MA 360 : Mathématiques appliquées (TDS)
Chapitre 2 : Transformées usuelles en traitement du signal

Pierre-Alain TOUPANCE
pierre-alain.toupance@esisar.grenoble-inp.fr

Grenoble INP - ESISAR
3$^{\text{ième}}$ année

16 septembre 2020

Echantillonnage

Echantillonner : Discrétiser le temps des signaux analogiques.
Signal échantillonné : Ensemble des échantillons prélevés.
Période d'échantillonnage T_e : période entre 2 échantillons consécutifs.
Fréquence d'échantillonnage : $F_e = 1/T_e$.

Soit x un signal continu,

$$\begin{aligned} x_e(t) &= x(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_e) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e)\delta(t - nT_e) \end{aligned}$$

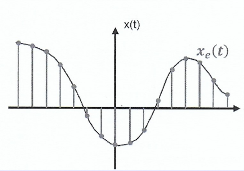


FIGURE – Echantillonnage d'un signal continu.

Définition

La transformée de Laplace d'une fonction $x\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est la fonction $X\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$X(p) = TL[x](p) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-pt}dt$$

avec $p = \sigma + 2\pi jy = \sigma + j\omega$.
σ est l'amortissement et ω la pulsation.

Il faut définir l'ensemble de définition de X, les valeurs de $p \in \mathbb{C}$ tel que $t \to x(t)e^{-pt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.

Remarques :

- Pour $p = 2\pi jy$, on obtient $TL[x](2\pi jy) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2\pi jyt}dt = TF[x](y)$
- La transformée de Laplace permet de résoudre des équations différentielles en les transformant en équations polynomiales.

Transformée de Laplace discrète

La transformée de Laplace d'un signal discret $x(n)$ de période d'échantillonnage T_e est la fonction X définie par :

$$X(p) = TLd[x](p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{-pnT_e}$$

avec $p = \sigma + 2\pi j f = \sigma + j\omega$.
σ est l'amortissement et ω la pulsation.

Remarque : X est une série de fonction continue. Pour définir l'ensemble de définition de X, il faut déterminer les valeurs p pour lesquelles cette série converge.

Propriété

La fonction $f \mapsto TLd[x](\sigma + 2\pi j f)$ est périodique de période $F_e = 1/T_e$

Transformée de Laplace inverse

La TLd inverse est définie par :

$$x(n) = \frac{1}{F_e} \int_0^{F_e} X(\sigma + 2\pi j y) e^{(\sigma + 2\pi j y) n T_e} dy$$

Transformée de Fourier à temps discret (TFd)

On appelle transformée de Fourier à temps discret d'un signal discret $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$X(y) = TFd(x(n)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-2\pi jynT_e}$$

Remarque : La TFd est périodique de période $F_e = 1/T_e$.

TFd inverse

La transformée de Fourier à temps discret inverse ($\overline{TFd}$) permet de retrouver $x(n)$ à partir de $X = TFd[x]$ et est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x(n) = \overline{TFd}[X](n) = \frac{1}{F_e}\int_{-\infty}^{+\infty} X(y)e^{2\pi jynT_e}dy$$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

On considère N échantillons $(x(n))_{0\leqslant n\leqslant N-1}$ On appelle transformée de Fourier Discrète de ce signal signal le spectre $(X(k))_{0\leqslant n\leqslant N-1}$ défini par :

$$\forall k \in [\![0; N-1]\!],\ X(k) = TFD[x](k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2\pi jkn/N}$$

La Transformée de Fourier Discrète inverse est définie par :

$$\forall n \in [\![0; N-1]\!],\ x(n) = \overline{TFD}[X](n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{2\pi jkn/N}$$

On note $W_N = e^{2\pi j/N}$

On a ainsi $X(k) = TFD[x](k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{-nk}$.

Remarques : La TFD est linéaire.

Calcul d'une TFD

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(k) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & \dots & W_N^{-n} & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & & \dots & \vdots \\ 1 & W_N^{-k} & \dots & W_N^{-kn} & \dots & W_N^{-k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & & \dots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)n} & \dots & W_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(n) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

Nombre d'opérations :
Pour $k \in\in [\![0; N-1]\!]$, on effectue $N-1$ additions et N multiplications lorsque l'on calcule $X(k)$.
Le nombre total d'opérations est $N(2N-1)+N^2$.
La FFT est un algorithme de calcul rapide de la TFD qui permet de réduire le nombre d'opérations.

