



# Module : Transmission de l'information

## Théorie des Communications

--- EE330 ---

---

### Support de cours

---

3<sup>ème</sup> année

- Crois-tu que les hommes aient, seuls, la capacité d'émettre ou de transmettre ?

- Nul ne fait signe sauf nous !

Quelle prétention !

Les dauphins et les abeilles communiquent,

ainsi que les fourmis, les vents et les courants de la mer.

Les vivants et les choses inertes retentissent ensemble sans cesse,  
pas de monde sans ce tissu bouclé de relations, des milliards de fois tressé.

M. Serres (*La légende des Anges*)

# Transmission des Signaux

**Volume horaire :** 7 cours (12,25h) – 6 TD (10,5h) – 1 TP (3,5h)

**Crédits :** 2,5 ECTS

**Modalités des évaluations :** Examen (75%) – TP (25%)

Si 2° session, remplace de la moyenne du cours

**Supports :** Diapositives de cours, sujets de TD et TP dactylographiés

**Pré-requis :** Bases mathématiques, probabilités, Traitement du signal, électronique, automatique, physique

**Responsable du cours :** Yvan Duroc (A105 - Yvan.Duroc@.inpg.fr)



## Chapitre d'Introduction

### Plan du chapitre

- 1. Plan et objectifs du cours
- 2. Généralités
- 3. Historique
- 4. Principes généraux
- 5. Chaîne de communication
- 6. Bibliographie de référence et informations



Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos



# Introduction à la Théorie des Communications

Chapitre d'introduction

- EE330 -

3

Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos



## A propos du cours

### □ Objectifs

**Présenter les principaux concepts relatifs à la transmission des informations**

### □ Sujet de très grande ampleur

**Plusieurs visions possibles**

- **Théorie des communications** : concepts mathématiques et traitement du signal (codage, modulation, détection, estimation, ...)
- **Électronique, RF et optoélectronique** : dispositifs de transmission
- **Informatique et réseaux** : organisation des informations (logiciels et protocoles)
- **Electromagnétisme et physique** : propagation et antennes
- **Connaissances générales** : applications et produits

Chapitre d'introduction

- EE330 -

4

Présentation

Généralités

Historique

Principes

Chaîne

Biblio et Infos

## A propos du cours

### Vision « Théorie des Communications » en 3<sup>ème</sup> année

#### Pourquoi est-ce indispensable ?

Pour répondre à des questions du type :

- Pourquoi le haut débit est-il possible sur certains types de supports et pas sur d'autres ?
- Pourquoi les temps d'établissement des connexions et les temps de chargement sont-ils évolutifs avec la radio ?
- D'où proviennent les brouillages ?
- ...

Et parce que les performances d'une transmission dépendent en premier lieu des propriétés de signaux mis en jeu et non de l'électronique ou d'un quelconque protocole !

### La suite

En EIS ...

Vision orientée « Électronique et RF » (dont module 5A-ESE)

En IR ...

Vision orientée « Réseaux »



Chapitre d'introduction

- EE330 -

5

Présentation

Généralités

Historique

Principes

Chaîne

Biblio et Infos

## Thèmes abordés

**Outils mathématiques dédiés à la théorie des communications**

**Modélisation et étude des systèmes de communications analogiques et numériques**



Chapitre d'introduction

- EE330 -

6

Présentation

Généralités

Historique

Principes

Chaîne

Biblio et Infos

# La suite de la présentation ...

## Introduction

## Modélisation des signaux bande étroite

## Communications analogiques

## Communications numériques

## Conclusion

Chapitre d'introduction

- EE330 -

7

Présentation

Généralités

Historique

Principes

Chaîne

Biblio et Infos

# Problématique générale

**4G = C A<sup>5</sup> Communication Anytime Anywhere with Anybody on Any device through Any network**

Transmettre (à distance) des informations de plus en plus nombreuses, de plus en plus riches et cela le plus fidèlement et le plus facilement possible

- **Solutions sans fil**
- **Systèmes universels**
- **Qualité de la transmission à la hauteur de celle des éléments de génération et de restitution**

## Exemples

- **Communications mobiles (téléphonie portable)**
- **Réseaux WxAN (Wireless x Area Network) ...**
- **Internet (révolution de la diffusion de l'information : invention de l'imprimerie au XV<sup>e</sup> siècle !)**

