

MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Processus de Poisson Séance de TD du 26 mars 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 8 de la séance de TD consacrée aux processus de Poisson. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur <https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332> sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr).

Exercice 8

On modélise le téléchargement d'un fichier par l'envoi de segments. Lorsqu'on télécharge un fichier, la transmission de ces segments peut être erronée.

La liaison téléphonique entre Robert et son fournisseur d'accès internet est mauvaise : on suppose que des erreurs de transmission se produisent selon un processus de Poisson. Le temps moyen entre deux erreurs de transmission est de 1 minute. Robert télécharge un fichier sur un site internet ; Entre le FAI de Robert et ce site les erreurs de transmission sont également modélisées par un processus de Poisson. Elles sont en moyenne espacées de 5 minutes.

1. Le téléchargement dure une demi heure. En moyenne, combien de segments sont erronés parmi ceux qu'a reçus Robert?
2. Quelle est la probabilité que le téléchargement se déroule sans accroc?

Correction de l'Exercice 8

Par hypothèses, nous supposons que les erreurs ne se compensent pas et que les segments erronés sont suffisamment peu nombreux pour négliger la probabilité de deux erreurs consécutives sur le même segment. Ainsi, le

nombre total d'erreurs dans les segments reçus par Robert est la somme des erreurs de transmission entre le site distant et le FAI, d'une part, et entre le FAI et Robert, d'autre part. Soit $N_1(t)$ le nombre de segments erronés parmi ceux transmis par le site distant au FAI, au temps t et $N_2(t)$ le nombre de segments erronés parmi ceux transmis par le FAI à Robert, toujours au temps t . On a donc :

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

où $N(t)$ désigne le nombre total de segments erronés transmis à Robert au temps t . $N(t)$ est donc un processus de Poisson de paramètre

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 = \frac{6}{5} \text{ min}^{-1}$$

où $\lambda_1 = \frac{1}{5} \text{ min}^{-1}$ et $\lambda_2 = 1 \text{ min}^{-1}$ désignent respectivement les paramètres des processus de Poisson $N_1(t)$ et $N_2(t)$ estimés avec le maximum de vraisemblance.

1. La distribution de probabilité du nombre total de segments erronés reçu en 30 min (distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda t = \frac{6}{5}30 = 36$) :

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} = \frac{36^k e^{-36}}{k!}$$

L'espérance du nombre de segments erronés sur ces 30 min vaut donc¹

$$E(N(30) = k) = \sum_{k \geq 0} k P(N(t) = k) = 36$$

2. La probabilité que le téléchargement se déroule sans accroc vaut

$$P(N(30) = 0) = e^{-\frac{6}{5}30} = e^{-36}$$

¹L'espérance d'une variable de Poisson de paramètre $\tilde{\lambda}$ est vaut $\tilde{\lambda}$