

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Chap. 7 Filtres à réponse impulsionnelle infinie

1. Caractéristiques des filtres RII

1. Equation aux différences
2. Stabilité et causalité
3. Structure de réalisation

2. Synthèse des filtres RII

1. Méthodes de synthèses par transposition des méthodes de synthèses analogiques au cas des filtres numériques.
2. Méthodes algorithmiques directes qui développent des techniques d'approximation basées sur des procédures itératives d'optimisation numérique.

3. Conclusion : RII vs RIF

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Caractéristiques des filtres RII

▪ **Equation aux différences (EDF) :**

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i \cdot x(n-i) - \sum_{j=1}^N a_j \cdot y(n-j)$$

La sortie $y(n)$ dépend de l'entrée courante, des M entrées précédentes et des N sorties précédentes.

▪ **Réponse impulsionnelle :**

Les filtres **RII** ont leur réponse impulsionnelle à support infini

i.e. $h(n) \neq 0$ quelque soit n

Filtre RII : système LIT à réponse impulsionnelle de durée infinie

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Caractéristiques des filtres RII

■ Fonction de Transfert en z :

$$y(n) = \sum_{j=0}^M b_j \cdot x(n-j) - \sum_{i=1}^N a_i \cdot y(n-i) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{j=0}^M b_j \cdot z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i \cdot z^{-i}}$$

En pratique on a souvent $N=M$, N est appelée l'ordre du filtre.

■ Réponse en fréquence :

$$H(f) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f}}$$

$|H(f)|$: réponse en amplitude, spectre d'amplitude

$\varphi(f) = \arg(H(f))$: réponse en phase, spectre de phase

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Caractéristiques des filtres RII

■ Stabilité inconditionnelle :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = K \frac{\prod_{j=1}^M (z - z_j)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)}$$

Les filtres RII sont stables si les pôles sont strictement à l'intérieur du cercle unité.

■ Causalité :

Système causal si toutes les valeurs de $h(n)$ nulles pour $n < 0$; sinon une simple translation peut le rendre causal

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Caractéristiques des filtres RII

■ Structure de réalisation

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i \cdot x(n-i) - \sum_{j=1}^N a_j \cdot y(n-j)$$

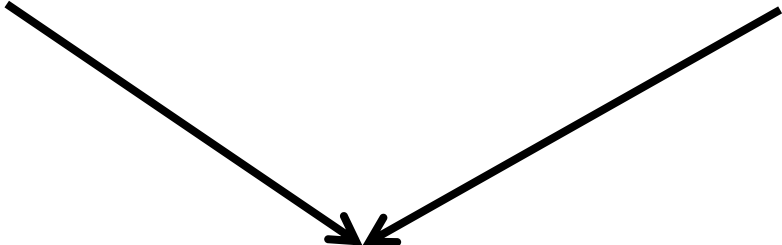
On peut décomposer la sortie en deux parties :