Algorithme de Cooley-Tukey à entrelacement temporel

On prend $N = 2^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.
Pour $k \in [\![0; \frac{N}{2} - 1]\!]$, on a :

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{-2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{-(2n+1)k} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{-2nk}}_{A(k)} + W_N^{-k} \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{-2nk}}_{B(k)}
\end{aligned}
$$

Pour $k \in [\![0; \frac{N}{2} - 1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
X(k + \frac{N}{2}) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-n(k+N/2)} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{-2n(k+N/2)} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{-(2n+1)(k+N/2)} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{-2nk} + W_N^{-k} W_N^{-N/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{-2nk}
\end{aligned}$$

or $W_N^{-N/2} = e^{-j\pi} = -1$, ainsi :

$$X(k + \frac{N}{2}) = A(k) - W_N^{-k} B(k)$$

Pour $k \in [\![0; \frac{N}{4} - 1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} A(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{-2nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n) W_N^{-4nk} + \sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n+2) W_N^{-(4n+2)k} \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n) W_N^{-4nk}}_{C(k)} + W_N^{-2k} \underbrace{\sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n+2) W_N^{-4nk}}_{D(k)} \end{aligned}$$

Pour $k \in [\![0; N/4 - 1]\!]$, on obtient : $A(k + N/4) = C(k) - W_N^{-2k} D(k)$

Pour $k \in [\![0; \frac{N}{4} - 1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
B(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{-2nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n+1)W_N^{-4nk} + \sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n+3)W_N^{-(4n+2)k} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n+1)W_N^{-4nk}}_{E(k)} + W_N^{-2k}\underbrace{\sum_{n=0}^{N/4-1} x(4n+3)W_N^{-4nk}}_{F(k)}
\end{aligned}$$

Pour $k \in [\![0; N/4-1]\!]$, on obtient : $B(k+N/4) = E(k) - W_N^{-2k}F(k)$
Remarque : Le nombre d'opérations est encore divisé par 2.
On peut reproduire p fois le procédé.

Algorithme de Cooley Tukey pour N=8

On a : $W_8 = e^{j\pi/4}$

$$
\begin{aligned}
C(0) &= x(0) + x(4) & \quad C(1) &= x(0) - x(4) \\
D(0) &= x(2) + x(6) & \quad D(1) &= x(2) - x(6) \\
E(0) &= x(1) + x(5) & \quad E(1) &= x(1) - x(5) \\
F(0) &= x(3) + x(7) & \quad F(1) &= x(3) - x(7)
\end{aligned}
$$

On a ensuite :

$$
\begin{aligned}
A(0) &= C(0) + D(0) & \quad A(2) &= C(0) - D(0) \\
A(1) &= C(1) + W_8^{-2} D(1) & \quad A(3) &= C(1) - W_8^{-2} D(1) \\
B(0) &= E(0) + F(0) & \quad B(2) &= E(0) - F(0) \\
B(1) &= E(1) + W_8^{-2} F(1) & \quad B(3) &= E(1) - W_8^{-2} F(1)
\end{aligned}
$$

Et pour finir, on obtient :

$$\begin{aligned}
X(0) &= A(0) + B(0) & X(4) &= A(0) - B(0) \\
X(1) &= A(1) + W_8^{-1}B(1) & X(5) &= A(1) - W_8^{-1}B(1) \\
X(2) &= A(2) + W_8^{-2}B(2) & X(6) &= A(2) - W_8^{-2}B(2) \\
X(3) &= A(3) + W_8^{-3}B(3) & X(7) &= A(3) - W_8^{-3}B(3)
\end{aligned}$$

Schéma de calcul de la FFT pour $N = 8$

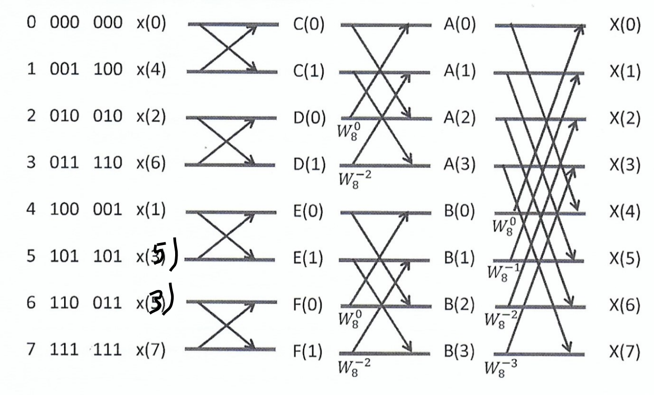


FIGURE – Le calcul de FFT nécessite de placer les données suivant le code binaire inversé pour simplifier la mise en oeuvre de l'algorithme.

