Jean

GRENOBLE INP Esisar UGA VALENCE

DS
Mardi 12 avril 2022

CS322 - Vincent Guisse
2021 - 2022

Durée 1h. Sans calculatrice et sans documents. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 (6 points)
Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Vrai ou faux ? Justifier.

1. Pour tous langages $L, M \subset \Sigma^*$, $(LM)^* \subset (L \cup M)^*$.
2. Pour tous langages $L, M \subset \Sigma^*$, $(LM)^* = (L \cup M)^*$. ← contre exemple
3. Pour tous langages $L, M \subset \Sigma^*$, $(L^*M^*)^* = (L \cup M)^*$.

Exercice 2 (4 points)
Construire un AFN reconnaissant le langage de l'expression régulière $(ab + ba)^*$, puis le déterminiser.

Exercice 3 (4 points)
Le langage $L = \{ww,\ w \in \{a, b\}^*\}$ des mots composés de deux mots identiques sur l'alphabet $\{a, b\}$ est-il régulier ? Justifier. → pomper $\underbrace{a^N b^N a^N b^N}$

Exercice 4 (6 points)
Soit $L_1 = \{a^{3n},\ n \in \mathbb{N}\}$ et $L_2 = \{a^{2n},\ n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que L_1 et L_2 sont réguliers.
2. Donner un automate fini qui reconnaît $L = L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$.
3. Donner une expression régulière dont le langage est L.

Exercice 5 (6 points)
Soit $L = \{a^i b^j,\ (i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } i \neq j\}$. ← vérifie le lemme de pompage

1. Montrer que L est un langage hors-contexte.
2. Soit M le langage de l'expression régulière a^*b^*. Expliciter le langage $M - L = M \cap \overline{L}$.
3. Montrer que L n'est pas un langage régulier.

↳ Indice : Théorèmes : L régulier $\Rightarrow$ $\overline{L}$ régulier
L_1, L_2 régulier $\Rightarrow$ $L_1 \cap L_2$ régulier

$$\underbrace{M}_{\text{régulier}} \cap \overline{L} = \underbrace{\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{non régulier}}$$

Si L régulier alors $\overline{L}$ régulier
Si $M \cap \overline{L}$ régulier alors $\{a^n b^n\}$ régulier
Absurde

GRENOBLE INP Esisar UGA VALENCE

NOM - Prénom : ROUGÉ Jean

Matière : CS 322

Date : 12/04/22

Promotion : P2024

COMMENTAIRES	NOTE
20/20 Très bien.	

Marge réservée à la correction

Exercice 1 :

4,5/6

1) Vrai on sait que $L_1 . L_2 = \{w \mid w = w_1 w_2, w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$

Or $(L_1 \cup L_2)^2 = \{w \mid w = w_1 w_2$ ou $w_2 w_1$ ou $w_1 w_1'$ ou $w_2 w_2'\}$

donc $(L_1 L_2) \subset (L_1 \cup L_2)^2$

1,5/2 On peut généraliser à $*$ donc $(L_1 L_2)^* \subset (L_1 \cup L_2)^*$

car tous les mots de $L_1 L_2$ peuvent être formé par $(L_1 \cup L_2)^2$

à faire !

2) Faux : exemple $L = \{\text{"aa"}\}$ $M = \{\text{"bb"}\}$

2 alors "aaaa" appartient à $(L \cup M)^*$

mais pas à $(LM)^*$

3) Vrai : il manque *

Soit $w \in (L^* M^*)$, $w = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot \ldots \cdot w_n$

avec $w_{i \in [\![1, n]\!]} \in L$ ou M (c'est à dire $L \cup M$)

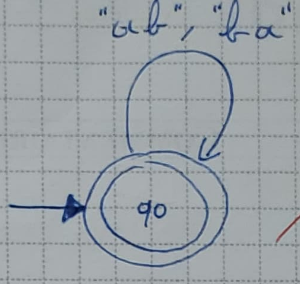
1/2 on peut bien refaire ce mot avec l'expression régulière

$(L \cup M)^*$ en dérivant n fois.

Pas très convaincant, mais pas plus d'idée.

Exercice 2 :

AFN :

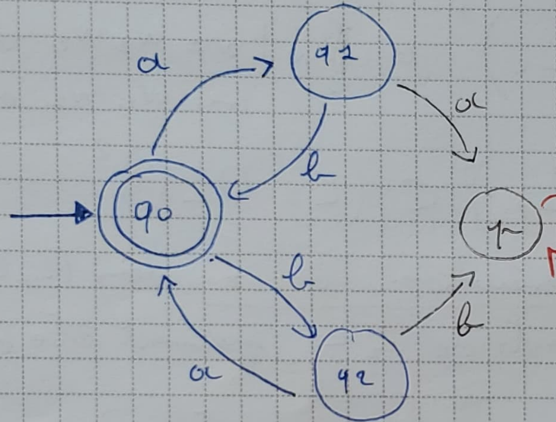


$(ab + ba)^*$

On suppose que le mot est validé seulement si il à été entièrement consomé

AFD

q0 :	a → q1
	b → q2
q1 :	b → q0
q2 :	a → q0



état poubelle pour le rendre complet

pour être complet

3/4

Ex3 : Ce language n'est pas régulier :
Preuve par le théorème de pompage.