Une partie non réursive

$$w(n) = \sum_{i=0}^M b_i \cdot x(n-i)$$

Une partie réursive

$$K(n) = - \sum_{j=1}^N a_j \cdot y(n-j)$$

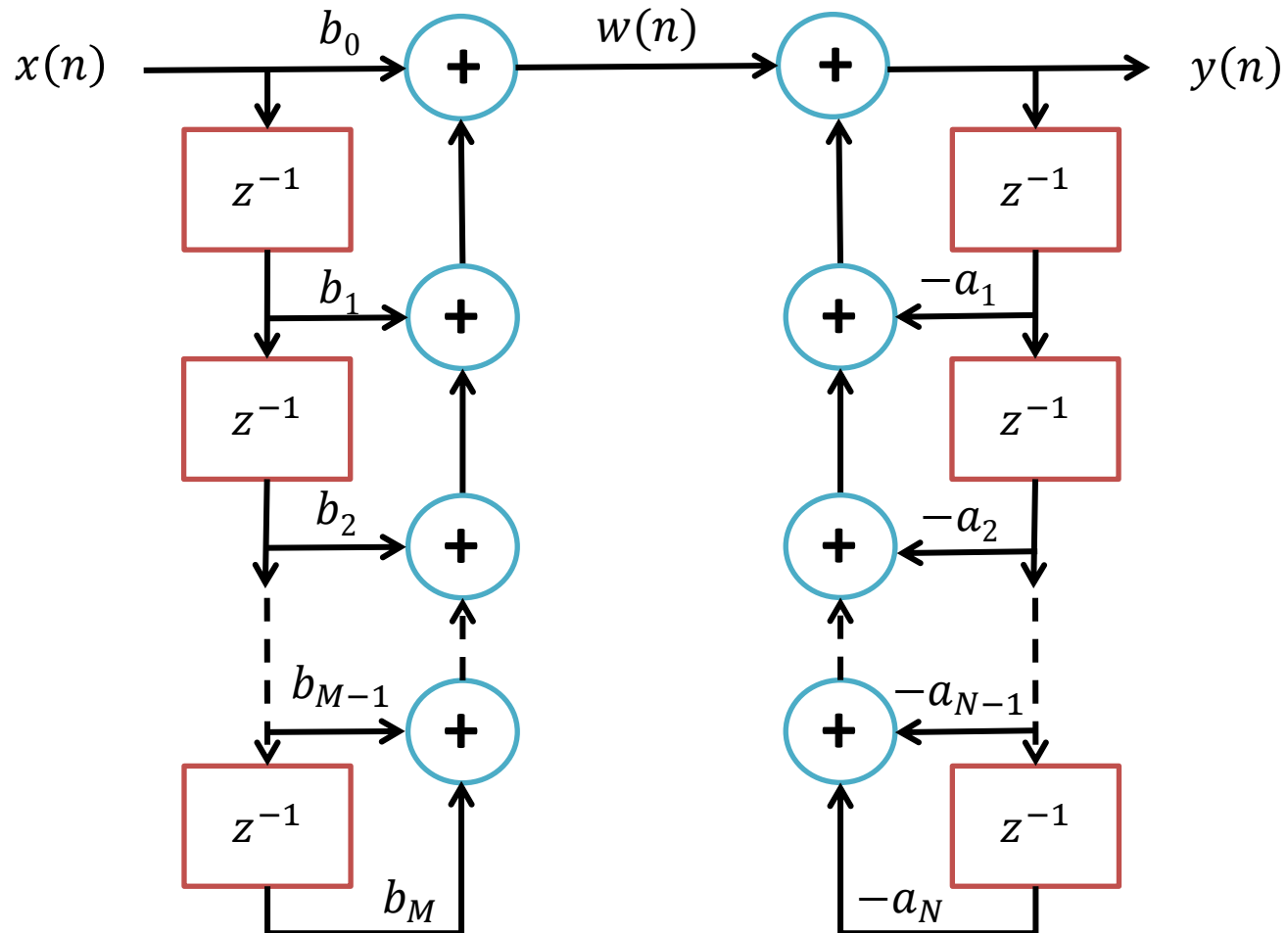


$$y(n) = w(n) + K(n)$$

Caractéristiques des filtres RII

■ Structure de réalisation

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i \cdot x(n-i) - \sum_{j=1}^N a_j \cdot y(n-j)$$



Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Synthèse des filtres à réponses impulsionnelles infinies

De manière générale, il existe deux approches pour synthétiser les filtres RII :

- 1. Méthode de synthèse par transposition des méthodes de synthèses analogiques au cas des filtres numériques.**
- 2. Méthode algorithmiques directes qui développent des techniques d'approximation basées sur des procédures itératives d'optimisation numérique.**

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

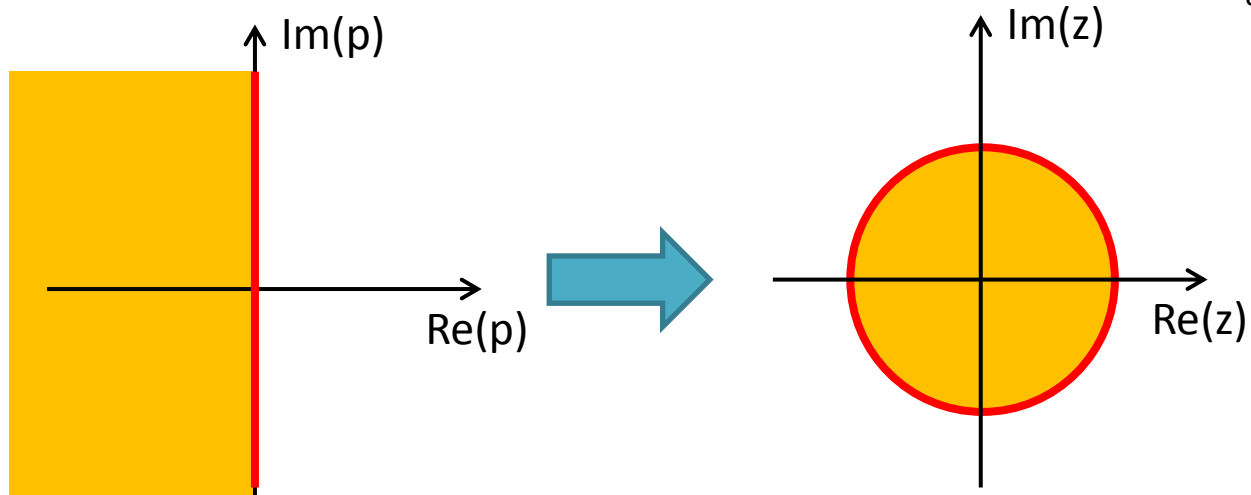
Synthèse des filtres à réponses impulsionnelles infinies

