TD 1 - Signaux déterministes à temps continu

Exercice 1 : Signal à énergie finie

Calculer l'énergie du signal x(t) défini par $x(t) = e^{-at}.u(t)$ avec $a>0$ et u(t) fonction Heaviside (échelon) est à énergie finie.

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \forall\, t \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

exo 1 signal à énergie finie

$$x(t) = e^{-at} u(t) \Rightarrow E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-at\times 2} dt$$

$$E_x = \left[\frac{e^{-2at}}{-2a} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2a} \Rightarrow E_x \text{ est finie}$$

Exercice 2 : Transformation de Fourier

Tracer et calculer la transformée de Fourier des signaux suivants :

1. $x(t) = \cos(2\pi f_0 t).rect_T(t/T)$ avec $rect_T(t/T) = \begin{cases} 1, & \forall\, |t| \leq T/2 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$

1- $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\, rect_T(t/T)$

$$X(f) = TF\left[\cos(2\pi f_0 t)\, rect_T(t/T)\right]$$

$$= TF\left[\cos(2\pi f_0 t)\right] * TF\left[rect_T(t/T)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right\} * T\,sinc(\pi f T)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{T\,sinc(\pi T(f-f_0)) + T\,sinc(\pi T(f+f_0))\right\}$$

demo $TF\left[\cos(2\pi f_0 t)\right] = TF\left[\frac{e^{2\pi j f_0 t} + e^{-2\pi j f_0 t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left\{TF(e^{2\pi j f_0 t}) + TF(e^{-2\pi j f_0 t})\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\right\}$$

pour ce 1er exo démontrer TF(cos) ; TF($rect_T$) ; th. modulation

2. $y(t) = tri_T(t/T)$ avec $tri_T(t/T) = \begin{cases} t+T \text{ , } \forall \ -T \leq t \leq 0 \\ -t+T \text{ , } \forall \ 0 \leq t \leq T \\ 0 \text{ , ailleurs} \end{cases}$

2- $y(t) = tri_T(t/T)$ avec $tri_T(t/T) = \begin{cases} t+T & t \in [-T;0] \\ -t+T & t \in [0;T] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

$$Y(f) = \int_{-T}^{0} (t+T)\, e^{-2\pi j f t}\, dt + \int_{0}^{T} (-t+T)\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

on fait un IPP pour résoudre l'intégrale :

$$* \int_{-T}^{0} (t+T)\, e^{-2\pi j f t}\, dt = \left[(t+T) \times \frac{-1}{2\pi j f} e^{-2\pi j f t}\right]_{-T}^{0} - \int_{-T}^{0} \frac{-1}{2\pi j f} e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$u = t+T \quad u' = 1$

$v' = e^{-2\pi j f t} \quad v = \frac{-1}{2\pi j f} e^{-2\pi j f t}$

$$= \frac{-T}{2\pi j f} - \left[\frac{1}{(2\pi j f)^2} e^{-2\pi j f t}\right]_{-T}^{0} = \frac{-T}{2\pi j f} - \frac{1}{(2\pi j f)^2} + \frac{e^{2\pi j f T}}{(2\pi j f)^2}$$

$$* \int_{0}^{T} (-t+T)\, e^{-2\pi j f t}\, dt = \frac{T}{2\pi j f} + \frac{e^{-2\pi j f T}}{(2\pi j f)^2} - \frac{1}{(2\pi j f)^2}$$

$$Y(f) = \frac{e^{2\pi j f T} - 2 + e^{-2\pi j f T}}{(2\pi j f)^2} = \frac{\left(e^{\pi j f T} - e^{-\pi j f T}\right)^2}{(\pi f\, 2j)^2} = T^2 \operatorname{sinc}^2(\pi f T)$$

3. $z(t) = t.e^{-at}.u(t)$ avec $a > 0$ et $u(t)$ fonction échelon

3_ $z(t) = t\, e^{-at} u(t)$ avec $a > 0$

$$Z(f) = \int_0^{\infty} t\, e^{-at} e^{-2\pi j f t}\, dt = \int_0^{\infty} t\, e^{-(2\pi j f + a)t}\, dt$$

$$u = t \qquad u' = 1$$

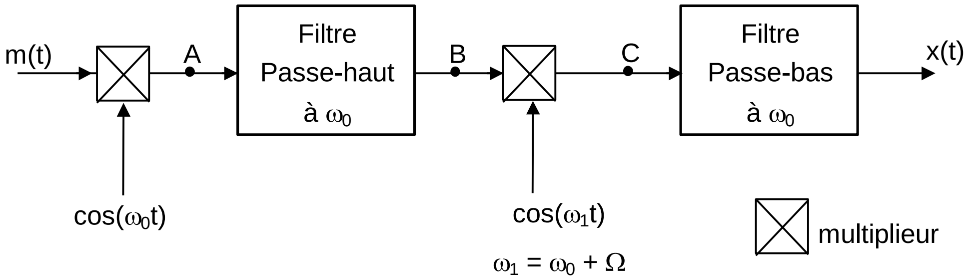
$$v' = e^{-(a+2\pi j f)t} \qquad v = \frac{-1}{a+2\pi j f} e^{-(a+2\pi j f)t}$$

$$Z(f) = \left[\frac{-t}{a+2\pi j f} e^{-(a+2\pi j f)t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-1}{a+2\pi j f} e^{-(a+2\pi j f)t}\, dt$$

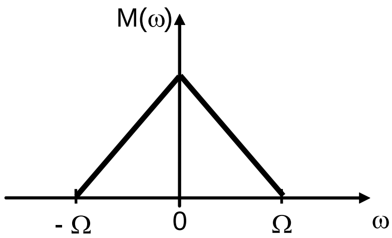
$$= -\left[\frac{1}{(a+2\pi j f)^2} e^{-(a+2\pi j f)t}\right]_0^{\infty} = \frac{+1}{(a+2\pi j f)^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\left(1+\frac{2\pi j f}{a}\right)^2}$$

Exercice 3

Pour assurer le secret des transmissions, il est possible de traiter le signal dans un système (parfois appelé brouilleur) représenté ci-dessous.



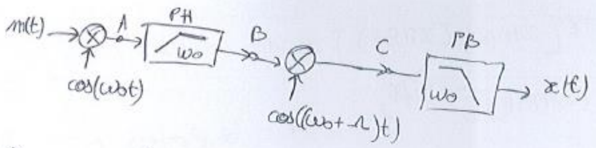
La figure suivante représente le spectre d'un signal m(t).



Analyser le système et dessiner le spectre du signal de sortie (hypothèse : $\omega_0 >> \Omega$).

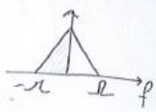
Le raisonnement fera apparaître le spectre des signaux en A, B, C et celui obtenu en sortie. Conclusion.

exo 3 : Brouilleur

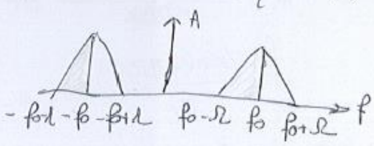


avec $\omega_0 >> \Omega$

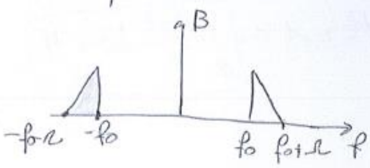
m(t) :



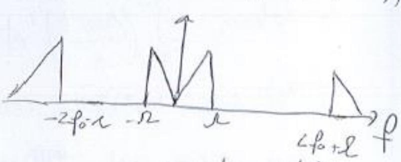
* $A = m(t) \times \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\{ \Pi(f-f_0) + \Pi(f+f_0) \}$



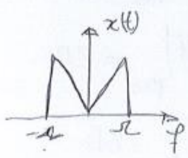
* B = passe haut à ω_0



* $C = B \times \cos((\omega_0+\Omega)t)$
$= \frac{1}{2}B(f-(f_0+\Omega)) + \frac{1}{2}B(f+(f_0+\Omega))$



x(t) = passe bas :



=> inversion des spectres positifs et négatifs

↳ principe du codage du son des 1er décodeur canal +

↳ exemple en TP

Exercice 4 : Modulation d'amplitude

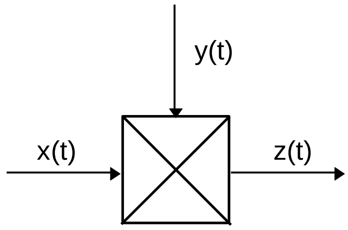
Soit un modulateur d'amplitude d'entrée x(t) et de sortie z(t) = x(t).y(t).

1. Montrer que TF[z(t)] = Z(f) = X(f - f_m) pour y(t) = $e^{j\omega_m t}$, avec $\omega_m = 2\pi f_m$.

2. Montrer qu'un démodulateur peut être un multiplieur par $e^{-j\omega_m t}$.

3. On module maintenant x(t) par un cosinus : z(t) = x(t).cos(ω_mt).

Montrer qu'une démodulation peut consister en un multiplieur par cos(ω_mt) suivi d'un filtre passe-bas.



exo 5 : Modulation d'amplitude

1- $z(t) = x(t) \cdot y(t) = x(t) \cdot e^{2\pi j f_m t}$

$Z(f) = TF[z(t)] = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, e^{2\pi j f_m t}\, e^{-2\pi j f t}\, dt$

$= \int_{\mathbb{R}} x(t)\, e^{-2\pi j (f - f_m) t}\, dt = X(f - f_m)$

2- démodulation : $z_d(t) = z(t) \times e^{-j 2\pi f_m t}$

$= x(t)\, e^{2\pi j f_m t}\, e^{-2\pi j f_m t} = x(t)$

3- soit $z(t) = x(t) \cos(\omega_m t)$

$Z(f) = \frac{1}{2} \{ x(f - f_m) + x(f + f_m) \}$

$z_d(t) = z(t) \times \cos(\omega_m t)$

$Z_d(f) = Z(f) * \frac{1}{2} \{ \delta(f - f_m) + \delta(f + f_m) \}$

$= \frac{1}{4} \{ x(f - f_m) + x(f + f_m) \} * \{ \delta(f - f_m) + \delta(f + f_m) \}$

$= \frac{1}{4} \{ x(f - 2f_m) + x(f) + x(f) + x(f + 2f_m) \}$

$= \frac{1}{2} \{ x(f) \} + \frac{1}{4} \{ x(f - 2f_m) + x(f + 2f_m) \}$

si on filtre les composantes à $2f_m$ on obtient $x(f)$
nous avons donc bien démodulé.

Exercice 5 : Traitement du signal et mathématiques

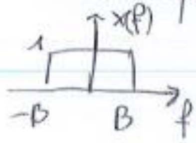
1. Déterminer la fonction x(t) dont la transformée de Fourier X(f) vaut 1 dans la bande [-B ; B] et zéro ailleurs.

2. En déduire la valeur des intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$$

exo 4 TDS et mathématiques

1- $x(t)$?



$$x(t) = \int_{-B}^{B} e^{2\pi j f t} df = \left[\frac{e^{2\pi j f t}}{2\pi j t}\right]_{-B}^{B}$$

$$= \frac{e^{2\pi j B t} - e^{-2\pi j B t}}{2\pi j t} = 2B\,\mathrm{sinc}(2\pi B t)$$

---

en déduire $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

on sait que $TF[2B\,\mathrm{sinc}(2\pi B t)] = 1 \quad \forall f \in [-B, B]$

$$\int_{\mathbb{R}} 2B\,\mathrm{sinc}(2\pi B t)\, e^{-2\pi j f t} dt = 1 \quad \forall f \in [-B ; B]$$

pour $f=0$: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cancel{2B} \sin(2\pi B t)}{2\pi B t} dt = 1$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi B t)}{\pi t} dt = 1$$

si on pose $B = 1/2\pi$: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(t)}{\pi t} dt = 1 \Leftrightarrow \boxed{\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt = \pi}$

en déduire : $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$

$$TF[(2B\,\mathrm{sinc}(2\pi B t))^2] = \mathrm{rect}_{2B}(f/2B) * \mathrm{rect}_{2B}(f/2B) = \mathrm{tri}_{2B}(f/2B)$$

$$= 2B$$

$$\int_{\mathbb{R}} (2B\,\mathrm{sinc}(2\pi B t))^2 e^{-2\pi j f t} dt \Big|_{f=0} = 2B$$

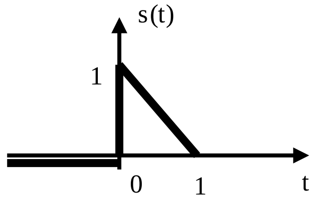
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(2\pi B t)}{\pi t}\right)^2 e^{-2\pi j f t} dt \Big|_{f=0} = 2B$$

$B = \frac{1}{2\pi}$: $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{\pi^2 t}\right) dt = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \pi$

