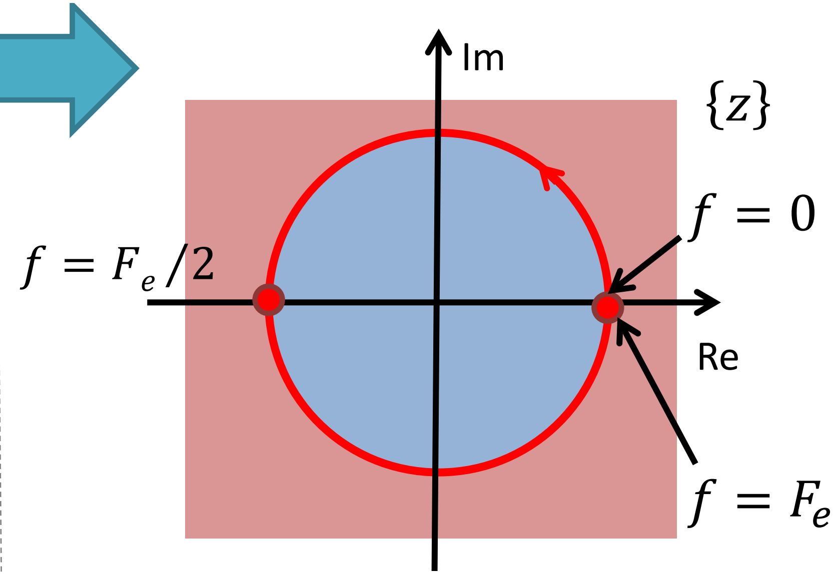
Lien entre la transformée de Laplace et la transformée en z

Plan de Laplace



$$z = e^{pT_e}$$

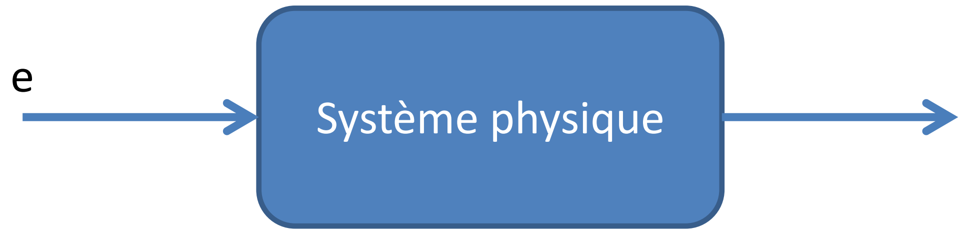
Plan de z



Pourquoi utiliser la Tz ?

La majorité des systèmes physiques discrets sont décrits par des équations aux différences :

$$b_j \cdot s(n-j) + b_{j-1} \cdot s(n-j+1) + \cdots + b_0 \cdot s(n) = a_I \cdot e(n-I) + a_{I-1} \cdot e(n-I+1) + \cdots + a_0 \cdot e(n)$$



La transformée en z permet de résoudre simplement l'équation aux différences en la transformant en équation polynomiale :

$$b_j \cdot z^{-j} S(z) + b_{j-1} \cdot z^{-j+1} S(z) + \cdots + b_0 \cdot S(z) = a_I \cdot z^{-I} E(z) + a_{I-1} \cdot z^{-I+1} E(z) + \cdots + a_0 \cdot E(z)$$

La fonction de transfert est donnée par :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{I} a_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{J} b_j \cdot z^{-j}}$$

Pourquoi utiliser la Tz ?

Exemple d’un système du premier ordre :

Critère de convergence de la transformée en z

La somme définie par la transformée en z doit être absolument convergente

Détermination du domaine de convergence

Cela revient à l'étude de la suite : $y(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a(n)$

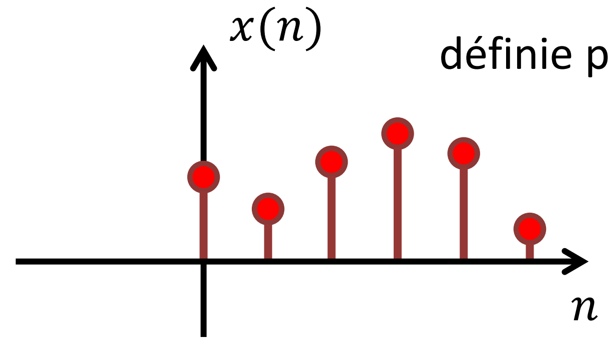
Règle de D'Alembert : la suite converge absolument si à partir d'un certain rang le terme :

$$y(n) = \left|\frac{a(n+1)}{a(n)}\right| \leq k \leq 1$$

$\lim_{n\to\infty} y(n) = k$	Convergence	si $\|k\| < 1$
	Divergence	si $\|k\| > 1$
	?	Si $\|k\| = 1$

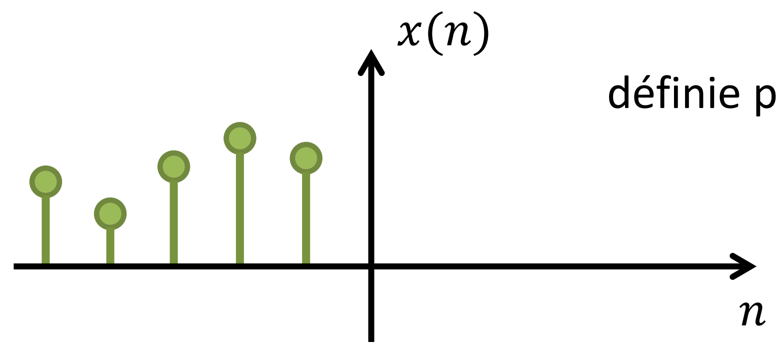
Région de convergence : définition d'un signal causal, anti-causal, non-causal

Signal causal



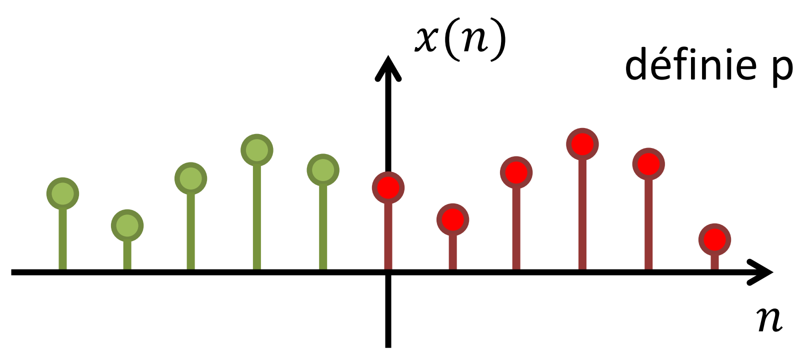
définie pour $n \geq 0$

Signal anti-causal



définie pour $n < 0$

Signal non-causal



définie pour $n \in]-\infty; +\infty[$

Région de convergence : signal causal

Un signal causal est défini pour n positif : $x(n) pour\ n \geq 0$

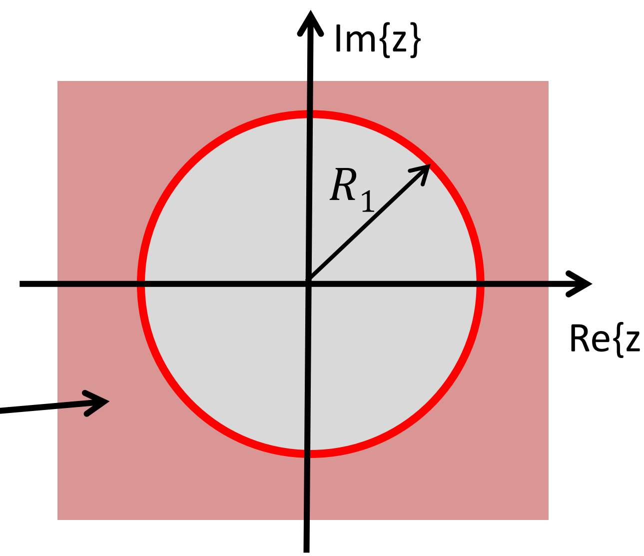
La Tz de $x(n)$ est alors :

$$X(z) = Tz\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

La convergence est étudiée grâce à la règle de d'Alembert :

$$\left|\frac{x(n+1) \cdot z^{-(n+1)}}{x(n) \cdot z^{-n}}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x(n+1)}{x(n)}\right| |z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > \left|\frac{x(n+1)}{x(n)}\right|$$

$$|z| > \lim_{n \to \infty} \left|\frac{x(n+1)}{x(n)}\right| = R_1$$



Domaine d'existence de la Tz d'un signal causal

Région de convergence : signal anti-causal

Un signal anti-causal est défini pour n négatif : $x(n) pour\ n < 0$
La Tz de $x(n)$ est alors :