- 1. Méthode de synthèse par transposition des méthodes de synthèses analogiques au cas des filtres numériques.**
 - a. Si la fonction analogique est connue : passage de la fonction de transfert analogique à la fonction de transfert numérique**
 - transformation théorique,
 - invariance impulsionnelle,
 - transformation bilinéaire
 - b. Si le gabarit du filtre analogique est connue : obtention de la fonction de transfert analogique par une fonctions d'approximation :**
 - Butterworth, Chebyshev, ...

Ha(p) vers H(z) : transformation théorique

- Passer d'une fonction de transfert analogique $H_a(p)$ supposée connue à la fonction de transfert numérique.
- Etablir une correspondance entre le plan de Laplace p et le plan des z .

Ce passage se fait selon la formule suivante : $z = e^{pT_e} \leftrightarrow p = \frac{1}{T_e} \ln(z)$



Problème : Le filtre obtenu n'est pas récursif ! $H(z) = H\left(\frac{1}{T_e} \ln(z)\right)$

Impossible de faire une transformation parfaite => approximations

Chap. 7

RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Ha(p) vers H(z) : invariance impulsionnelle

Chap. 7 RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

La fonction de transfert numérique est obtenue par échantillonnage de la réponse impulsionnelle du filtre continue.

$$h(n) = h(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kTe) \quad \text{Avec } F_e = 1/Te \text{ est la fréquence d'échantillonnage}$$

La réponse en fréquence est alors :

$$H(f) = TFd\{h(n)\} = Ha(f) * Fe \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kFe)$$

Avec $H_a(f)$, la réponse du filtre analogique

Problème : si $H_a(f)$ n'est pas à support borné => phénomène de repliement de spectre. Les spécifications du filtre ne peuvent pas être conservées.

Méthode couramment utilisée pour des filtres à bandes limitée

Ha(p) vers H(z) : invariance impulsionnelle

Chap. 7 RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

exemple filtre du premier ordre

Soit $H_a(p) = \frac{A}{p+p_0}$ la fonction de transfert d'un filtre analogique.

Sa réponse impulsionnelle est donné par :

$$h(t) = \overline{TL}[H_a(p)] = A \cdot e^{-p_0 t}, \text{ à condition que } p_0 \text{ soit à partie réelle négative.}$$

La réponse impulsionnelle du système discret associé se déduit alors :

$$h(nT_e) = A \cdot e^{-p_0 nT_e}$$

La fonction de transfert du filtre numérique est donc :

$$H(z) = Tz\{h(nT_e)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-p_0 nT_e} z^{-n} = \frac{A}{1 - e^{-p_0 T_e} z^{-1}}$$

Dans tous les cas, l'objectif est de décomposer $H_a(p)$ sous la forme de filtres du 1^{er} ou second ordre dont les Tz sont connues.

Ha(p) vers H(z) : transformation bilinéaire

Chap. 7 RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

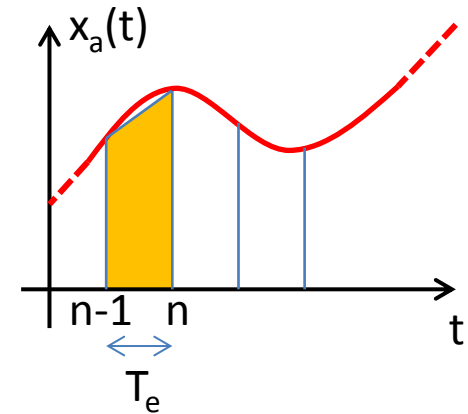
Num to An.

