Chapitre 5 :Tests d'hypothèses
MA 361 : Probabilités continues

Pierre-Alain TOUPANCE
pierre-alain.toupance@esisar.grenoble-inp.fr

Grenoble INP - ESISAR
3ième année

6 décembre 2016

Tests ?

Comment répondre aux questions suivantes :

1. Sur une chaine de production, on observe que pour 1000 produits 35 présentent des défauts. On aimerait savoir si l'hypothèse "4% des produits sont défectueux" est à rejeter ou non.
2. On observe que la distribution de 75 temps d'attente de réception d'un signal a une allure de loi de Poisson. On veut savoir si l'hypothèse "le temps d'attente suit une loi de Poisson" est à rejeter ou non.
3. On observe deux variables, peut-on savoir si les variables sont indépendantes ?

Théorie des tests

Les tests statistiques sont des outils d'aide à la décision, ils permettent de mieux évaluer la véracité d'une hypothèse.
Il existe de nombreux types de tests qui permettent d'évaluer des aspects différents de significativité. Les objectifs principaux auxquels peuvent répondre les tests statistiques sont :

- l'évaluation de la représentativité des répartitions observées par rapport aux valeurs connues pour l'ensemble de la population,
- pouvoir répondre à la question : "les résultats obtenus sont-ils statistiquement significatifs ?"
- valider ou infirmer une hypothèse sur la distribution d'une variable, sur le lien entre deux variables.

Introduction

Théorie des tests
- Hypothèses
- Erreurs et risques
- Décisions
- Exemple

Tests non paramètriques
- Test d'indépendance du χ^2
- Test d'ajustement du χ^2
- Test de Kolmogorov-Smirnov

Les hypothèses

Un test se présente comme un choix entre deux hypothèses :

- l'hypothèse privilégiée est appelée hypothèse nulle, notée H_0,
- l'hypothèse complémentaire est appelée hypothèse alternative, notée H_1.

Ces hypothèses sont toujours formulées vis à vis de la population alors que les tests sont effectués à partir de données issues d'échantillons.

Les hypothèses

L'objectif est de contredire, à partir d'échantillon(s), une hypothèse portant sur la population.

Un test statistique permet de rejeter une hypothèse ou de ne pas la rejeter.
Attention, ne pas rejeter une hypothèse ne veut pas dire que l'on va l'accepter mais simplement que l'on n'a pas assez d'informations pour la rejeter.

Les différents types d'hypothèses

Type de test

- Si les hypothèses d'un test portent sur la valeur d'un paramètre de la population, on effectue un test paramétrique.
- Si les hypothèses ne portent pas sur la valeur d'un paramètre, on effectue un test non paramétrique. Par exemple :
  - Déterminer si un échantillon provient d'une loi donnée : **test d'adéquation**.
  - Déterminer si deux échantillons proviennent de la même loi : **test de comparaison d'échantillon**.
  - Déterminer si deux variables observées sont indépendantes : **test d'indépendance**.

Principe de Neymann

On se fixe une hypothèse H_0 que l'on va tester contre H_1.

Quatre situations peuvent se présenter :

Décision Situation	Non rejet de H_0	Rejet de H_0
H_0 est vraie	Bonne décision	Mauvaise décision
H_0 est fausse	Mauvaise décision	Bonne décision

Principe de Neymann

On est confronté à deux types d'erreurs possibles, chacune ayant des conséquences différentes.

Les erreurs

On appelle erreur de première espèce le fait de rejeter une hypothèse vraie.
On appelle erreur de seconde espèce le fait de ne pas rejeter une hypothèse fausse.

On privilégie généralement l'erreur de première espèce à l'erreur de seconde espèce.