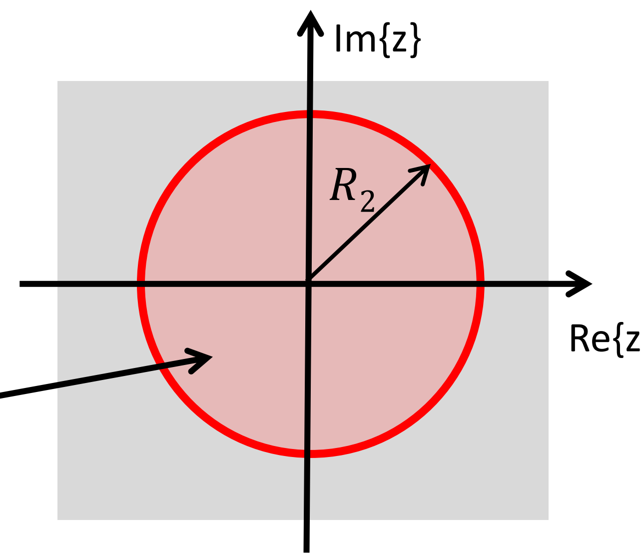
$$X(z) = Tz\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{k=1}^{+\infty} x(-k) \cdot z^{k}$$

La convergence est étudiée grâce à la règle de d'Alembert :

$$\left|\frac{x(-(k+1)) \cdot z^{(k+1)}}{x(-k) \cdot z^{k}}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x(-(k+1))}{x(-k)}\right| |z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \left|\frac{x(-(k+1))}{x(-k)}\right|$$

$$|z| < \lim_{n \to -\infty} \left|\frac{x(n)}{x(n-1)}\right| = R_2$$

Domaine d'existence de la Tz d'un signal anti-causal



Grenoble INP Esisar

Région de convergence : signal non-causal

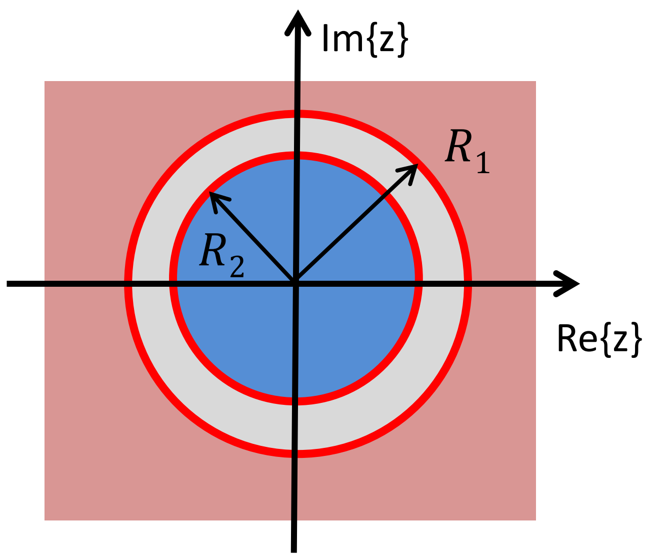
Un signal non-causal est la somme d'un signal causal et anti-causal donc sa transformée en z est :

$$X(z) = Tz\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\cdot z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\cdot z^{-n}$$

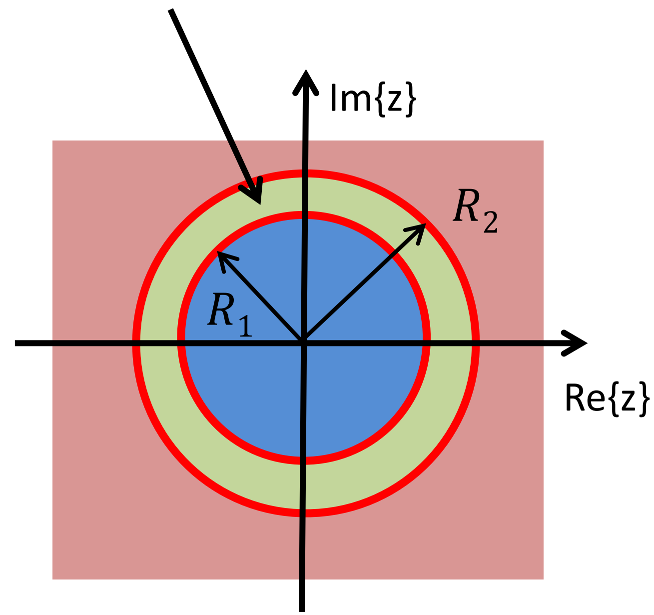
Le domaine d'existence est l'intersection des domaines définis :

- Pour la partie causale, par le codisque de rayon R_1
- Pour la partie non-causale, par le disque de rayon R_2

Si $R_2 < R_1$: pas de domaine de convergence



Si $R_2 > R_1$: couronne (R_1, R_2)



Propriétés de la transformée en z

Inversion du temps

$$Tz\{x(-n)\} = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Conjugaison

$$Tz\{x^*(n)\} = X\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

Translation

$$Tz\{x(n-N)\} = z^{-N}X(z)$$

Dérivée

$$Tz\{n \cdot x(n)\} = -z \cdot X'(z)$$

Exemple de transformées en z

Tz d'un signal causal :

Soit la suite définie par $\{x(n)\} = a^{|n|}, |a| < 1$ pour n ≥ 0 et 0 ailleurs

Transformée en z inverse par la décomposition en élément simple

Il existe de nombreuses méthodes pour calculer la Tz inverse : résidus, division polynomiale, …
Nous n'étudierons ici que la méthode de **décomposition en éléments simples**.

L'idée est de mettre la fonction sous la forme : $X(z) = \sum_i \frac{C_i \cdot z}{z - z_i}$

En effet dans ce cas, la fonction inverse sera simplement : $x(n) = \sum_i C_i \cdot z_i^n$

Les coefficients C_i sont définis par : $C_i = \left[(z - zi) \cdot \frac{X(z)}{z} \right]_{z=zi}$

$$x(n) = \sum_i C_i \cdot z_i^n \quad \text{avec :} \quad C_i = \left[(z - z_i) \cdot \frac{X(z)}{z} \right]_{z=zi}$$

Transformée en z inverse

Exemple :

Soit la fonction en z suivante : $$X(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$$

Calculer la suite $x(n)$ correspondante :

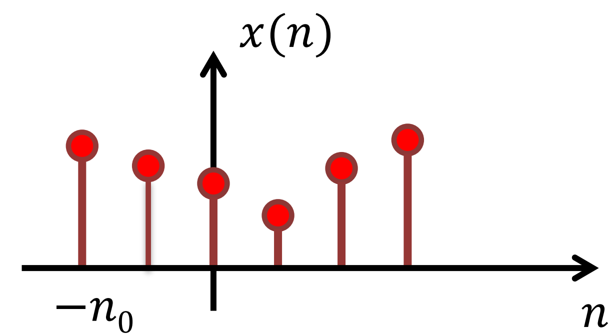
Transformée en z monolatérale

Définition

$$X^+(z) = Tz^+\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

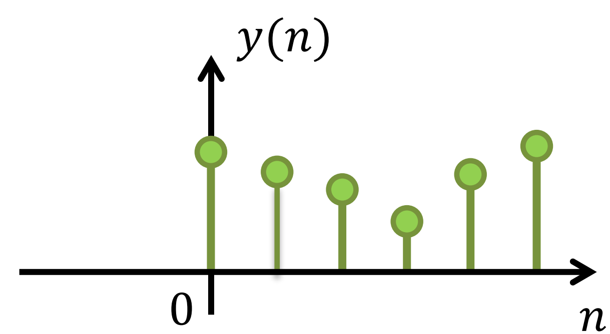
La Tz^+permet de pendre en compte les conditions initiales pour l’étude des régimes transitoires

Exemple :
Soit un signal $\{x(n)\} = x(n), \forall n \geq -n_0$
Soit $\{y(n)\} = x(n - n_0), \forall n \geq 0$



$$Y^+(z) = \boxed{z^{-n_0} \cdot X^+(z)} + \boxed{\sum_{n=1}^{n_0} x(-n) \cdot z^{-(n_0-n)}}$$

Régime permanent   Régime transitoire



Avec $x(-1) \ldots x(-n_0)$ les conditions initiales

Transformée en z monolatérale

Exemple :
Soit le système définit par l'équation de récurrence :

$$y(n) = b_1 \cdot y(n-1) + b_2 \cdot y(n-2)$$

Avec b_1 et b_2 des constantes et $y(-1), y(-2)$ les conditions initiales

La Tz monolatérale de $y(n)$ est alors :

$$Y^+(z) = \frac{b_1 \cdot y(-1) + b_2 \cdot y(-2) + z^{-1} \cdot y(-1) \cdot b_2}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}}$$

Conclusion
La Tz monolatérale est équivalente à la Tz des signaux causaux et permet de faire apparaître les régimes transitoires en tenant compte des valeurs initiales

Liens entre la TF et la Tz

Soit la fraction rationnelle $X(z)$ qui correspond à la Tz d'un signal $x(z)$

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \Rightarrow X(z) = A\frac{\prod_{i=1}^{I}(z - z_i)}{\prod_{n=1}^{N}(z - p_n)}$$