Directe

3. Conclusion

Basée sur la règle trapézoïdale d'intégration

$$\text{Aire hachurée} = x(n-1) + \frac{x(n) - x(n-1)}{2} = \frac{x(n) + x(n-1)}{2}$$



$$y_a(t) = \int x_a(\tau) d\tau \quad \leftrightarrow \quad y(n) = y(n-1) + \frac{x(n) + x(n-1)}{2} \cdot T_e$$

↓ TL

↓ Tz

$$Y_a(p) = \frac{1}{p} \cdot X_a(p) \quad \leftrightarrow \quad Y(z) = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \cdot X(z)$$

Une application du plan des p dans le plan des z est ainsi définie

$$p = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \leftrightarrow \quad z = \frac{1 + p \frac{T_e}{2}}{1 - p \frac{T_e}{2}}$$

Ha(p) vers H(z) : transformation bilinéaire

Chap. 7 RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Détermination de l'image de l'axe imaginaire $p = j\omega_a$

$$j\omega_a = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \quad \leftrightarrow \quad z = \frac{1 + j\omega_a \frac{T_e}{2}}{1 - j\omega_a \frac{T_e}{2}}$$



$$\begin{cases} |z| = 1, \forall \omega_a \\ \omega_a = \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \leftrightarrow \omega = 2 \arctan\left(\frac{T_e \cdot \omega_a}{2}\right) \end{cases}$$

- L'axe des imaginaires correspond au cercle unité :
pas de repliement du spectre
- Partie réelle négative correspond à l'intérieur du cercle unité :
stabilité conservée
- Pas de distorsion de module mais distorsion des fréquences du filtre numérique :

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{T_e \cdot \omega_a}{2}\right)$$

Ha(p) vers H(z) : transformation bilinéaire

Chap. 7 RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Remarque sur le problème de distorsion de fréquences

- Pas de distorsion de module mais distorsion des fréquences du filtre numérique :

$$\omega = 2 \arctan \left(\frac{T_e \cdot \omega_a}{2} \right)$$

La distorsion peut être limitée en augmentant la fréquence d'échantillonnage. Comme la distorsion est connue de manière analytique, il est possible de l'anticiper dans la conception du filtre.

Ha(p) vers H(z) : comparaison des deux méthodes

Chap. 7 RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Exemple

La période d'échantillonnage est fixée à $T_e = 0,1$ s. Soit le filtre numérique dont le gabarit a été approximé par le filtre d'ordre 2 suivant :

$$H(p) = \frac{10}{1 + p + p^2}$$

Calculons le filtre numérique par les méthodes de l'invariance impulsionnelle et par la transformation bilinéaire

- *Invariance impulsionnelle*

La transformation suivante est connue $H(p) = \frac{p + a}{(p + a)^2 + b^2}$

$$H(z) = T_e \cdot \frac{e^{-aT_e} \cdot \sin(bT_e) \cdot z^{-1}}{1 - 2e^{-aT_e} \cdot \cos(bT_e) z^{-1} + e^{-2aT_e} z^{-2}} = \frac{0,095 \cdot z^{-1}}{1 - 1,895z^{-1} + 0,905z^{-2}}$$

Par identification $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ha(p) vers H(z) : comparaison des deux méthodes

Chap. 7 RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Exemple

- Transformation bilinéaire

L'application de la transformation donne directement le résultat :

$$H(p) = \frac{10}{1 + p + p^2} \quad \text{On pose : } p = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$H(z) = 10 \cdot \frac{(1 + z^{-1})^2}{421 - 798 \cdot z^{-1} + 381 \cdot z^{-1}}$$

