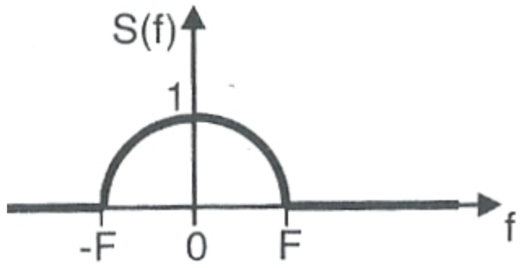
Aucun document autorisé, calculatrice type collège

I- Numérisation d'un signal analogique :



Ci-contre le spectre analogique, S(f), réel, pair, d'un signal s(t), de fréquence maximale utile F = 1230 Hz.

a- Que peut-on dire du signal temporel s(t) (parité, partie réelle, imaginaire) ?

b- Proposer une valeur simple (2 chiffres significatifs) de fréquence d'échantillonnage Fe supérieure d'au moins 1,5% à la fréquence du critère de Shannon.
En déduire la valeur T_e de la période d'échantillonnage. On nommera {s(n)} le signal discret ainsi obtenu.

c- Représenter l'allure du spectre continu, $S_e(f)$, du signal échantillonné {s(n)} entre f = -5000 et +5000 Hz.
Quelle transformation permet d'obtenir directement ce spectre à partir du signal discret (donner son nom) ? Donner l'expression de cette transformation en fonction de s(n).
Faire le lien avec la transformée en z du signal discret s(n).

d- Avec la fréquence d'échantillonnage choisie (T_e = 400 µs), montrer que $N = 2048$ échantillons est un bon choix si la durée du signal est $\Delta t = 900\ ms$.

On utilise la Transformée de Fourier Discrète (TFD) pour obtenir le spectre discret {$S_e(k)$}.

e- En déduire la résolution fréquentielle Δf (distance entre 2 échantillons) du spectre discret {$S_e(k)$} en utilisant la valeur N obtenue à la question précédente.

On rappelle que les échantillons s(n) se calculent à partir des échantillons $S_e(k)$ avec la formule : $s(n) = \overline{TFD}(S_e(k)) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{k=N-1}\left[S_e(k).e^{2\pi j.\frac{k.n}{N}}\right]$

f- Représenter de manière précise l'allure du spectre obtenu par TFD des échantillons {s(n)} pour N = 8.
Calculer la résolution fréquentielle, Δf, dans ce nouveau cas.
Donner les expressions littérale puis numérique de la fréquence f en fonction de k, F_e et N pour $k \in [0, N-1]$ et N = 8.

g- Indiquer les 3 formules permettant de calculer numériquement les échantillons $S_e(k)$ pour $k \in [0, N-1]\ pour\ N = 8$ à partir du spectre analogique, sachant que l'équation du spectre analogique entre –F et F est celle d'une ellipse : $[S_e(f)]^2 + \frac{f^2}{F^2} = 1$.

h- Compléter les valeurs manquantes dans le tableau suivant (pour N = 8) :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$S_e(k)$		0,9672	0.8613	0.6473				

On veut calculer les valeurs s(n) des échantillons temporels à partir du spectre.

i- Montrer que $s(n) = \frac{1}{8}.\left(1 + 2 * \sum_{k=1}^{k=3} Se(k).\cos\left(\frac{\pi}{4} * n * k\right)\right)$.

j- Calculer s(0).

Aucun document autorisé, calculatrice type collège

II- Système discret :

1. Calculs préliminaires :

11. Soit une suite {x(n)} définie par :

x(n) = q^n pour n ≥ 0 avec $q \in \mathbb{C}$
0 pour n < 0

a- Montrer que la transformée en z de la suite {x(n)} est $X(z) = Tz(\{x(n)\}) = \frac{z}{z-q}$.

b- Préciser le domaine de convergence de X(z).

On rappelle que la transformée en z monolatérale est définie par

$$X^+(z) = Tz_m(\{x(n)\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n).z^{-n}$$

et quelle est équivalente à la transformée en z pour un signal causal.

12. Montrer que $Tz_m(\{x(n-1)\}) = z^{-1}.X^+(z) + x(-1)$

2. Système défini par une équation aux différences :

Considérons le système défini par l'équation aux différences :

$y(n) = x(n) + b.y(n-1)$
avec la condition initiale $y(-1) = a$
on prendra b = -0,8

On souhaite déterminer la réponse y(n) du système à la suite {x(n)} définie par :

x(n) = $e^{2\pi.j.nF} = (e^{2\pi.jF})^n$ pour n ≥ 0
0 pour n < 0

a- Déterminer X(z) et son domaine de convergence.
Aide : la suite étant causale, $X^+(z) = X(z)$.

b- En utilisant la transformée en z monolatérale, montrer que

$$Y^+(z) = a.b.\frac{z}{z-b} + \frac{z^2}{(z-b).(z-e^{2\pi.jF})}$$

avec pour domaine de convergence : $|z| > 1$

Afin de pouvoir déterminer la suite {y(n)}, on souhaite décomposer la fraction $Y^+(z)$ en éléments simples.

c- Montrer que $a.b.\frac{z}{z-b} + \frac{-b}{e^{2\pi.jF}-b}.\frac{z}{z-b.} + \frac{e^{2\pi.jF}}{e^{2\pi.jF}-b}.\frac{z}{z-e^{2\pi.jF}}$ est bien une décomposition en éléments simples de $Y^+(z)$.

d- En déduire la suite {y(n)} réponse du système à la suite {x(n)}. Préciser, en justifiant, le régime transitoire et le régime permanent.

Aide : on admettra que si $X^+(z) = \frac{z}{z-q}$ avec $|z| > |q|$, alors la suite {x(n)} est définie par :

x(n) = q^n pour n ≥ 0 avec $q \in \mathbb{C}$
0 pour n < 0