En appelant Z_i et P_n les images dans le plan complexe des zéros z_i et des pôles p_n et M l'affixe d'un point courant sur le cercle unité, alors $X(z)$ peut se mettre sous la forme :

$$X(z) = A\frac{\prod_{i=1}^{I} MZ_i}{\prod_{n=1}^{N} MP_n} e^{j\left(\sum_{i=0}^{I}\theta_i - \sum_{n=0}^{N}\varphi_n\right)}$$

Liens entre la TF et la Tz

Démonstration de la formule précédente :

$$X(z)\Big|_{z=e^{j2\pi ft}} = A\,\frac{\prod_{i=1}^{I}\left(e^{j2\pi ft}-z_i\right)}{\prod_{n=1}^{N}\left(e^{j2\pi ft}-p_n\right)}$$

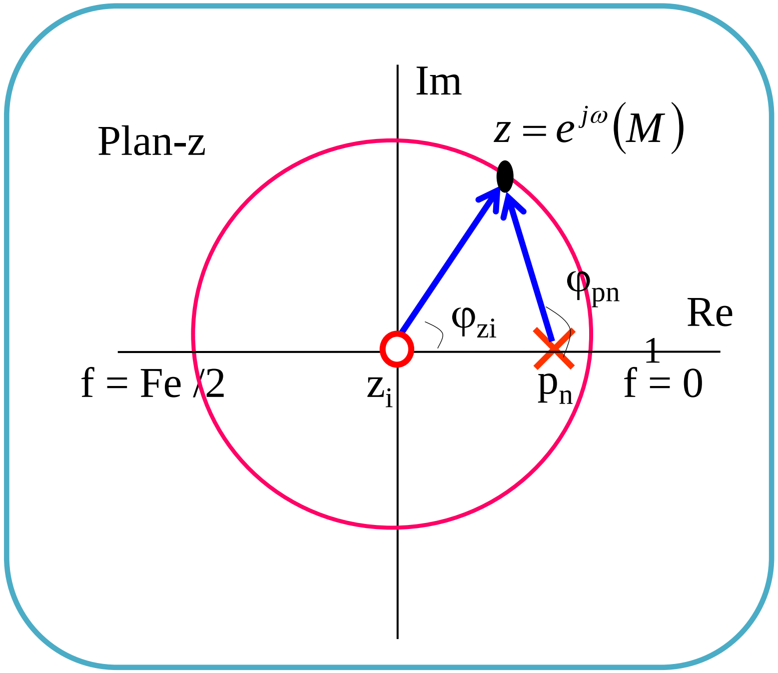
Or :

$$e^{j2\pi ft}-z_i = Mz_i\cdot e^{j\varphi_i}$$
$$e^{j2\pi ft}-p_n = Mp_n\cdot e^{j\varphi_n}$$

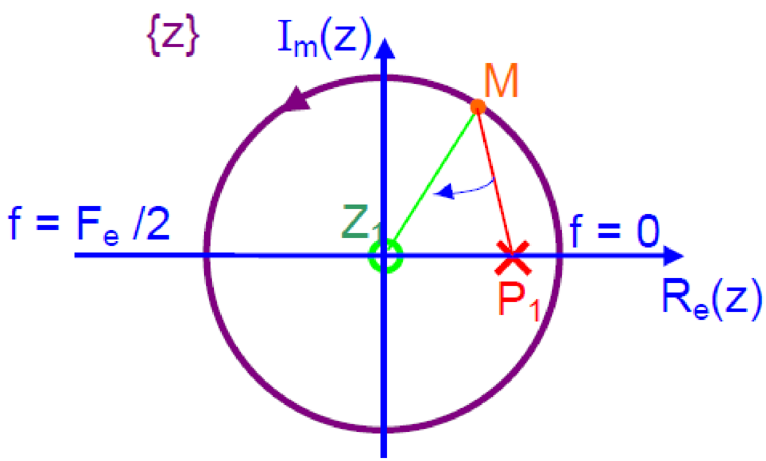
Nous obtenons alors :

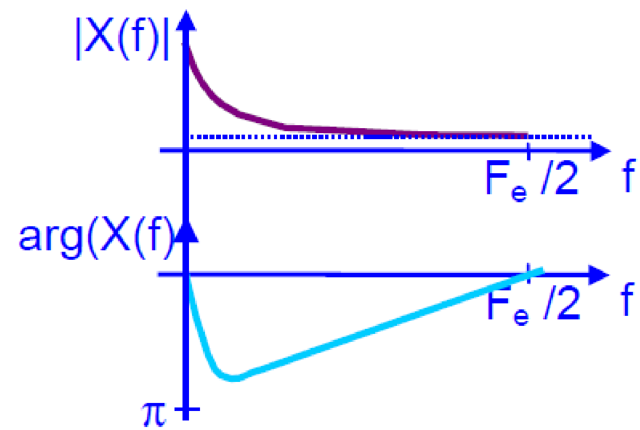
$$|X(z)| = A\,\frac{\prod_{i=1}^{I} Mz_i}{\prod_{n=1}^{N} Mp_n}$$

$$arg(X(z)) = \sum_{i=0}^{I}\varphi_i - \sum_{n=0}^{N}\varphi_n$$



Liens entre la TF et la Tz : interprétation géométrique





Le **module de la réponse fréquentielle** est égal au produit des modules des vecteurs reliant les zéros au point $z = e^{j\omega}$ du cercle unité divisé par le produit des modules des vecteurs reliant les pôles à ce même point z

La **phase de la réponse fréquentielle** est égale à la somme des arguments des vecteurs correspondant aux zéros moins la somme des arguments des vecteurs correspondant aux pôles

Exemple d’étude d’un système discret

Transformation de Fourier à temps discret : TFd

Signal discret $x(n)$ $\xrightarrow{\text{TFd}}$ Spectre continu $\mathrm{X}(f)$

Définition

$$\mathrm{X}(f) = TFd\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-2\pi j f n T_e} \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

La TFd correspond à la Tz calculée pour z appartenant au cercle unité.

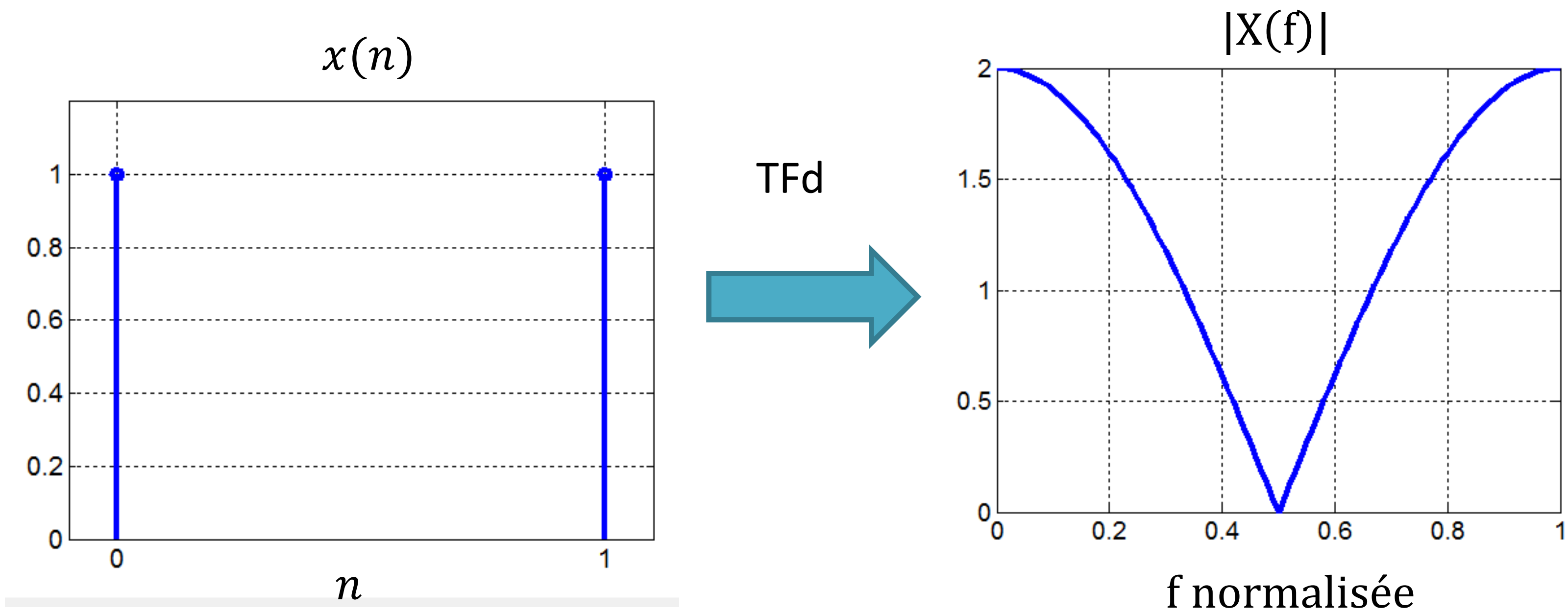
La TFd est périodique de période Fe

La TFd inverse permettant de retrouver $x(n)$ à partir de $\mathrm{X}(f)$ est :

$$x(n) = \overline{TFd}\{X(f)\} = \frac{1}{F_e}\int_0^{F_e} X(f) \cdot e^{2\pi j f n T_e} \cdot df \,, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Exemple de TFd