Ha(p) vers H(z) : comparaison des deux méthodes

Chap. 7 RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

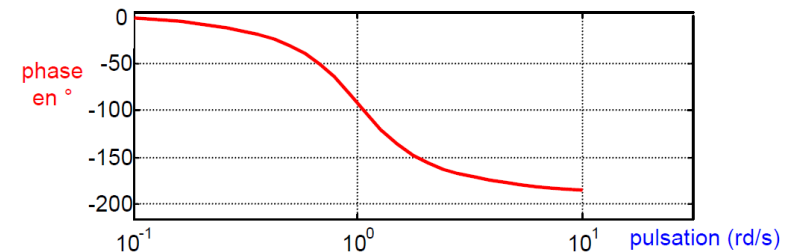
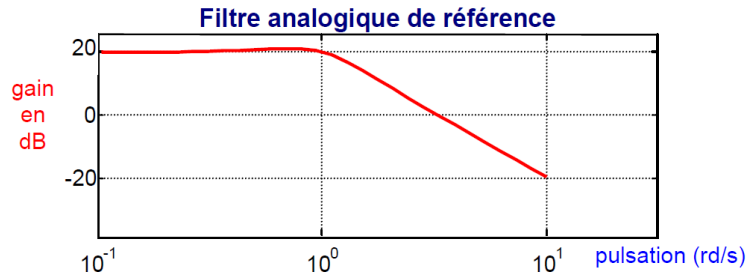
2. Synthèse

Num to An.

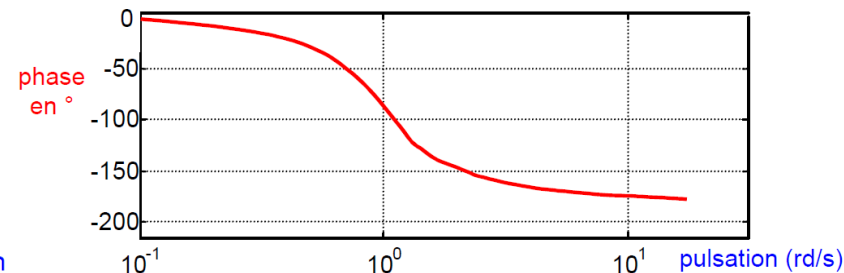
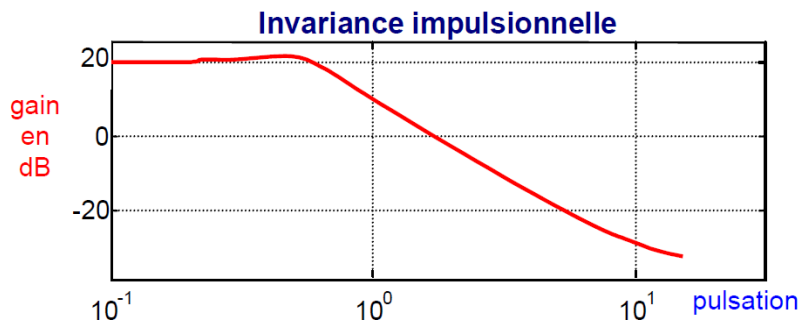
Directe

3. Conclusion

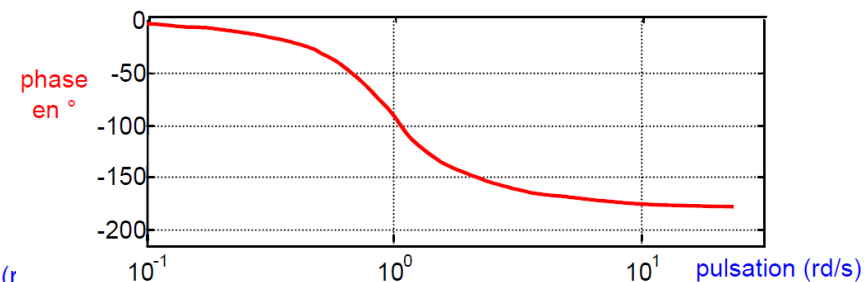
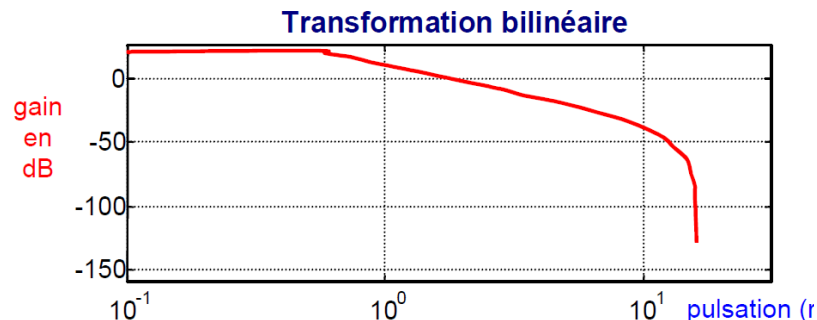
• Référence