Exemple de FFT :

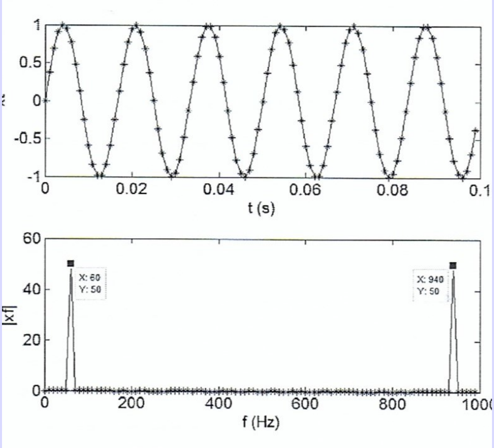
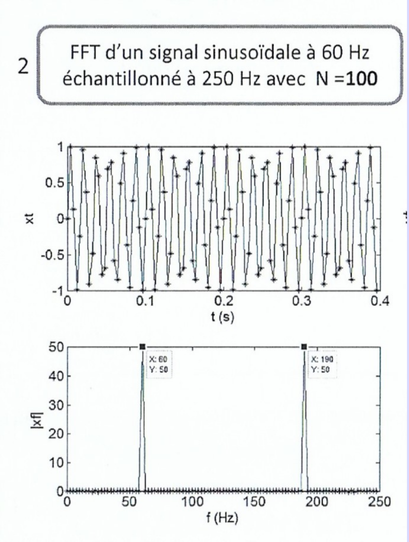


FIGURE – Signal sinusoïdale à 60 Hz échantillonné à 1 kHz avec N =100 et FFT


2
FFT d'un signal sinusoïdale à 60 Hz
échantillonné à 250 Hz avec N =100
xt
t (s)
|xf|
X: 60
Y: 50
X: 190
Y: 50
f (Hz)

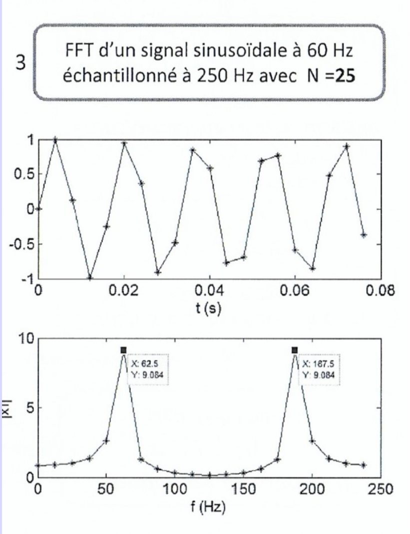

3
FFT d'un signal sinusoïdale à 60 Hz
échantillonné à 250 Hz avec N =25
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.02
0.04
0.06
0.08
t (s)
10
5
0
|X|
X: 62.5
Y: 9.084
X: 187.5
Y: 9.084
0
50
100
150
200
250
f (Hz)

FIGURE – FFT.

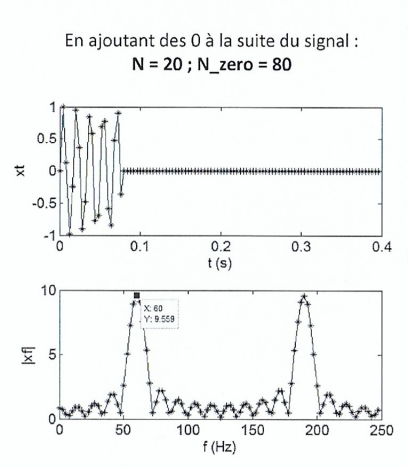


Figure – Amélioration de la déterminaton du spectre : en ajoutant des 0 à la suite du signal