Soit le signal $x(n)$ suivant :



$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-2\pi j f n T_e} = \sum_{n=0}^{1} e^{-2\pi j f n T_e} = 1 + e^{-2\pi j f T_e} = e^{-\pi j f T_e} \cdot 2cos(\pi f T_e)$$

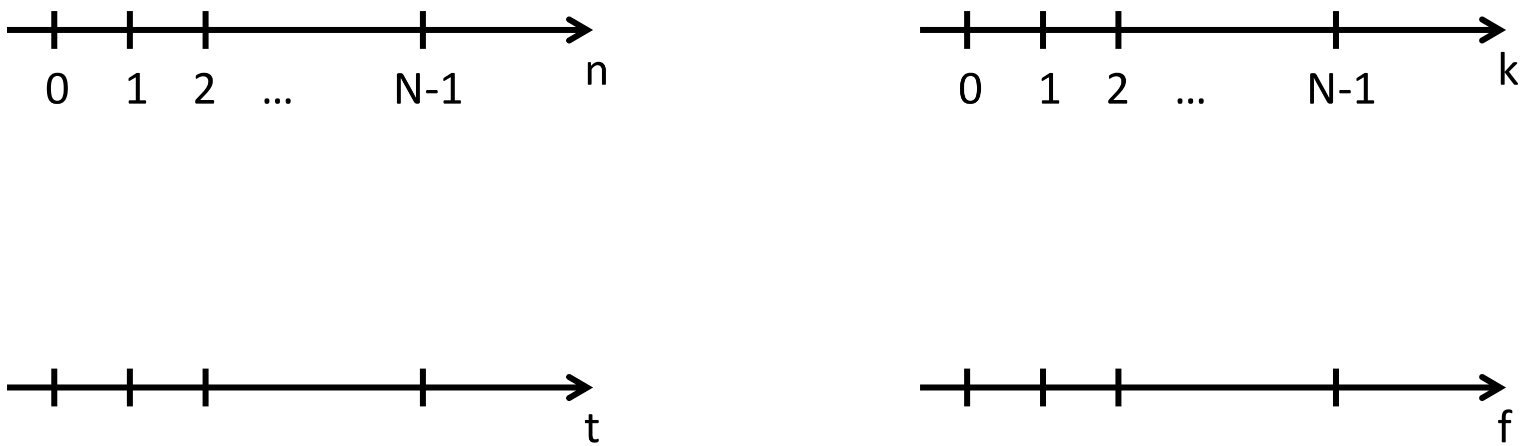
$$|X(f)| = 2 \cdot |\cos(\pi f T_e)|$$

Transformation de Fourier discrète : TFD

Signal discret $x(n)$ $\xrightarrow{\text{TFD}}$ Spectre discret $X(k)$

N échantillons

N échantillons



Le nombre d'échantillons détermine la résolution fréquentielle

Grenoble INP Esisar

Transformation de Fourier discrète : TFD

Définition

La TFD se déduit de la TFd par le changement de variable : $f = k \cdot \frac{F_e}{N}$

$$\mathrm{X}(k) = TFD\{x(n)\} =$$

$$\mathrm{x}(n) = \overline{TFD}\{X(k)\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi\frac{k \cdot n}{N}} \text{ , } \forall n \in [0; N-1]$$

Notations

La notation suivante est souvent utilisé en pratique : $W_N^1 = e^{\frac{2\pi j}{N}}$

$$\mathrm{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{-k \cdot n}$$

Transformation de Fourier discrète : TFD

Propriétés

- **Linéarité**

- **Translation**

$$TFD\big(x(n-n_0)\big) = W_N^{-k\cdot n_0} \cdot X(k), \forall\, k \in [0; N-1]$$

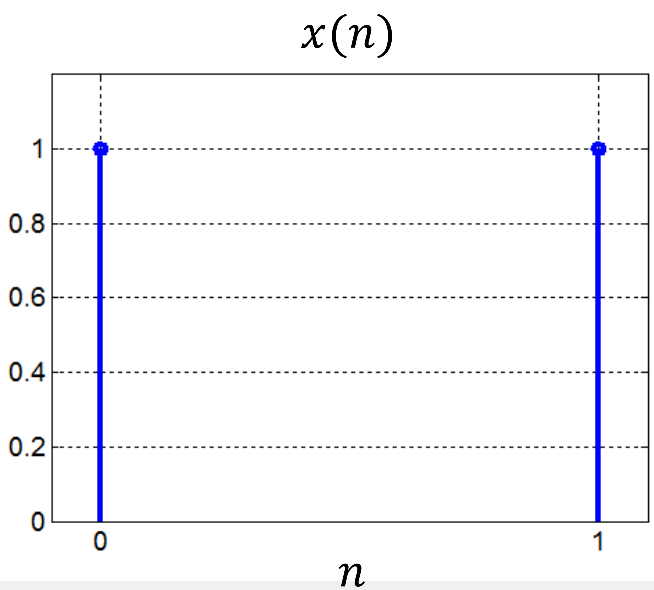
- **Symétrie**

Si $\{x(n)\}$ est formé d'échantillons réels $(x(n) = x^*(n))$

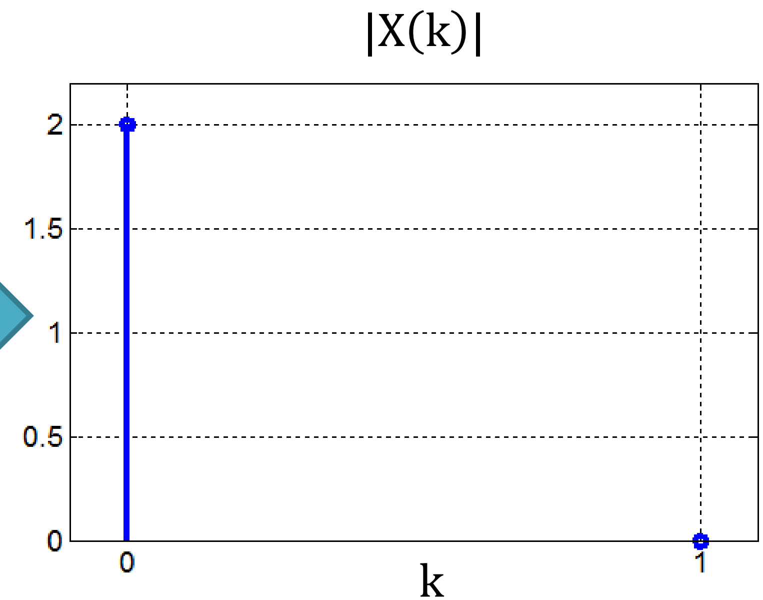
Alors : $X(N-k) = X^*(k)$

Exemple de TFD

Soit le signal $x(n)$ suivant :



TFD
Ordre 2



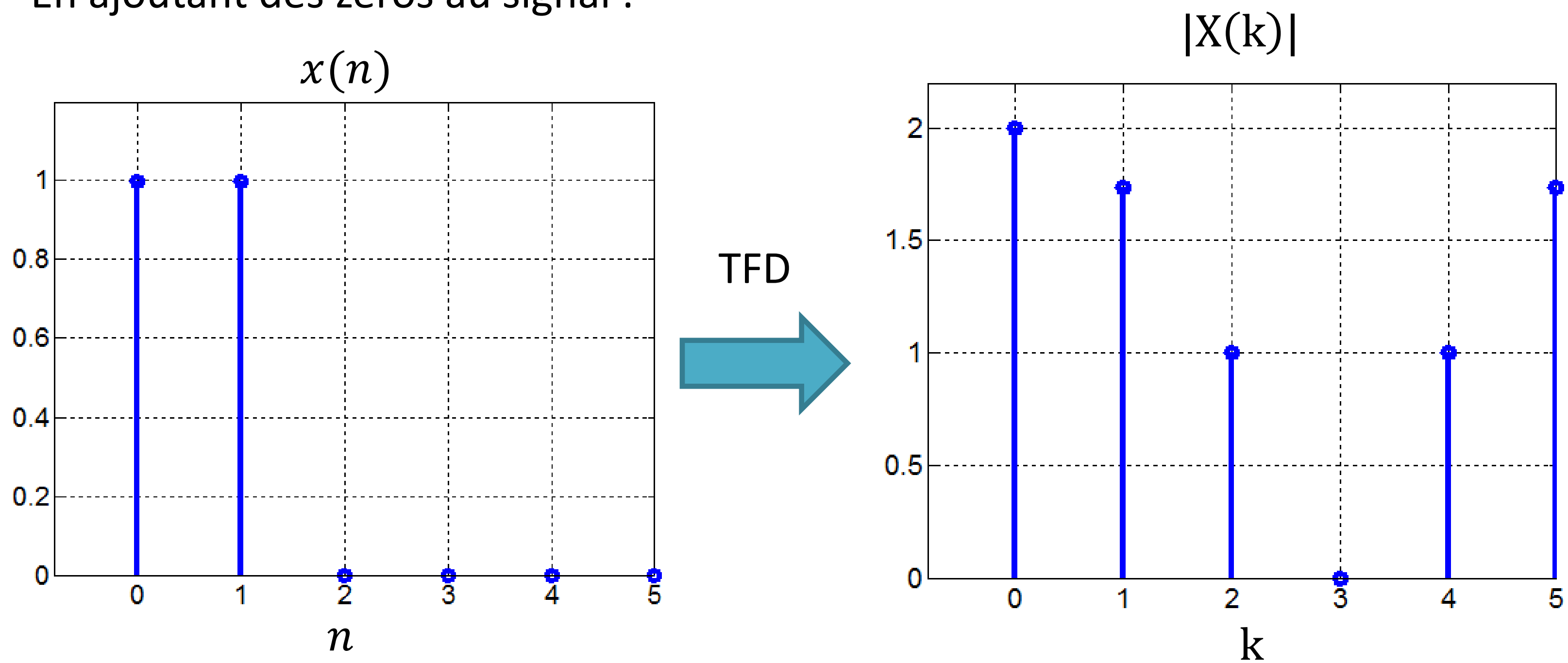
$$X(k) = \sum_{n=0}^{1} x(n) \cdot W_2^{-nk}, \forall\, k \in [0;1]$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{1} x(n) = 1 + 1 = 2 \qquad X(1) = \sum_{n=0}^{1} x(n)\, W_2^{-n} = 1 - 1 = 0$$