Chapitre d'introduction

- EE330 -

8



Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos

## Paradigme de Shannon



Transmettre d'un point à un autre, dans un certain milieu, un message

### QUEL MESSAGE ?

- Sons et/ou Images
- Données (informations représentées par des codes : nombres, caractères alphanumériques, symboles mathématiques ou graphiques ... )
- Signalisation (signaux d'appel, de numérotation, de taxation, de surveillance du trafic, ... )



Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos

## Transmettre d'un point à un autre, dans un certain milieu, un message

### DANS QUEL MILIEU ? SUR QUEL SUPPORT DE TRANSMISSION ?

- Propagation guidée
  - Câbles à paires symétriques (« paires torsadées »)  
Lignes téléphoniques, réseaux bas ou moyens débits, hauts débits à courte distance
  - Câbles à paires coaxiales  
Réseaux locaux haut débit, distribution vidéo
  - Fibres optiques  
Réseaux longue distance et/ou hauts débits, réseaux industriels
- Propagation en espace libre
  - Infrarouge  
Télécommande, communications « indoor »
  - Ondes électromagnétiques (ondes radios)  
Communications mobiles, satellites faisceaux hertziens



Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos

# Transmettre d'un point à un autre, dans un certain milieu, un message

**CHAINE de TRAITEMENT (Émetteur/Récepteur ≡ Transceiver)**  
permettant de retrouver en réception le message !

- **Fonction des caractéristiques de l'information à transmettre et des contraintes qui lui sont liées**  
(transmission « temps réel » ou différée, ...)

## □ Fonction du milieu de transmission

Chaque milieu présente des propriétés physiques différentes et (a priori) PERTURBATRICES :

- propagation des ondes,
- filtrage de certaines fréquences,
- distorsions,
- ajout de bruit, ...



Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos

# Les différents systèmes rencontrés

## □ Systèmes primitifs pour transmettre à distance

Transmissions sans fil : tam-tam, miroir, feux, ...

Transmissions avec fil : pot de yaourt, ...

Les informations transmises sont « codées »

## □ Premier système technique

Transmission avec fil : télégraphe

## □ Systèmes sans fil développés depuis

Télégraphe sans fil

Téléphone

Télévision

Satellites

Réseaux informatiques

Téléphonie mobile...

Mort annoncée des technologies analogiques



# Quelques dates clés dans l'histoire des télécommunications

Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos

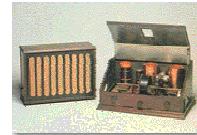
**1780 : Lois de l'électrostatique – Coulomb**  
**1793 : Télégraphe – Chappe**



Chappe

**1820 : Effets magnétiques du courant électrique – OErsted**  
**1876 : Téléphone – Bell**

**1888 : Ondes électromagnétiques – Hertz (Maxwell)**  
**1890 : Télégraphie sans fil – Branly**  
**1920 : Radiodiffusion aux US**  
**1933 : 1<sup>o</sup> émission de Télévision**



Récepteur radio 1926

**1947 : Transistor – Bell Telephone Laboratories**  
**années 1950 : FM stéréo et télévision couleur**  
**1962 : 1<sup>o</sup> satellite de télécommunications**



Ordinateur portable 2000

**années 1980-1990 : début de l'ère « numérique »**



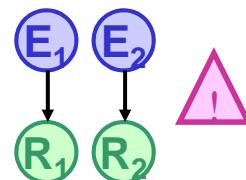
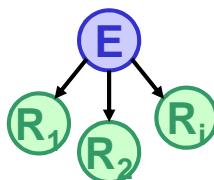
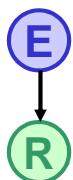
Téléphone portable 2000

## Exemple : Transmettre la voix [0-20 kHz]

Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos

**Si canal de transmission sans obstacle et courte distance**

**Schémas de communication**



→ On peut utiliser les ondes acoustiques si un seul message transmis en même temps

→ Sinon, il faut parler les uns après les autres (**multiplexage temporel**)

**Solution technique**

Utiliser un conducteur électrique et transformer l'onde acoustique en signal électrique (micro et haut-parleur)

