Chapitre 2 – Introduction à l'analyse spectrale

1. Densité spectrale d'énergie (d-s-e)
2. Fonction de corrélation
3. Densité spectrale de puissance (d-s-p)
4. Exemples d'application
5. Conclusion

Densité spectrale d'énergie (d-s-e)

- Soit $x(\mathrm{t})$ un signal à énergie finie et $X(f)$ son spectre associé.

D'après le théorème de Parseval :

$$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df = \int_{\mathbb{R}} S_X(f) df$$

Avec $\mathrm{S}_X(\mathrm{f})$ la densité spectrale d'énergie du signal $x(t)$.

$$S_X(f) = |X(f)|^2$$

- La d-s-e est indépendante de la phase du signal. Il existe une famille de signaux ayant même d-s-e.
- L'opération permettant de passer du spectre à la d-s-e est non réversible : L'information de phase est perdue.

Attention, la d-s-e est parfois appelée spectre par abus de langage

Exemple : énergie d'un signal rectangle

- Spectre du signal $x(t) = rectT(t/T)$

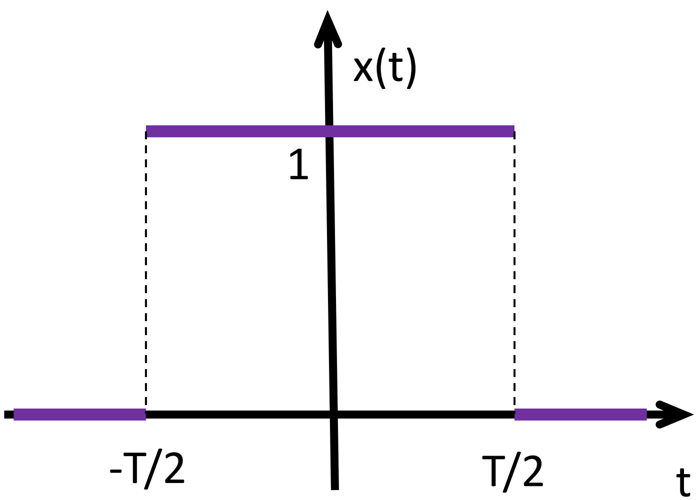
$$\mathrm{X(f)} = \mathrm{TF}[x(t)] = \frac{sin(\pi f T)}{\pi f} = Tsinc(\pi f T)$$

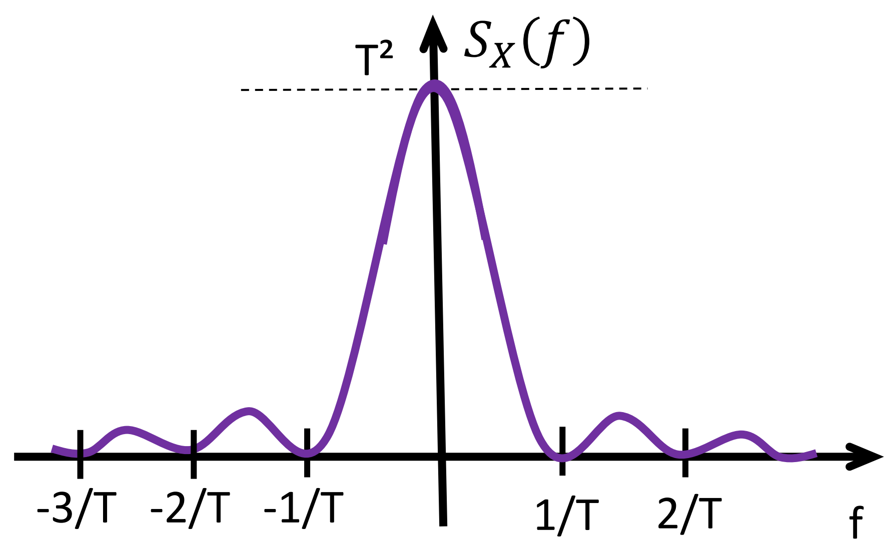
- Energie du signal :

$$E_x = \int_T |x(t)|^2 dt = T$$

- D-s-e:

$$S_X(f) = |X(f)|^2 = T^2 sinc^2(\pi f T)$$





Exemple : énergie d'un signal rectangle

II. Intro. à l'analyse spectrale
d-s-e
Corrélation
d-s-p
Exemples
Conclusion

- Répartition fréquentielle de l'énergie du signal $x(t) = rectT(t/T)$

$$E_{x,n/T} = \int_{-n/T}^{n/T} S_X(f)\, dt = T^2 \int_{-n/T}^{n/T} sinc^2(\pi f T) df$$

$$E_{x,n/T} = \frac{2EX}{\pi} \int_0^{2n\pi} sinc(v) dv = \frac{2EX}{\pi} Si(2n\pi)$$

- $E_{X,1/T} = 0{,}9028 \cdot E_X$: 90 % de l'énergie est contenue dans le lobe central.
- $E_{X,2/T} = 0{,}9499 \cdot E_X$: 95 % de l'énergie est contenue dans le lobe central et les premiers lobes secondaires.

Fonction d'autocorrélation

- ## Définition

L'autocorrélation $C_x(t)$ est la représentation duale dans l'espace temps de la densité spectrale d'énergie :

$$C_x(t) = \overline{TF}[S_x(f)] = \overline{TF}[X(f)X^*(f)] = \overline{TF}[X(f)] * \overline{TF}[X^*(f)]$$

$$C_x(t) = x(\mathrm{t}) * x^*(-\mathrm{t})$$

$$C_x(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) \cdot x^*(\tau - t)\, d\tau$$

La fonction d'autocorrélation permet de localiser un signal en temps et de faire des mesures de retard.

La d-s-e permet de localiser l'énergie d'un signal en fréquence.