Principe de Neymann

Les risques d'erreur

On note :

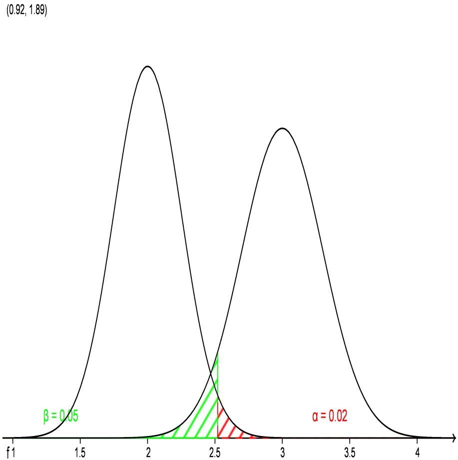
$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0 \text{ est vraie}}(\text{Rejeter } H_0)$$
$$\beta = \mathbb{P}_{H_0 \text{ est fausse}}(\text{Ne pas rejeter } H_0)$$

Principe de Neymann

Décision Situation	Non rejet de H_0	Rejet de H_0
H_0 est vraie	$1-\alpha$	α
H_0 est fausse	β	$1-\beta$

La probabilité de l'erreur de première espèce est appelée **le risque fournisseur**, cela correspond au refus de ce qui aurait du être accepté.
La probabilité de l'erreur de seconde espèce est appelée **le risque client**, c'est à dire accepter ce qui aurait du être refusé.

Les risques d'erreur



La puissance d'un test

La puissance d'un test

La puissance d'un test se définit comme la probabilité de refuser une hypothèse H_0 sachant que cette hypothèse est fausse. On la note ν.

$$\nu = \mathbb{P}_{H_0 \text{ est fausse}}(\text{Rejeter } H_0)$$
$$\nu = 1 - \beta$$

La puisance d'un test est utile pour comparer plusieurs tests entre eux, à risque de première espèce α égal, on choisit celui qui est le plus puissant, donc celui pour qui ν est la plus grande.

Décisions

Définitions :

- On appelle règle de décision une règle qui permet de choisir entre deux hypothèses au vu des observations sur un (ou plusieurs) échantillon(s).
- On appelle région critique (ou zone de rejet) du test l'ensemble des observations de la statistique du test pour lesquelles on rejettera H_0.

Démarche d'un test

i) Choix de l'hypothèse nulle H_0 et formulation de l'hypothèse alternative H_1,

ii) Choix du seuil de confiance du test : ceci revient à fixer α

iii) Déterminer la région critique du test :
On détermine l'estimateur (ou variable d'échantillonnage) à utiliser pour le test,
On détermine la loi de cet estimateur,
On détermine la zone où, si H_0 est vraie, la valeur de la variable d'échantillonnage a une faible probabilité de se trouver.

iv) Etablir la règle de décision : Rejeter H_0 au seuil α suivant la valeur calculée dans l'échantillon.

Exemple sur un test paramétrique

Sur une chaine de production, on observe que pour 1000 produits 35 présentent des défauts. On aimerait savoir si l'hypothèse "4% des produits sont défectueux" est à rejeter ou non.

Exemple sur un test paramétrique

Sur une chaine de production, on observe que pour 1000 produits 35 présentent des défauts. On aimerait savoir si l'hypothèse "4% des produits sont défectueux" est à rejeter ou non.

- On teste $H_0 = \{p = 0,04\}$ contre $H_1 = \{p < 0,04\}$.

Exemple sur un test paramétrique

Sur une chaine de production, on observe que pour 1000 produits 35 présentent des défauts. On aimerait savoir si l'hypothèse "4% des produits sont défectueux" est à rejeter ou non.

- On teste $H_0 = \{p = 0,04\}$ contre $H_1 = \{p < 0,04\}$.
- On pose $\alpha = 0,05$.

Exemple sur un test paramétrique

Sur une chaine de production, on observe que pour 1000 produits 35 présentent des défauts. On aimerait savoir si l'hypothèse "4% des produits sont défectueux" est à rejeter ou non.

- On teste $H_0 = \{p = 0,04\}$ contre $H_1 = \{p < 0,04\}$.
- On pose $\alpha = 0,05$.
- Statistique du test : $\hat{P}_{1000}$.

Exemple sur un test paramétrique

Sur une chaine de production, on observe que pour 1000 produits 35 présentent des défauts. On aimerait savoir si l'hypothèse "4% des produits sont défectueux" est à rejeter ou non.

