MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Processus de Poisson
Séance de TD du 26 mars 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 7 de la séance de TD consacrée aux processus de Poisson. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 7
On suppose que les clients d'un magasin arrivent dans un magasin selon un processus de Poisson au rythme de 3 par minute. Le temps de séjour d'un client dans le magasin suit une loi exponentielle de paramètre $\mu = 0.1$. Le temps que passe chaque client dans le magasin est indépendant du temps qu'y passent les autres clients. On note $N(T)$ le nombre de clients encore dans le magasin à l'instant $T = 30\,\text{min}$. On note $N_p(T)$ le nombre de clients partis à l'instant T. Donner la loi de ces deux variables aléatoires.

Correction de l'Exercice 7
Soit $N_a(t)$ le nombre de clients arrivés dans le magasin au temps t. C'est un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 3\,\text{min}^{-1}$. Soit $T_s \sim \exp \mu$ (avec $\mu = 0.1\,\text{min}^{-1}$) la variable aléatoire exponentielle décrivant le temps de séjour des clients dans le magasin. En supposant qu'il n'y a pas de client dans le magasin au temps $t = 0$, on a :

$$N_a(t) = N(t) + N_p(t)$$

Nous allons dans cet exercice redémontrer un résultat mentionné en cours sur la décomposition du processus de Poisson $N_a(t)$ aux deux sous processus,

$N(t)$ et $N_p(t)$, qui correspondent aux deux sous-classes des clients arrivés au temps t qui seront respectivement encore dans le magasin ou partis au temps T. Dans ce cas, les probabilités d'appartenance des clients à l'une ou l'autre de ces sous-classes varient avec le temps. Appelons $p(t)$ la probabilité qu'un client arrivé au temps $t \in [0, T]$ soit encore dans le magasin au temps $T \geq t$. Cette probabilité s'écrit :

$$p(t) := P\left(T_s \leq T - t\right) = \int_0^{T-t} \mu e^{-\mu x}\, dx = 1 - e^{-\mu(T-t)}$$

D'après le cours, nous savons que dans ce cas la loi conditionnelle de $N(T)$ (respectivement $N_p(T)$), le nombre d'arrivées $N_a(T) = n$ étant fixé, est distribuée selon une loi binomiale[1] $B(n, p)$ (respectivement $B(n, 1-p)$) de paramètre :

$$\bar{p} := \frac{1}{T} \int_0^T p(t)\, dt = 1 - \frac{1}{\mu T}\left(1 - e^{-\mu T}\right) \tag{1}$$

En utilisant la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned}
P\left(N(T) = k\right) &= \sum_{n \geq k} P\left(N(T) = k \,|N_a(T) = n\right) P\left(N_a(T) = n\right) \\
&= \sum_{n \geq k} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \bar{p}^k (1-\bar{p})^{n-k} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \\
&= \frac{(\bar{p}\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{((1\bar{p})\lambda T)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{(\bar{p}\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!} \sum_{m \geq 0} \frac{((1-\bar{p})\lambda T)^m}{m!} \\
&= \frac{(\bar{p}\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!} e^{(1-\bar{p})\lambda T} \\
&= \frac{(\bar{p}\lambda T)^k}{k!} e^{-\bar{p}\lambda T}
\end{aligned} \tag{2}$$

La variable $N(T)$ est donc distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $\bar{p}\lambda T$ où $\bar{p}$ est la probabilité moyenne sur $[0, T]$ définie en (1). Attention, le processus $\{N(T)\}_{T>0}$ n'en est pas pour autant un processus de Poisson puisque la probabilité $\bar{p} = \bar{p}(T)$ dépend explicitement du temps T. La variable $N_p(T)$ est elle aussi distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $(1-\bar{p})\lambda T$ (même raisonnement que pour $N(T)$).

Remarque 1 : si le nombre total d'arrivées sur $[0, T]$ est connu (notons $N_a(T) = n$), alors les instants de ces arrivées sont distribués selon des lois

[1] ce résultat est redémontré, pour information, dans la remarque 1 à la fin de la correction de l'exercice

uniformes indépendantes (notées A_k, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$). Les temps de séjour des n clients arrivés étant distribués selon des variables aléatoires exponentielles (indépendantes entre elles et indépendantes des instants d'arrivées), la probabilité pour le client k (n'importe lequel des clients arrivés sur $[0, T]$) d'être encore dans le magasin au temps T est $P(S \leq T - A_k)$. Or $T - A_k$ est elle aussi distribuée de manière uniforme sur l'intervalle $[0, T]$. On a donc

$$P(S \leq T - A_k) = \iint_{x \leq y} \mu e^{-\mu x} \cdot \frac{1}{T} \, dx dy = 1 - \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu T}$$

C'est précisément la probabilité que nous avons notée précédemment $\bar{p}$. La probabilité d'avoir k clients encore présents au temps T, parmi les n clients arrivés sur $[0, T]$, s'écrit donc :

$$P\left(N(T) = k \,|N_a(T) = n\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \bar{p}^k (1 - \bar{p})^{n-k} \qquad (3)$$

car il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles des k clients qui sont encore dans le magasin au temps T parmi les n clients arrivés sur $[0, T]$ et - pour chacun de ces choix possibles - une probabilité $\bar{p}^k (1 - \bar{p})^{n-k}$.

Remarque 2 : les résultats (2) et (3) (qui utilisent la définition (1) de la probabilité moyenne $\bar{p}$) ont été vus en cours, mais les démonstrations détaillées dans cette correction avaient été admises. Elles sont développées ici pour votre information. Pour répondre à la question initiale, il aurait pu suffire de citer ces résultats sans les démontrer.