Fonction d'autocorrélation

- **Propriétés**

$$C_x(t) = C_x{}^*(-t)$$

$$|C_x(t)| \leq Cx(0)$$
$$= Ex$$
$$TF[C_x(t)] = Sx(f)$$

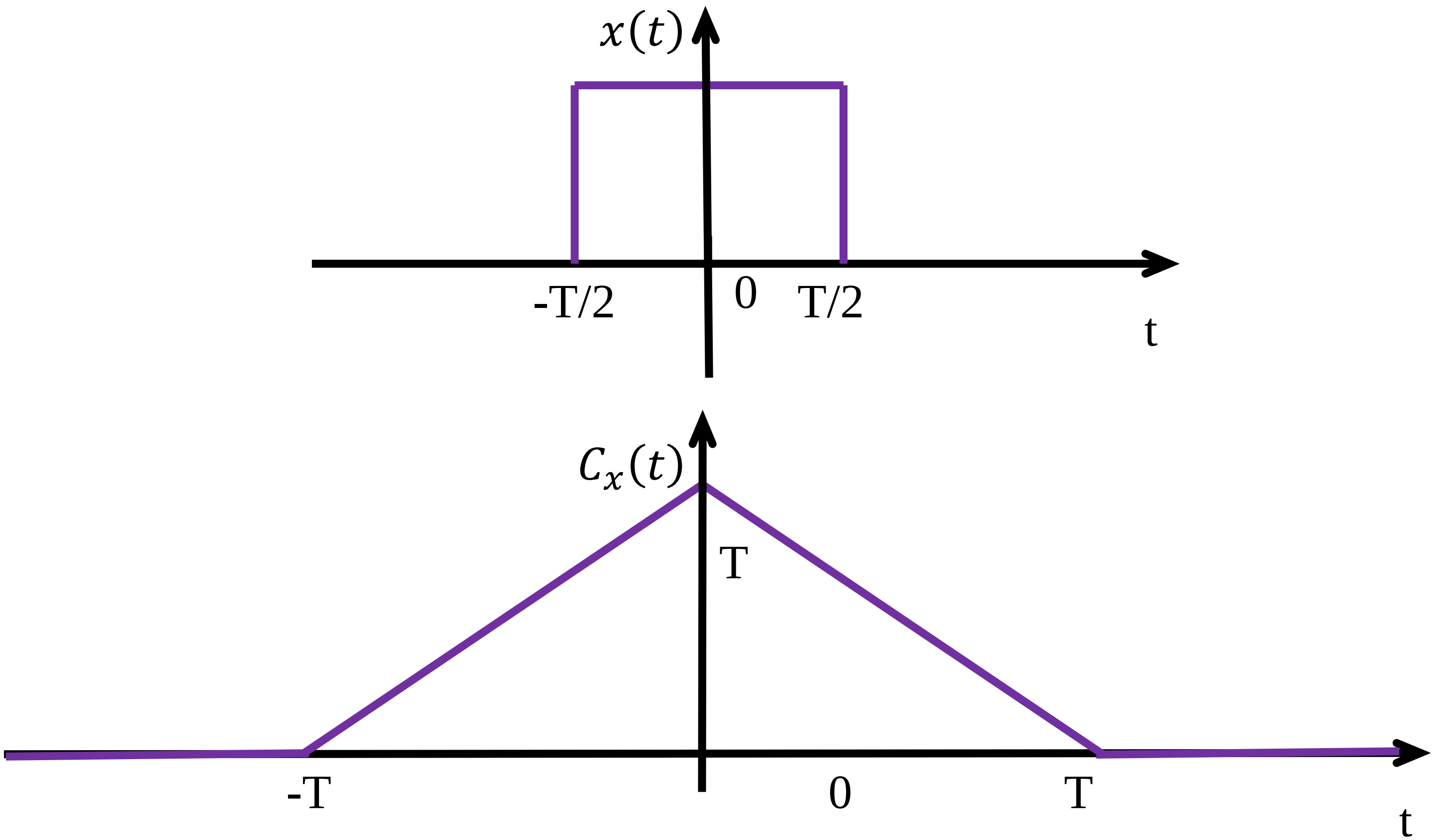
- **Degré de self-cohérence**

$$\Gamma_x(t) = \frac{C_x(t)}{C_x(0)} = \frac{C_x(t)}{E_x}$$

Le degré de self-cohérence correspond à la fonction d'autocorrélation normalisée. $\Gamma_x(t) \in [0,1]$

Fonction d'autocorrélation

- **Exemple : la fonction rectangle**



Pour une fonction réelle et paire, l'autocorrélation revient au produit de convolution.

Densité spectrale d'énergie croisée - intercorrélation

- **D-s-e croisée ou d'intercorrélation (d-s-e-i)**

$$S_{XY}(f) = \mathrm{X}(f) \cdot Y^*(f)$$

Contrairement à la d-s-e, la d-s-e-i est un nombre complexe. Son module est significatif de la puissance d'interaction et son argument du déphasage entre $x(t)$et $y(t)$.

- **Fonction d'intercorrélation**

$$C_{XY}(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) \cdot y^*(\tau - t) d\tau = x(t) * y^*(-t)$$

$C_{XY}(t)$ mesure la similitude de deux signaux en fonction du temps : mesure du décalage temporel entre deux signaux non identiques mais reliés à un même phénomène physique.

Si $\boldsymbol{C_{XY}(t) = 0}$, les signaux sont dits **non corrélés.**

Densité spectrale d'énergie croisée - intercorrélation

- **Propriétés**

$$C_{XY}(t) = C_{XY}^*(-t)$$

$$TF[C_{XY}(t)] = S_{XY}(f)$$

$$|C_{XY}(t)|^2 \leq C_X(0) \cdot C_Y(0) = E_X \cdot EY$$

- **Degré de self cohérence**

$$\Gamma_{XY}(t) = \frac{C_{XY}(t)}{\sqrt{C_X(0)} \cdot \sqrt{C_Y(0)}}$$

$$0 \leq \Gamma_{XY}(t) \leq 1$$

Densité spectrale de puissance

Les outils introduit se généralisent dans le cas des signaux à puissance finie, en particulier celui des signaux périodiques

- **Définition**

Soit $x(t)$, un signal à puissance finie et $x_T(t)$ le signal à support borné T associé à $x(t)$. $x_T(t)$ est un signal à énergie finie et admet une transformée de Fourier $X_T(f)$.

$$E_{xT} = \int_{\mathbb{R}} |x_T(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X_T(f)|^2 df$$

La puissance moyenne de $x(t)$ est donnée par :

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \, df = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_X(f) \, df$$

Densité spectrale de puissance

- **Définition**

La densité spectrale de puissance de $x(t)$ est définie par :

$$\boxed{\gamma_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2}$$

De façon similaire, la densité spectrale de puissance croisée ou d'interaction est définie par :

$$\gamma_{XY}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} X_T(f) \cdot YT(f)$$

D-s-p – fonction de corrélation

- **Autocorrélation d'un signal à puissance finie**

$$C_x(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T x(\tau) \cdot x^*(\tau - t) d\tau$$

- **Intercorrélation de signaux à puissance finie**

$$C_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T x(\tau) \cdot y^*(\tau - t) d\tau$$

- **Propriétés**

$$\mathrm{TF}[C_x(t)] = \gamma_x(f)$$

$$\mathrm{TF}[C_{xy}(t)] = \gamma_{xy}(f)$$

Signaux périodiques

Dans le cas particulier des signaux périodiques, le calcul se fait sur une période sans calcul de limite.