TD 2 - Produit de convolution et applications

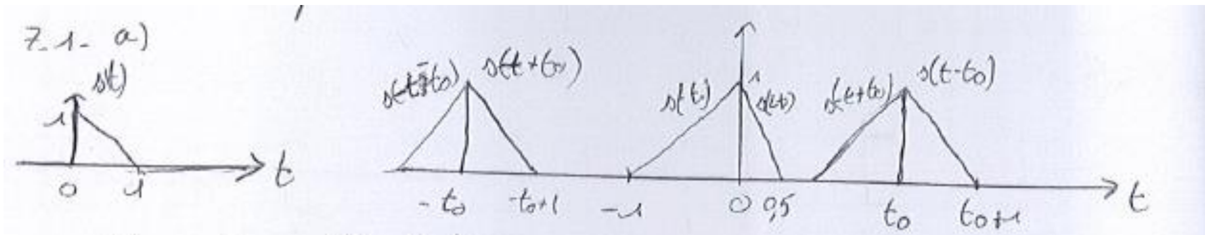
<u>Exercice 1</u> : Représentation des signaux

Soit le signal s(t) représenté sur la figure suivante :



a. Représenter l'allure des signaux suivants : $s(-t)$, $s(t-t_0)$, $s(t+t_0)$, $s(-t+t_0)$, $s(-t-t_0)$, $s(2t)$, $s(2t-t_0)$ avec $t_0>0$

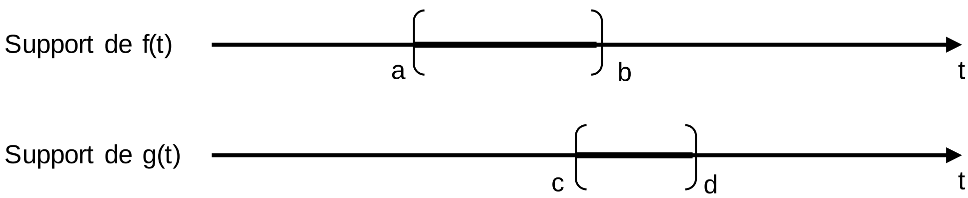
b. Soit le signal $v(t)=s(t-t_0)$, comment s'exprime $v(-t)$ en fonction de $s(t)$.



b) $v(t) = s(t-t_0) \Rightarrow v(-t) = s(-t-t_0)$

<u>Exercice 2</u> : Représentation du produit de convolution

Soient les deux signaux f(t) et g(t) dont les supports sont représentés sur la figure suivante :



a. Rappeler les expressions sous forme intégrale du produit de convolution $f(t)*g(t)$ et de la fonction d'intercorrélation $f(t)*g^*(-t)$

b. Déterminer et représenter le support sur τ de $g(t-\tau)$ et $g(\tau-t)$

7.2 a) $f(t) * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$

$$f(t) * g^*(-t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\, g^*(\tau - t)\, d\tau$$

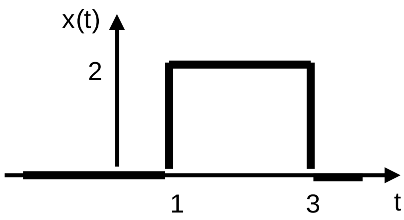
b) support de $g(t-\tau)$ et $g(\tau-t)$ avec $t \in \{c,d\}$

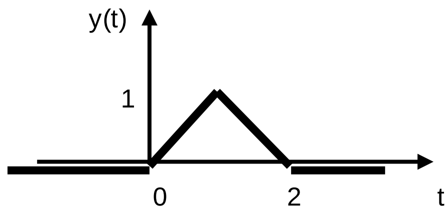
$$g(t-\tau) \Rightarrow \tau \in [t-d\,;\, t-c]$$

$$g(\tau-t) \Rightarrow \tau\ [c+t\,;\, d+t]$$

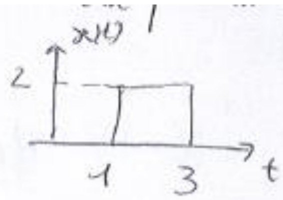
Exercice 3 : Calcul d'un produit de convolution

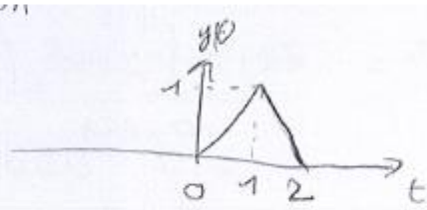
Soient les signaux x(t) et y(t) suivant :





a. Déterminer les expressions analytiques de x(t) et y(t)

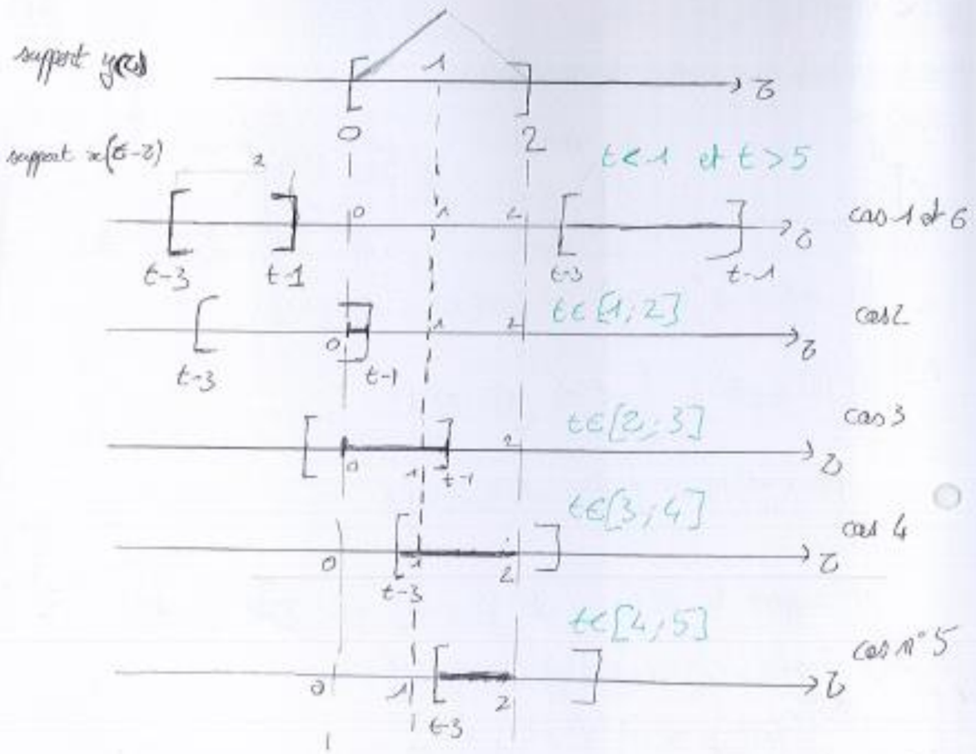




$$x(t) = 2 \times \mathrm{rect}_2\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

$$y(t) = \begin{cases} t & t \in [0,1] \\ 2-t & t \in [1;2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

b. Calculer le produit de convultion : $z(t) = x(t) * y(t)$



cas 1 et 6 : $z(t) = 0 \quad \forall t<1$ et $\forall t>5$

cas n°2 : $z(t) = \int_0^{t-1} 2\,\mathrm{rect}_2\left(\frac{\tau-2}{2}\right)\cdot \tau\, d\tau$

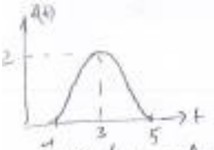
$= \int_0^{t-1} 2\tau\, d\tau = [\tau^2]_0^{t-1} = (t-1)^2 \quad \forall t\in[1,2]$

cas n°5 : $z(t) = \int_{t-3}^{2} 2\cdot(-\tau+2)\,d\tau = [-\tau^2+4\tau]_{t-3}^{2}$

$= -4+8+(t-3)^2-4(t-3) = 4+t^2-6t+9-4t+12$

$z(t) = t^2-10t+25 \quad \forall t\in[4,5]$

cas n°3 : $z(t) = \int_0^1 2\tau\, d\tau + \int_1^{t-1} 2(-\tau+2)\,d\tau = [\tau^2]_0^1 + [-\tau^2+4\tau]_1^{t-1}$

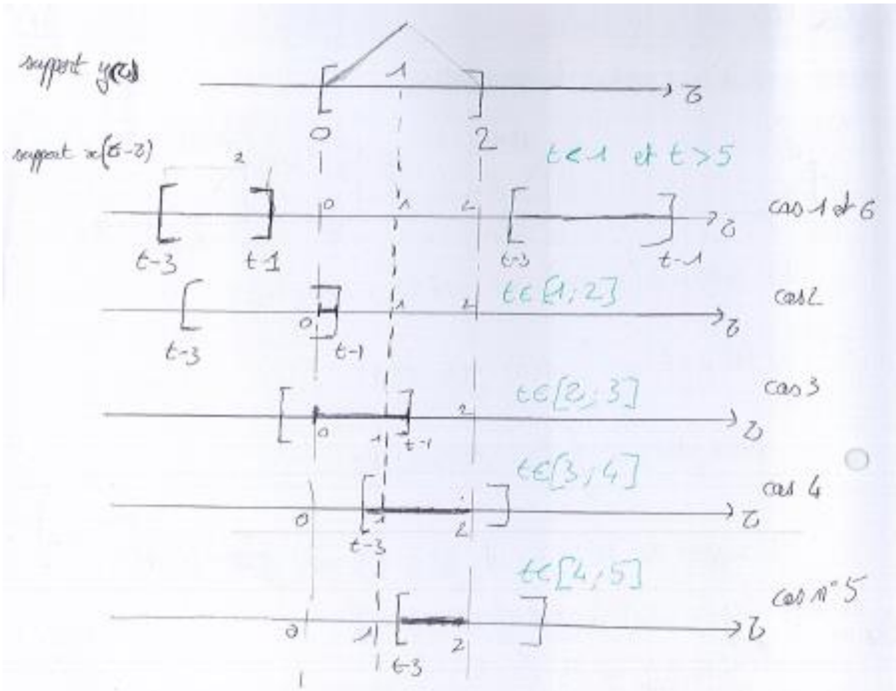


$= 1 + -(t-1)^2 + 4(t-1) + 1^2 - 4$

$= -2-t^2+2t-1+4t-4$

$= -t^2+6t-7 \quad \forall t\in[2,3]$

cas 4 : idem 3 : $z(t) = -t^2+6t-7 \quad \forall t\in[3,4]$



cas 1 et 6 = $z(t) = 0 \quad \forall t<1 \text{ et } \forall t>5$

cas n°2 = $z(t) = \int_0^{t-1} 2\,\text{rect}_2\left(\frac{\tau-2}{2}\right) \times \tau \, d\tau$

$= \int_0^{t-1} 2\tau \, d\tau = [\tau^2]_0^{t-1} = (t-1)^2 \quad \forall t \in [1,2]$

cas n°5 : $z(t) = \int_{t-3}^{2} 2\times(-\tau+2)\,d\tau = [-\tau^2+4\tau]_{t-3}^{2}$

$= -4+8+(t-3)^2-4(t-3) = 4+t^2-6t+9-4t+12$

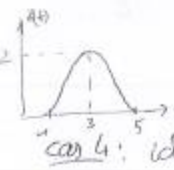
$z(t) = t^2-10t+25 \quad \forall t \in [4,5]$

cas n°3 = $z(t) = \int_0^1 2\tau\,d\tau + \int_1^{t-1} 2(-\tau+2)\,d\tau = [\tau^2]_0^1 + [-\tau^2+4\tau]_1^{t-1}$

$= 1 + -(t-1)^2 + 4(t-1) + 1^2 - 4$

$= -2 - t^2 + 2t - 1 + 4t - 4$

$= -t^2 + 6t - 7 \quad \forall t \in [2,3]$



cas 4 : idem 3 = $z(t) = -t^2+6t-7 \quad \forall t \in [3,4]$

Exercice 4 : Décrire et analyser un signal périodique

Soit le signal s(t) périodique de période T_0 tel que sur une demi-période, il est égal à une fonction sinusoïdale de fréquence F et nul sur l'autre demi-période. Nous supposons $F \gg 1/T_0$

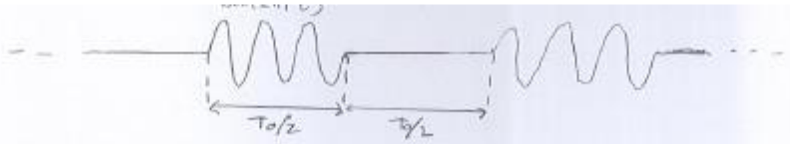
1. Représenter le signal s(t)

2. Déterminer l'expression analytique de s(t) en décomposant s(t) sous la forme de deux signaux élémentaires.

3. Déterminer l'expression de la transformée de Fourier de s(t) et représenter son module

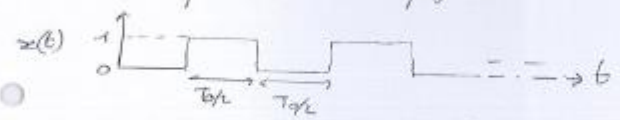
4. En électronique, où trouve-t-on le signal s(t) lorsque $F = 1/T_0$?

