MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)
Séance de TD du 20 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 31 de la séance de TD consacrée aux files et réseaux de files d'attente. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 31 (discipline de service dynamique) Dans un magasin, une caisse fonctionne en permanence. Parfois la file d'attente à cette caisse est trop longue. Une deuxième caisse est alors ouverte (partageant la même file) si le nombre de clients attendant dans la file (i.e. le buffer) est au moins égal à K. Le premier client arrivé passe alors immédiatement à cette deuxième caisse (le buffer devient donc de taille $K-1$ à cet instant). Quand le nombre de clients dans la file (i.e. le buffer) devient strictement inférieur à $K-1$, la première des deux caisses qui termine le service en cours est fermée (et ne prend donc plus de client, jusqu'à ce qu'elle soit à nouveau ouverte). On suppose que le taux de service de la deuxième caisse est le même que celui de la première.

1. Modéliser cette file par une CMTC et calculer la distribution stationnaire de probabilité de cette CMTC
2. Cette file est-elle stable et ergodique?
3. Calculer le nombre moyen de clients dans le système en régime permanent
4. Calculer, pour le cas $\lambda = \mu$, le seuil d'ouverture K de façon à ce que le nombre moyen de clients dans la file (buffer) soit – en régime stationnaire – inférieur ou égal à 4.

5. Calculer dans le cas général le taux d'utilisation[1] de la caisse N°2.

Correction de l'Exercice 31

1. L'état du système est décrit par le nombre total de clients dans le système, $N(t) \in \mathbb{N}$. Le système considéré est une file à deux serveurs avec une discipline de service *dynamique*. En effet, les clients ne sont dirigés vers le serveur 2 que si $N(t) \geq K$ (condition d'ouverture de la caisse N°2). Si cette condition est satisfaite, la discipline de service est FCFS (*first come, first served*) : dès qu'un serveur (i.e. une caisse) se libère, le premier client dans la file (i.e. le premier arrivé) est servi. Cette file à discipline de service dynamique est représentée schématiquement à la figure 1. Lorsque deux caisses sont ouvertes

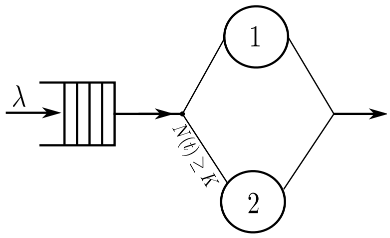

Figure 1: Représentation schématique de la file à deux serveurs et discipline de service dynamique étudiée dans l'exercice 31

(i.e. $N(t) \geq K$), le taux de service est 2μ. Sinon, il vaut μ. Le taux d'arrivée des clients dans le système vaut $\lambda(n) = \lambda$, quel que soit le nombre de client dans le système. La CMTC qui correspond à cette file est donnée à la figure 2. la distribution stationnaire s'obtient à

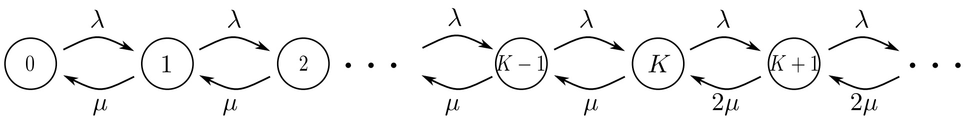

Figure 2: CMTC associée à la file à deux serveurs avec discipline de service dynamique étudiée à l'exercice 31

l'aide de la méthode des coupes. On obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda \boldsymbol{\pi}_{n-1} &= \mu \boldsymbol{\pi}_n \quad \text{pour} \quad 0 \leq n \leq K \\ \lambda \boldsymbol{\pi}_{n-1} &= 2\mu \boldsymbol{\pi}_n \quad \text{pour} \quad n \geq K+1 \end{aligned}$$

[1] Ce taux reflète par exemple la proportion du temps où l'employé de la caisse N°2 sera disponible pour d'autres tâches dans le magasin