- **Puissance**

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt$$

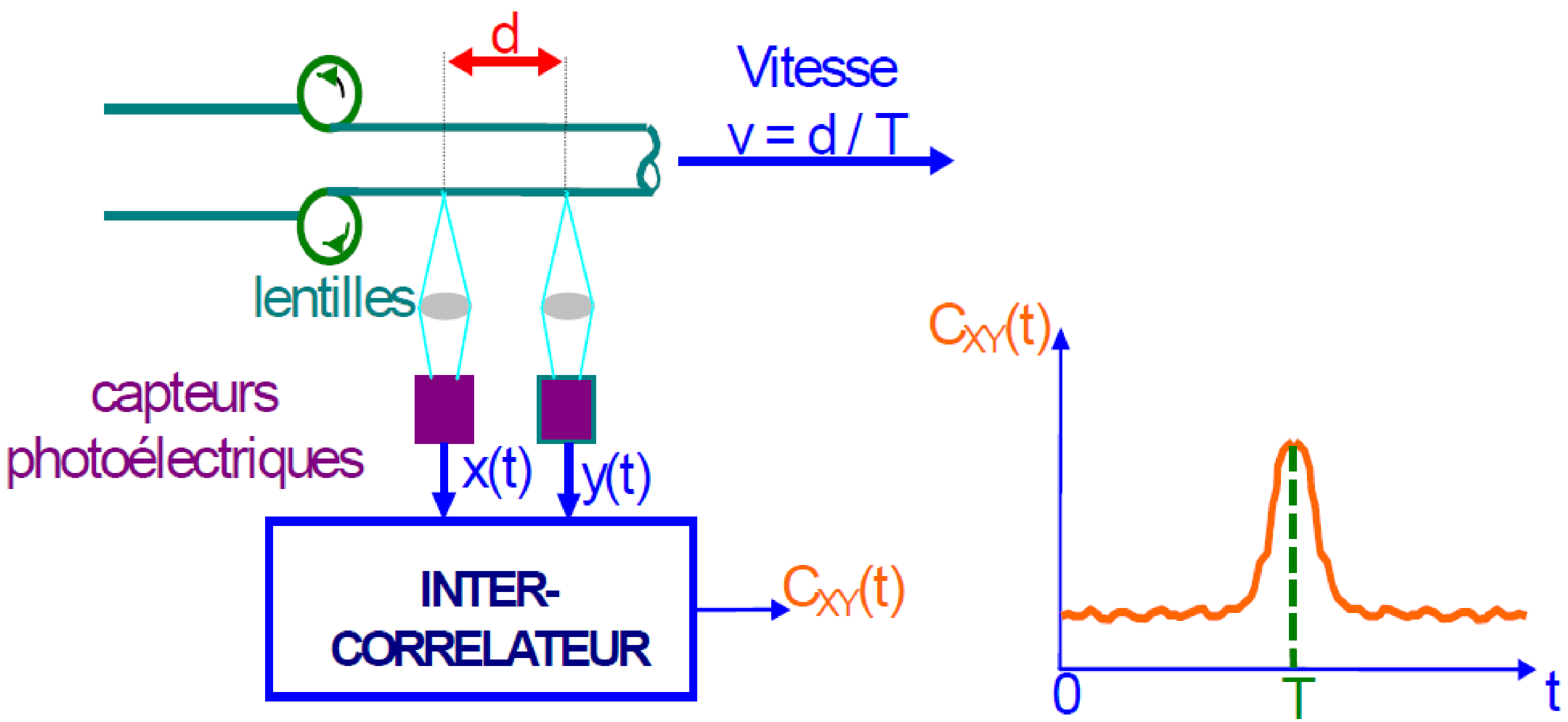
- **Autocorrélation**

$$C_x(t) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(\tau)\cdot x^*(\tau - t)d\tau$$

Exemples d'application des fonctions de corrélation

Problème :

Mesure de la vitesse de défilement d'un produit laminé



Exemples d'application des fonctions de corrélation

Problème :

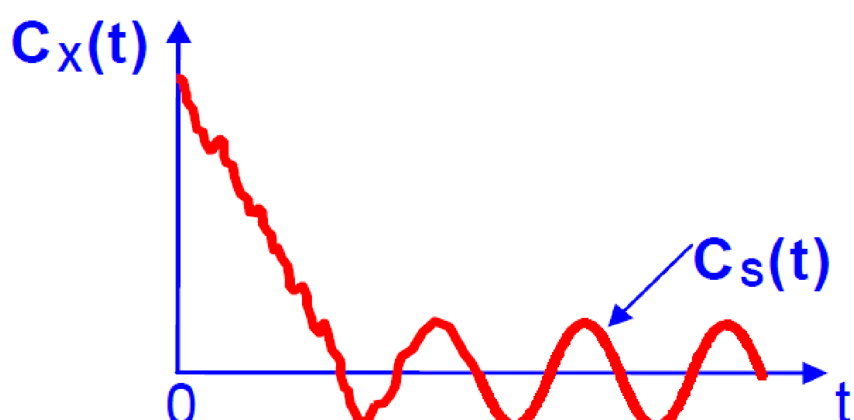
Estimation de la période T d'un signal périodique $s(t)$ inconnu noyé dans un bruit $b(t)$ non corrélé

Le signal observé est : $x(\mathrm{t}) = \mathrm{s}(\mathrm{t}) + \mathrm{b}(\mathrm{t})$

Sa fonction d'autocorrélation est donnée par :

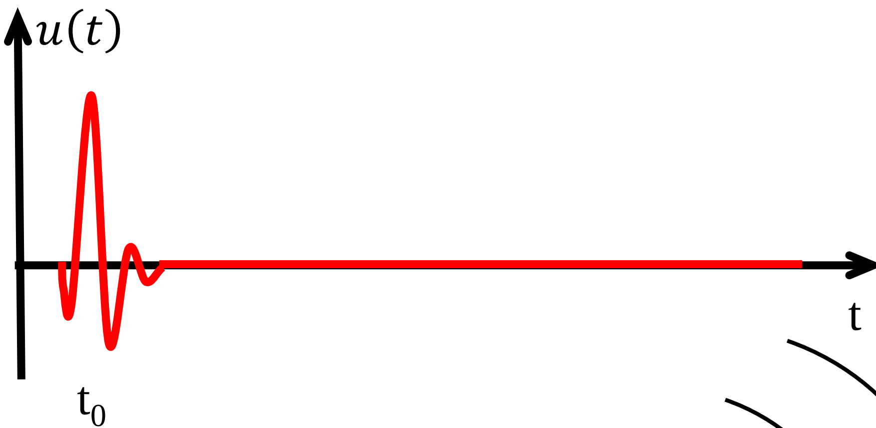
$$C_x(\mathrm{t}) = \mathrm{Cs}(\mathrm{t}) + \mathrm{Cb}(\mathrm{t}) + C_{sb}(t) + C_{bs}(t)$$

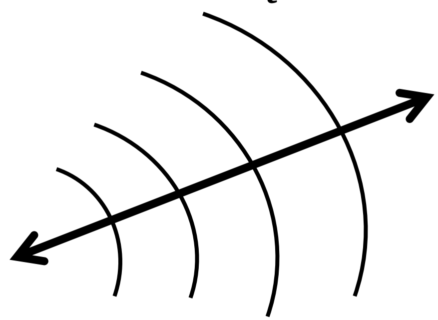
$$C_x(\mathrm{t}) = \mathrm{Cs}(\mathrm{t}) + \mathrm{Cb}(\mathrm{t})$$ Car s et b non corrélés



Exemples d'application des fonctions de corrélation

Problème : détection d'une cible par écho radar.