Comment améliorer la résolution du spectre?

Exemple de TFD

En ajoutant des zéros au signal :

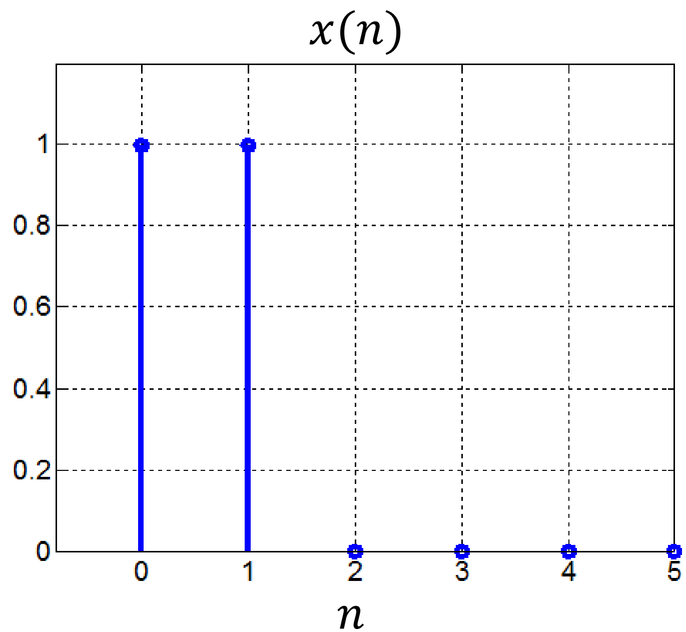


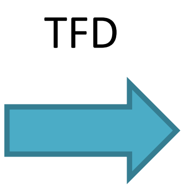
$$X(k) = \sum_{n=0}^{5} x(n) \cdot W_6^{-nk}, \forall\, k \in [0; 5]$$

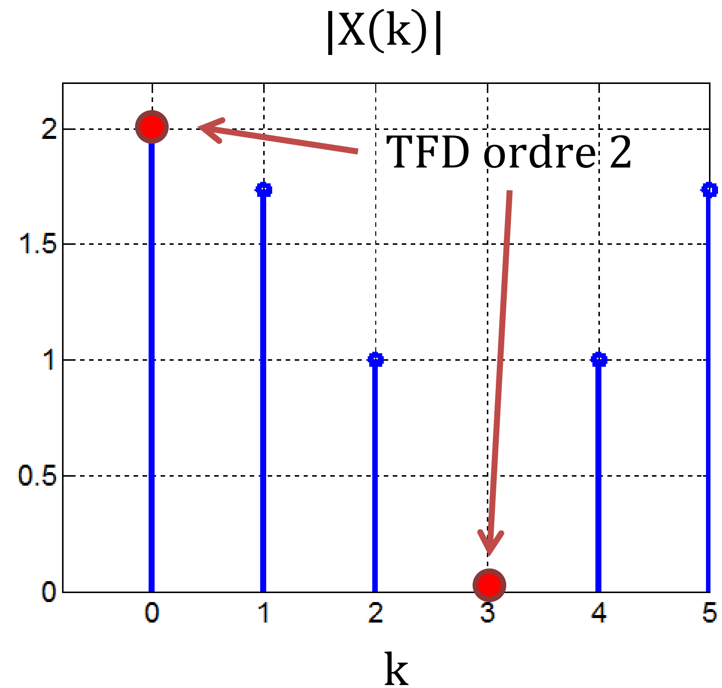
$$X(0) = \sum_{n=0}^{6} x(n) = 1 + 1 = 2 \qquad X(1) = \sum_{n=0}^{6} x(n)\, W_6^{-n} = 1 + W_6^{-1} = 1{,}5 - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemple de TFD

En ajoutant des zéros au signal :





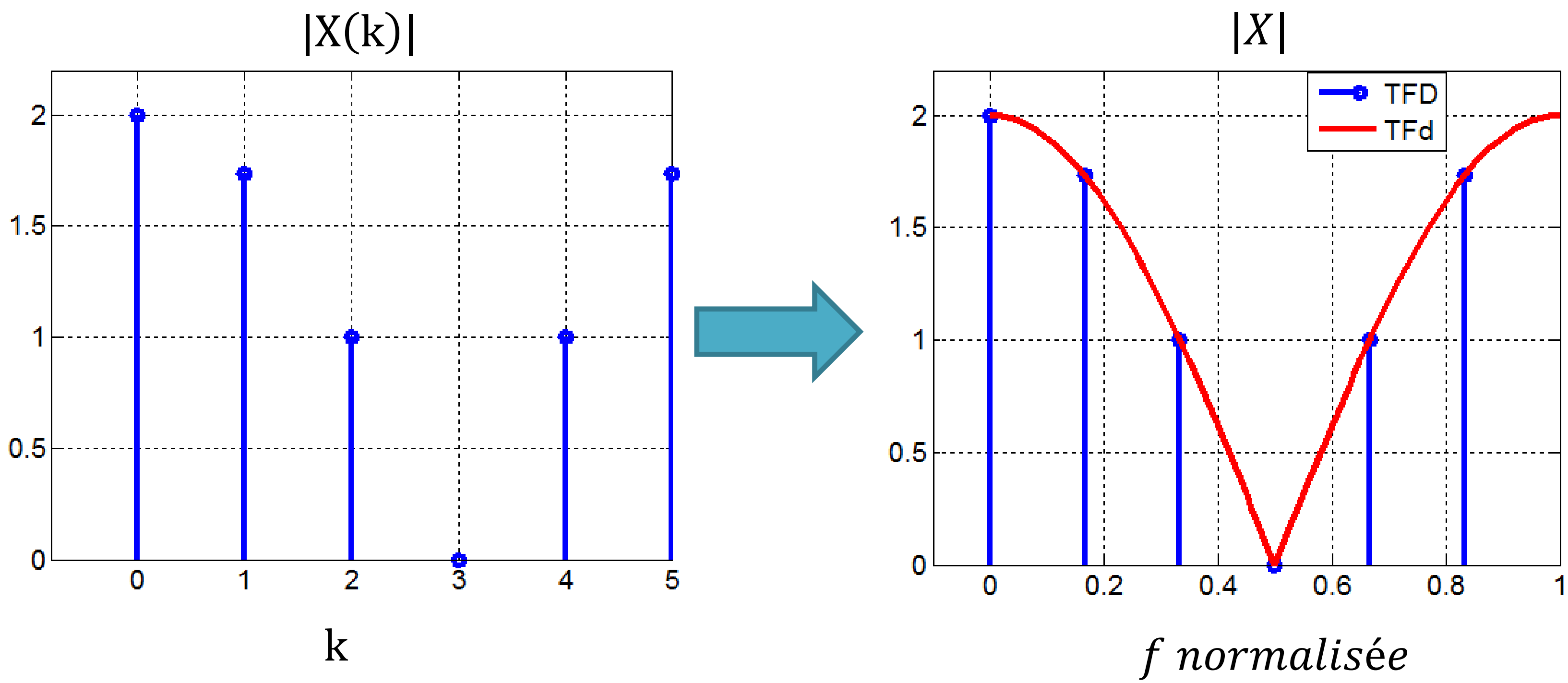


Nous retrouvons les échantillons de la TFD à l’ordre 2 pour k = 0 et k = 3

Comment faire le lien entre l’indice k et une fréquence?
Retrouve-t-on le même résultat que par le TFd?

