EE330
Processus aléatoires
TD

Nicolas Barbot

13 février 2015

1 Exercice

On considère le processus aléatoire à temps continu défini par :

$$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Phi) \tag{1}$$

où Φ est une variable aléatoire uniforme dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ (A et f_0 sont des constantes).

1. Pour t fixé, déterminer l'expression de la densité de probabilité de la variable aléatoire $X(t)$.
2. Déterminer les expressions des moments statistiques d'ordre 1 et 2.
3. Déterminer les expressions des moments temporels d'ordre 1 et 2.

2 Exercice

Soit $X(t)$ un processus aléatoire SSL à temps discret, de moyenne m_X et de fonction d'autocovariance $R_{XX}(\tau)$. On considère la variable aléatoire M définie par :

$$M = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} X(t) \tag{29}$$

1. Déterminer la moyenne de M.
2. Déterminer la variance de M.

3 Exercice

Soit $X(t)$ un processus aléatoire SSL non centré ayant les propriété suivante :

$$m_X = 1 \quad M_{XX}(\tau) = 1 + 2e^{-|\tau|} \tag{47}$$

On considère la variable aléatoire $Y(t)$ définie par :

$$Y(t) = \int_0^1 X(t)dt \tag{48}$$

1. Déterminer la moyenne de $Y(t)$.
2. Déterminer la variance de $Y(t)$.

4 Exercice

Soit le processus aléatoire $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, à valeurs dans $\{-1;+1\}$ qui vérifie les propriétés suivantes :
- $p(X(0) = -1) = p$
- le nombre de transitions, observées pendant un intervalle de temps T, est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de moyenne IT :

$$p(K = k) = \frac{(IT)^k}{k!}e^{-IT} \tag{71}$$

- les nombres de transitions dans deux intervalles disjoints sont des variables aléatoires indépendantes

1. Déterminer les expressions de $p(X(t) = 1|X(0) = -1)$ et de $p(X(t) = 1|X(0) = 1)$. En déduire les expression de $p(X(t) = 0)$ et $p(X(t) = 1)$.
2. Déterminer l'expression de $E[X(t)]$ en fonction de p et de I. En déduire la condition pour laquelle $E[X(t)]$ est indépendant de t.
3. On suppose la condition précédente remplie. Déterminer la fonction d'autocovariance de $X(t)$.
4. En utilisant la paire de transformée de Fourier

$$e^{-\frac{|\tau|}{\tau_0}} \Leftrightarrow \frac{2\tau_0}{1+4\pi^2\tau_0^2 f^2}, \tag{72}$$

   déterminer la densité spectrale de puissance du processus $X(t)$.

5 Exercice

On considère le signal aléatoire à temps continu :

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k h(t - kT + U) \tag{105}$$

où $h(t)$ est une fonction déterministe, A_k est une suite de variables aléatoires centrées et SSL et U est une variable aléatoire uniforme sur $[0;T]$ indépendante de A_k. On note $R_{AA}(k) = E[A_{n+k}A_n^*]$.

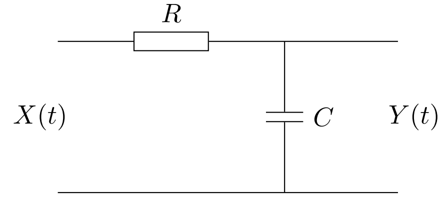
1. On note $H(f)$ la transformée de Fourier de $h(t)$. Déterminer en fonction de $H(f)$ l'expression de la transformée de Fourier de :

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)h^*(v-\tau)dv \tag{106}$$

   En déduire la transformée de Fourier de $g(\tau - mT)$.
2. Déterminer l'expression de $E[X(t+\tau)X^*(t)]$ où $t, \tau \in \mathbb{R}$
3. En déduire l'expression de la densité spectrale de puissance de $X(t)$ en fonction de $R_{AA}(k)$, de T et de $H(f)$.
4. On suppose que $h(t) = rect_T(t - T/2)$ et que A_k est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-A;+A\}$, centrées et non corrélées. Déterminer l'expression de la densité spectrale de puissance.

6 Exercice

On considère le filtre RC passe bas suivant :



1. Déterminer la fonction de transfert du filtre.
2. On applique à l'entré de ce filtre un bruit blanc de densité spectrale de puissance $N_0/2$. Déterminer la DSP du processus $Y(t)$ ainsi que sa puissance.
3. En utilisant la paire de transformées de Fourier

$$e^{-\frac{|\tau|}{\tau_0}} \Leftrightarrow \frac{2\tau}{1+4\pi^2\tau_0^2 f^2} \tag{125}$$

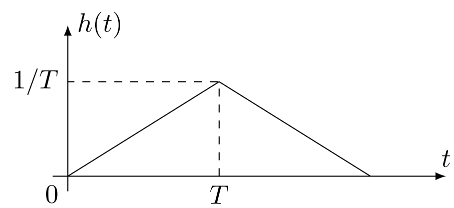
déterminer la fonction d'autocovariance $R_{YY}(\tau)$ de $Y(t)$.

7 Exercice

On considère un processus aléatoire $X(t)$ réel à temps continu SSL et centré de DSP :

$$S_{XX}(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \text{pour } f \in [-b, +b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{132}$$

Ce processus est appliqué à l'entré d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ triangulaire :



On désigne par $Y(t)$ le processus aléatoire en sortie.

1. Déterminer la fonction de transfert du filtre.
2. Déterminer la puissance de $X(t)$.
3. Déterminer la fonction d'autocovariance de $X(t)$.
4. Déterminer l'expression de $S_{YY}(f)$.
5. En supposant $bT >> 1$, calculer la puissance P_Y en sortie en fonction de T et N_0. Si $T = 1\mu$s et $P_Y = 1\mu$W, déterminer la valeur de N_0.