Supposons A un automate fini déterministe reconnaissant le language L et possédant N états

Soit $w \in L$ tq $|w| > N$

on pose $w = a^N b^N a^N b^N$

on décompose $w = xuy$ avec $|xu| \leq N$

donc $x = a^k$ $u = a^m$ tq $k + m = N$

et $y = b^N a^N b^N$

D'après le théorème de pompage si A reconnait L et que $xuy \in L$ alors $xu^m y \in L$

Or dans notre cas, $\forall n \neq 1 \quad x u^n y \notin L$

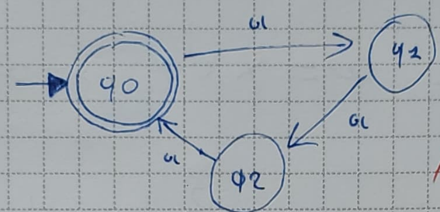
Donc il n'existe pas d'automate fini déterministe reconnaissant L

4/4

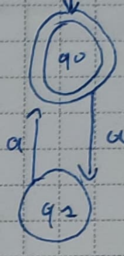
Donc L n'est pas régulier.

Ex 4 : 1) L_1 et L_2 sont réguliers car ils sont reconnus par des AFD.

L_1 :



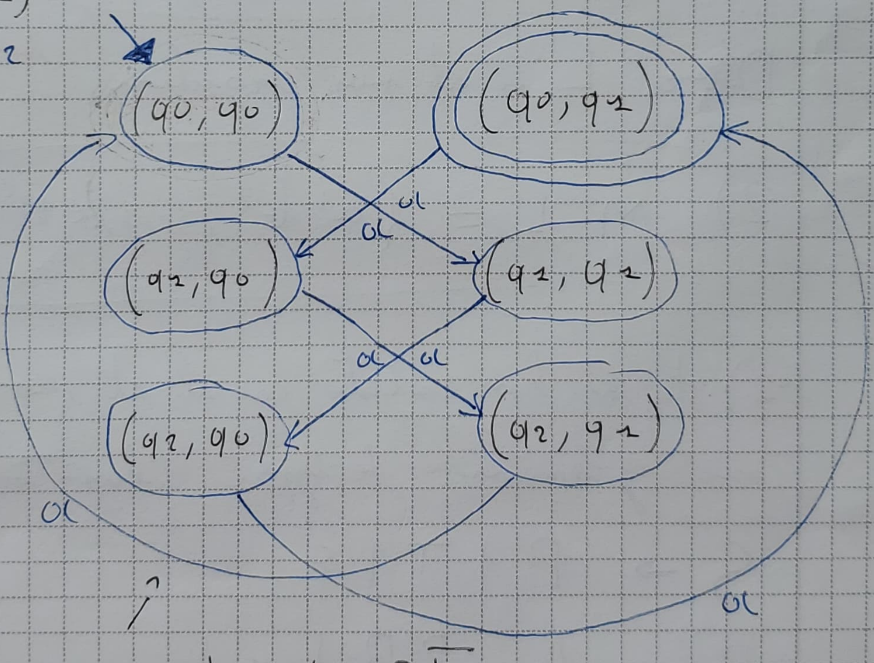
L_2 :



2

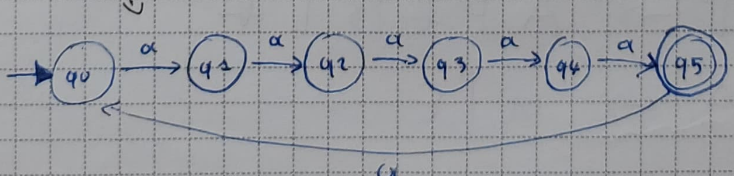
2)

L_2



4/6

AFD pour $L = L_1 \cap \overline{L_2}$



2

3) ~~$L = L((aaaaa)^*)$~~

5/6

Ex5 : 3) L n'est pas un language régulier

Théorème de pompage :

(Quasiment pareil que l'exercice 3)

Supposons que L est reconnu par un AFD, A à N états

On prends un mot $\omega \in L$, ici $\omega = a^N b^{N+1}$

tq $|\omega| > N$.

On décompose $\omega = x u y$, $x = a^{N-1}$ $u = a$ $y = b^N$

Il se trouve que $xu^2y \notin L$.

1/2 Donc L n'est pas régulier

pas si $u = a^2$

2 2) $M - L = \{a^i b^j, (i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i = j\}$

1) L est hors contexte car il est reconnu par une grammaire de type 2 (hors-contexte)

$S \to P \mid T \mid \varepsilon$

$P \to A a P B \mid a$

$T \to A P b B \mid b$

$A \to a \mid \varepsilon$

2 $B \to b \mid \varepsilon$