Grenoble INP Esisar

Exemple de TFD



Le signal et échantillonné à une fréquence F_e. L'incrément fréquentiel est donc égale à F_e/N.
Ex : N = 6 ; si la fréquence est normalisée : f/F_e.
Alors le spectre est affiché entre $[0; 1 - 1/N]$.

Transformation de Fourier rapide (Fast Fourier Transform)

La FFT est un algorithme de calcul rapide de la TFD.
L'objectif est de diminuer le nombre d'opération : x , +

Evaluons le nombre d'opération que comprend le calcul du spectre de $x(n)$ par la TFD sur N points en base 2 (N = 2^M ; M nombre de bits):

$$\mathrm{k} = 0 : \quad \mathrm{X}(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{-0} = x(0) + x(1) + \cdots + X(N-1)$$

$$\mathrm{k} = 1 : \quad \mathrm{X}(1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{-n} = x(0) + x(1) W_N^{-1} + \cdots + X(N-1) W_N^{-(N-1)}$$

$$\mathrm{k} = \mathrm{N}-1 : \quad \mathrm{X}(\mathrm{N}-1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{-n(N-1)} = x(0) + x(1) W_N^{-(N-1)} + \cdots + X(N-1) W_N^{-(N-1)^2}$$

Pour un échantillon $\mathrm{X}(i)$, nous avons N multiplications et N-1 additions
Pour l'ensemble du spectre $\mathrm{X}(k)$, nous avons N^2 multiplications et N(N-1) additions
Soit environ $2N^2$ opération !

Transformation de Fourier rapide (Fast Fourier Transform)

Comment diminuer le nombre d’opération ?

- Exploitation des redondances du calcul
- Arrangement de l’ordre des échantillons pour optimiser le calcul (ex : entrelacement temporel)

Il existe un grand nombre d’algorithme de calcul de la FFT : Cooley-Tukey, Rader, Good-Thoma, Winograd ..)

L’algorithme basé sur le papillon de Cooley-Tukey est très répandu par sa simplicité de mise en œuvre

Nous allons maintenant détailler l’algorithme à entrelacement temporel

FFT : algorithme à entrelacement temporel

Première étape du calcul

Pour les $N/2$ ***premiers*** *échantillons* : $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{-nk}, k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right]$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) \cdot W_N^{-2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) \cdot W_N^{-(2n+1)k}, k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right]$$

$$X(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) \cdot W_N^{-2nk}}_{\mathrm{A(k)}} + W_N^{-k} \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) \cdot W_N^{-2nk}}_{\mathrm{B(k)}}, k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right]$$

$$\boxed{X(k) = \mathrm{A(k)} + W_N^{-k} \cdot \mathrm{B(k)}, k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right]}$$

FFT : algorithme à entrelacement temporel

Première étape du calcul

Pour les $N/2$ **derniers** échantillons : $X\left(k+\frac{N}{2}\right)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot W_N^{-n\left(k+\frac{n}{2}\right)}, k\in\left[0,\frac{N}{2}-1\right]$

$$X\left(k+\frac{N}{2}\right)=\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)\cdot W_N^{-2n\left(k+\frac{n}{2}\right)}+\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)\cdot W_N^{-(2n+1)\left(k+\frac{n}{2}\right)}, k\in\left[0,\frac{N}{2}-1\right]$$

Or : $W_N^{-2n\left(k+\frac{N}{2}\right)}=W_N^{-2nk}\cdot\underbrace{W_N^{-nN}}_{=1}=W_N^{-2nk}$ $\quad W_N^{-(2n+1)\left(k+\frac{N}{2}\right)}=W_N^{-2nk}\cdot\underbrace{W_N^{-nN}}_{=1}\cdot W_N^{-k}\cdot\underbrace{W_N^{-\frac{N}{2}}}_{=-1}$

$$X\left(k+\frac{N}{2}\right)=\underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)\cdot W_N^{-2nk}}_{A(k)}-W_N^{-k}\underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)\cdot W_N^{-2nk}}_{B(k)}, k\in\left[0,\frac{N}{2}-1\right]$$

$$X\left(k+\frac{N}{2}\right)=A(k)-W_N^{-k}\cdot B(k), k\in\left[0,\frac{N}{2}-1\right]$$

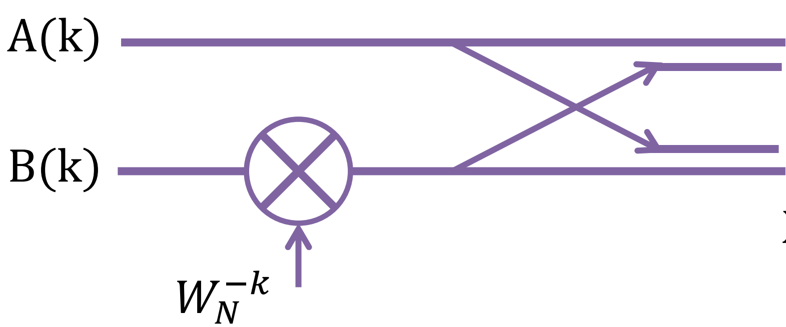
FFT : algorithme à entrelacement temporel

Bilan de la décomposition

$$\mathrm{X}(k) = \mathrm{A(k)} + W_N^{-k} \cdot \mathrm{B(k)}, k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right]$$

$$\mathrm{X}\left(k + \frac{N}{2}\right) = \mathrm{A(k)} - W_N^{-k} \cdot \mathrm{B(k)}, k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right]$$

Le calcul de $\mathrm{X(k)}$ peut être représenté sous la forme du graphe ci-dessous nommé papillon de Cooley-Tuckey :



$$\mathrm{X(k)} = \mathrm{A(k)} + W_N^{-k} \cdot \mathrm{B(k)}$$

$$\mathrm{X}(\mathrm{k} + N/2) = \mathrm{A(k)} - W_N^{-k} \cdot \mathrm{B(k)}$$

Après 1 étape : N^2 opérations pour le calcul du spectre. ($2 N^2$ avec la TFD)

FFT : algorithme à entrelacement temporel

Il est possible de continuer la décomposition des termes $\mathrm{A(k)}$ et $\mathrm{B(k)}$

$$\mathrm{A(k)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) \cdot W_N^{-2nk}, k \in \left[0, \frac{N}{4} - 1\right]$$

$$\mathrm{A(k)} = \sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n) \cdot W_N^{-4nk} + \sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n+2) \cdot W_N^{-(4n+2)k}, k \in \left[0, \frac{N}{4} - 1\right]$$

$$\mathrm{A(k)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n) \cdot W_N^{-4nk}}_{\mathrm{C(k)}} + W_N^{-2k} \underbrace{\sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n+2) \cdot W_N^{-4nk}}_{\mathrm{D(k)}}, k \in \left[0, \frac{N}{4} - 1\right]$$

$$\mathrm{A(k)} = \mathrm{C(k)} + W_N^{-2k} D(k), k \in \left[0, \frac{N}{4} - 1\right]$$

Le même principe s'applique à $\mathrm{A}\left(\mathrm{k} + \frac{N}{4}\right)$

$$\mathrm{A}\left(\mathrm{k} + \frac{N}{4}\right) = \mathrm{C(k)} - W_N^{-2k} D(k), k \in \left[0, \frac{N}{4} - 1\right]$$

FFT : algorithme à entrelacement temporel

Décomposition de B(k) suivant le même principe

$$\mathrm{B(k)} = \mathrm{E(k)} + W_N^{-2k} F(k), k \in \left[0, \frac{N}{4} - 1\right]$$

$$\mathrm{B}\left(\mathrm{k} + \frac{N}{4}\right) = \mathrm{E(k)} - W_N^{-2k} F(k), k \in \left[0, \frac{N}{4} - 1\right]$$

Avec :

$$\mathrm{E(k)} = \sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n+1) \cdot W_N^{-4nk}, k \in \left[0, \frac{N}{4} - 1\right]$$

$$\mathrm{F(k)} = \sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n+3) \cdot W_N^{-4nk}, k \in \left[0, \frac{N}{4} - 1\right]$$

Après 2 étape : on réduit d’environ la moitié le nombre d’opération

Il est possible de continuer jusqu’à la Mième étape (M nombre de bits)

FFT : exemple pour N = 8 (M = 3)

A partir des équations précédentes, nous obtenons :

$$\mathrm{C}(0) = x(0) + x(4) \qquad \mathrm{C}(1) = x(0) - x(4)$$
$$\mathrm{D}(0) = x(2) + x(6) \qquad \mathrm{D}(1) = x(2) - x(6)$$
$$\mathrm{E}(0) = x(1) + x(5) \qquad \mathrm{E}(1) = x(1) - x(5)$$
$$\mathrm{F}(0) = x(3) + x(7) \qquad \mathrm{F}(1) = x(3) - x(7)$$

$$\mathrm{A(k)} = \mathrm{C(k)} + W_8^{-2k} D(k) \qquad \mathrm{A(k+2)} = \mathrm{C(k)} - W_8^{-2k} D(k), k \in [0,1]$$
$$\mathrm{B(k)} = \mathrm{E(k)} + W_8^{-2k} F(k) \qquad \mathrm{B(k+2)} = \mathrm{E(k)} - W_8^{-2k} F(k), k \in [0,1]$$