• Invariance impulsionnelle



• Transformation bilinéaire



Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

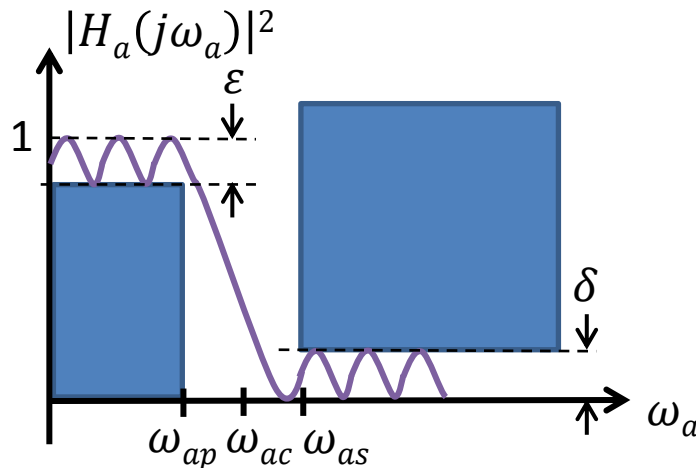
Num to An.

Directe

3. Conclusion

Utilisation de fonctions d'approximation pour obtenir $H_a(p)$

Nous supposons cette fois $H_a(p)$ donnée sous la forme d'un gabarit



Un filtre est caractérisé par :

- la bande passante *BP*
- la bande atténuée (ou coupée)
- la largeur ΔF de la zone de transition
- l'amplitude des oscillations en bande passante ϵ
- l'amplitude des ondulations en bande atténuée δ

1. A partir du gabarit, Il faut donc choisir une fonction d'approximation.
 - Butterworth, Chebyshev, etc.
2. Déterminer l'ordre minimum du filtre.
3. Une fois la fonction analogique connue, il reste à la numériser à l'aide d'une des méthodes présentées précédemment.

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

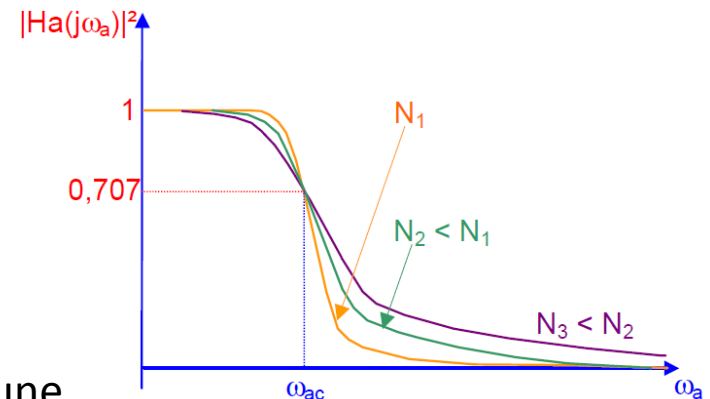
Utilisation de fonctions d'approximation pour obtenir $H_a(p)$

Fonction de Butterworth

1. Choisir de la fonction : exemple Butterworth d'ordre N :

$$|H_a(j\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_{ac}}\right)^{2N}}$$

Ses principales caractéristiques sont une pente décroissante de $6N$ dB/octave et une réponse plate dans la bande passante.



Remarque :

Quelque soit N , les courbes d'atténuation passent par -3 dB à la fréquence de coupure. Par conséquent, $\delta_p \text{ max} = 3\text{dB}$.

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Utilisation de fonctions d'approximation pour obtenir $H_a(p)$

Fonction de Butterworth

2. Fixer l'ordre du filtre et la fréquence de coupure

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2N}} = 1 - \varepsilon \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right)^{2N}} = \delta \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2N} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \\ 1 + \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right)^{2N} = \frac{1}{\delta} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \omega_{ap} = \omega_{ac} \left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2N}} \\ \omega_{as} = \omega_{ac} \left(\frac{1 - \delta}{\delta} \right)^{\frac{1}{2N}} \end{array} \right]$$

$$\frac{\omega_{ap}}{\omega_{as}} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2N}}}{\left(\frac{1 - \delta}{\delta} \right)^{\frac{1}{2N}}} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{as}} \right) = \ln \left(\frac{\left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2N}}}{\left(\frac{1 - \delta}{\delta} \right)^{\frac{1}{2N}}} \right) = \frac{1}{2N} \ln \left(\frac{\varepsilon \delta}{(1 - \varepsilon) \cdot (1 - \delta)} \right)$$