5. Dans quel autre type d'application un tel signal pourrait se rencontrer ?

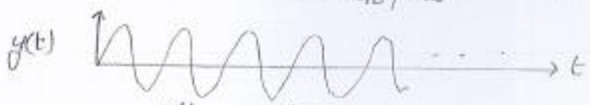


2_ $s(t)$ est périodique de période T_0.

c'est la multiplication de $x(t)$ et $y(t)$ suivant :



$$x(t) = \mathrm{rect}_{T_0/2}\left(\frac{t}{T_0/2}\right) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT_0)$$



$$y(t) = \sin(2\pi F t)$$

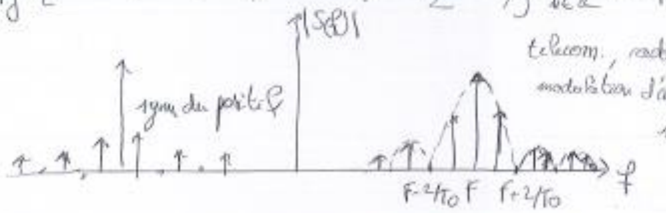
$$s(t) = \left[\mathrm{rect}_{T_0/2}\left(\frac{t}{T_0/2}\right) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT_0)\right] \times \sin(2\pi F t)$$

$$S(f) = TF\left[\mathrm{rect}_{T_0/2}(t/T_0/2) * \sum \delta(t - nT_0)\right] * TF\left[\sin 2\pi F t\right]$$

$$= \left[TF\left[\mathrm{rect}_{T_0/2}(t/T_0/2)\right] \cdot TF\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT_0)\right]\right] * TF\left[\sin 2\pi F t\right]$$

$$= \left[\frac{T_0}{2}\mathrm{sinc}\left(\pi f \frac{T_0}{2}\right) \cdot F_0 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(f - nF_0)\right] * \frac{1}{2j}\left\{\delta(f-F) - \delta(f+F)\right\}$$

$$= \frac{1}{4j}\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(f-F)T_0}{2}\right) - \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(f+F)T_0}{2}\right)\right\} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(f - nF_0)$$



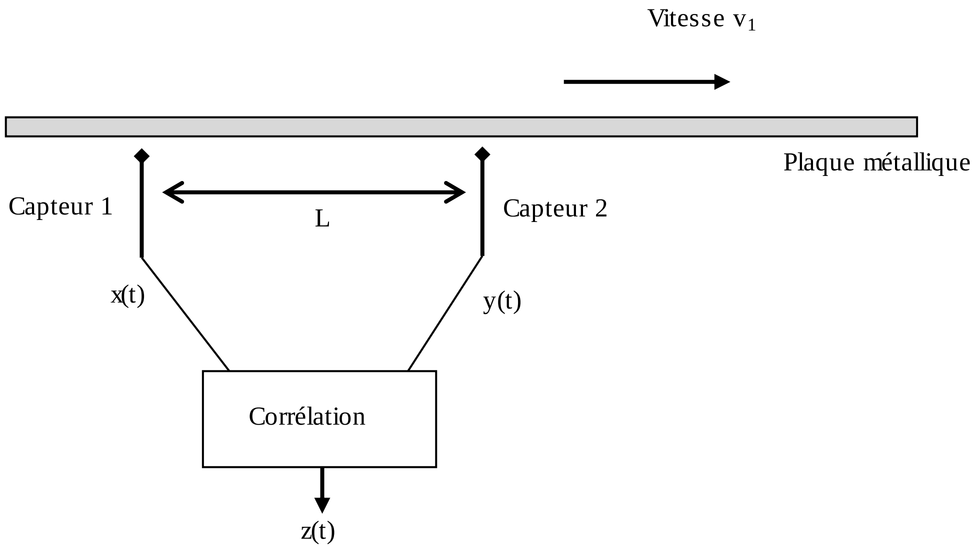
telecom., radar....

modulation d'amplitude

signal OOK

Exercice 5 : application du produit de corrélation à la mesure de vitesse

Soit le système suivant :



L'objectif est de mesurer la vitesse de la plaque métallique. Elle se déplace à une vitesse v1. Les capteurs 1 et 2 mesurent la granularité de la plaque. Les signaux x(t) et y(t) en sortie des capteurs sont envoyés à un système qui effectue le produit de corrélation. Le signal z(t) est le résultat de ce produit.
La distance L entre les deux capteurs est connue.

1. Quelle est la définition du produit d'autocorrélation Cxx(t) ? Que vaut son maximum et pour quel temps t est-il obtenu ?

$Cxx(t) = x(t) * x^*(-t)$; Maximum en 0 : $Cxx(0) = Ex$

2. Exprimer y(t) en fonction de x(t) :

$y(t) = x(t - T)$ avec T le temps pour passer du capteur 1 au capteur 2

3. Calculer z(t) en fonction de Cxx(t). $z(t) = Cxx(t - T)$

4. Comment est-il possible de déduire la vitesse de la plaque ? Le maximum de z(t) a lieu en t = T. Si l'on connait la distance entre les capteurs, on en déduit la vitesse de la plaque

TD3 - Eléments d'analyse spectrale

Exercice 1 : Signaux d'énergie finie

1. Etablir le théorème de Parseval.

1- signaux d'énergie finie :

1.1- théorème de Parseval : $\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df$

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)\, y^*(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, y^*(t)\, e^{2\pi j f t} dt \Big|_{f=0} = TF[x(t)\, y^*(t)]_{f=0}$$

$$= TF[x(t)] * TF[y^*(t)] \Big|_{f=0} = X(f) * Y^*(-f) \Big|_{f=0}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} X(u)\, Y^*(-(f-u))\, du \Big|_{f=0} = \int_{\mathbb{R}} X(u)\, Y^*(u)\, du$$

si $X = Y \Rightarrow$ nous avons $\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df$

2. Montrer que la densité spectrale d'un signal est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de ce signal ; que représente la fonction d'autocorrélation prise pour t = 0 ?

Mq : $d_{se} = |X(f)|^2 = TF[C_{xx}(t)]$

$$C_{xx}(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)\, x^*(\tau - t)\, d\tau = x(t) * x^*(-t)$$

$$TF[C_{xx}(t)] = TF[x(t) * x^*(-t)] = TF[x(t)] \cdot TF[x^*(-t)]$$

$$= X(f) \cdot X^*(f) = |X(f)|^2 = d_{se}$$

en $t=0$: $C_{xx}(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)\, x^*(\tau)\, d\tau = E_x$: énergie du signal.

---

3. Calculer directement l'énergie totale du signal porte $rect_{2a}(t / 2a)$.

Quelle est sa fonction d'autocorrélation ? La représenter.

En déduire l'énergie totale du signal porte.

1-3 - énergie totale de $x(t) = rect_{2a}(t/2a)$

$$\underline{E_x = 2a}$$

$$C_{xx}(t) = TF^{-1}[|X(f)|^2] = x(t) * x^*(-t)$$

$$= rect_{2A}\left(\frac{t}{2A}\right) * rect_{2A}\left(\frac{t}{2A}\right)$$

$$= tri_{4A}\left(t/4A\right)$$

$$C_{xx}(t=0) = tri_{4A}\left(\frac{0}{4A}\right) = 2A$$

<u>Exercice 2</u> : Signaux de puissance finie

1. Soit $s(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$.

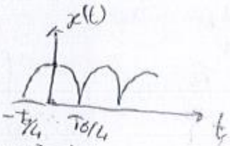
Pour les signaux périodiques de période Δ, la puissance moyenne est aussi définie par la relation :

$$P = \frac{1}{\Delta} \int_{(\Delta)} |s(t)|^2 \, dt$$

Déterminer la puissance moyenne de s(t). Déterminer le développement en séries de Fourier de s(t). En déduire son spectre et représenter son module. Calculer les coefficients de Fourier notés s_n de s(t) pour $|n| \leq 3$. En déduire $P_s = \sum_{n=-3}^{3} |s_n|^2$. Conclusion

2- signaux de puissance finie

2-1- soit $x(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$



$$\begin{cases} \cos^2 + \sin^2 = 1 \\ \cos^2 - \sin^2 = \cos 2\theta \end{cases}$$

<u>déf</u>: signal de période T_0 : $P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 \, dt$

$$P_x = 2f_0 \int_{-T/4}^{T/4} \cos^2(2\pi f_0 t) \, dt = 2f_0 \int_{-T_0/4}^{T_0/4} \cos^2(2\pi f_0 t) \, dt$$

or $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $f_0 \int_{-T/4}^{T_0/4} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta$

$$P_x = f_0 \int_{-T_0/4}^{T_0/4} (1 + \cos(4\pi f_0 t)) \, dt = f_0 \left[t + \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{4\pi f_0} \right]_{-T_0/4}^{T_0/4}$$

$$P_x = f_0\left[\frac{\sin(\pi f_0 T_0)}{4\pi f_0} - \frac{\sin(-\pi f_0 T_0)}{4\pi f_0}\right] + f_0\left[T_0/4 + T_0/4\right]$$

$$= f_0\left[0\right] + f_0\left[\frac{T_0}{2}\right]$$

$$P_x = 1/2$$

développement en série de Fourier :

$$C_n = \frac{1}{\Delta}\int_\Delta x(t)\, e^{-2\pi j \frac{n t}{\Delta}}\, dt$$

$$C_n = \frac{1}{T_0/2}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} |\cos(2\pi f_0 t)|\, e^{-2\pi j n t\left(\frac{1}{T_0/2}\right)} dt$$

$$-4\pi j n f_0 t$$

$$= \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-2\pi j f_0 t}}{2}\, e^{-2\pi j n \frac{2}{T_0} t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} e^{2\pi j f_0 t(1-2n)} + e^{-2\pi j f_0 t(1+2n)} dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\left[\frac{e^{2\pi j f_0 \frac{T_0}{4}(1-2n)} - e^{-2\pi j f_0 \frac{T_0}{4}(1-2n)}}{2\pi j f_0(1-2n)} - \frac{e^{-2\pi j f_0 \frac{T_0}{4}(1+2n)} - e^{2\pi j f_0 \frac{T_0}{4}(1+2n)}}{2\pi j f_0(1+2n)}\right]$$

$$= \frac{1}{T_0}\left[\frac{e^{\pi j \frac{1}{2}(1-2n)} - e^{-\frac{\pi}{2} j(1-2n)}}{2\pi j f_0(1-2n)} - \frac{e^{-\pi/2\, j(1+2n)} - e^{\pi/2\, j f_0(1+2n)}}{2\pi j f_0(1+2n)}\right]$$

$$e^{\pi/2\, j(1-2n)} = e^{\pi/2\, j}\, e^{-j\pi n} = j(-1)^n = e^{j\pi/2(1+2n)}$$

$$e^{-\pi/2\, j(1+2n)} = -j(-1)^n$$

$$= \frac{j(-1)^n + j(-1)^n}{2\pi j(1-2n)} + \frac{j(-1)^n + j(-1)^n}{2\pi j(1+2n)} = \frac{(-1)^n}{\pi(1-2n)} + \frac{(-1)^n}{\pi(1+2n)}$$

$$\boxed{C_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}}$$

On a donc :

$$s(t) = \sum \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} e^{4\pi j n f_0 t}$$

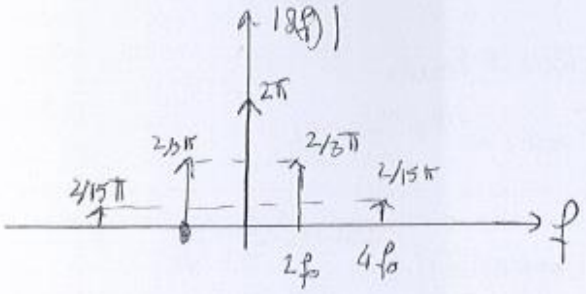
TF

$$S(f) = \sum \left(\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}\right) \delta(f - 2nf_0)$$

$\cos(2\pi f_0 t)\, \mathrm{rect}_{T_0/2}\, \sum \delta(t - nT_0/2)$

$2F_0 \sum \delta(f - n2F_0) * \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right] * \frac{T_0}{2}\,\mathrm{sinc}(\pi f\, T_0/2)$

$= \sum \delta(f - 2nF_0) \times \frac{1}{2}\left(\mathrm{sinc}\left(\pi \frac{f-f_0}{2f_0}\right) + \mathrm{sinc}\left(\pi \frac{f+f_0}{2f_0}\right)\right)$



$\sum_{n=-3}^{3} |S_n|^2 = 1/2 = P_s \Rightarrow$ on a la puissance du signal dans les 3 harmoniques

2. Donner l'expression de la fonction d'autocorrélation de s(t) en fonction des coefficients de Fourier. Calculer $C_S(0)$. Conclusion.

