Exercice 1 Soit le code binaire C en blocs linéaires $\mathcal{C}(6,3)$ défini par la fonction d'encodage définie par :

$$f(m_1m_2m_3) = c_1c_2c_3c_4c_5c_6$$

où :

$$\begin{array}{rcl} c_1 & = & m_1 \\ c_2 & = & m_2 \\ c_3 & = & m_3 \\ c_4 & = & m_1 + m_2 \\ c_5 & = & m_2 + m_3 \\ c_6 & = & m_1 + m_3 \end{array}$$

1. Déterminer une matrice génératrice et une matrice de contrôle de ce code.
2. Déterminer la distance minimale de ce code.
   Combien d'erreurs peuvent être détectés et combien peuvent être corrigées ?
   Ce code est-il parfait?
3. A la sortie d'un canal, on reçoit les messages $m_r = 111101$ et $m'_r = 100111$, ces messages ont-ils été altérés? Si oui corrigez les si c'est possible.

4. Dans le cas d'une transmission dans un canal binaire symétrique de probabilité d'erreur $p = 0,01$, en utilisant ce codage, quelle est la probabilité qu'un mot de 3 bits soit reçu sans erreur avant correction ? Quelle est cette probabilité après correction?

Exercice 2
On considère le code correcteur en bloc linéaire C(8,4) de matrice génératrice:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trouver la matrice génératrice sous forme systématique de ce code ?
2. Déterminer la matrice de contrôle sous forme systématique de ce code ?
3. Déterminer la distance minimale de ce code ?
4. Combien d'erreurs peut-il détecter et combien d'erreurs peut-il corriger?
5. Pour chacun des mots reçus suivants, indique le nombre de bits (au minimum) qui ont été altérés : 11101100, 01111110,01110011. Dans les cas où c'est possible corrigez les.
6. Dans le cas d'une transmission dans un canal binaire symétrique de probabilité d'erreur p=0.01, déterminer la probabilité qu'un bloc de 8 bits après correction soit transmis sans erreur.

Exercice 3 Décodage d'un code en blocs linéaire

1. Soit un code en bloc linéaire $C(n,k)$, qui à tout mot binaire $m = [m_1, \cdots, m_k]$ associe un mot de code $c = [c_1, ..., c_n]$. Le canal introduit une erreur sur un seul bit de c, à la position i. On note cette erreur $e_i = [0...010...0]$, le 1 étant placé en ieme position. En notant H la matrice de contrôle du code. Montrer que le syndrome s est égal à la ième colonne de H .
2. Le codage est défini par le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{rcl} c_1 & = & m_1 \\ c_2 & = & m_2 \\ c_3 & = & m_3 \\ c_4 & = & m_1 + m_3 \\ c_5 & = & m_1 + m_2 + m_3 \\ c_6 & = & m_1 + m_2 \end{array}$$

Donner une matrice génératrice systématique G de ce code ? Déterminer la matrice de parité H.

3. On reçoit le mot $r = 010111$. Calculer le syndrome s. Sous l'hypothèse qu'un seul bit du mot de code c émis a été altéré par la transmission, en déduire ce mot.

4. Construire les mots du code de matrice génératrice G. Quel est la distance minimale de ce code ? En déduire les pouvoir de détection et de correction du code.

5. On reçoit le mot 010111. Retrouver le résultat de la question 3 en décodant selon la distance minimale (i.e. en recherchant le mot de code le plus proche du mot reçu).

6. On reçoit 111111. Quel est le mot envoyé?

Exercice 4 Borne de Hamming

Soit un code en bloc linéaire C (n, k). Les erreurs sont modélisées par des mots e de n bits s'ajoutant aux mots de code : chaque bit non nul de e correspond à un bit erroné. Dans le décodage par le syndrome, on peut non seulement détecter les erreurs en trouvant un syndrome non nul, mais aussi localiser et donc corriger les erreurs si l'on peut associer un syndrome à chaque motif d'erreurs e. Ainsi, si le code a un pouvoir de correction t, le nombre total de syndromes possibles est nécessairement supérieur ou égal au nombre de motifs e ayant au plus t bits non nuls.

1. Combien y a-t-il de syndromes possibles ?

2. Combien y a-t-il de motifs d'erreur e ayant au plus t bits non nuls ?

3. Quel est la relation entre la taille des blocs de données (k), le nombre de bits de redondance ajouté (n-k) et le pouvoir de correction t ?

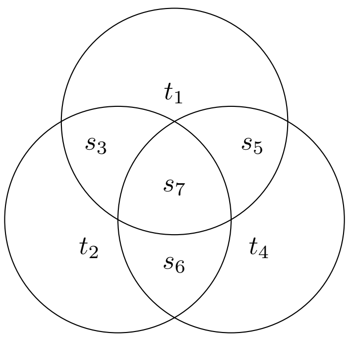
4. Application : pour un code de pouvoir de correction 2 codant des blocs de données de 5 bits, quel est le nombre minimal de bits de redondance ?