Durée d'un AR => $t_2=t_1-t_0$

Exemples d'application des fonctions de corrélation

Problème : détection d'une cible par écho radar.

Le signal émis u(t) est un signal de courte durée (souvent de type impulsionnelle)

Le signal réfléchie $x(t)$ est affaibli et bruité :

$$x(t) = a \cdot u(t - t_2) + b(t)$$

Pour estimer la durée t_2, aussi appelée temps de vol, il est possible d'utiliser la fonction d'intercorrélation $C_{xu}(t)$. Elle présentera un maximum en $t=t_2$.

Démonstration :

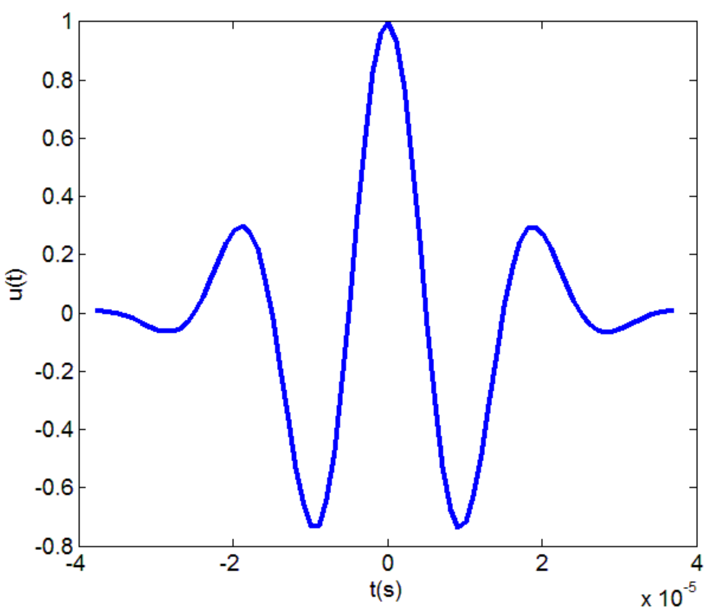
$$C_{xu}(t) = x(t) * u^*(-t) = [a \cdot u(t - t_2) + b(t)\ ] * u(-t)$$
$$= a \cdot \delta(t - t_2) * \{u(t) * u(-t)\} + b(t) * u(-t)$$
$$= a \cdot \delta(t - t_2) * Cu(t) + Cbu(t) = a \cdot Cu(t - t_2) + Cbu(t)$$

La fonction est donc maximum en t_2. De plus, si b et u ne sont pas corrélés alors $C_{bu}(t)$ tend vers 0.

Exemples d'application des fonctions de corrélation

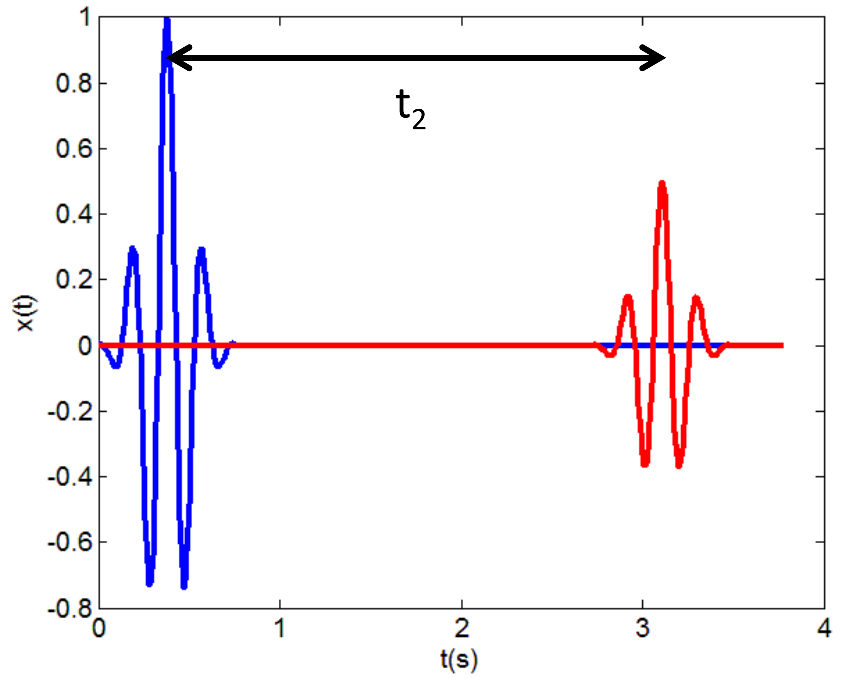
Problème : détection d'une cible par écho radar.

$u(t)$: impulsion gaussienne



Bruit nul : $SNR = \infty$

$x(t) = a \cdot u(t - t_2) + b(t)$



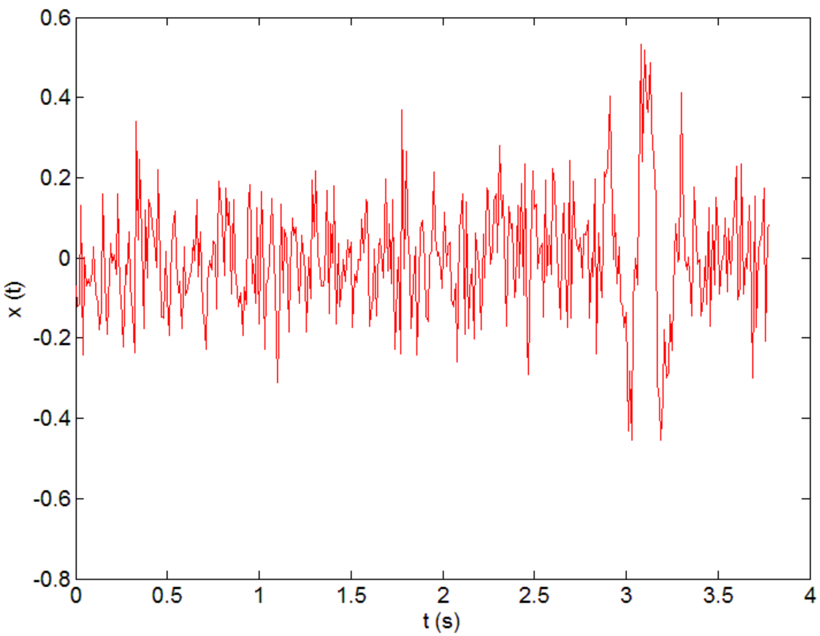
Exemples d'application des fonctions de corrélation