2.2 - fonction d'autocorrélation $s(t)$ en fonction de c_n

$$C_s(t) = s(t) * s^*(-t) = \frac{1}{T_0/2} \int_{(T_0/2)} s(\tau)\, s^*(\tau - t)\, d\tau$$

$$= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{4\pi j n f_0 \tau} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{4\pi j m f_0 (\tau - t)} \right)^* d\tau$$

$$= \frac{2}{T_0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_n c_m^* \int_{-T_0/4}^{T_0/4} e^{4\pi j f_0 \tau n}\, e^{-4\pi j m f_0 (\tau - t)} d\tau$$

$$= \underbrace{\frac{2}{T_0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_n c_m^* e^{4\pi j f_0 m t}}_{} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} e^{4\pi j f_0 (n-m)\tau} d\tau$$

$$= A \left[\frac{e^{4\pi j f_0 (n-m)\tau}}{4\pi j f_0 (n-m)} \right]_{-T_0/4}^{T_0/4} = A \times \frac{1}{4\pi j f_0 (n-m)} \left[e^{\pi j (n-m)} - e^{-\pi j (n-m)} \right]$$

$$= A \times \frac{\sin \pi (n-m)}{2\pi f_0 (n-m)\, 2j} = A \frac{1}{2 f_0} \underbrace{\operatorname{sinc}(\pi (n-m))}_{\substack{= 1 \text{ si } n = m \\ = 0 \text{ sinon}}}$$

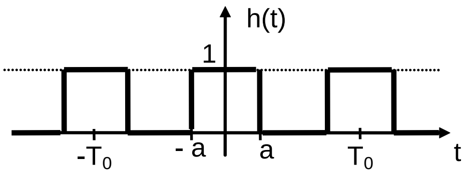
$$C_s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2}{T_0} |c_n|^2 e^{4\pi j f_0 n t} \times \frac{1}{2 f_0}$$

$$C_s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 e^{4\pi j f_0 n t}$$

pour $t = 0 \Rightarrow C_s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = P_s$

La fonction d'autocorrélation d'un signal périodique de période $\frac{1}{T} = F$ est $C_s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 e^{2\pi j n F t}$

3. Soit le signal périodique de période T_0 suivant :

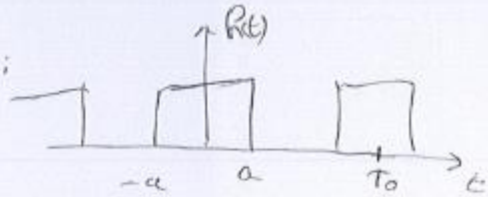


Donner l'expression analytique de h(t).

Déterminer H(f).

Calculer la puissance moyenne P_h de h(t) avec $a = T_0/4$.

2-3 - signal périodique T_0 :



$$h(t) = rect_{2a}\left(\frac{t}{2a}\right) * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_0)$$

$$H(f) = 2a \, sinc(\pi f 2a) \times F_0 \sum \delta(f - nF_0)$$

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-a}^{a} 1 \, dt = \frac{2a}{T_0} \Rightarrow 1/2 \text{ si } a = T_0/4$$

TD4 - Signaux déterministes à temps discret

Exercice 1 : Effet de l'échantillonnage

Tracer proprement (i.e. valeurs sur les axes) en justifiant le module des spectres suivant :

- TF[sin(2.π.2000.t)]
- TFD[sin(2.π.2000.n.Te)] , avec Fe = 1/Te = 5000 Hz ; N = 5000 points
- TFD[sin(2.π.2000.n.Te)] , avec Fe = 1/Te = 3000 Hz ; N = 3000 points

TF : transformée de Fourier ; TFD : transformée de Fourier discrète.

Je n'ai pas la correction, je la ferais d'ici septembre

Exercice 2 : Calcul de transformées en z

Calculer les transformées en z des suites suivantes en précisant leur domaine d'existence.

1. $\{ x(n) \} = \delta(n-k)$

2. $\{ x(n) \} = \begin{cases} 1, & \forall\, n \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$

3. $\{ x(n) \} = \begin{cases} \alpha^n, & \forall\, n \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$

4. $\{ x(n) \} = \begin{cases} n, & \forall\, n \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$

1- $x(n) = \delta(n-k)$

$$Tz(x(n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-k)\, z^{-n} = z^{-k} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

2- $x(n) = \begin{cases} 1 & \forall n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$$Tz\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{(convergence suite géométrique)}$$

d'Alembert : converge si $|z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > 1$

3- $x(n) = \alpha^{n} \quad \forall n \geq 0$

$$Tz\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^{n} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

d'Alembert : $|z| > |\alpha|$

4- $\{x(n)\} = n \quad \forall n \geq 0$

0 ailleurs

$$Tz = \sum_{n=0}^{\infty} n\, z^{-n} = 0 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \dots + \frac{n}{z^n}$$

$\cancel{\frac{(n+1)\, z^{-(n+1)}}{n\, z^{-n}}}$

$$= \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \dots\right)$$

ajoute 1, cela ne change rien

$$= \frac{1}{z} \frac{d}{dz^{-1}}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) = \frac{1}{z} \frac{d}{dz^{-1}}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right)$$

$\frac{2z^{-1}}{(z^{-1})^2}$

$$= \frac{1}{z}\left(\frac{d}{d\,1/z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\right)\right) = \frac{1}{z} \frac{d}{d\,1/z}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$$

$\frac{1}{1-1/z}$

$$= z^{-1} \times \frac{1}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\frac{1}{z(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{z^2(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Exercice 3 : Système discret

Considérons le système défini par l'équation aux différences :

$y(n) = x(n) + by(n - 1)$ avec la condition initiale $y(- 1) = a$.

1. Dans le cas où a = 0, déterminer la réponse de ce système à la suite $\{x(n)\} = \{x_1(n)\}$ définie par :

$$x_1(n) = 1 \text{ pour } n = 0$$
$$0 \text{ pour } n \neq 0$$

Comment est appelée cette réponse ? Est-elle finie ou infinie ? Donner la condition de stabilité et en déduire les valeurs que peut prendre b.

2. Toujours dans le cas où a = 0, déterminer la réponse à la suite $\{x(n)\} = \{x_2(n)\}$ définie par :

$$x_2(n) = 1 \text{ pour } n \geq 0$$
$$0 \text{ pour } n < 0$$

Tracer cette réponse et déterminer la valeur de y(n) quand n tend vers l'infini, dans le cas où la condition de stabilité est vérifiée.

3. En utilisant la transformée en z monolatérale, déterminer la réponse du système à la suite $\{x(n)\} = \{x_3(n)\}$ définie par :

$$x_3(n) = e^{2\pi jnF} \text{ pour } n \geq 0$$
$$0 \text{ pour } n < 0$$

On prendra b = - 0,8. Mettre en évidence le régime transitoire et la réponse en régime permanent.

4. Déterminer la fonction de transfert H(z) du système ; en déduire ses pôles et ses zéros, et la représentation fréquentielle associée (b = - 0,8).

5. Déterminer la réponse en fréquence H(f) du système. Donner le module et l'argument de H(f). Tracer le module |H(f)| et en déduire l'effet du système étudié.

TD1 : systèmes linéaires discrets invariants

exo 1 : Etude d'une cellule

* équation aux différences : $y(n) = x(n) + b\,y(n-1)$; $y(-1) = a$

1. si $a = 0$; $y(-1) = 0$

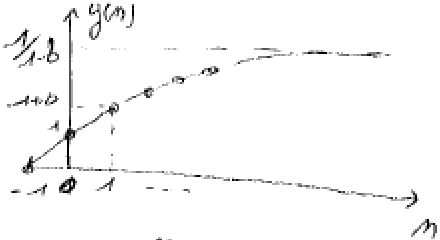
$x_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n \neq 0 \end{cases}$ réponse impulsionnelle ; elle est infinie ; RIF

$y(0) = 1$; $y(1) = b$; $y(n) = b^n$

condition de stabilité : $\sum_{n=0}^{\infty} y(n) < \infty \Rightarrow$ vrai si $|b| < 1$

le système est stable si $|b| < 1$

2. $a = 0$; $x_2(n) = \begin{cases} 1 & \forall n \geq 0 \\ 0 & \forall n < 0 \end{cases}$ réponse à un échelon



$y(0) = x(0) + b\,y(-1) = 1$

$y(1) = x(1) + b\,y(0) = 1 + b$

$y(2) = x(1) + b\,y(1) = 1 + b + b^2$

$y(n) = \sum_{n=0}^{n} b^n \Rightarrow$ quand $n \to \infty$ car $b < 1$ $\quad y(n) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b}$

3. soit $x_3(n) = \begin{cases} e^{2\pi j n f} & \forall n \geq 0 \\ 0 & \forall n < 0 \end{cases}$

$y(n) = x(n) + b\,y(n-1) \xrightarrow{T_{Zm}} T_Z\{y(n)\} = T_Z\{x(n)\} + b\,T_Z\{y(n-1)\}$

or : $T_{Zm}\{y(n)\} = Y^+(z)$

$T_{Zm}\{x(n)\} = X^+(z)$

$T_{Zm}\{y(n-1)\} = z^{-1} Y^+(z) + y(-1)$

$\hookrightarrow Y(z) = X(z) + b\,y(-1) + b z^{-1} Y(z)$ avec $y(-1) = a$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - bz^{-1}} + \frac{ab}{1 - bz^{-1}}$$

⚠ Tzm : $X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$

$$Tzm\{x(n-n_0)\} = z^{-n_0} X^+(z) + \sum_{n=1}^{n_0} x(-n) z^{-(n_0-n)}$$

$$Y^+(z) = \frac{X^+(z)}{1-bz^{-1}} + \frac{ab}{1-bz^{-1}}$$

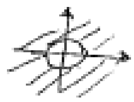
1 pôle d'ordre 1 en $z=b$. le système est stable si $|b|<1$ dans ce cas le pole est dans le cercle unité.

$$X^+(z) = Tzm\{e^{2\pi j n f}\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi j n f} z^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{2\pi j f} z^{-1}\right)^n$$

domaine de convergence : règle de d'Alembert

$$\left| \frac{e^{2\pi j(n+1)f} z^{-(n+1)}}{e^{2\pi j n f} z^{-n}} \right| < 1 \Leftrightarrow |z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$$

⇒ convergence est donc le extérieur du cercle de rayon unité :



$$X^+(z) = \frac{1}{1-e^{2\pi j f} z^{-1}} \quad ; \forall |z| > 1$$

$$Y^+(z) = \frac{1}{1-e^{2\pi j f} z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-bz^{-1}} + \frac{ab}{1-bz^{-1}}$$

$$Y^+(z) = \frac{z^2}{(z-e^{2\pi j f})(z-b)} + \frac{abz}{(z-b)} = \frac{z^2 + abz(z-e^{2\pi j f})}{(z-e^{2\pi j f})(z-b)}$$

décomposition en élément simple pour obtenir $y(n)$

pour $z=b$ = $C_b = \left[\frac{z+ab(z-e^{2\pi j f})}{z-e^{2\pi j f}}\right]_{z=b} = \frac{b+ab(b-e^{2\pi j f})}{b-e^{2\pi j f}}$

pour $z=e^{2\pi j f}$ = $C_{e^{2\pi j f}} = \left[\frac{z+ab(z-e^{2\pi j f})}{z-b}\right]_{z=e^{2\pi j f}} = \frac{e^{2\pi j f}}{e^{2\pi j f}-b}$

on a donc $h(t) = b^n \cdot \frac{b+ab(b-e^{2\pi j f})}{b-e^{2\pi j f}} + e^{2\pi j n f} \cdot \frac{e^{2\pi j f}}{e^{2\pi j f}-b}$

~~h(t) = b^{n} [...] + ...~~

$$h(f) = \underbrace{b^{n+1}\left[\frac{1}{b-e^{2\pi j f}} + a\right]}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{\frac{e^{2\pi j (n+1) f}}{e^{2\pi j f} - b}}_{\text{régime permanent}}$$

car $b < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} b^{n+1} = 0$

4- $Y(z) = X(z) + b\, z^{-1} Y(z)$

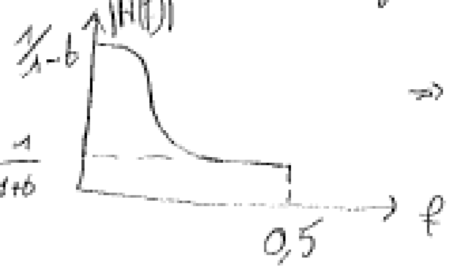
$\hookrightarrow H(z) = \frac{1}{1 - b z^{-1}} \Rightarrow H(f) = \frac{1}{1 - b e^{-2\pi j f}}$

$$|H(f)| = \sqrt{H H^*} = \sqrt{\frac{1}{1-be^{-2\pi j f}} \times \frac{1}{1-be^{2\pi j f}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1 - 2b\cos(2\pi f) + b^2}}$$

$$\angle H(f) = -\arctan\left(\frac{-b\sin(2\pi f)}{1 - b\cos(2\pi f)}\right) = \arctan\left(\frac{b\sin 2\pi f}{1 - b\cos(2\pi f)}\right)$$

la fréquence d'échantillonnage est normalisée donc $f \in [0;0,5]$



$\Rightarrow$ filtre passe-bas

TD5 – Filtres numériques

Exercice 1 : Filtres RIF élémentaires

1. Quelles sont les réponses fréquentielles d'amplitude et de phase ainsi que la réponse impulsionnelle du système régi par l'équation : y(n) = x(n) + x(n-L)

