MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

Chaînes de Markov à temps discret (CMTD)
Séance de TD du 05 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 12 de la séance de TD consacrée aux chaînes de Markov à temps discret. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

Exercice 12
On dispose de 2 machines qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Au cours d'une journée chaque machine peut tomber en panne avec la probabilité $1 - p$.

1. On suppose que l'on peut réparer la nuit une seule machine qui marchera ainsi le lendemain. Modéliser le système par une chaîne de Markov (donner son graphe, sa matrice)

2. Même question si la réparation ne se fait pas pendant la nuit mais le lendemain.

3. Calculer dans le deuxième cas (réparations en journée) la distribution stationnaire de probabilités. Quelle est la probabilité pour un ouvrier qui arrive le matin de se retrouver en chômage technique dansce deuxième cas ?

Correction de l'Exercice 12

1. Soit $X_n \in E := \{1, 2\}$, le nombre de machine(s) qui fonctionne(nt) le matin du jour n. Le graphe associé à la CMTD qui modélise le fonctionnement de l'atelier est représenté à la figure 1 (avec $p \in [0, 1]$). La transition de 1 vers 1 suppose que la machine fonctionnant le jour n tombe en panne, tandis que l'autre est en réparation. Il n'y aura donc de nouveau qu'une seule machine qui fonctionne le jour $n + 1$. La transition de 2 vers 1 suppose que les 2 machines qui fonctionnent le jour n tombent en panne. Une seule pourra être réparée pendant la nuit. La transition de 1 vers 2 suppose que la machine qui fonctionne le jour n ne tombe pas en panne. La probabilité de transition de 2 vers 2 est calculée comme la complémentaire des autres. Elle correspond soit au cas où aucune des deux machines ne tombe en panne, soit au cas où une seule tombe en panne.
   La matrice de passage associée à cette chaîne de Markov est

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ (1-p)^2 & p(2-p) \end{pmatrix}$$

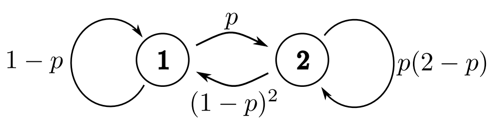

Figure 1: Le graphe associé à la CMTD qui modélise le focntionnement de l'atelier, dans l'exercice 12. Premier cas : une machine au plus est réparée pendant la nuit

2. Si les deux machines sont en panne à la fin du jour $n - 1$, l'une d'elle sera réparée le lendemain. Au matin du jour n, il n'y aura donc aucune machine opérationnelle dans l'atelier. On a donc dans ce scénario trois états possibles. Soit $X_n \in E := \{0, 1, 2\}$, le nombre de machine(s) qui fonctionne(nt) le matin du jour n. Le graphe associé à la CMTD qui modélise le fonctionnement de l'atelier est représenté à la figure 2 (avec $p \in [0, 1]$). Par rapport à la situation précédente, il y a un nouvel état et la plupart des probabilités de transition changent. La transition de 0 vers 1 est certaine (une machine sera nécessairement réparée le jour n et opérationnelle le jour $n + 1$). La transition de 1 vers 0 est impossible (la machine en panne est nécessairement réparée pendant le jour n). La transition de l'état 2 vers l'état 0 signifie que deux machines tombent en panne le jour n. Au contraire, la transition de 2 vers 2 signifie qu'aucune des deux machines qui fonctionnent le jour n ne tombe en panne. La transition de 1 vers 2 signifie que la machine qui fonctionne le jour n ne tombe pas en panne, pendant que l'autre est

réparée. Au contraire, la transition de 1 vers 1 signifie que la machine qui fonctionne le jour n tombe en panne au cours de cette journée. Enfin, la probabilité de transition de 2 vers 1 est calculée comme la probabilité complémentaire des probabilités de transition de 2 vers 0 ou 1.

La matrice de passage associée à cette chaîne de Markov est

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-p & p \\ (1-p)^2 & 2p(1-p) & p^2 \end{pmatrix}$$

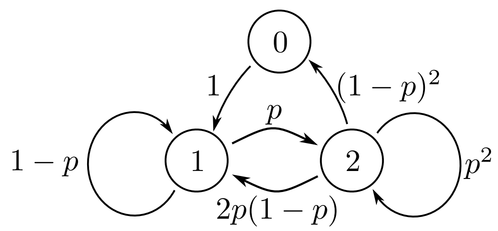

Figure 2: Le graphe associé à la CMTD qui modélise le focntionnement de l'atelier, dans l'exercice 12.

3. Il s'agit ici de calculer la distribution stationnaire de probabilités, en particulier la probabilité d'être d'en l'état 0 en régime stationnaire (qui est aussi la proportion du temps que la châine passe dans l'état 0, sur le long terme). La distribution stationnaire de probabilité satisfait les équations :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_0 & \boldsymbol{\pi}_1 & \boldsymbol{\pi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_0 & \boldsymbol{\pi}_1 & \boldsymbol{\pi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-p & p \\ (1-p)^2 & 2p(1-p) & p^2 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{\pi}_0 + \boldsymbol{\pi}_1 + \boldsymbol{\pi}_2 = 1$$

En résolvant ces équations, on obtient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_0 &= \frac{(1-p)^2 p}{p^3 - 3p^2 + 2p + 1} \\ \boldsymbol{\pi}_1 &= \frac{(1-p)^2}{p^3 - 3p^2 + 2p + 1} \\ \boldsymbol{\pi}_2 &= \frac{p}{p^3 - 3p^2 + 2p + 1} \end{aligned}$$

La probabilité d'avoir les 2 machines en panne en arrivant le matin est $\boldsymbol{\pi}_0$.