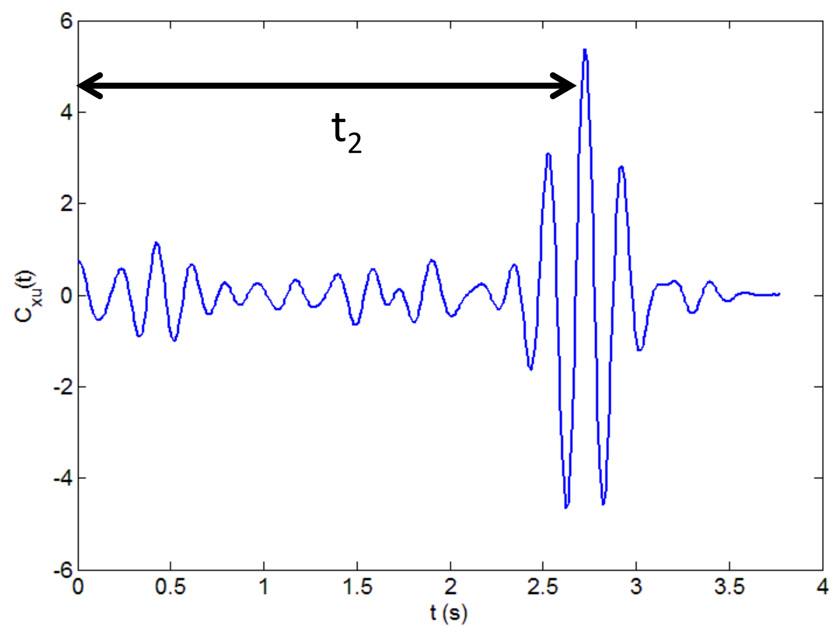
Problème : détection d'une cible par écho radar.

Bruit non nul : $SNR = 2$

$x(t) = a \cdot u(t - t_2) + b(t)$

$C_{xu}(t)$



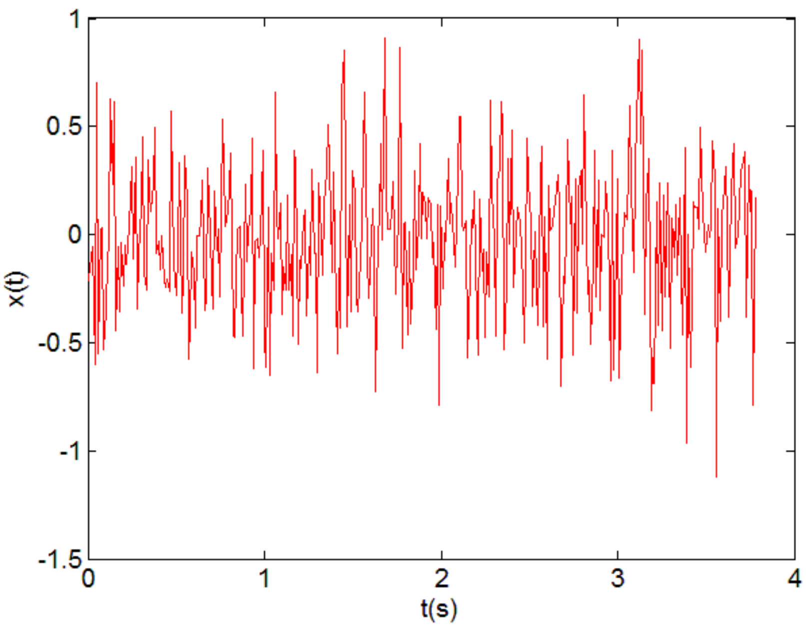


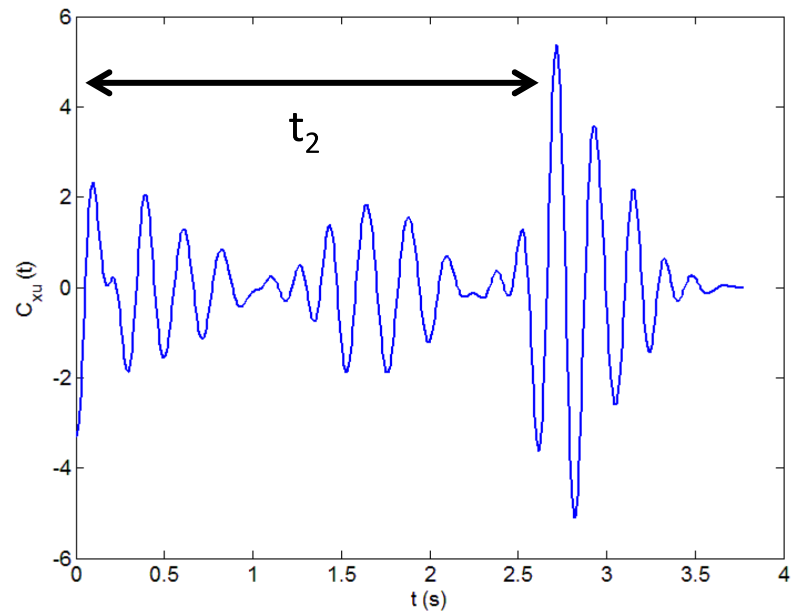
Exemples d'application des fonctions de corrélation

Problème : détection d'une cible par écho radar.

Bruit non nul : $SNR = 0{,}4\ (cas\ extrême)$

$$x(t) = a \cdot u(t - t_2) + b(t)$$

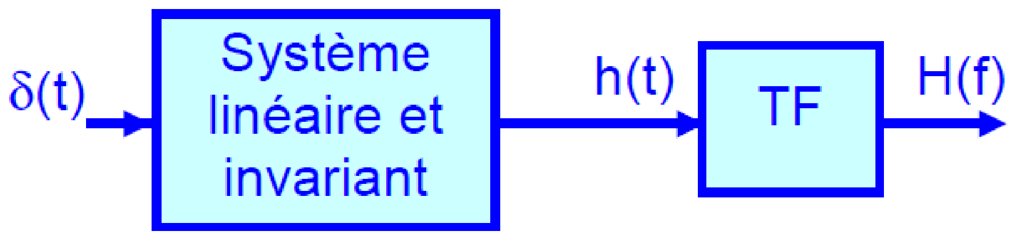




Exemples d'application des fonctions de corrélation

Problème : détermination de la fonction de transfert d'un système linéaire et invariant

Méthode directe



Inconvénients :