2. Mêmes questions pour le système suivant : y(n) = x(n) + 2. X(n-1) + x(n-2)

3. Quels sont les effets des filtres étudiés ? Les comparer et conclure.

1- $y(n) = x(n) + x(n-L)$

$\hookrightarrow Y(z) = (1 + z^{-L})\,X(z) \Rightarrow H(f) = 1 + e^{-2\pi i f L}$

$= e^{-\pi i f L}(e^{-\pi i f L} + e^{\pi i f L})$

$H(f) = 2e^{-\pi i f L}\cos(\pi f L)$

$|H(f)| = 2|\cos \pi f L|$

$\angle H(f) = -\pi f L$

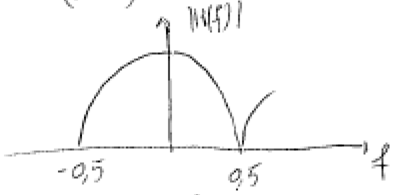
$h(t) = TF[H(f)] = 2\,TF[e^{-\pi j f L}] * TF[\cos(\pi f L)]$

$TF[e^{-\pi j f L}] = \delta(t - L/2)$

$TF[\cos(\pi f L)] = \frac{1}{2}\{\delta(t + L/2) + \delta(t - L/2)\}$

$h(t) = \delta(t) + \delta(t - L)$

pour $L = 1$:



2. $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$

$\downarrow TZ$

$Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z)$

↳ $H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$

$H(f) = 1 + 2e^{-2\pi j f} + e^{-4\pi j f}$

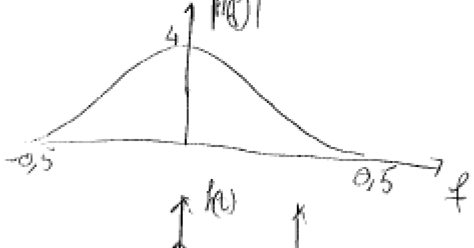
$= e^{-2\pi j f}(e^{2\pi j f} + 2 + e^{-2\pi j f}) = 2e^{-2\pi j f}(\cos(2\pi f) + 1)$

$|H(f)| = 2|1 + \cos 2\pi f|$ et $\angle H(f) = -2\pi f$ / phase linéaire.

$h(t) = TF[H(f)] = \delta(t-2) + \delta(t) + 2\delta(t-1)$

(3)

$h(t) = \delta(t-2) + \delta(0) + 2\delta(t-1)$



filtre passe bas : (2) + sélectif que (1) $\Rightarrow$ ↗ sélectivité ↗ nb d'échantillons $x(n)$

Sans différent

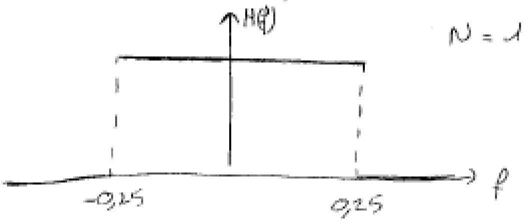
<u>Exercice 2</u> : Synthèse de filtre RIF par troncature de la réponse impulsionnelle

Le filtre à synthétiser est un filtre passe bas de fréquence de coupure normalisée égale à 0.25.

1. Calculer la réponse impulsionnelle de ce filtre en considérant que l'on souhaite obtenir un filtre à phase linéaire et que l'on souhaite considérer N échantillons. Faire l'application numérique pour N = 15 et représenter la réponse impulsionnelle.

2. Calculer le gain complexe du filtre synthétisé en faisant apparaître une somme de termes en cosinus. Le représenter et comparer au filtre désiré. Comment améliorer le filtre réalisé ?

ex1 Troncature de la réponse impulsionnelle



$N = 15$

1- calcul de la réponse impulsionnelle :

$$h(n) = TFd\left[H(f)\right] = \int_{\mathbb{R}} H(f)\, e^{2\pi j n f T_e}\, df$$

ici $T_e = 1 \Rightarrow h(n) = \int_{-0,25}^{0,25} 1.\, e^{2\pi j n f}\, df = \left[\frac{e^{2\pi j 0,25 n} - e^{-2\pi j 0,25 n}}{2\pi j n}\right]$

$$= \frac{e^{0,5\pi j n} - e^{-0,5\pi j n}}{\pi n\, 2j} = \frac{\sin(\pi/2\, n)}{\pi n} = \frac{1}{2}\, \mathrm{sinc}(\pi/2\, n)$$

La réponse est infinie, il faut garder 15 coefficients. pour avoir une phase linéaire, on ne garde que les coefficients de -7 à $+7$. Comme le filtre est non causal, il faut aussi de retarder la réponse impulsionnelle de 7 échantillons.

n	± 7	± 6	± 5	± 4	± 3	± 2	± 1	0
$h(n)$	$\frac{-1}{7\pi}$	0	$1/5\pi$	0	$-1/3\pi$	0	$1/\pi$	$1/2$

h(n) est paire

• calcul de $H(f)$ $\quad \left(TF(x(t-t_0)) = X(f)\, e^{-2\pi j f t_0} \right)$

$$H(f) = \sum_{n=-7}^{7} h(n)\, e^{-2\pi j n f} \times \underbrace{e^{-2\pi j f 7}}_{\text{translation pour la causalité}}$$

$$= -\frac{1}{7\pi} + \frac{1}{5\pi} e^{-4\pi j f} - \frac{1}{3\pi} e^{-8\pi j f} + \frac{1}{\pi} e^{-12\pi j f} + \frac{1}{2} e^{-14\pi j f}$$
$$+ \frac{1}{\pi} e^{-16\pi j f} - \frac{1}{3\pi} e^{-20\pi j f} + \frac{1}{5\pi} e^{-24\pi j f} - \frac{1}{7\pi} e^{-28\pi j f}$$

$\Rightarrow$ on met en facteur l'angle moitié

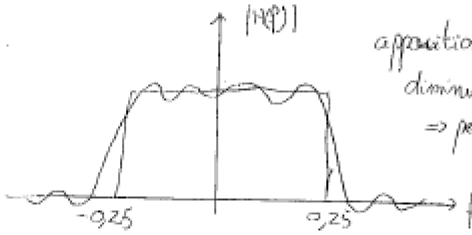
$$e^{-14\pi j f} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7\pi}\left(e^{14\pi j f} + e^{-14\pi j f}\right) + \frac{1}{5\pi}\left(e^{10\pi j f} + e^{-10\pi j f}\right) - \frac{e^{6\pi j f} + e^{-6\pi j f}}{3\pi} + \frac{e^{2\pi j f} + e^{-2\pi j f}}{\pi} \right)$$

$$H(f) = e^{-14\pi j f} \left(\frac{1}{2} - \frac{2\cos(14\pi f)}{7\pi} + \frac{2\cos(10\pi f)}{5\pi} + \frac{2\cos(6\pi f)}{3\pi} + \frac{2\cos(2\pi f)}{\pi} \right)$$

on a donc :

• $|H(f)| = \frac{1}{2} - \frac{2\cos(14\pi f)}{7\pi} + \frac{2\cos(10\pi f)}{5\pi} + \frac{2\cos(6\pi f)}{3\pi} + \frac{2\cos(2\pi f)}{\pi}$

• $\arg(H(f)) = -14\pi f \Rightarrow$ la phase est bien linéaire.



apparition d'ondulation et diminution de la sélectivité.
$\Rightarrow$ possibilité d'utiliser une fenêtre d'apodisation pour diminuer les oscillations.

Exercice 3 : Synthèse de filtre RII par approximation de Butterworth

On souhaite réaliser un filtre numérique passe-bas dont le gabarit $|H(\omega)|$ possède les caractéristiques suivantes :

- une atténuation maximale de 1 dB dans la bande passante : $0 \leq \omega \leq 0.18\pi$.
- une atténuation minimale de 30 dB dans la bande atténuée : $0.75\pi \leq \omega \leq \pi$.

Pour cela, on choisit de rechercher le filtre analogique de Butterworth d'ordre minimal qui par transformation bilinéaire sera associé à un filtre numérique possédant ces caractéristiques.

On rappelle qu'un filtre de Butterworth $H_a(\omega_a)$, d'ordre N et de fréquence de coupure ω_{ac}, est défini par la relation :

$$|H_a(j\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_{ac}}\right)^{2N}}$$

1. Proposer pour le filtre analogique un gabarit, qui selon cette procédure, correspond au gabarit du filtre numérique.

2. Déterminer les paramètres (ordre et fréquence de coupure) du filtre de Butterworth d'ordre minimal qui satisfait le gabarit proposé.

3. Donner la fonction de transfert Ha(p) du filtre de Butterworth stable correspondant (Te = 2s).

4. Calculer l'expression de H(z) de la fonction de transfert du filtre numérique déduit de Ha(p) par la transformation bilinéaire.

5. Tracer le gabarit souhaité et dessiner l'allure de $|H(f)|$

exo 2 : Synthèse par approximation de butterworth

- atténuation max de 1 dB dans la bande passante : $\omega \in [0 ; 0,18\pi]$
- atténuation min de 30 dB dans la bande atténuée : $\omega \in [0,75\pi , \pi]$

$$\boxed{\text{gabarit}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} H(p) \\ \text{butterworth} \end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} R(n) ; H(z) \\ \text{transf.} \\ \text{bilinéaire} \end{matrix}}$$

$$|H(j\omega_a)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_a}{\omega_{ac}}\right)^{2N}}$$

* la transformation bilinéaire modifie les fréquences : $z = \frac{1+p\,Te/2}{1-p\,Te/2}$

$$\Rightarrow p = \frac{2}{Te} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

* la fonction H(p) correspond à l'axe des imaginaires dans le plan p : $p = j\omega_a$

$$\boxed{\omega_a = \frac{2}{Te} \tan(\omega/2)}$$

* il faut définir les fréquences analogiques :
  - $\omega = 0,18\pi$: $\omega_{ap} = \frac{0,581}{Te}$
  - $\omega = 0,75\pi$: $\omega_{as} = \frac{2}{Te} \tan(\omega/2) = \frac{4,828}{Te}$

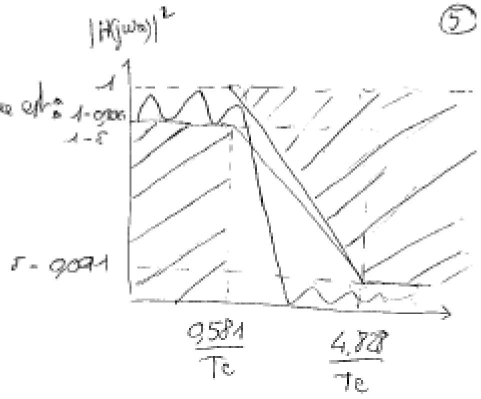
* définition des atténuations en linéaire :

$\Rightarrow -1\,dB = 20\log((1-\varepsilon)^{1/2}) \Rightarrow 0,206 = \varepsilon$

$\Rightarrow -30\,dB = 20\log(\delta^{1/2}) \Rightarrow \delta = 0,001$

ex 2 Butterworth (suite) ⑤

* le gabarit du filtre analogique est :



* cherchons l'ordre du filtre :

$$N = \frac{1}{2} \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon\delta}{(1-\varepsilon)(1-\delta)}\right)}{\ln\left(\frac{\omega ap}{\omega as}\right)} = 1,95$$

↳ on prend $\underline{\underline{N=2}}$

* fréquence de coupure :

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\left(\frac{\omega ap}{\omega ac}\right)^{2N}} = 1-\varepsilon \Rightarrow \omega ac = \omega ap \times \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{1/2N}$$

$$\omega ac = \frac{0,814}{Te}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\left(\frac{\omega as}{\omega ac}\right)^{2N}} = \delta \Rightarrow \omega ac = \omega as \times \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{1/2N}$$

$$\omega ac = \frac{0,859}{Te}$$

il faut choisir, le filtre ne peut pas passer par ces 2 points à la fois : on choisit $\omega ac = \frac{0,814}{Te}$

on recalcule $\omega as = \frac{4,53}{Te}$ ⇒ le gabarit est respecté.

on choisit les pôles complexes de $H(j\omega a)$ pour avoir un filtre stable

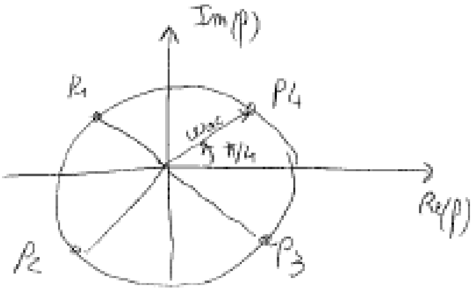
$$|H(j\omega a)|^2 = Ha(p)\, Ha(-p)\Big|_{p=j\omega a} = \frac{1}{1+\left(\frac{-jp}{\omega ac}\right)^{2N}}$$

le dén. s'annule pour :

$$\Leftrightarrow p = \omega ac\, e^{j\pi\left(\frac{2k+1}{2N}+1/2\right)}$$

$\hookrightarrow |p| = \omega ac = 0{,}4072$

$$\arg(p) = \pi/2 + \frac{(2k+1)\pi}{2N} \Rightarrow \theta = 3\pi/4\ ;\ 5\pi/4\ ;\ 7\pi/4\ ;\ \pi/4$$



on choisit P_1 et P_2 pour avoir un filtre stable.