- On teste $H_0 = \{p = 0,04\}$ contre $H_1 = \{p < 0,04\}$.
- On pose $\alpha = 0,05$.
- Statistique du test : $\hat{P}_{1000}$.
- Région critique : On peut montrer, après calculs, que c'est $W = [0; 0,028]$

Exemple sur un test paramétrique

Sur une chaine de production, on observe que pour 1000 produits 35 présentent des défauts. On aimerait savoir si l'hypothèse "4% des produits sont défectueux" est à rejeter ou non.

- On teste $H_0 = \{p = 0,04\}$ contre $H_1 = \{p < 0,04\}$.
- On pose $\alpha = 0,05$.
- Statistique du test : $\hat{P}_{1000}$.
- Région critique : On peut montrer, après calculs, que c'est $W = [0; 0,028]$
- Décision : $\hat{p}_{1000} = 0,035 > 0,028$ donc on ne peut pas rejeter H_0 au seuil de 5%.

Exemple

On désire savoir si la présence du mot "Robert" dans un message est indépendante de celle du mot "Brad". On observe donc un échantillon de messages.

	Robert figure dans le message	Robert ne figure pas dans le message	
Brad figure dans le message	76	34	
Brad ne figure pas dans le message	35	55	

Principe

Théorème :
Sous l'hypothèse que les variables X et Y sont indépendantes, la variable aléatoire $\sum_{i,j} \frac{\left(n'_{i,j} - n_{i,j}\right)^2}{n'i,j}$, où $n'_{i,j}$ représente les effectifs théoriques et $n_{i,j}$ les effectifs observés, suit une loi du χ^2 à (nombre de lignes-1)(nombre de colonnes-1) degrés de libertés, on le note $\chi^2_{(n-1)(m-1)}$.

Démarche du test

1. **Principe :**
   On va tester l'indépendance entre deux variables qualitatives en mesurant l'écart entre les résultats théoriques et les résultats pratiques.
2. **Enoncé des hypothèses**
   On teste H_0={les variables X et Y sont indépendantes} contre H_1={les variables X et Y ne sont pas indépendantes}
3. **Région critique :**
   i) **Calcul du degré de libertés**

Démarche du test

1. **Principe :**
   On va tester l'indépendance entre deux variables qualitatives en mesurant l'écart entre les résultats théoriques et les résultats pratiques.
2. **Enoncé des hypothèses**
   On teste H_0={les variables X et Y sont indépendantes} contre H_1={les variables X et Y ne sont pas indépendantes}
3. **Région critique :**
   i) **Calcul du degré de libertés** $(2-1) \times (2-1) = 1$
   ii) **Risque de première espèce :** S'il n'y a pas de valeur précisée, on choisira 5%.
   iii) **Calcul du** χ^2_{theo}

Démarche du test

1. **Principe :**
   On va tester l'indépendance entre deux variables qualitatives en mesurant l'écart entre les résultats théoriques et les résultats pratiques.
2. **Enoncé des hypothèses**
   On teste H_0={les variables X et Y sont indépendantes} contre H_1={les variables X et Y ne sont pas indépendantes}
3. **Région critique :**
   i) **Calcul du degré de libertés** $(2-1)\times(2-1)=1$
   ii) **Risque de première espèce :** S'il n'y a pas de valeur précisée, on choisira 5%.
   iii) **Calcul du** χ^2_{theo} $\chi^2_{theo}=3,841$
4. **Règle de décision :** Si la statistique calculée sur l'échantillon est supérieur au χ^2_{theo}, on rejette H_0 avec un risque α.

Démarche du test

5. **Calcul de la statistique**
   i) **Construction du tableau des effectifs théoriques :** On suppose les variables indépendantes.
   ii) **Calcul de la statistique :** On calcule ce qu'on pourrait appeler la distance du χ^2 entre les deux tableaux. Cette valeur sera un indicateur de proximité entre les deux tableaux.

	V	Non V	
P	76	34	
Non P	35	55	

Démarche du test

5. **Calcul de la statistique**
   i) **Construction du tableau des effectifs théoriques :** On suppose les variables indépendantes.
   ii) **Calcul de la statistique :** On calcule ce qu'on pourrait appeler la distance du χ^2 entre les deux tableaux. Cette valeur sera un indicateur de proximité entre les deux tableaux.

