Exercice 1
Dans les cas suivants, déterminer si nécessaire la constante k pour que la fonction f soit la densité de probabilité d'une v.a. continue X, puis calculer sa fonction de répartition, son espérance $\mathbb{E}[X]$ et sa variance $V(X)$.

1. **Loi double exponentielle** : $f(x) = k.e^{-a|x|}$, où $a > 0$.

2. **Loi triangulaire** : $f(x) = k.(1 - |x|).\mathbf{1}_{[-1;1]}(x)$.

Exercice 2 On suppose que la distance en mètres parcourue par un javelot suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que :

1. 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
2. 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres.

Calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot, ainsi que l'écart-type de cette longueur.

Exercice 3
Soient T_1 et T_2 2 v.a indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ_1 et λ_2. On considère la variable aléatoire $Z = min(T_1, T_2)$.

1. Calculer la loi de Z
2. Généraliser au cas de n v.a $(X_1, ..., X_n)$ suivant respectivement des lois $Exp(\lambda_i)$
3. Robert attend au bureau de poste. Devant lui sont deux guichets occupés. Soient X_1 et X_2 les temps d'occupation respectifs des deux guichets, on suppose que X_1 et X_2 sont indépendants st suivent des lois $Exp(\lambda_1)$ et $Exp(\lambda_2)$. On note Y le temps d'attente de Robert. Calculer la loi de Y.
4. On suppose qu'un composant électronique C possède une durée de vie aléatoire qui suit une loi $Exp(\lambda)$. On considère les 2 systèmes suivants: le système A, où on monte n composants C en parallèle et le système B, où on monte n composants C en série. On note T durée de vie du système. Calculer la loi de T pour le système A pour le système B.

Exercice 4
Toto s'impatiente à un arrêt d'autobus: il décide de prendre le taxi, si un taxi libre venait à passer devant l'arrêt avant le prochain autobus. Soient X la variable donnant le temps d'arrivée du prochain autobus, Y la variable donnant le temps de passage du prochain taxi libre devant l'arrêt. On suppose que X est une variable discrète prenant trois valeurs:

$$P(X = 5) = 1/4, P(X = 15) = 1/2, P(X = 25) = 1/4$$

On suppose également que $Y \sim Exp(\lambda = \frac{1}{5})$, et que X et Y sont indépendantes (ces temps sont exprimés en minutes).

1. Quelle est la probabilité pour que Toto attende plus de dix minutes?
2. Quelle est la probabilité pour que Toto prenne le taxi plutôt que l'autobus?
3. Quelle est la probabilité pour que Toto prenne le taxi plutôt que l'autobus, si l'on sait en outre qu'il a attendu plus de dix minutes?

Exercice 5
Robert entre chez le coiffeur. Celui ci est occupé avec un client. La coupe dure (exactement) 30 min, et celle ci a débuté selon une durée aléatoire uniformément répartie entre 0 et 30 min. Calculer la probabilité que t minutes après l'entrée de Robert, le coiffeur n'ait pas fini la coupe.

Exercice 6
On considère une route de longueur l, joignant les villes A et B. Des incendies surviennent sur cette route. On note X la distance entre un incendie et la ville A. Il y a une caserne de pompiers sur cette route, elle est située à une distance p de la ville A.

1. On suppose que les incendies se produisent au hasard sur la route $[A; B]$, c'est a dire que $X \sim U([0, l])$. Calculer la distance moyenne que doivent parcourir les pompiers pour atteindre un incendie.
2. Quelle est la valeur de p pour que cette distance soit la plus petite possible?

Exercice 7
Une entreprise fabrique du chocolat. Une presse façonne les tablettes dont le poids X (exprimé en grammes suit une loi $N(m, \sigma)$, avec $\sigma = 3$. Le réglage de la presse permet de modifier m par pas de 0.1 sans affecter σ. Les services de contrôle permettent que 2.5% des articles puissent peser moins que le poids net mentionné sur l'emballage.

1. Déterminer m pour respecter la loi si on indique 250 g sur l'emballage.
2. On décide de vendre les paquets par lots de 2, avec comme indication 500 g. Calculer m dans ce cas. Si on vend 100 000 plaques, quelle est en moyenne l'économie réalisée ?

On se souviendra que la loi de la somme de 2 v.a. indépendantes de loi $N(m_1, \sigma_1)$ et $N(m_2, \sigma_2)$ est la loi $N(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Exercice 8
Un appareil électrique fonctionne avec 3 piles P_1, P_2, P_3. Chacune de ces piles P_i a une durée de vie X_i, qui est une v.a de loi $Exp(\lambda)$. On suppose de plus que les 3 durées de vie sont indépendantes. L'appareil cesse de fonctionner dès que 2 de ses piles sont mortes. On note T la durée de fonctionnement de l'appareil.

1. Calculer G, la fonction de répartition de T.
2. T admet elle une densité? Si oui, la calculer.

Exercice 9
Loi de Cauchy : montrer que la fonction f définie par $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$, où $a \in \mathbb{R}_*^+$, est bien une densité de probabilité.

Exercice 10 La loi du χ^2
On définit la fonction g par :

$$g : t \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ ate^{-\frac{t}{2}} \text{ si } t \in [0; +\infty[\end{cases}$$

1. Déterminer le réel a pour que g soit la densité d'une variable aléatoire X. On appelle cette loi la loi du χ^2 (Khi carré ou Khi deux) à quatre degrés de libertés.
2. Déterminer, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$.
3. Déterminer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X \leq 2); \mathbb{P}(1 \leq X \leq 2); \mathbb{P}(X \geq 1)$.

Exercice 11
Soit $\lambda \in^{+*}$, soit U une v.a de loi uniforme sur $[0, 1]$. On considère $X = -\frac{ln(U)}{\lambda}$.

1. Pourquoi peut on dire que X existe presque surement?
2. Calculer la loi de X

Exercice 12 La vitesse d'une molécule au sein d'un gaz homogène en état d'équilibre est une variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par

$$f(x) = ax^2 exp(-bx^2) \text{ si } x > 0, f(x) = 0 \text{ sinon}$$

où $b = \frac{m}{2kT}$ et k, T, m sont respectivement la constante de Boltzmann, la température absolue et la masse de la molécule. valuer a en fonction de b.

Exercice 13

1. Soit X une variable aléatoire continue ayant pour densité

$$f(x) = rx^{-(r+1)} \text{ si } x \geq 1 \text{ et } f(x) = 0 \text{ sinon. } (r > 2)$$

   (a) Donner l'espérance et la variance de X.
   (b) Trouver la densité de la variable aléatoire $Y = \ln(X)$
2. Soit X une v.a de loi $N(0, 1)$. calculer la densité de $Y = e^X$