MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)
Séance de TD du 20 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 30 de la séance de TD consacrée aux files et réseaux de files d'attente. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 30 (La file M/M/C/C) On considère un système de type *commutateur téléphonique*, composé de C relais permettant de rediriger les appels vers la bonne destination. Chaque relais ne traite qu'un seul appel à la fois, avec un temps de service aléatoire de distribution exponentielle $\mathrm{Exp}(\mu)$. Les appels arrivent selon un Processus de Poisson d'intensité λ, et sont ensuite dirigés vers un relais libre. Si un nouvel appel arrive alors que tous les relais sont occupés, il est perdu.

1. Donner l'expression (en fonction de λ, μ et n) des taux d'arrivées $\lambda(n)$ et des taux de départ $\mu(n)$ des appels dans le commutateur lorsque n appels sont en cours de traitement. Modéliser ce problème par une chaîne de Markov à temps continu (CMTC). Donner le graphe associé, les taux de transition et le générateur infinitésimal de la CMTC.

2. Quelle est la conidtion de stabilité de cette file? Le système est-il ergodique?

3. Calculer la distribution stationnaire de probabilité

4. Quel est le taux de perte (proportion d'appels perdus)?

5. Donner l'expression du nombre moyen d'appels en cours de traitement, du temps moyen de séjour des appels dans le commutateur et du débit moyen de sortie des appels

Correction de l'Exercice 30

1. Le système considéré est en fait une file de type $M/M/C/C$ avec C serveurs qui opèrent en parallèle et une capacité limitée à C clients. Il n'y a donc pas de buffer dans cette file, représentée schématiquement à la figure 1. L'état du système est décrit par le nombre total de clients

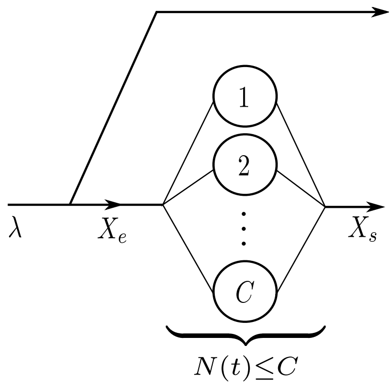

Figure 1: Représentation schématique d'une file $M/M/C/C$ utilisée pour modéliser le commutateur téléphonique de l'exercice 30

dans le système, $N(t) \in E := \{0, 1, \ldots, C\}$. Lorsque $N(t) = n \leq C$, tous les clients sont en service et chacun est susceptible de quitter son serveur avec un taux exponentiel. Le taux de départ $\mu(n)$ – qui est aussi le taux de transition de l'état n vers l'état $n-1$ – vaut donc $\mu(n) = n\mu$. Lorsque $N(t) = C$, les C serveurs sont occupés et le taux de départ vaut $\mu(n) = C\mu$. Le taux d'arrivée des clients dans le système – qui est aussi taux de transition de n à $n+1$ – est constant et vaut $\lambda(n) = \lambda$, tant que $N(t) = n < N$. Pour $N(t) = C$, le taux d'arrivée est nul. On a donc :

$$\mu(n) = \mu n \, , \; \forall n \in \{0, 1, \ldots, C\}$$

et

$$\lambda(n) = \begin{cases} \lambda & \text{si } n < C \\ 0 & \text{si } n = C \end{cases}$$

La CMTC qui correspond à cette file $M/M/C/C$ est donnée à la figure 2. Le *générateur infinitésimal* (infini) de la file $M/M/C$ s'écrit :

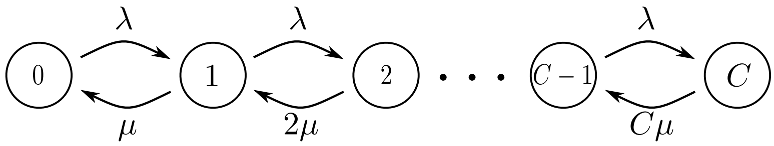

Figure 2: La chaîne de Markov à temps continu assocée à la file $M/M/C/C$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (C-1)\mu & -\lambda-(C-1)\mu & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & C\mu & -\lambda-C\mu \end{pmatrix}$$

2. La CMTC qui décrit la file $M/M/C/C$ est finie et irréductible. Tous les états sont donc nécessairement récurrents non nuls. La distribution stationnaire de probabilité existe, est unique et égale à la distribution limite. La file $M/M/C/C$ est donc nécessairement stable et ergodique.