L'ordre du filtre est finalement :
(attention N entier)

$$N = \frac{1}{2} \frac{\ln \left(\frac{\varepsilon \delta}{(1 - \varepsilon) \cdot (1 - \delta)} \right)}{\ln \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{as}} \right)}$$

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Utilisation de fonctions d'approximation pour obtenir $H_a(p)$

Fonction de Butterworth

3. Trouver les coefficients de $H_a(p)$ à coefficients réels et causal à partir de $|H_a(j\omega_a)|^2$

$$|H_a(j\omega_a)|^2 = H_a(j\omega_a) \cdot H_a^*(j\omega_a) = H_a(j\omega_a) \cdot H_a(-j\omega_a)$$

/Si H est réel, $H^*(f) = H(-f)$ (symétrie hermitienne)

$$|H_a(j\omega_a)|^2 = H_a(p) \cdot H_a(-p) \Big|_{p=j\omega_a} = \frac{1}{1 + \left(\frac{-jp}{\omega_{ac}}\right)^{2N}} \Big|_{p=j\omega_a}$$

Cherchons l'expression des pôles de la fonction

$$1 + \left(\frac{-jp}{\omega_{ac}}\right)^{2N} = 0 \leftrightarrow \left(\frac{-jp}{\omega_{ac}}\right)^{2N} = -1 = e^{j(2k+1)\pi} \leftrightarrow -jp = \omega_{ac} \cdot e^{\frac{j(2k+1)\pi}{2N}}$$

$$p = \omega_{ac} \cdot e^{j\pi \left[\frac{1}{2} + \frac{(2k+1)}{2N} \right]} \leftrightarrow$$

$$|p| = \omega_{ac} \text{ et } \arg(p) = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N}$$

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Utilisation de fonctions d'approximation pour obtenir $H_a(p)$

Fonction de Butterworth

Les pôles sont disposés sur un cercle de rayon ω_{ac}
Il faut choisir les pôles à partie réelle négative pour garantir la stabilité

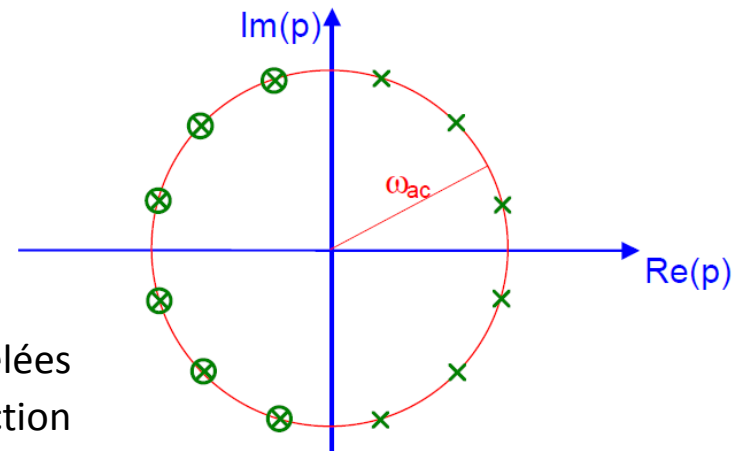
$$|p| = \omega_{ac} \text{ et } \arg(p) = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N}$$

Exemple pour $N = 6$

$$H_a(p) = \frac{\omega_{ac}^N}{\prod_{j=1}^N (p_j - p)}$$

Les termes $\prod_{j=1}^N (p_j - p)$ sont appelées
fonction de transmission et sont fonction
de l'ordre du filtre.

En pratique, utilisation de tables.



Exemple pour $N = 6$

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Utilisation de fonctions d'approximation pour obtenir $H_a(p)$

Fonction de Butterworth

Tables de fonction de transmission

Ordre du filtre	Fonction de transmission
1	$1 + p$
2	$p^2 + \sqrt{2}p + 1$
3	$(1 + p).(1 + p + p^2)$
4	$(p^2 + 0,7653p + 1).(p^2 + 1,8484p + 1)$
5	$(1 + p).(p^2 + 0,618p + 1).(p^2 + 1,618p + 1)$
6	$(p^2 + 0,5176p + 1).(p^2 + \sqrt{2}p + 1).(p^2 + 1,932p + 1)$

Le terme p est normalisées $p \leftrightarrow p/\omega_{ac}$

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Utilisation de fonctions d'approximation pour obtenir $H_a(p)$

Fonction de Chebyshev

Le fonction d'ordre N est :

$$|H_a(j\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} T_N\left(\frac{\omega_a}{\omega_{ac}}\right)}$$

