MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Chaînes de Markov à temps discret (CMTD)
Séance de TD du 05 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 14 de la séance de TD consacrée aux chaînes de Markov à temps discret. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 14
Une entreprise utilise des machines dont l'usure est caractérisée par quatre valeurs, notées $\{1, 2, 3, 4\}$, qui correspondent respectivement aux états des machines *neuves*, *usées*, *très usées* et *inutilisables*. Chaque jour, une machine dans un de ces états rapporte à l'entreprise respectivement 1000 €, 1000 €, 800 € et 0 €. On modélise le processus de vieillissement de la machine par une chaîne de Markov à temps discret (l'unité est le jour) de matrice de transition:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la durée de vie moyenne d'une machine neuve. Même question avec une machine très usée.

2. Le remplacement de la machine coûte K € et demande une journée (pendant laquelle la machine ne produit rien). Choisir parmi ces deux politiques laquelle est la plus profitable à long terme pour l'entreprise :

   P1 : remplacer la machine dès qu'elle est *inutilisable*

P2 : remplacer la machine dès qu'elle est *très usée* ou *inutilisable*

Correction de l'Exercice 14

1. Le graphe associée à la chaine de Markov qui représente l'usure des machines est donné à la figure 1. La durée de vie moyenne d'une

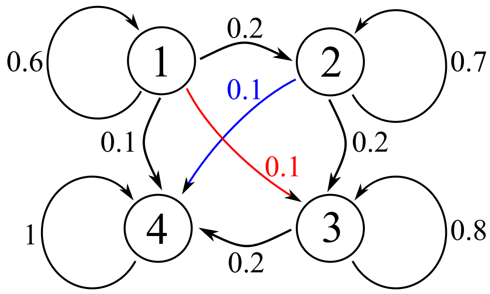

Figure 1: Le graphe associé à la CMTD qui modélise l'usure des machines dans l'exercice 14. Les états $\{1,2,3,4\}$ correspondent respectivement aux états des machines *neuves*, *usées*, *très usées* et *inutilisables*.

machine *neuve* est l'espérance du temps d'entrée la classe $F := \{4\}$ (ou encore l'espérance du temps de séjour dans la classe $\bar{F} := \{1,2,3\}$) partant de l'état 1, tandis que la durée de vie moyenne d'une machine *très usée* est la même espérance, mais partant de l'état 3. En notant T_F le temps d'entrée dans la classe $F := \{4\}$ (i.e. la durée de vie) et

$$\mathbf{T}_i := E\left(T_F \,|X_0 = i\,\right)$$

l'espérance du temps d'entrée la classe $F := \{4\}$ partant de l'état $X_0 = i \in \bar{F}$, on a (voir cours)

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 &= 1 + 0.6 \cdot \mathbf{T}_1 + 0.2 \cdot \mathbf{T}_2 + 0.1 \cdot \mathbf{T}_3 \\
\mathbf{T}_2 &= 1 + 0.7 \cdot \mathbf{T}_2 + 0.2 \cdot \mathbf{T}_3 \\
\mathbf{T}_3 &= 1 + 0.8 \cdot \mathbf{T}_3
\end{aligned}$$

dont les solutions sont

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 &= \frac{85}{12} \simeq 7.0833.. \\
\mathbf{T}_2 &= \frac{20}{3} \simeq 6.6666.. \\
\mathbf{T}_3 &= 5
\end{aligned}$$

exprimées en unité de temps (ici, le jour).

2. En appliquant le politique P1 (remplacer immédiatement les machines inutilsables et seulement celles-là) on modifie la CMTD comme illustré à la figure 2. Cette modification change radicalement le comportement de la chaîne qui devient irréductible. Il n'y a plus qu'une seule classe d'équivalence et tous les états deviennent récurrents non nuls (alors qu'auparavant l'état 4 était absorbant et les autres états étaient transitoires).