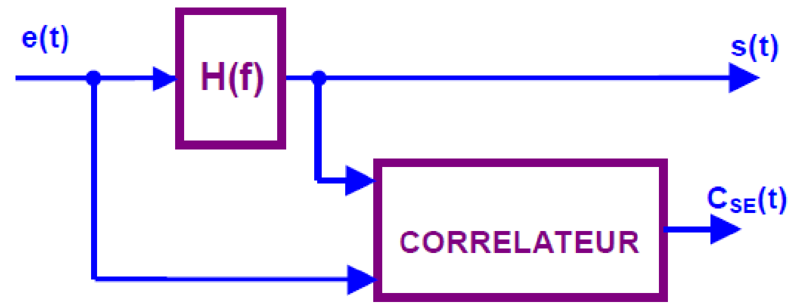
Réalisation pratique de l'impulsion de Dirac

Signal de sortie à rapport signal sur bruit faible (impulsion d'énergie faible)

Exemples d'application des fonctions de corrélation

Problème : détermination de la fonction de transfert d'un système linéaire et invariant

Méthode avec corrélateur



En sortie du dispositif :

$$C_{SE}(t) = C_E(t) * h(t)$$

Si $C_E(t)$ est assimilable à un Dirac (de durée faible devant h(t)) alors :

$$C_{SE}(t) = h(t)$$

En pratique e(t) est un signal pseudo aléatoire vérifiant cette propriété.

Avantage :

Le signal de sortie est proportionnel au temps d'intégration. Son RSB sera meilleur comparativement à la méthode direct.

Transformée de Fourier à court terme

La transformée de Fourier à court terme ou Short Time Fourier Transform consiste à réaliser la transformée du signal $x(t)$ sur un temps limité par une fenêtre de pondération $x(t)$:

$$X\,(f,\tau) = \mathrm{STFT}[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t-\tau)\cdot x(t)e^{-2\pi jft}dt$$

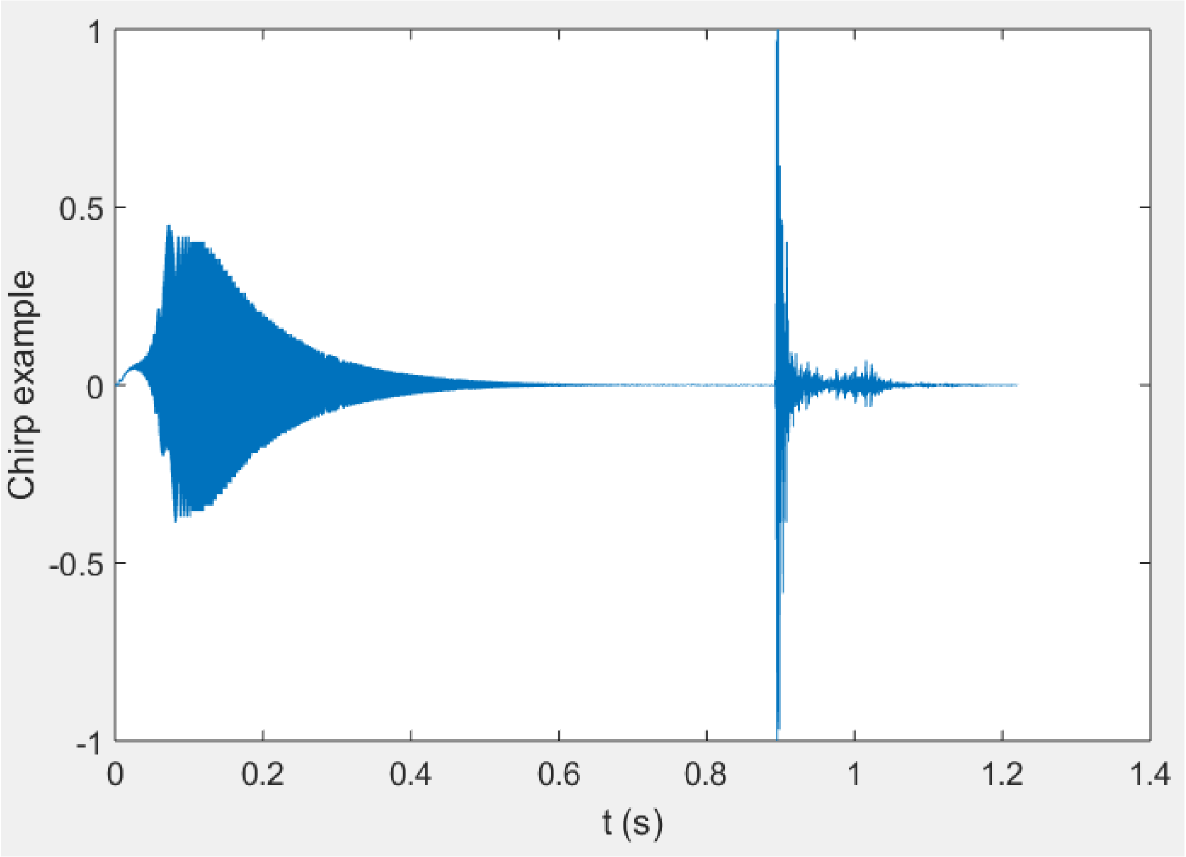
Avec $\Gamma(t-\tau)$, la fenêtre de pondération centrée en $t=\tau$

Intérêt :

En faisant varier τ sur toute la plage de temps, il est possible d'obtenir une représentation temps/fréquence du signal que nous appellerons spectrogramme.