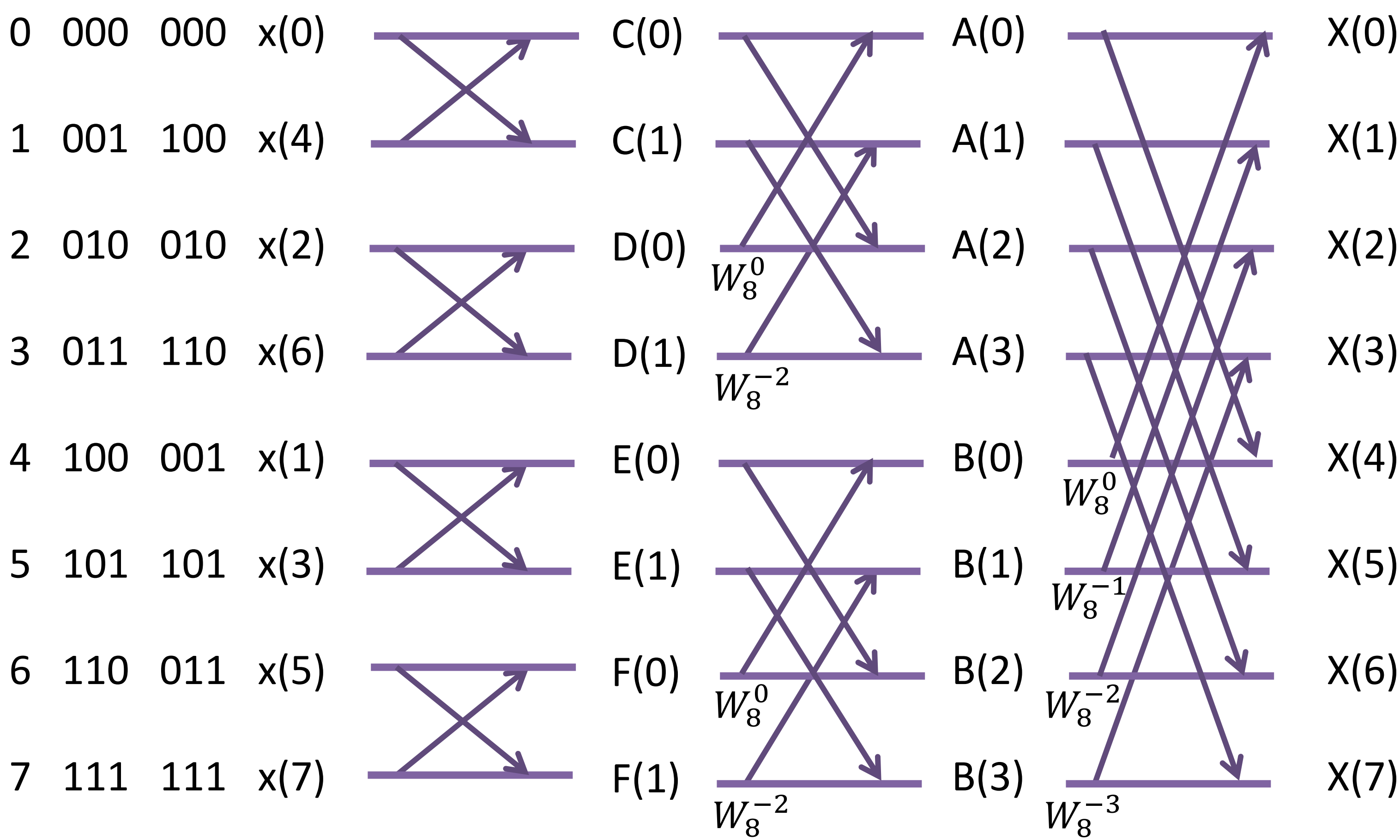
$$\mathrm{X(k)} = \mathrm{A(k)} + W_8^{-k} B(k), k \in [0,3]$$
$$\mathrm{X(k+4)} = \mathrm{A(k)} - W_8^{-k} B(k), k \in [0,3]$$

Généralement, le calcul est représenté graphiquement en utilisant le papillon de Cooley-Tuckey.

IV. Transfo. usuelles
Rappel
TL, TF, TLd
Tz
TFd
TFD
FFT
Conclusion

FFT : exemple pour N = 8 (M = 3)

Représentation graphique du calcul

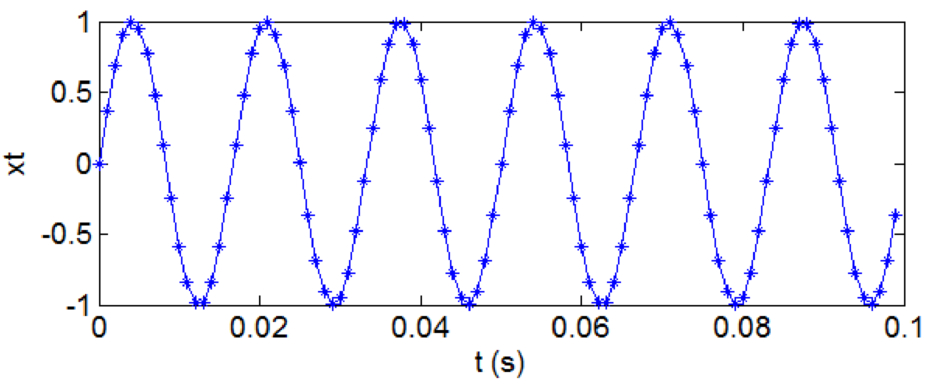


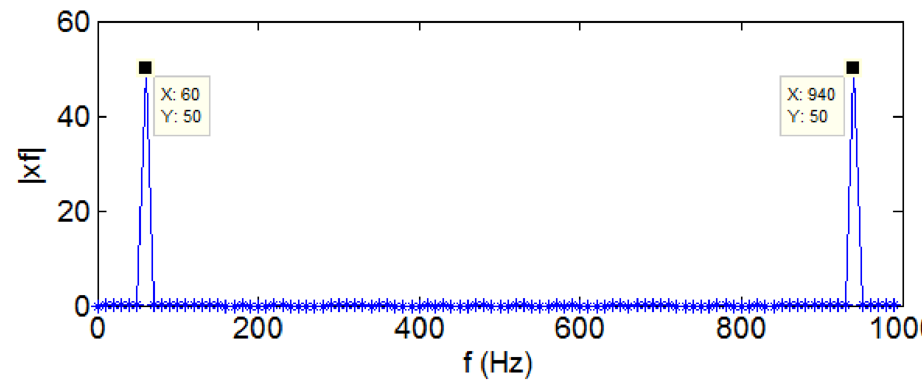
Le calcul de la FFT nécessite de placer les données suivant le code binaire inverse. Certain DSP propose un adressage en binaire réfléchi pour simplifier la mise en œuvre de l'algorithme.

Exemple de FFT en utilisant Matlab

```
clear all % vide le workspace
close all % ferme les fenêtres
clc % vide l'invité de commande

N = 100; % nombre de points
Fe = 1e3; % fréquence d'échantillonnage
Te = 1/Fe;

t=0:Te:(N-1)*Te; % vecteur temps
f=0:Fe/N:Fe-Fe/N; % vecteur fréquence

f0=60; % fréquence du signal
xt=sin(2*pi*f0*t); % signal
xf=fft(xt); % FFT du signal

figure
set(gcf,'color','white') % fond en blanc

subplot(2,1,1)
plot(t,xt,'*-')
xlabel('t (s)','fontsize',14)
ylabel('xt','fontsize',14)
set(gca,'fontsize',14)
% taille de police des axes

subplot(2,1,2)
plot(f,abs(xf),'*-')
xlabel('f (Hz)','fontsize',14)
ylabel('|xf|','fontsize',14)
set(gca,'fontsize',14)
```