**MAIS même problème si deux messages simultanés !**



Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos



## Exemple : Transmettre la voix [0-20 kHz]

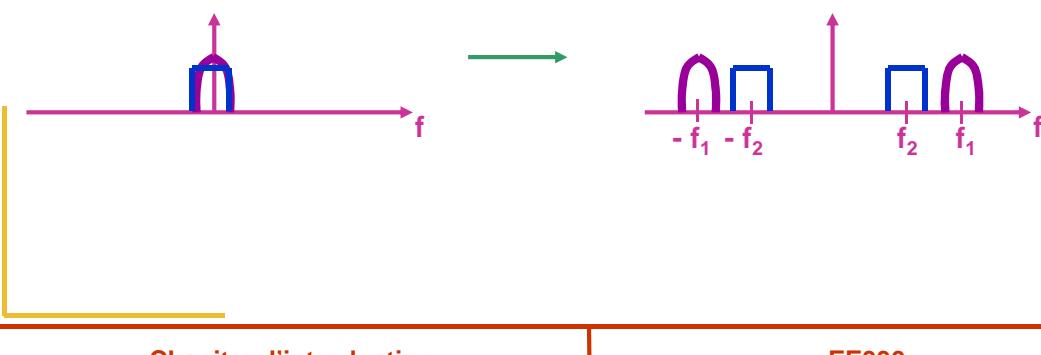
Si canal de transmission sans obstacle et courte distance

**Solution 1**

Utiliser 2 fils conducteurs (canaux différents)

**Solution 2**

Réaliser un **multiplexage fréquentiel** pour transmettre simultanément plusieurs messages



Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos



## Exemple : Transmettre la voix [0-20 kHz]

**Et si les distances augmentent ...**

- Parler de plus en plus fort
- Utiliser des signaux de plus forte puissance
- Utiliser des câbles plus longs

⇒ Le système s'écroule !

**Idem s'il y a présence d'obstacles**

⇒ Si canal avec obstacles et distances importantes entre émetteur et récepteur : intérêt de pouvoir transmettre par ondes électromagnétiques !

Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos



## Exemple : Transmettre la voix [0-20 kHz]

### Si transmission directe par une onde radioélectrique

- Signal susceptible d'être perturber par tous les ondes de même bande (par exemple le 50 Hz de l'EDF, mais aussi la plupart des bruits industriels)
- Impossibilité de transmettre deux signaux simultanément car sinon bruitage l'un par rapport à l'autre
- Taille des antennes irréaliste et non adaptée à la gamme de fréquences transmises

### ⇒ Une solution : MODULER

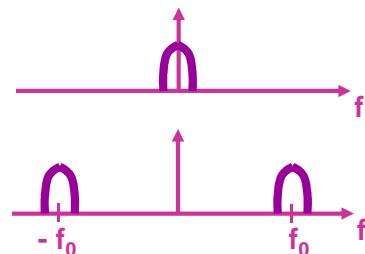
Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos



## Exemple : Transmettre la voix [0-20 kHz]

### Moduler !

Signal audio à transmettre [ 0 ; 20 kHz ]

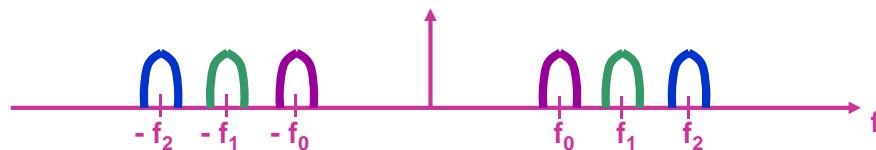


Signal modulé [  $f_0 - 20 \text{ kHz}$  ;  $f_0 + 20 \text{ kHz}$  ]



→ Plus de bruitage par des signaux industriels « basse fréquence »

→ Possibilité de transmettre deux signaux (ou plus) simultanément en utilisant différentes fréquences porteuses : **Multiplexage fréquentiel**