$T_N(x)$ est le polynôme de Chebyshev :

si $x < -1$: $T_N(x) = (-1)^N \cosh(N\theta)$ avec $x = -\cosh(\theta)$

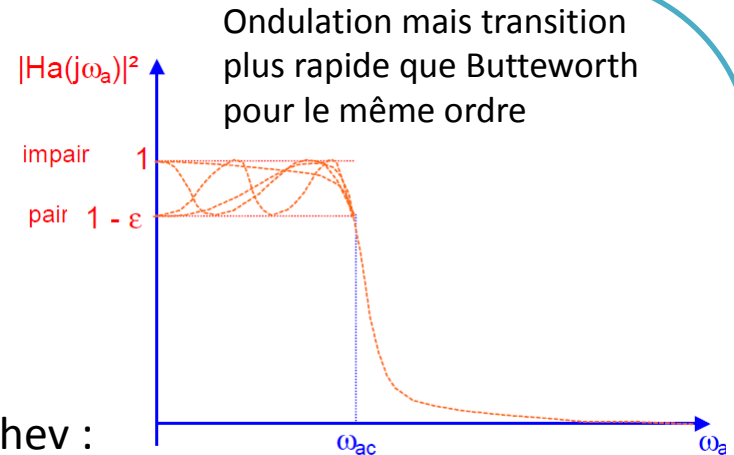
si $-1 \leq x \leq 1$: $T_N(x) = \cos(N\theta)$ avec $x = \cos(\theta)$

si $x > 1$: $T_N(x) = \cosh(N\theta)$ avec $x = \cosh(\theta)$

Quelque soit l'ordre du filtre :

$$|H_a(j\omega_{ac})|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}} = 1 - \varepsilon$$

La fréquence de coupure est définie à $10 \cdot \log \sqrt{1 - \varepsilon}$



Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Utilisation de fonctions d'approximation pour obtenir $H_a(p)$

Fonction de Chebyshev

L'ordre du filtre est donné par la formule suivante :

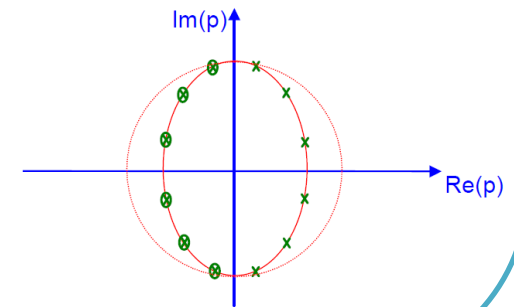
$$N = \frac{\operatorname{arccosh} \left(\sqrt{\frac{(1 - \varepsilon)(1 - \delta)}{\varepsilon \cdot \delta}} \right)}{\operatorname{arccosh} \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right)}$$

Les pôles du filtre sont donnés par :

$$p_k = \omega_{ac} [\sinh(\mu) \cdot \cos(\theta_k) + j \cdot \cosh(\mu) \cdot \sin(\theta_k)]$$

$$\text{Avec : } \mu = \frac{1}{N} \cdot \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}} \right) \quad \text{Et : } \theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot N} \pi$$

Il est possible de montrer que les pôles sont situés sur une ellipse. Nous choisissons alors les pôles à partie réelle négative



Exemple pour $N = 6$

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Méthodes de synthèses directes

- Synthèse directe par échantillonnage en fréquence
- Synthèse directe par échantillonnage de la réponse impulsionnelle

Nous ne développerons pas ces méthodes. Elles consistent à synthétiser la réponse du filtre numérique à partir de spécification. Cette synthèse se fait à l'aide d'algorithme d'optimisation.

Chap. 7
RII

1. Caract. RII

E aux d

Stabilité

Réalisation

2. Synthèse

Num to An.

Directe

3. Conclusion

Conclusion : RII Vs RIF

Type de filtre	RII	RIF
Méthode de synthèse	Synthèse directe ou numérisation de fonctions d'approximation (Butterworth, ...)	Méthode de la fenêtre
Avantages	Peu de coefficients : - Rapidité de calcul - Peu d'espace mémoire	Phase linéaire (pas de déformation des signaux composites) Toujours stable
Inconvénients	Phase non linéaire Risque d'instabilité si les pôles sont mal choisis	Nombre de coefficients plus élevé que RII pour des performances équivalentes : - Temps de calcul long - Espace mémoire importants