Exercice 5

On considère le code R_3.
Déterminer le rendement du code R_3.
Détailler l'algorithme de décodage.
Déterminer la valeur de la probabilité d'erreur bloc p_B pour un canal binaire symétrique de probabilité f.
En déduire la valeur de la probabilité d'erreur bit p_b.
Même questions pour le code R_9.
En remarquant que l'encodage peut être réalisé en concaténant deux codes R_3, proposer un algorithme de décodage alternatif et estimer la probabilité d'erreur bit p_b dans les deux cas.

Exercice 6

On considère le code de Hamming (7,4).



Déterminer le rendement du code de Hamming (7,4).

1. Enumérer l'ensemble des mots de code et en déduire la distance minimale du code.
   Déduire de la représentation graphique, l'expression de la matrice génératrice G et de la matrice de contrôle H du code.
   Déduire à partir de G et H l'expression de la matrice génératrice systématique G_s et de la matrice de contrôle systématique H_s.

2. Sachant que le syndrome peut être calculé par $s = eH^T$ où e est le motif d'erreur, calculer tous les syndromes correspondant à un motif d'erreur de poids 1. En déduire une méthode permettant de décoder un message reçu.

3. Décoder les blocs suivants:
$$r = 0100101001011001110111111110$$

4. Calculer la probabilité de non détection de ce code.

5. En remarquant que le code de Hamming ne peut corriger que des erreurs simples, déterminez la probabilité d'erreur bloc p_B exacte sur le CBS de probabilité f ainsi qu'une valeur approchée (approximation au premier ordre).

6. En déduire une expression du taux d'erreur binaire p_b.

Exercice 7 On note $\mathbb{F}_2$ le corps $\mathbb{Z}/2\mathcal{Z}$.

1. Déterminer une factorisation en polynômes irréductibles de $P = X^6 - 1 = X^6 + 1$ dans $\mathbb{F}_2[X]$.

2. Déterminer un polynôme générateur d'un code cyclique $\mathcal{C}$ de $C(6, 3)$.
   Quel est le cardinale de $\mathcal{C}$?

3. Soit le code polynomial $\mathcal{C}'$ de $C(6, 2)$ engendré par le polynôme $Q = X^4 + X^2 + 1$.
   (a) Donner un matrice génératrice de $\mathcal{C}'$.
   (b) Les codes suivant $m_r = 101010$ et $m'_r = 111011$ appartiennent-ils à $\mathcal{C}'$? Si non, les corriger.

4. Combien existe-t-il de codes cycliques de longueur 6.

Exercice 8 Le protocole USB utilise un code correcteur polynomial de taille $(16, 11)$ de polynôme générateur $P = X^5 + X^2 + 1$.

1. Coder les mots suivants : 00011011101, 11100000000, 01010101010.

2. Déterminer si les mots réceptionnés suivants sont corrects : 0000011111011000, 0000000011011011, 1001010000000000.

3. Ce code est-il cyclique ?

Exercice 9

1. Vérifier que $X^2 + X + 1$ divise $X^6 + 1$.

2. Faire la liste des mots du code polynomial cyclique de longueur 6 ayant pour polynôme générateur $P = X^2+X+1$.

3. Quelle est la distance minimale de ce code?

Exercice 10 Montrer que le code de matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est polynomial, et trouver son polynôme générateur. Montrer que ce code est cyclique.

Exercice 11 Soit $\mathcal{C}$ le code polynomial de longueur 7 et de polynôme générateur $P = X^3 + X + 1$

1. Ce code est-il cyclique ?
2. Construire la liste des syndromes pour $\mathcal{C}$.
3. En déduire que $\mathcal{C}$ est équivalent à un code de Hamming $(7,4)$.
4. Indiquer si les mots suivants sont des mots de code, et les corriger le cas échéant :

$$0110111,\ 1101110,\ 0001100,\ 0011000,\ 0110000$$

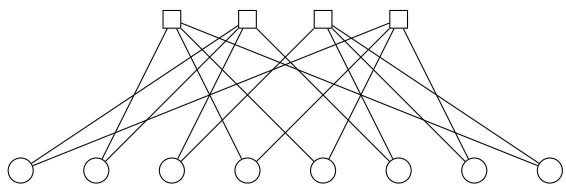
Exercice 12
On considère le code convolutif (3,5,7)

1. Dessiner la structure de l'encodeur.
2. Représenter le code sous forme de chaîne de Markov.
3. Encoder la séquence 10011010111101011101.
4. Mêmes questions avec le code (15,17).
5. La mission Galileo vers Jupiter a utilisé le code (46321,51271,63667,70535).
6. Déterminer le nombre d'états.

Exercice 13
On considère le code convolutif (7,5,7).

1. Encoder la séquence 101100.
2. Lors de la transmission sur un canal binaire symétrique, des erreurs se produisent sur les bits 6 10 13 et 14.
3. Décoder la séquence reçue avec l'algorithme de Viterbi.
4. Déterminer la distance libre du code.

Exercice 14 On considère le code LDPC suivant:



1. Déduire le rendement du code, ainsi que sa matrice de parité H.
2. Parmi les mots suivants, déterminer lesquels sont des mots de code:
   10000000, 10100101, 10101010, 00011000, 00000000, 11111111.
3. Pour les mots qui ne sont pas des mots de code, appliquer l'algorithme de décodage bit flipping.
4. Dans ce graphe de Tanner, identifier un cycle de longueur 4.