Représentation par spectrogramme

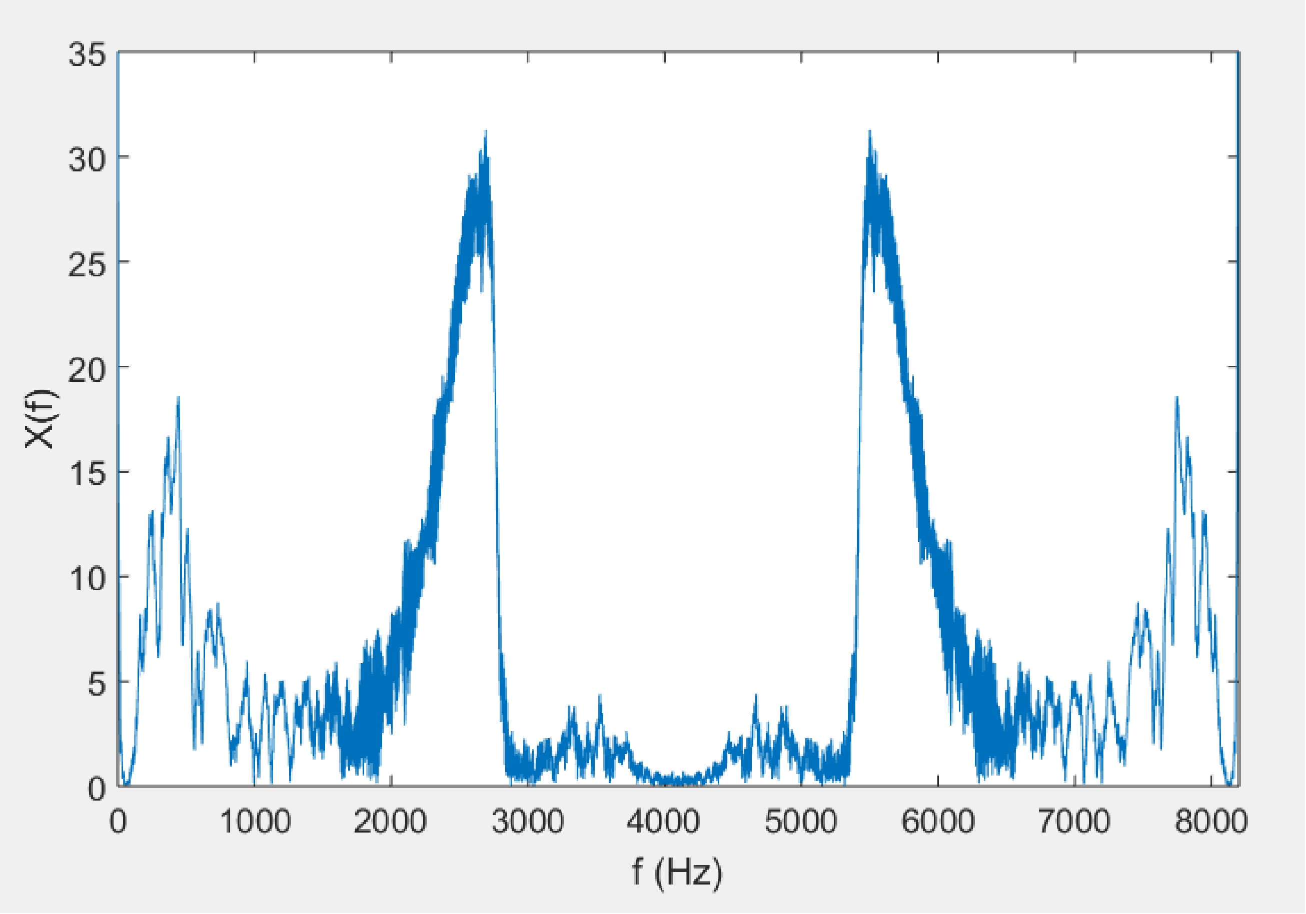
Prenons par exemple le signal suivant :



Analysons son contenu spectral avec la transformée de Fourier

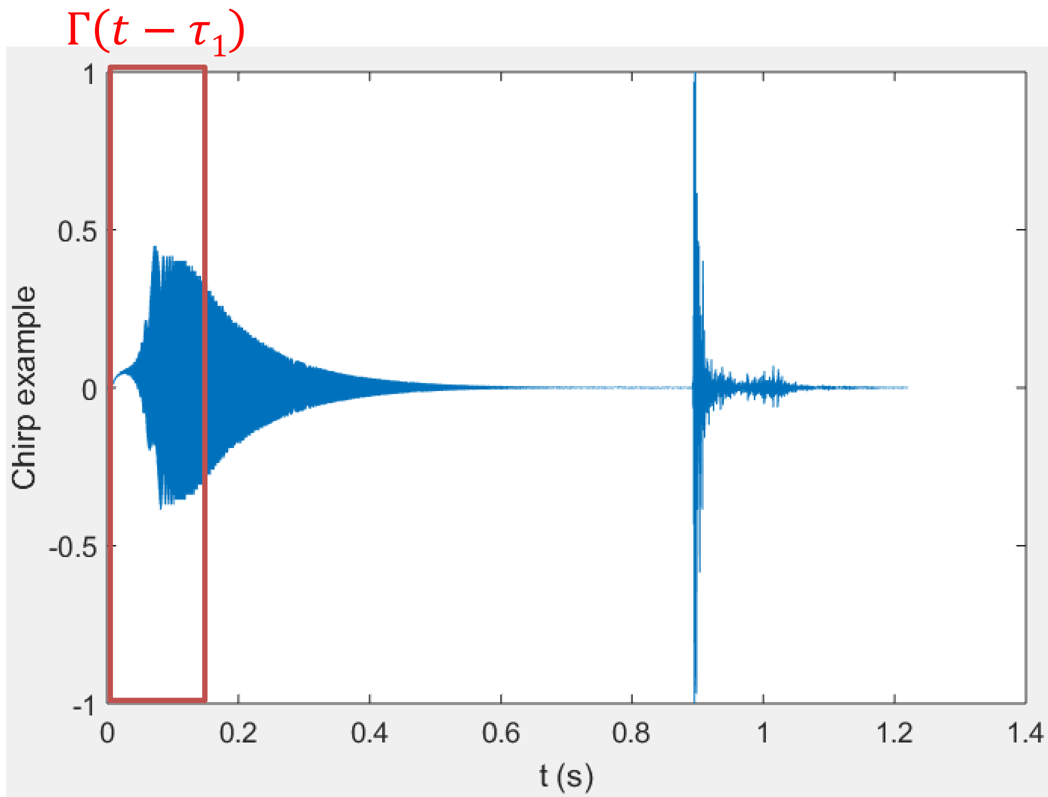
Représentation par spectrogramme

Nous observons le spectre suivant :



Analysons à présent son contenu spectral avec la transformée de Fourier à court terme