1 FFT d'un signal sinusoïdale à 60 Hz échantillonné à 1 kHz avec N =100

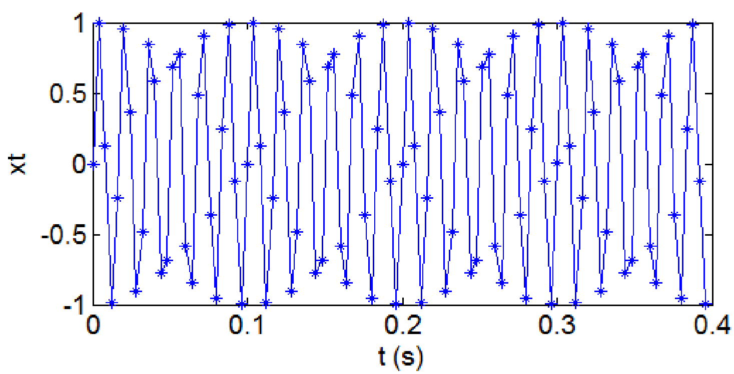


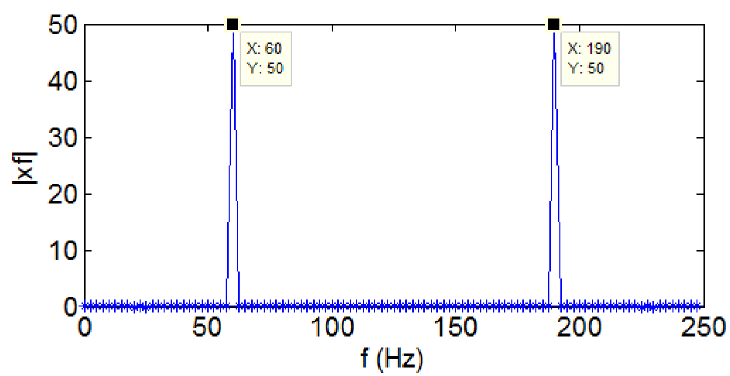


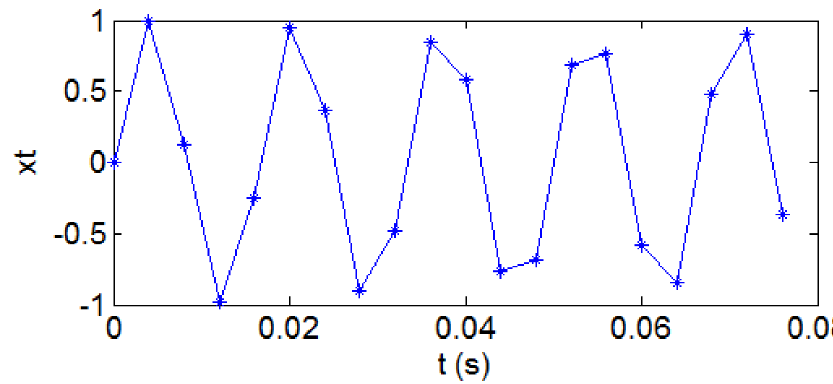
Exemple de FFT en utilisant Matlab

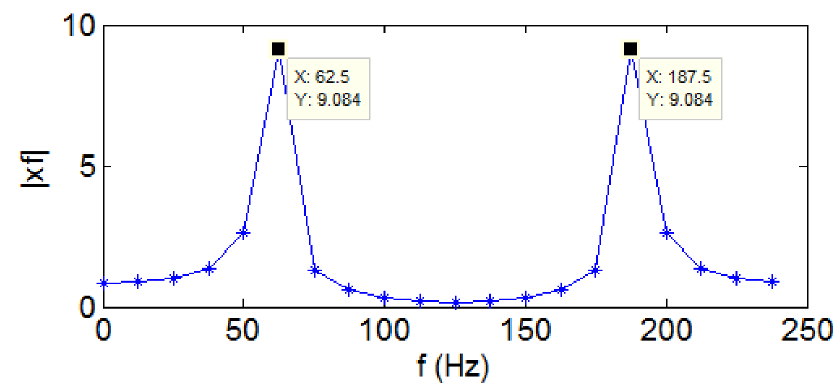
2 FFT d'un signal sinusoïdale à 60 Hz échantillonné à 250 Hz avec N =**100**

3 FFT d'un signal sinusoïdale à 60 Hz échantillonné à 250 Hz avec N =**25**





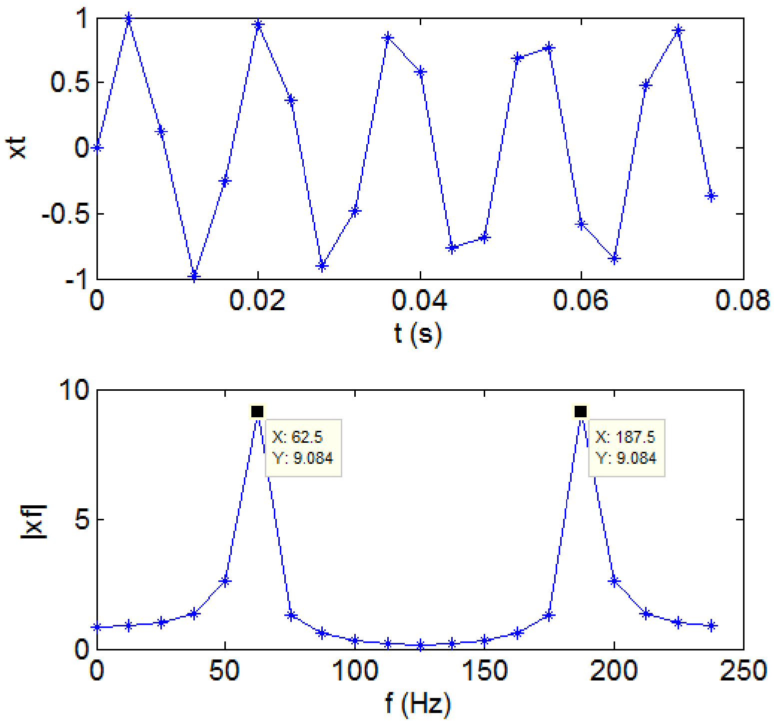




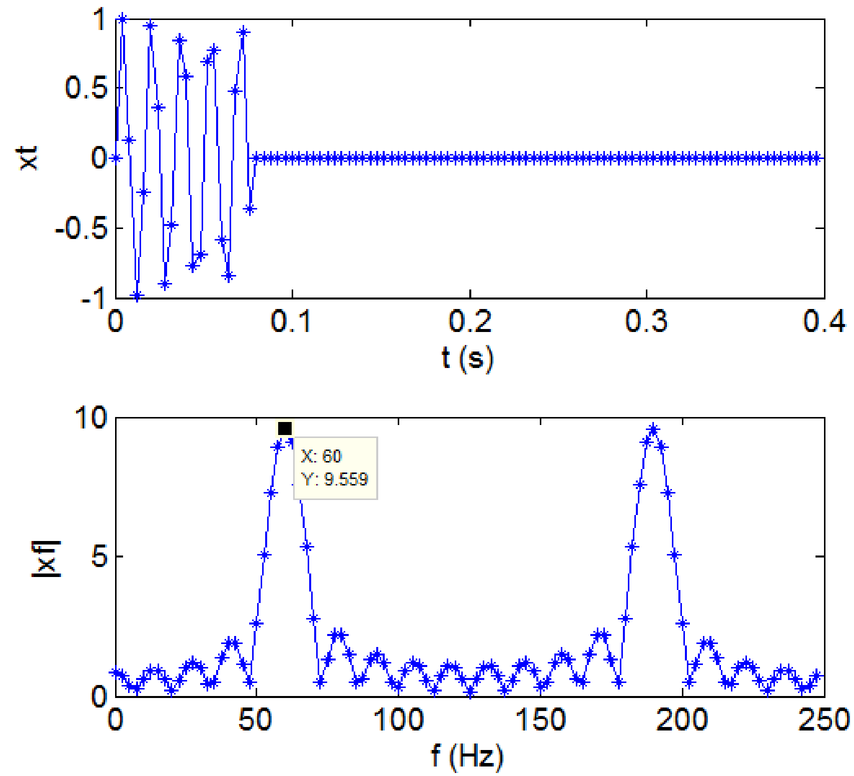
Le nombre d'échantillons détermine la résolution fréquentielle

Exemple de FFT en utilisant Matlab

Comment améliorer la résolution du spectre n°3 ?



En ajoutant des 0 à la suite du signal :
N = 20 ; N_zero = 80



- **La résolution fréquentielle est égale à Fe/100 comme pour le spectre n°2**
- **Par rapport au spectre n°2 :**

  Apparition de lobe secondaire et élargissement du lobe principal

Conclusion

Transformée de Laplace (TL)

TL: {t} ↔ {p}

$p = \sigma + 2\pi jf = \sigma + j\omega$

σ amortissement, f fréquence, ω pulsation

σ =0

Transformée de Fourier (TF)

TF: {t} ↔ {f}

signal ↔ spectre

Echantillonnage en temps

Transformée de Laplace à temps discret (TLd)

TLd: $\{nT_e\} \leftrightarrow \{p\}$

Transformée en z (Tz)

Tz: $\{nT_e\} \leftrightarrow \{z\}$

$|z| = |e^{pTe}| = e^{\sigma Te}$

$\arg(z) = 2\pi jfT_e$

Echantillonnage en temps

Transformée de Fourier à temps discret (TFd)

TFd: $\{nT_e\} \leftrightarrow \{f\}$

$F \in [0 ; F_e[$, $F_e = 1/T_e$

Echantillonnage en fréquence

Transformée de Fourier discrète (TFD)

TFD: $\{nT_e\} \leftrightarrow \{k\Delta f\}$

N, $k \in \{0, 1, ,..., N-1\}$, $\Delta f = F_e/N$

Algorithme de la Transformée de Fourier Rapide (FFT)