$|p_1| = \omega ac \qquad |p_2| = \omega ac$

$\arg(p_1) = 3\pi/4, \qquad \arg(p_2) = 5\pi/4$

pour avoir un gain unitaire en $p=0$ car $\prod_N p_N = \omega ac^N$

finalement : $$Ha(p) = \frac{\omega ac^N}{(p_1-p)(p_2-p)}$$

$$Ha(p) = \frac{\omega ac^2}{\left(\omega ac\, e^{j3\pi/4}-p\right)\left(\omega ac\, e^{j5\pi/4}-p\right)} = \frac{\omega ac^2}{\omega ac^2 - p\,\omega ac\left(e^{j3\pi/4}+e^{j5\pi/4}\right)+p^2}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{p}{\omega ac}(-\sqrt{2})+\frac{p^2}{\omega ac^2}} = \frac{1}{1+3{,}475p+6{,}031p^2} \quad \left(H(j\omega)\right)$$

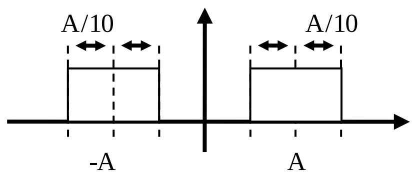
par transformation bilinéaire on obtient $H(z)$: $p = \frac{2}{Te}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

pour $Te = 2$

$$H(z) = \frac{1}{10{,}504} \times \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0{,}958z^{-1}+0{,}339z^{-2}}\ ;$$

TD6 – Signaux aléatoires

<u>Exercice 1</u> : Probabilité



Soit la densité de probabilité d'un signal binaire évoluant autour de deux valeurs A et –A auquel est ajouté un bruit d'amplitude A/10, de densité de probabilité uniforme faisant varier les niveaux A et –A.

1. Déterminer la fonction de répartition associée

2. Calculer P(x<A)

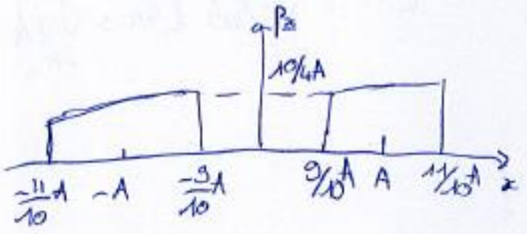
3. La valeur moyenne

4. Le moment quadratique

5. La variance

6. La fonction caractéristique

exo 1 : Probabilité



amplitude : $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\underline{x}}\, dx = 1$

$$\frac{4A}{10}\, x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{10}{4A}$$

1- fonction de répartition :

- $x < -\frac{11}{10}A$: $F_{\underline{x}} = 0$

- $x \in \left[-\frac{11}{10}A ; -\frac{9}{10}A\right]$: $F_{\underline{x}} = \int_{-\infty}^{x} \frac{10}{4A}\, du = \int_{-\frac{11}{10}A}^{x} \frac{10}{4A}\, du = \frac{10}{4A}x + \frac{11}{4}$

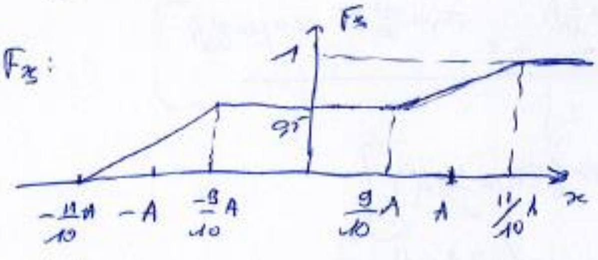
$x \in \left[-\frac{9}{10}A ; \frac{9}{10}A\right]$: $F_{\underline{x}} = 1/2$

$x \in \left(\frac{9}{10}A ; \frac{11}{10}A\right]$: $F_{\underline{x}} = \int_{-\infty}^{x} p_{\underline{x}}\, dx = \int_{\frac{9}{10}A}^{x} \frac{10}{4A}\, du + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{10}{4A}x - \frac{9}{4}$

$$= \frac{10}{4A}x - \frac{7}{4}$$

$x > \frac{11}{10}A$: $F_{\underline{x}} = 1$

$F_{\underline{x}}$:



2- calculer $P(x < A)$: $P(x < A) = F_{\underline{x}}(x = A) = 3/4$

3- valeur moyenne : $\mu_{\underline{x}} = \int x\, p_{\underline{x}}\, dx = \int_{-\frac{11}{10}A}^{-\frac{9}{10}A} x \frac{10}{4A}\, dx + \int_{\frac{9}{10}A}^{\frac{11}{10}A} \frac{10}{4A} x\, dx$

$$= \left[\frac{10}{4A}\frac{x^2}{2}\right]_{-11/10A}^{-\frac{9}{10}A} + \left[\frac{10}{4A}\frac{x^2}{2}\right]_{+9/10A}^{11/10A}$$

$$= \frac{10}{8A}\left[\left(\frac{9}{10}A\right)^2 - \left(\frac{11}{10}A\right)^2 + \left(\frac{11}{10}A\right)^2 - \left(\frac{9}{10}A\right)^2\right] = \underline{\underline{0}} \qquad E[x] = 0$$

* moment quadratique :

$$E[x^2] = \int_{-\frac{11}{10}A}^{-\frac{9}{10}A} \frac{10}{4A} x^2 \, dx + \int_{\frac{9}{10}A}^{\frac{11}{10}A} \frac{10}{4A} x^2 \, dx = \left[\frac{10}{4A}\frac{x^3}{3}\right]_{-11/10A}^{-9/10A} + \left[\frac{10}{4A}\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{9}{10}A}^{11/10A}$$

$$= \frac{1204}{1200} A^2 = \frac{301}{300} A^2 \simeq A^2$$

* variance :

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - \mu_x^2 \simeq A^2$$

* fonction caractéristique :

$$\varphi_{\underline{x}}(u) = TF\left[p_{\underline{x}}(x)\right] = \int_{-\frac{11}{10}A}^{-\frac{9}{10}A} \frac{10}{4A} e^{-2\pi j u x} dx + \int_{\frac{9}{10}A}^{\frac{11}{10}A} \frac{10}{4A} e^{-2\pi j u x} dx$$

$$= \frac{10}{4A} \cdot \frac{1}{(-2\pi j u)} \left[\left[e^{-2\pi j u x}\right]_{-\frac{11}{10}A}^{-\frac{9}{10}A} + \left[e^{-2\pi j u x}\right]_{\frac{9}{10}A}^{\frac{11}{10}A} \right]$$

$$= \frac{10}{-8\pi j u}\left[e^{2\pi j u \frac{9}{10}A} - e^{2\pi j u \frac{11}{10}A} + e^{-2\pi j u \frac{11}{10}A} - e^{-2\pi j u \frac{9}{10}A}\right]$$

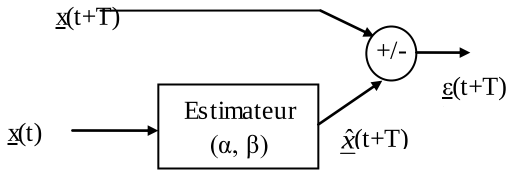
$$= \frac{-10}{4A\pi u} \cdot \left[\frac{e^{2\pi j u \frac{9}{10}A} - e^{-2\pi j u \frac{9}{10}A} + e^{-2\pi j u \frac{11}{10}A} - e^{2\pi j u \frac{11}{10}A}}{2j}\right]$$

$$= -\frac{10}{4\pi A u}\left[\sin\left(2\pi u \frac{9}{10}A\right) - \sin\left(2\pi u \frac{11}{10}A\right)\right]$$

$$= \frac{-10}{2}\left[\frac{9}{10}\frac{\sin\left(2\pi u \frac{9}{10}A\right)}{2\pi\frac{9}{10}Au} - \frac{11}{10}\frac{\sin\left(2\pi A u \frac{11}{10}\right)}{2\pi\frac{11}{10}Au}\right]$$

$$= -\frac{9}{2}\operatorname{sinc}\left(2\pi u \frac{9}{10}A\right) + \frac{11}{2}\operatorname{sinc}\left(2\pi A u \frac{11}{10}\right)$$

<u>Exercice 2</u> : Estimation Prédiction



Soit $\underline{x}(t)$ un signal aléatoire réel, centré, stationnaire, de fonction de corrélation $Cx(\tau)$.

On considère une estimation $\hat{\underline{x}}(t + T)$ de $\underline{x}(t + T)$, que l'on suppose fonction linéaire de $\underline{x}(t)$:

$$\hat{\underline{x}}(t + T) = \alpha\, \underline{x}(t) + \beta.$$

On appelle $\underline{\varepsilon}(t + T)$ l'erreur d'estimation sur $\underline{x}(t + T)$: $\underline{\varepsilon}(t + T) = \underline{x}(t + T) - \hat{\underline{x}}(t + T)$.

1. Déterminer le scalaire β qui satisfait la relation : $E[\underline{\varepsilon}(t + T)] = 0$.

2. Déterminer le scalaire α qui minimise la variance de l'erreur d'estimation $\varepsilon(t + T)$ en considérant β calculé précédemment.

3. On note $var^*[\underline{\varepsilon}(t + T)]$ la variance de l'erreur d'estimation obtenue en remplaçant dans l'expression de $var[\underline{\varepsilon}(t + T)]$ les paramètres α et β par leurs valeurs calculées précédemment. Soit $\rho(T)$ le coefficient de corrélation entre $\underline{x}(t)$ et $\underline{x}(t + T)$: $\rho(T) = \dfrac{C_X(T)}{C_X(0)}$.

Exprimer $var^*[\underline{\varepsilon}(t + T)]$ en fonction de $\rho(T)$ et de $Cx(0)$. Que vaut $var^*[\underline{\varepsilon}(t + T)]$ pour $T = 0$ et $T = \infty$

exercice 2 : Estimation - Prédiction

soit $\underline{x}(t)$ = réel, centré, stationnaire, $C_{\underline{x}}(\tau)$

estimation de $\underline{x}$: $\hat{\underline{x}}(t+T) = \alpha x(t) + \beta$

erreur d'estimation : $\underline{\varepsilon}(t+T) = \underline{x}(t+T) - \hat{\underline{x}}(t+T)$

1- determiner B tq $E(\varepsilon(t+T)) = 0$

$$E[\varepsilon(t+T)] = E[\underline{x}(t+T) - \hat{\underline{x}}(t+T)]$$
$$= E[\underline{x}(t+T)] - E[\hat{\underline{x}}(t+T)]$$
$$= E[\underline{x}(t+T)] - \alpha E[\underline{x}(t)] - E[\beta]$$

le PA est centré : $E[\underline{x}(t)] = 0$

stationnaire : $E[\underline{x}(t)] = cte\ \forall t \Rightarrow E[\underline{x}(t+T)] = 0$

$$E[\varepsilon] = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

2- calculer α qui minimise l'erreur : $\varepsilon(t+T)$

calculons la variance et trouvons son minimum :

$$\sigma_\varepsilon^2 = E[\varepsilon^2] - \underbrace{E[\varepsilon]}_{=0}{}^2$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = E[\underline{\varepsilon}^2] = E[(\underline{x}(t+T) - \hat{\underline{x}}(t+T))^2]$$
$$= \cancel{E[\underline{x}(t+T)^2]} = E[(\underline{x}(t+T) - \alpha \underline{x}(t))^2]$$
$$= E[x^2(t+T) - 2\alpha\, \underline{x}(t)\, \underline{x}(t+T) + \alpha^2 \underline{x}^2(t)]$$
$$= E[x^2(t+T)] - 2\alpha E[x(t)\, \underline{x}(t+T)] + \alpha^2 E[\underline{x}^2(t)]$$
$$= E[x^2(t)] - 2\alpha E[\underline{x}(t)\, \underline{x}(t+T)] + \alpha^2 E[\underline{x}^2(t)]$$

car stationnaire

$$= C_{\underline{x}}(0) - 2\alpha \underbrace{C_{\underline{x}}(-T)}_{= C_{\underline{x}}(T)} + \alpha^2 C_x(0) = (1+\alpha^2)\, C_x(0) - 2\alpha\, C_x(T)$$

on cherche : $\dfrac{d\sigma_\varepsilon^2}{\partial \alpha} = 0 = 2\alpha C_x(0) - 2C_x(T) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{C_{\underline{x}}(T)}{C_{\underline{x}}(0)}$

minimum ? $\frac{\partial^2 \sigma_\varepsilon^2}{\partial^2 \alpha} = 2C_x(0) > 0 \Rightarrow$ c'est bien un minimum

3_ $Var^*[\varepsilon(t+T)] = (1+\alpha^2)\, C_x(0) - 2\alpha\, C_x(T)$

ici $\alpha = \rho(T) \Rightarrow (1+\rho^2(T))\, C_x(0) - 2\rho(T)\, C_x(T)$

$= (1+\rho^2(T))\, C_x(0) - 2\rho^2(T)\, C_x(0)$

$= C_x(0)\left[1 \cancel{+} - \rho^2(T)\right]$

$T \to 0 = \rho(T) \to 1$ donc $Var^* \to 0$

$T \to \infty = \rho(T) \to 0$ donc $Var^* \to C_x(0)$

$C(T) \to 0$ car signal fini t fini.