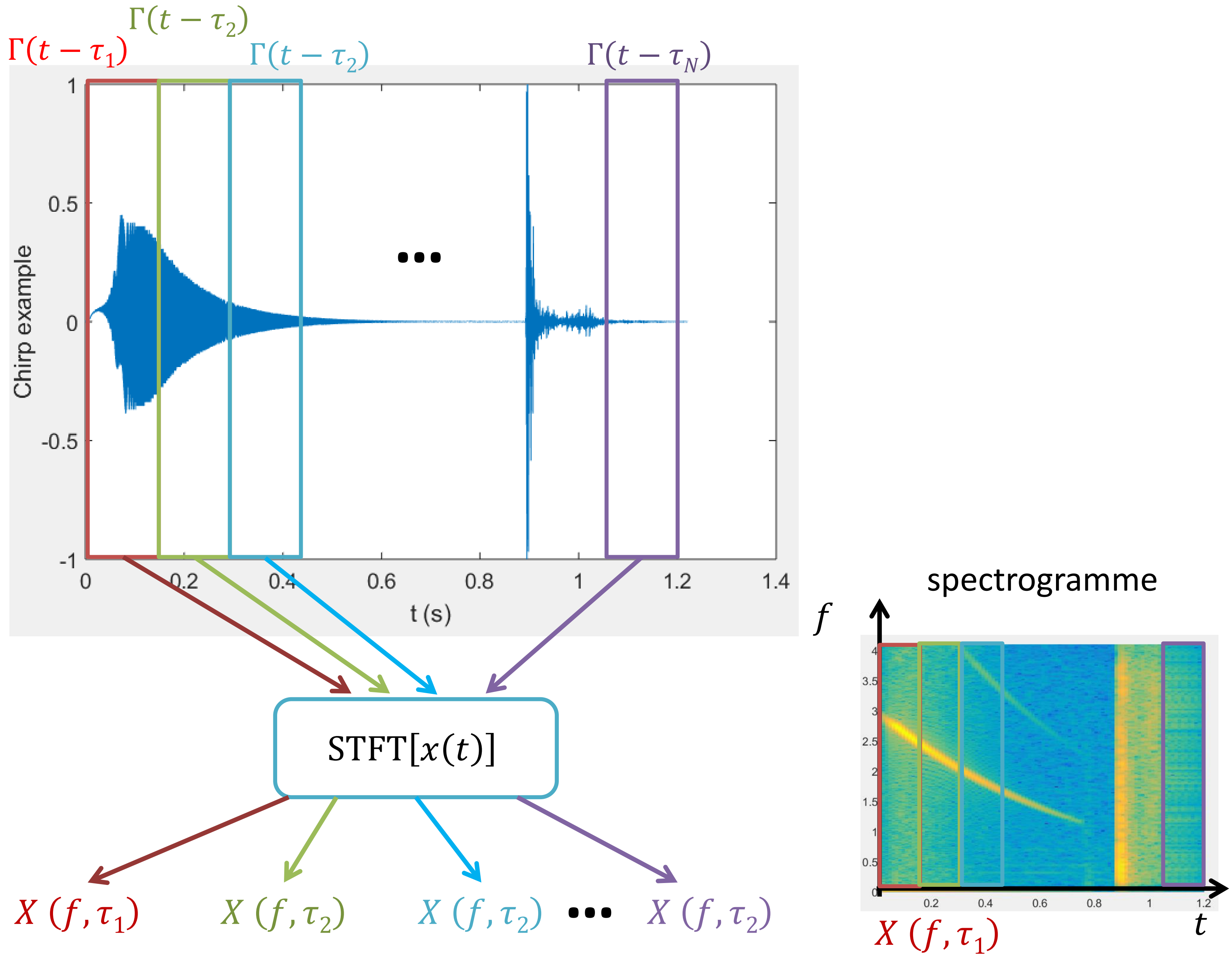
Représentation par spectrogramme



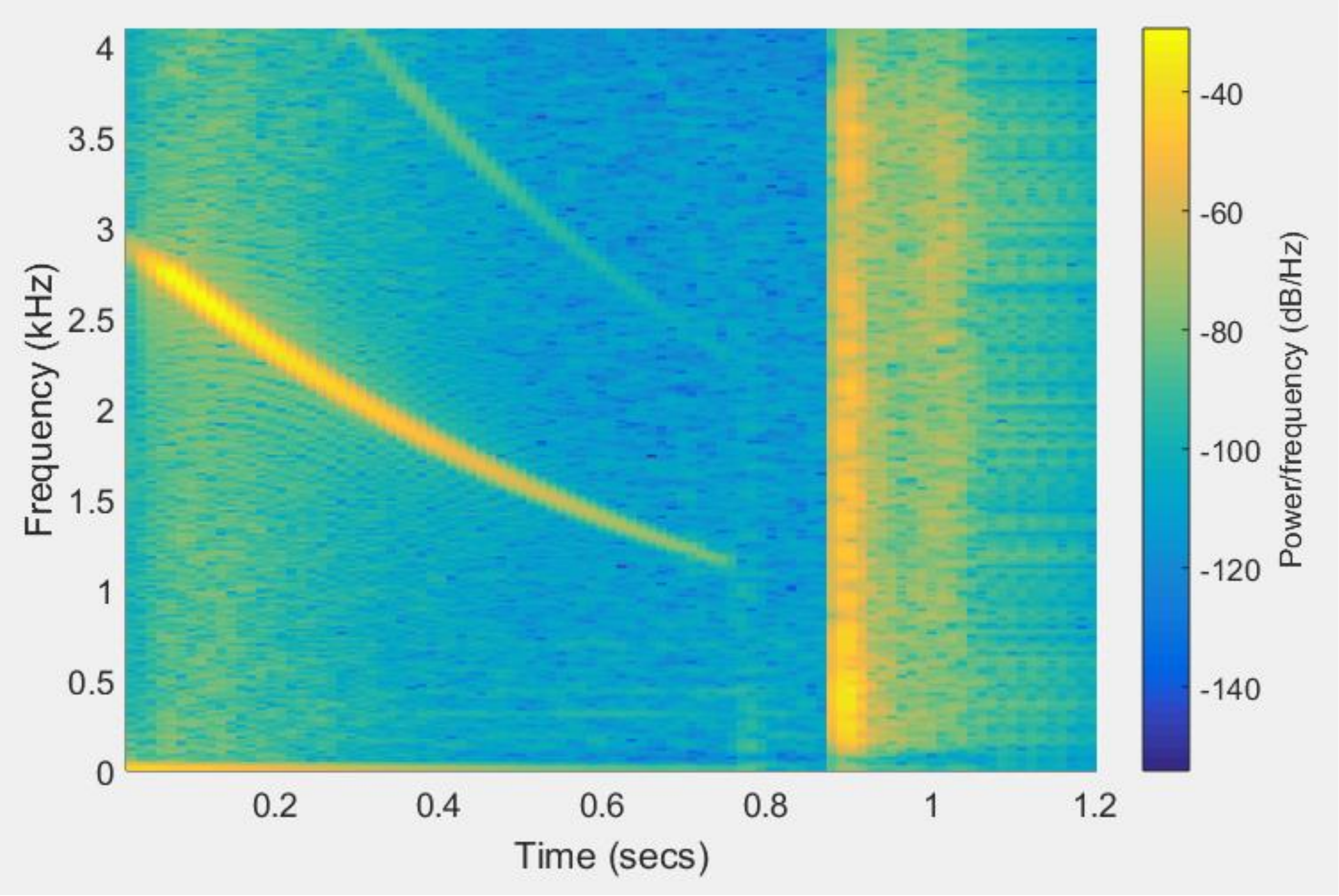
La fenêtre $\Gamma(t-\tau)$ sélectionne une partie du signal sur un temps égal à la largeur de la fenêtre. Pour chaque valeur de τ, nous effectuons la STFT :

$$X\,(f,\tau) = \mathrm{STFT}[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t-\tau)\cdot x(t)e^{-2\pi jft}dt$$

Représentation par spectrogramme



Représentation par spectrogramme



Conclusion : corrélation et densités spectrales

Outils mathématiques pour « mesurer la similitude » entre signaux

Evolution temporelle

Evolution fréquentielle

Fonction de corrélation

$$C_x(t) = x(\mathrm{t}) * x^*(-\mathrm{t})$$

TF

Densités spectrales

$$TF[C_x(t)] = Sx(f)$$

Distribution énergétique sur l'espace temps

Distribution énergétique sur l'espace des fréquences