3. la distribution stationnaire s'obtient à l'aide de la méthode des coupes. On obtient les relations suivantes :

$$\lambda \boldsymbol{\pi}_{n-1} \quad = \quad n\mu\boldsymbol{\pi}_n \, , \; \forall n \in \{1, \ldots, C\}$$

   En posant,
$$\rho := \frac{\lambda}{\mu}$$
   on obtient directement :
$$\boldsymbol{\pi}_n = \frac{\rho^n}{n!}\boldsymbol{\pi}_0$$
   La condition de normalisation donne :
$$\sum_{n=0}^{C} \boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\pi}_0 \sum_{n=0}^{C} \frac{\rho^n}{n!} = 1$$
   c'est-à-dire
$$\boldsymbol{\pi}_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{C} \frac{\rho^n}{n!}}$$

4. En régime permanent, lorsqu'un appel arrive, il est perdu si il y a déjà C clients dans le système. La proportion d'appels perdus est donc la

probabilité limite d'être dans l'état C, soit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_C &= \frac{\rho^C}{C!}\boldsymbol{\pi}_0 \\
&= \frac{\frac{\rho^C}{C!}}{\sum_{n=0}^{C}\frac{\rho^n}{n!}} \\
&= \frac{1}{1 + C!\sum_{n=0}^{C-1}\frac{\rho^{n-C}}{n!}}
\end{aligned}$$

5. Les débit moyen de sortie X_s et le débit moyen d'entrée X_e (dans le commutateur) sont égaux entre eux, mais ne sont pas égaux au taux d'arrivée λ des appels. En effet, une partie des appels sont perdus et n'entrent pas dans le commutateur. On a :

$$\begin{aligned}
X_s &= \sum_{n=0}^{C} n\mu\boldsymbol{\pi}_n \\
&= \mu\rho\boldsymbol{\pi}_0\sum_{n=1}^{C}\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \mu\rho\boldsymbol{\pi}_0\sum_{n=0}^{C-1}\frac{\rho^n}{n!} \\
&= \mu\rho\left(1 - \frac{\rho^C\boldsymbol{\pi}_0}{C!}\right) \\
&= \lambda\left(1 - \frac{\rho^C\boldsymbol{\pi}_0}{C!}\right) \\
&= \lambda\left(1 - \boldsymbol{\pi}_C\right)
\end{aligned}$$

   On retrouve bien sûr le résultat attendu : le débit moyen dans le commutateur est égal au taux d'arrivée λ diminué du taux d'appels perdus

$\lambda\boldsymbol{\pi}_C$. Le nombre moyen de d'appels dans le commutateur s'écrit :

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{n=0}^{C} n\boldsymbol{\pi}_n \\
&= \rho\boldsymbol{\pi}_0 \sum_{n=1}^{C} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \rho\boldsymbol{\pi}_0 \sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^{n}}{n!} \\
&= \rho\left(1 - \frac{\rho^C\boldsymbol{\pi}_0}{C!}\right) \\
&= \rho\left(1 - \boldsymbol{\pi}_C\right)
\end{aligned}$$

Le temps moyen de séjour des clients effectivement admis dans le commutateur est simplement le temps moyen de service puisqu'il n'y a pas de buffer :

$$R = \frac{1}{\mu}$$

On vérifie aisément la loi de Little $Q = RX_s$.