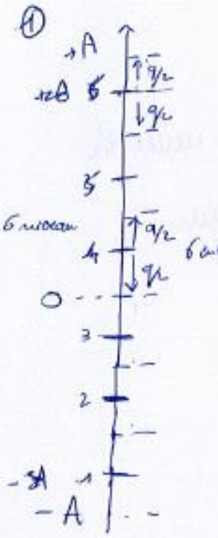
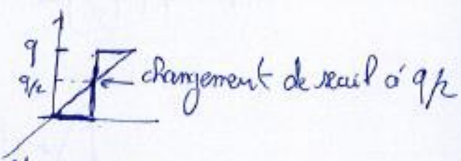
<u>Exercice 3</u> : Effet de la quantification sur le RSB

Soit x(t) un signal aléatoire de densité de probabilité uniforme, centré, de puissance P_s évoluant sur la plage (–A, A). On échantillonne x(t) à l'aide d'un CAN à N bits avec une quantification par arrondi (c'est-à-dire arrondi au plus proche)

Nous supposons que chaque échantillon est affecté par un bruit blanc de loi uniforme dans l'intervalle -q/2 et +q/2 avec q le pas de quantification. On note P_b sa puissance.

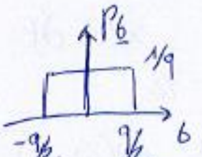
1. Déterminer le pas de quantification q en fonction de A et illustrer le principe de quantification par arrondi.
2. Représenter la densité de probabilité du bruit et en déduire la puissance P_b en fonction de N et de A.
3. Déterminer le RSB du signal quantifié. Quel est le gain par bit de codage supplémentaire ?
   (Info : 10.log(2) = 3)

soit $x(t)$; gaussien, centré, de puissance P_s, entre $\pm A$
uniforme

①  quantification par arrondi : 

nous avons 2^N niveau et 2^N intervalles

le pas de quantification : $q = \frac{2A}{2^N}$

② densité uniforme entre $-q/2$ et $q/2$: 

$$E[b^2] = P_b = \int_{-q/2}^{q/2} b^2 P_b \, db = \left[\frac{b^3}{3q}\right]_{-q/2}^{q/2} = \frac{1}{3}\left[q^2/8 + q^2/8\right] = \frac{q^2}{12}$$

or $q = \frac{2A}{2^N} \Rightarrow P_b = \frac{(2A/2^N)^2}{12} = \frac{A^2}{3 \times 2^{2N}}$

3_ $RSB = 10 \log\left(\frac{P_s}{P_b}\right)$ or $P_s = E[s^2] = \frac{A^2}{3} = \int_{-A}^{+A} p_0 \, s^2 \, ds$

donc $RSB = 10 \log\left(\frac{A^2/3}{A^2/3 \times 2^{2N}}\right) = 10 \log 2^{2N}$

$= 20 \log(2) \times N$

$$\boxed{RSB = 6N}$$

gain de $\underline{6 \text{ dB}}$ par bit.

<u>Exercice 4</u> : technique d'« Averaging »

Une technique pour **diminuer** l'effet du bruit est d'effectuer un « averaging » sur un nombre m d'occurrences. Cette technique fonctionne si le signal est répétitif et si le bruit n'est pas corrélé et centré. Montrer qu'en sommant m fois le signal bruité, il est possible d'améliorer le RSB.

5_ averaging

* signal répétitif : $\sum_{i=1}^{m} x_i(t) = m\, x_i(t)$

* signal/bruit non corrélés : $E[x(t)\, b(t)] = E(x(t))\, E[b(t)]$
* bruit non corrélé et centré
* nous avons : $s_m(t) = \sum_{i=1}^{m} (x_i(t) + b_i(t))$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t) = m\, x(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)$$

* calculons $E[s_m^2(t)]$:

$$E[s_m^2(t)] = E\left[\left(m\, x(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)\right)^2\right] = E\left[m^2 x^2(t) + 2m\, x(t) \sum_{i=1}^{m} b_i(t) + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i(t)\right)^2\right]$$

$$= E[m^2 x^2(t)] + E\left[2m\, x(t) \sum_{i=1}^{m} b_i(t)\right] + E\left[\sum_{i=1}^{m} (b_i(t))^2\right]$$ indépendant

$$= m^2 E[x^2(t)] + 2m\, E[x(t)]\, E\left[\sum b_i(t)\right] + \sum_i E[b_i^2]$$

$$= m^2 E(x^2(t)) + 0 + m\, E[b^2]$$

$$= m^2 P_s + m\, \sigma_b^2$$

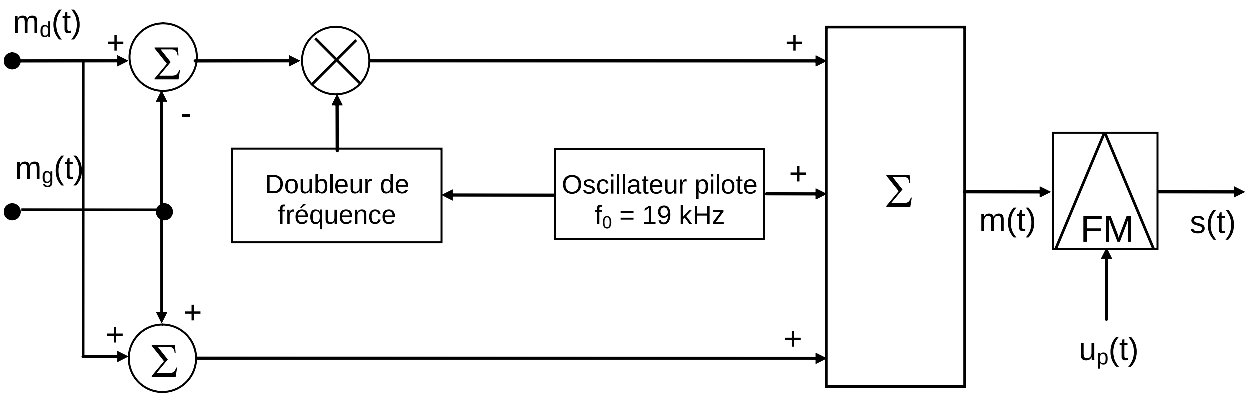
le RSB : $\dfrac{m^2 P_s}{m\, \sigma_b^2} = m \dfrac{P_s}{\sigma_b^2} = m\, RSB_1$

$$\begin{cases} m = 10 \Rightarrow \text{gain de } 10\,\text{dB} \\ m = 100 \Rightarrow \text{gain de } 20\,\text{dB} \end{cases}$$

Exercices supplémentaires

Exercice I : Modulateur-Démodulateur stéréophonique FM

1. On considère le modulateur FM stéréophonique schématisé sur la figure suivante :



où :

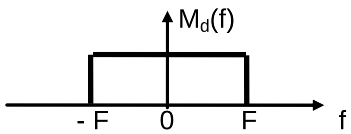
* $m_d(t)$ et $m_g(t)$ représentent respectivement les voies de droite et de gauche du signal stéréophonique, de largeur de bande limitée à F = 15 kHz et de spectre $M_d(f)$ et $M_g(f)$;

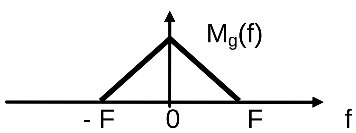
* Σ est l'opérateur somme algébrique de signaux analogiques ;

* X est l'opérateur multiplication de signaux analogiques.

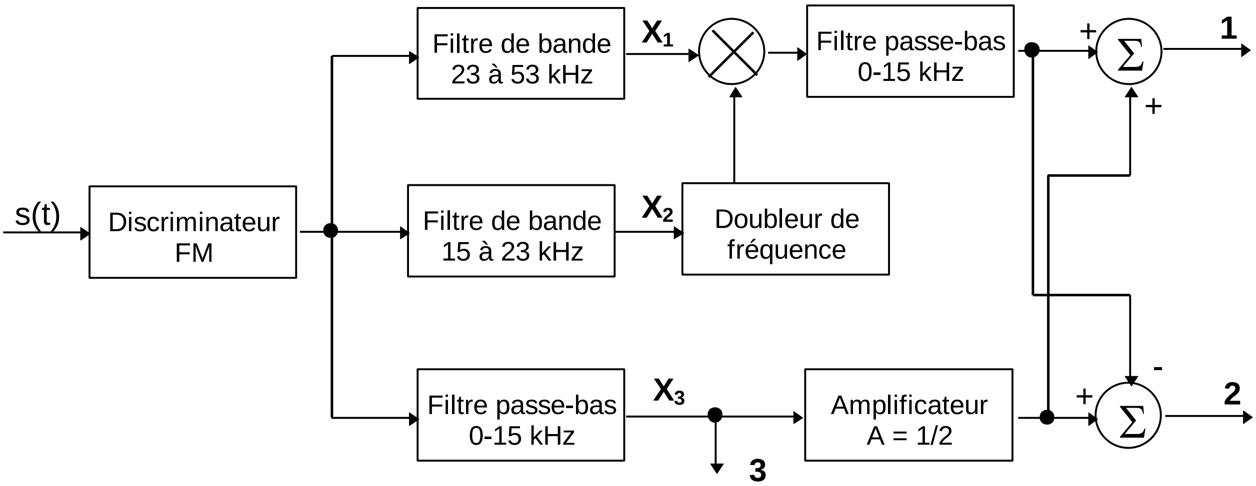
L'oscillateur pilote fournissant un signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ où f_0 = 19 kHz, déterminer le spectre M(f) du signal modulant m(t) appliquer au modulateur FM.

Représenter graphiquement M(f) en adoptant les représentations schématiques suivantes :





2. On considère le démodulateur FM stéréophonique schématisé sur la figure suivante :



Nous n'étudions pas ici la modulation de fréquence. Aussi, nous admettons que l'opération {modulation + transmission + démodulation} est une opération unité, c'est-à-dire que l'on retrouve le signal m(t) en sortie du discriminateur FM.

Quels sont les spectres des signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ observés en sortie des trois filtres dont les bandes passantes, dans le domaine des fréquences positives, sont précisées sur le schéma ?

Déterminer les expressions des signaux observés aux sorties notées 1, 2 et 3 sur le schéma du démodulateur.

Quel est l'intérêt de la sortie 3 ?

Exercice II : Détection des discontinuités par intercorrélation

On considère les signaux suivants :

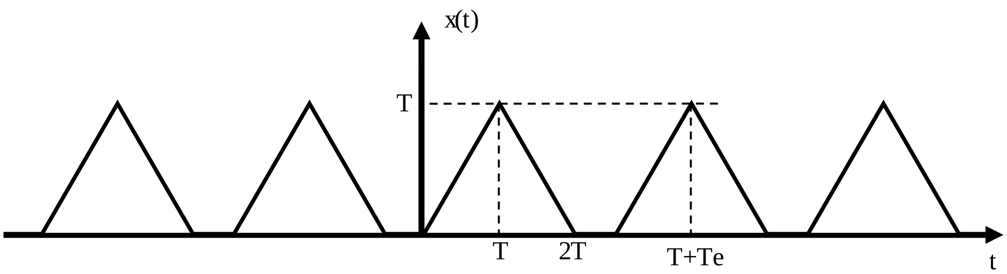
$$x(t) = \begin{cases} 0 \text{ , si } t \notin [0 ; 6] \\ 1 \text{ , si } t \in [0 ; 4] \\ -1 \text{ , si } t \in]4 ; 6] \end{cases} \qquad y(t) = \mathrm{rect}_1(t - 0{,}5).\sin(2\pi F t) \text{ , } F = 1 \qquad z(t) = y(t/4)$$

Calculer et représenter les deux fonctions d'intercorrélation $C_{xy}(t)$ et $C_{xz}(t)$.

Préciser laquelle des deux fonctions, y(t) ou z(t), révèle le mieux, par l'intermédiaire de sa fonction d'intercorrélation, la discontinuité contenue dans x(t).

Exercice III : Spectre d'un signal périodique

1. Quelle est la particularité du spectre d'un signal périodique.
2. Soit le signal x(t) périodique de période Te suivant :



Calculer le spectre X(f) du signal en utilisant la transformée de Fourier.
3. Tracer X(f) et x(t) pour Te = 2T

4. Tracer X(f) et x(t) pour Te = T

Exercice IV : Etude de systèmes discrets

Soit le système décrit par l'équation aux différences :

$$y(n) = x(n) + 0{,}2\, y(n-1) + 0{,}2\, x(n-1) \text{ avec } y(-1) = c$$

1. Pour c=0, calculer la réponse impulsionnelle h(n) et représenter-la.

2. Pour c=0, calculer la fonction de transfert en fréquence H(f) et tracer son module |H(f)|. De quel type de filtre s'agit-il ?

