

MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Processus de Poisson Séance de TD du 26 mars 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 3 de la séance de TD consacrée aux processus de Poisson. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur <https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332> sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr).

Exercice 3 Les élèves de 1^{ère} année IR&C (ils sont 50 en tout) arrivent en retard à un cours en suivant un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 4$. On compte le temps en minutes.

1. Ce jour là le professeur est de bonne humeur, il se contente de faire une remarque chaque fois que 3 élèves sont passés. On note Z_n le temps qui sépare la $(n-1)^{ième}$ remarque de la $n^{ième}$. Calculer la loi de Z_n
2. Ce jour là le professeur est de mauvaise humeur, il décide de ne plus accepter les élèves se présentant avec plus de 5 min de retard. On note Z le nombre d'élèves refusés au cours. Calculer la loi de Z

Correction de l'Exercice 3

1. Notons T_n l'intervalle entre l'instant d'arrivée de l'élève $n-1$ et l'instant d'arrivée de l'élève n ($n \geq 1$). On a donc :

$$Z_n = T_{3n-2} + T_{3n-1} + T_{3n}, \forall n \geq 1$$

Les variables Z_n sont distribuées selon des lois $\Gamma(3, \lambda)$ (somme de trois exponentielles indépendantes de même paramètres λ). On a donc :

$$f_{Z_n}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^3}{2!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^2 a & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. La variable Z est une variable aléatoire discrète qui peut prendre à priori toutes les valeurs entières entre 0 et 50. Si nous notons $N(t)$ le nombre d'élèves arrivés à la minute t (processus de Poisson), la distributions de Z s'écrit :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(N(5) = 50 - k) \\ &= \frac{(5\lambda)^{50-k} e^{-5\lambda}}{(50 - k)!} \\ &= \frac{(20)^{50-k} e^{-20}}{(50 - k)!}, \forall k \in \{0, \dots, 50\} \end{aligned}$$