   La matrice de transition de cette nouvelle CMTD s'écrit :

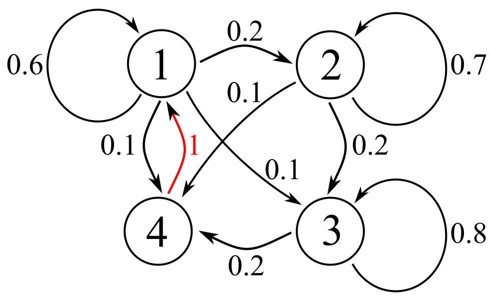

Figure 2: Le graphe associé à la CMTD qui modélise l'usure des machines dans l'exercice 14 lorsqu'on ne remplace que les machines inutilisables. La modification correspond à l'arrête *rouge*

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   On s'intéresse au comportement de la chaîne sur le long terme, c'est-à-dire à la distribution stationnaire de probabilités, qui dans ce cas est aussi la distribution limite. Celle-ci satisfait les équations :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_1 & \boldsymbol{\pi}_2 & \boldsymbol{\pi}_3 & \boldsymbol{\pi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_1 & \boldsymbol{\pi}_2 & \boldsymbol{\pi}_3 & \boldsymbol{\pi}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   avec la condition de normalisation

$$\boldsymbol{\pi}_1 + \boldsymbol{\pi}_2 + \boldsymbol{\pi}_3 + \boldsymbol{\pi}_4 = 1$$

   On obtient par calcul

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_1 & \boldsymbol{\pi}_2 & \boldsymbol{\pi}_3 & \boldsymbol{\pi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{97} & \frac{20}{97} & \frac{35}{97} & \frac{12}{97} \end{pmatrix}$$

L'espérance de gain quotidien par machine associé à la politique P1 est donc

$$E_1 := \boldsymbol{\pi}_1 \cdot 1000 + \boldsymbol{\pi}_2 \cdot 1000 + \boldsymbol{\pi}_3 \cdot 800 - \boldsymbol{\pi}_4 \cdot K = \frac{78000 - 12K}{97}$$

euros par jour et par machine, où K représente le coût de remplacement d'une machine.
En appliquant la politique P2 (remplacer immédiatement les machines dès qu'elles sont inutilisables ou très usées) on modifie la CMTD comme illustré à la figure 3. Il n'y a plus qu'une seule classe d'équivalence et tous les états deviennent récurrents non nuls.
La matrice de transition de cette nouvelle CMTD s'écrit :

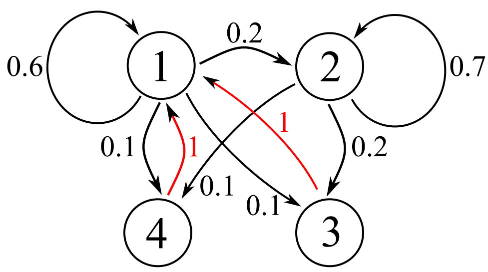

Figure 3: Le graphe associé à la CMTD qui modélise l'usure des machines dans l'exercice 14 lorsqu'on ne remplace que les machines inutilisables. Les modifications correspondent aux arrêtes *rouges*

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La distribution stationnaire de probabilités satisfait les équations :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_1 & \boldsymbol{\pi}_2 & \boldsymbol{\pi}_3 & \boldsymbol{\pi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_1 & \boldsymbol{\pi}_2 & \boldsymbol{\pi}_3 & \boldsymbol{\pi}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec la condition de normalisation

$$\boldsymbol{\pi}_1 + \boldsymbol{\pi}_2 + \boldsymbol{\pi}_3 + \boldsymbol{\pi}_4 = 1$$

On obtient par calcul

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_1 & \boldsymbol{\pi}_2 & \boldsymbol{\pi}_3 & \boldsymbol{\pi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{62} & \frac{20}{62} & \frac{7}{62} & \frac{5}{62} \end{pmatrix}$$

L'espérance de gain quotidien par machine est alors

$$E_2 := \boldsymbol{\pi}_1 \cdot 1000 + \boldsymbol{\pi}_2 \cdot 1000 - (\boldsymbol{\pi}_3 + \boldsymbol{\pi}_4) \cdot K = \frac{50000 - 12K}{62}$$

euros par jour et par machine, où K représente le coût de remplacement d'une machine. Dans ce cas particulier où une machine très usée continue à rapporter 800 € par jour, la politique P2 est avantageuse si $E_2 \geq E_1$, c'est-à-dire si le coût de remplacement d'une machine satisfait

$$K \leq \frac{100}{3} \simeq 33.33..\text{€}$$

Si la productivité des machines très usées diminue, ce seuil va s'élever.