3. Dans le cas où c est non nul, calculer, en utilisant la transformée en z monolatérale, la réponse du système pour une entrée {x(n)} tel que:

$$x(n) = e^{2\pi jnF} \text{ pour } n \geq 0$$
$$x(n) = 0 \text{ pour } n < 0$$

Faire apparaître le régime transitoire et le régime permanent.

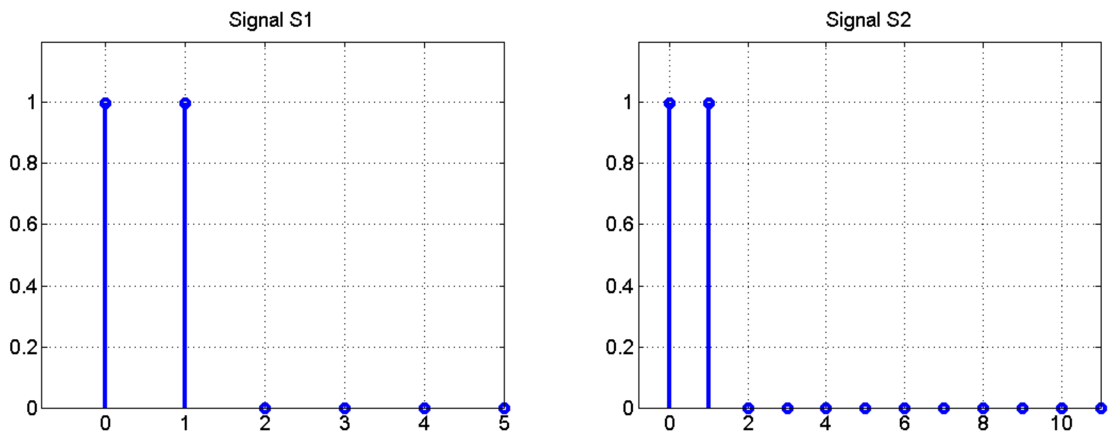
Exercice V : Transformée de Fourier Discrète

La figure 1 représente différents signaux discrets S1, S2 et S3 échantillonnés à la fréquence de 1200 Hz.

Les modules de leur transformée de Fourier discrète, TFDS1, TFDS2 et TFDS3 sont présentés sur la figure 2.

Les abscisses des courbes représentent les numéros des échantillons.

1. Montrer que le module de la TFD du signal S1 peut se mettre sous la forme d'un cosinus.
2. Vérifier que la TFD calculée correspond bien au graphique de la figure 2 nommé TFDS1.
3. Etalonner en justifiant votre démarche l'axe des fréquences du graphique TFDS1.
4. Le signal *S*2 est obtenu à partir du signal *S*1, comment ?
5. Calculer sa TFD, quel est le lien entre la TFD de *S*2 et celle de *S*1 ? (le justifier).
6. Etalonner l'axe des fréquences du graphique TFDS2. Quel est l'intérêt pratique d'une telle manipulation ?
7. Le signal *S*3 est obtenu à partir du signal *S*1, comment ? Calculer sa TFD et vérifier la cohérence avec le graphique TFDS3.
8. Etalonner l'axe des fréquences du graphique TFDS3. Quel est le lien entre la TFD de *S*3 et celle de *S*1 ? (le justifier). Comment nomme-t-on cette opération ?



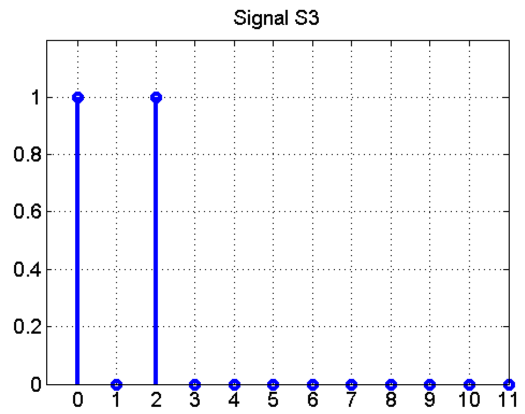


Figure 1 Signaux discret S1, S2 et S3 échantillonnés à 1200 Hz.

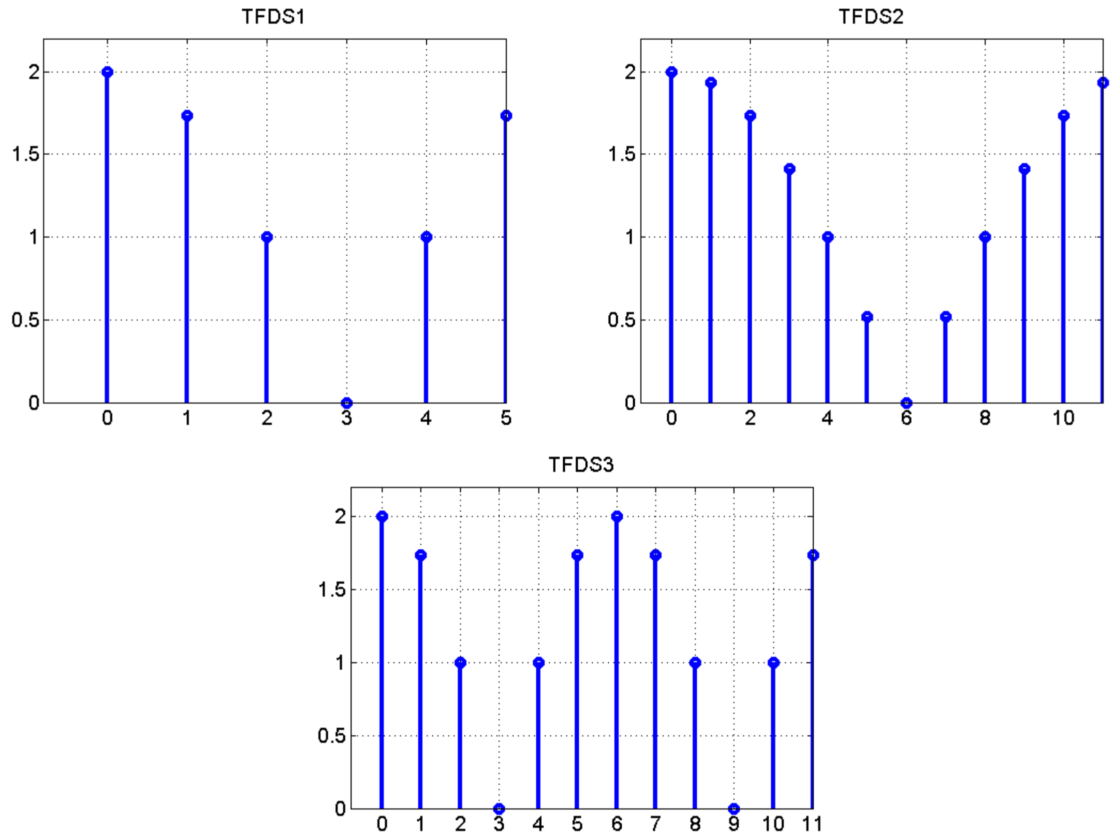


Figure 2 Module des spectres de signaux S1, S2 et S3 par TFD

Exercice VI : Analyse spectrale d'un signal redressé par simple et double alternance

La fonction de redressement est très utilisée pour alimenter des systèmes en continu à partir d'un signal alternatif de fréquence $\mathbf{F_0}$. L'objectif est d'obtenir une tension continue V_0 aussi grande que possible (Fig. 3).

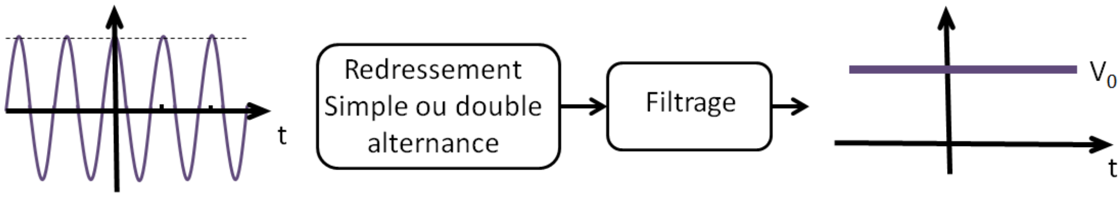


Figure 3 Principe du redressement

Il existe deux types de redressement (Fig. 4) : le redressement simple alternance et le redressement double alternance.

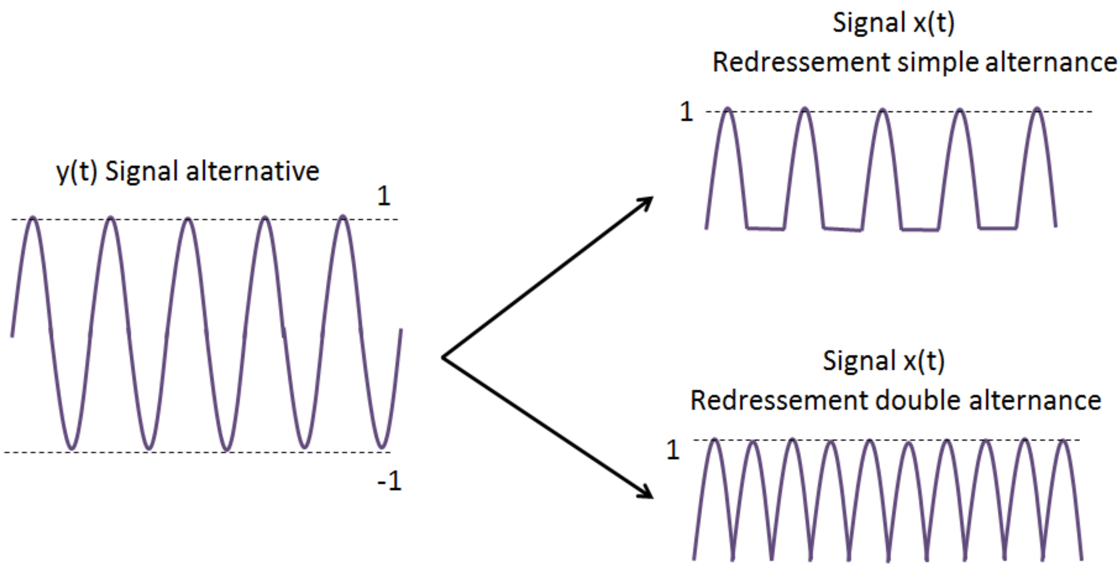


Figure 4 Principe du redressement simple et double alternance d'un signal sinusoïdale.

Le principe, illustré sur la figure 4, est le suivant.

Dans le cas d'un redressement simple alternance, une diode va tout d'abord permettre de ne garder que la partie positive du signal. Ensuite, ce signal est lissé grâce à un filtre passe-bas.

Dans le cas d'un redressement double alternance, un pont de diode va permettre de garder la valeur absolue du signal. Ensuite, ce signal est lissé grâce à un filtre passe-bas.

Grâce à une analyse spectrale, nous allons évaluer les performances du redressement double alternance.

1. Calculer le spectre du signal x(t), c'est-à-dire avant filtrage, pour le cas double alternance.
2. Le module du spectre du signal x(t) pour chacun des cas est représenté à la figure 4. A partir du résultat de la question 1, évaluer sa valeur pour le cas double alternance en $f = 0$; F_0 ; $2F_0$; $3\ F_0$.
3. Discuter des performances des deux systèmes. Quelle doit-être la fréquence de coupure du filtre dans chacun des cas ?
4. A partir de l'étude, comment est-il possible de déceler une panne sur le système à double alternance ?

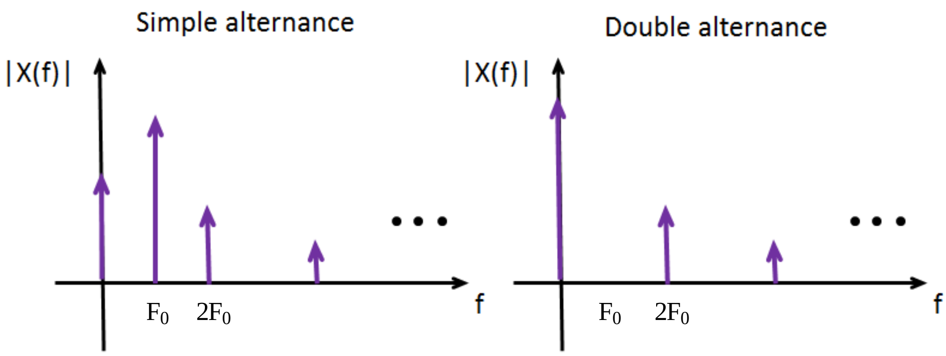


Figure 5 Module du spectre du signal dans le cas d'un redressement simple et double alternance.