En posant,
$$\rho := \frac{\lambda}{\mu}$$
on obtient :
$$\boldsymbol{\pi}_n = \begin{cases} \rho^n \boldsymbol{\pi}_0 & \text{pour } 0 \leq n \leq K \\ \dfrac{\rho^n}{2^{n-K}} \boldsymbol{\pi}_0 & \text{pour } n \geq K+1 \end{cases}$$
La condition de normalisation donne (dans le cas $\rho \neq 1$) :
$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \boldsymbol{\pi}_n &= \sum_{n=0}^{K-1} \boldsymbol{\pi}_n + \sum_{n \geq K} \boldsymbol{\pi}_n \\ &= \left[\frac{1-\rho^K}{1-\rho} + \rho^K \underbrace{\sum_{n \geq K} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-K}}_{\Sigma_\infty} \right] \boldsymbol{\pi}_0 \\ &= \left[\frac{1-\rho^K}{1-\rho} + \frac{2\rho^K}{2-\rho} \right] \boldsymbol{\pi}_0 \\ &= \left[\frac{2-\rho-\rho^K}{(1-\rho)(2-\rho)} \right] \boldsymbol{\pi}_0 \\ &= 1 \end{aligned}$$
c'est-à-dire
$$\boldsymbol{\pi}_0 = \frac{(1-\rho)(2-\rho)}{2-\rho-\rho^K}$$
Il faut noter que la somme Σ_∞ ne converge que si $\rho < 2$, c'est-à-dire si $\lambda < 2\mu$. Par ailleurs, dans le cas $\rho = 1$, on obtient :
$$\sum_{n=0}^{K-1} \boldsymbol{\pi}_n = K$$
et
$$\boldsymbol{\pi}_0 = \frac{1}{K+2}$$

2. La CMTC de la figure 2 irréductible. Elle est stable et ergodique pour $\lambda < 2\mu$. Si cette condition est satisfaite, tous les états sont donc nécessairement récurrents non nuls. La distribution stationnaire de probabilité existe, est unique et égale à la distribution limite.

3. En régime permanent, dans le cas général où $\rho \neq 1$, le nombre moyen de clients dans le système s'écrit :

$$
\begin{aligned}
Q &= \sum_{n\geq 0} n\boldsymbol{\pi}_n \\
&= \sum_{n=0}^{K-1} n\boldsymbol{\pi}_n + \sum_{n\geq K} n\boldsymbol{\pi}_n \\
&= \left[\sum_{n=0}^{K-1} n\rho^n + \rho^K \sum_{n\geq K} n\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-K}\right]\boldsymbol{\pi}_0 \\
&= \left[\sum_{n=0}^{K-1} \rho\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^K}{1-x}\right)\Big|_{x=\rho} + \rho^K \sum_{n\geq K} n\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-K}\right]\boldsymbol{\pi}_0 \\
&= \left[\frac{\rho\left((K-1)\rho^K - K\rho^{K-1}+1\right)}{(1-\rho)^2} + \rho^K\left(\sum_{n\geq K}(n-K)\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-K} + K\sum_{n\geq K}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-K}\right)\right]\boldsymbol{\pi}_0 \\
&= \left[\frac{\rho\left((K-1)\rho^K - K\rho^{K-1}+1\right)}{(1-\rho)^2} + \rho^K\left(\frac{2\rho}{(2-\rho)^2}+\frac{2K}{2-\rho}\right)\right]\boldsymbol{\pi}_0 \\
&= \frac{\rho^K\left(-(K-1)\rho^3 + K(3\rho^2+4\rho+2)\right)+\rho(\rho^2-4\rho+2)}{(1-\rho)(2-\rho)(2-\rho-\rho^K)}
\end{aligned}
$$

4. Dans le cas particulier $\lambda = \mu$, c'est-à-dire pour $\rho = 1$, on trouve

$$
\begin{aligned}
Q &= \sum_{n\geq 0} n\boldsymbol{\pi}_n \\
&= \sum_{n=0}^{K-1} n\boldsymbol{\pi}_n + \sum_{n\geq K} n\boldsymbol{\pi}_n \\
&= \left[\frac{K(K-1)}{2} + \sum_{n\geq K} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-K}\right]\boldsymbol{\pi}_0 \\
&= \left[\frac{K(K-1)}{2} + \sum_{n\geq K}(n-K)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-K} + K\sum_{n\geq K}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-K}\right]\boldsymbol{\pi}_0 \\
&= \left[\frac{K(K-1)}{2} + 2 + 2K\right]\boldsymbol{\pi}_0 \\
&= \frac{K^2+3K+4}{K+2}
\end{aligned}
$$

On a $Q \leq 5$ si $K \leq 1+\sqrt{7} \simeq 3.646...$ On choisira donc un seuil de $K = 3$ clients dans la file pour ouvrir la deuxième caisse.

5. Le taux d'utilisation de la deuxième caisse est

$$\begin{aligned}
U_2 &= \sum_{n \geq K+1} \boldsymbol{\pi}_n \\
&= 1 - \sum_{n \leq K} \boldsymbol{\pi}_n \\
&= 1 - \boldsymbol{\pi}_0 \sum_{n \leq K} \rho^n \\
&= \frac{2(2-\rho) - \rho^K (1+\rho)^2}{2 - \rho - \rho^K}
\end{aligned}$$