	V	Non V	
P	76	34	
Non P	35	55	

$$\chi^2_{obs} = \frac{(61,05-76)^2}{61,05} + \frac{(48,95-34)^2}{48,95} + \frac{(49,95-55)^2}{49,95} + \frac{(40,05-35)^2}{40,05} \approx 18,28$$

Démarche du test

6. **Décision :**

Démarche du test

6. **Décision :** On a $\chi^2_{obs} \approx 18,28 > \chi^2_{theo} \approx 3,841$.

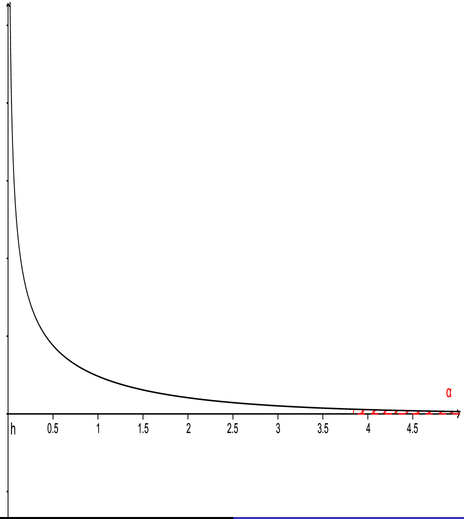
Démarche du test

6. **Décision :** On a $\chi^2_{obs} \approx 18,28 > \chi^2_{theo} \approx 3,841$.
   On rejette donc H_0 avec un risque d'erreur de 5%.

Démarche du test

6. **Décision :** On a $\chi^2_{obs} \approx 18,28 > \chi^2_{theo} \approx 3,841$.
   On rejette donc H_0 avec un risque d'erreur de 5%.
   $p_{value} = 1,9^{-5}$

Démarche du test



Le test d'ajustement du χ^2

On a mesuré le temps d'attente de réception d'un signal en secondes.

Temps d'attente (en secondes)	0	1	2	3	4
Effectifs	9	18	29	12	7

Peut-on affirmer que le temps de réponse suit une loi de Poisson ?

Principe

Théorème :

Sous l'hypothèse que la variables X suit une répartition théorique proposée (H_0 est vraie), la variable aléatoire $\sum_i \frac{(Np_i - n_i)^2}{Npi}$, (où N représente l'effectif total,les p_i représentent les probabilités associées à la loi proposée et les n_i les effectifs observés sur l'échantillon) suit une loi du χ^2 à (nombre de classes après regroupement-nombre de paramètres estimés à l'aide de l'échantillon-1) degrés de libertés, on le note $\chi^2_{(n-p-1)}$.

Démarche du test

1. **Principe :**
   On va tester l'adéquation d'une variable à une loi en mesurant l'écart entre les résultats théoriques et les résultats pratiques.
2. **Enoncé des hypothèses**
   On teste H_0={la variable X suit la répartition proposée} contre H_1={la variable X ne suit pas la répartition proposée }
3. **Région critique :**
   i) **Calcul du degré de libertés**

Démarche du test

1. **Principe :**
   On va tester l'adéquation d'une variable à une loi en mesurant l'écart entre les résultats théoriques et les résultats pratiques.
2. **Enoncé des hypothèses**
   On teste H_0={la variable X suit la répartition proposée} contre H_1={la variable X ne suit pas la répartition proposée }
3. **Région critique :**
   i) **Calcul du degré de libertés** 5-1-1=3
   ii) **Risque de première espèce :** S'il n'y a pas de valeur précisée, on choisira 5%.
   iii) **Calcul du** χ^2_{theo}

Démarche du test

1. **Principe :**
   On va tester l'adéquation d'une variable à une loi en mesurant l'écart entre les résultats théoriques et les résultats pratiques.
2. **Enoncé des hypothèses**
   On teste H_0={la variable X suit la répartition proposée} contre H_1={la variable X ne suit pas la répartition proposée }
3. **Région critique :**
   i) **Calcul du degré de libertés** 5-1-1=3
   ii) **Risque de première espèce :** S'il n'y a pas de valeur précisée, on choisira 5%.
   iii) **Calcul du** $\chi^2_{theo} \approx 7,815$
4. **Règle de décision :** Si la statistique calculée sur l'échantillon est supérieur au χ^2_{theo}, on rejette H_0 avec un risque α.