MA 332 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Examen - 31 mai 2018

L'examen dure 1h30. Les calculatrices sont autorisées. L'étudiant peut disposer d'une feuille de notes manuscrites (recto et verso). **Il doit remettre cette feuille manuscrite avec sa copie à la fin de l'examen**.

Exercice 1 (Chaîne de Markov en temps discret - 4 points) On considère la chaîne de Markov en temps discret $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E := \{1,\ldots,10\}$ dont la matrice de transition est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe de la chaîne de Markov associée en précisant les probabilités de transitions entre les différents états
2. Donner les classes d'équivalence de cette CMTD. Préciser les classes récurrentes, transitoires, périodiques ou apériodiques

Exercice 2 (Chaîne de Markov en temps discret - 8 points) On étudie la propagation d'une maladie. Une personne peut être dans 4 états : saine, non vaccinée (état 0), vaccinée (état 1), malade (état 2) et morte à cause de cette maladie (état 3). On suppose que :

- si une personne est malade, elle a 20 % de chances la semaine d'après d'être morte. La moitié des survivants est vaccinée la semaine suivante. Les autres survivants sont sains mais non vaccinés.

- Si une personne est vaccinée, elle le reste à vie, et elle ne peut plus tomber malade, ni mourir.
- Si une personne est saine une semaine, la semaine d'après, elle tombe malade dans 20 % des cas, va se faire vacciner dans 40% des cas. Sinon, elle reste saine.

1. Modéliser cette situation par une chaine de Markov dont on donnera la matrice de transition et le graphe
2. Supposons qu'à la semaine 0, la population comporte 80% de personnes saines non vaccinées et 20% de personnes malades. Un mois plus tard, quelle est la proportions de vaccinés, de malades, de sains et de morts ?
3. Montrer qu'au bout d'un certain temps, on est forcément mort ou vacciné. Donner la valeur moyenne de ce temps
4. Robert est sain. Quelle est la probabilité qu'il meure de la maladie ?

Exercice 3 (File avec impatience - 10 points) On considère une *file avec impatience*, i.e. une file dans laquelle un client qui arrive et voit n clients (dans le système) devant lui a une probabilité p_n de s'insérer dans la file (et une probabilité $1 - p_n$ de partir). Dans cet exercice, on considèrera que les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ (avant de décider si ils entrent dans le système). Le temps de service d'un client est une variable aléatoire avec une distribution exponentielle de paramère μ. La probabilité d'entrée effective dans le systèmes pour un nouveau client arrivant vaut

$$p_n := \frac{1}{1+n}\ , \forall n \geq 0$$

où n désigne le nombre de clients déjà dans le système lorsque le nouveau client arrive.

1. Modéliser cette file par une chaîne de Markov à temps continu
2. Calculer la distribution stationnaire de probabilité associée à cette chaîne
3. Calculer le taux effectif d'entrée et le taux moyen de sortie. A partir de ces deux résultats, discuter la stabilité de la file en fonction des valeurs des paramètres λ et μ
4. calculer le nombre moyen de clients dans le système
5. calculer le temps de séjour moyen d'un client dans le système (lorsqu'il y entre effectivement)
6. la distribution stationnaire de cette file avec impatience est-elle la même que pour une file $M/M/\infty$? Les paramètres de performance qui en découlent sont-ils les mêmes que pour une file $M/M/\infty$?