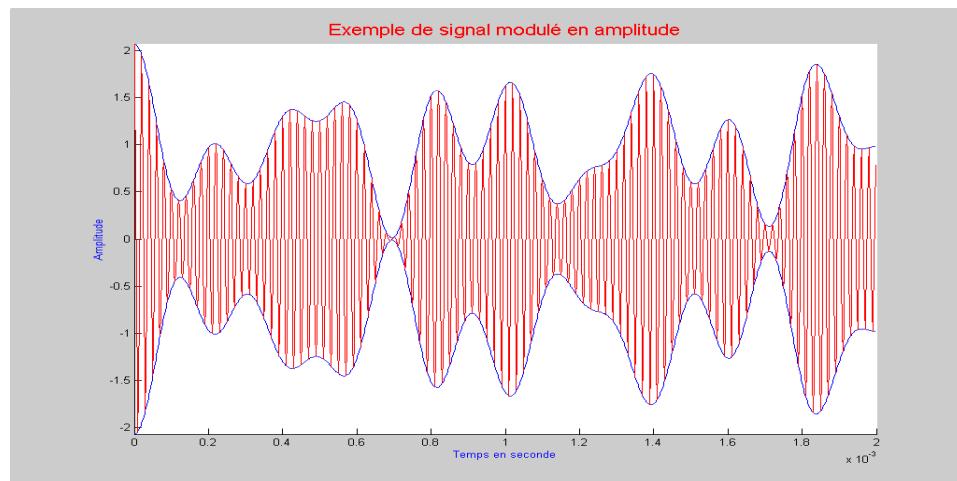


→ Taille des antennes réduite et adaptée à des variations relatives de fréquence moins importantes

## Qu'est-ce qu'une modulation ?

Translation du spectre du signal à transmettre, (**signal modulant**) autour d'une fréquence très élevée (**porteuse**) par rapport à sa fréquence maximale pour obtenir un **signal à spectre étroit (signal modulé)** tel que :

$$(F_{max} - F_{min}) \ll (F_{max} + F_{min}) / 2$$



## Qu'est-ce qu'une modulation ?

**TRANSFORMATION sans perte d'information du signal à transmettre en un signal à spectre étroit**

**SIGNAL UTILE**

**Signal modulant**



**SIGNAL TRANSMIS**

**Signal modulé**

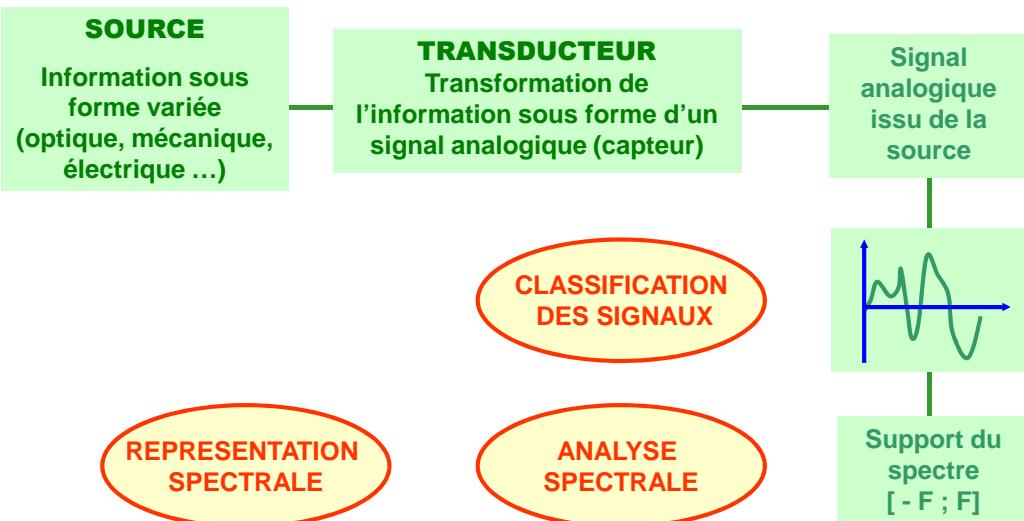
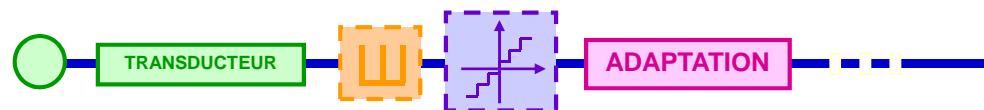
**SIGNAL PORTEUR**

**Porteuse**



# EMETTEUR : une information à envoyer

Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos



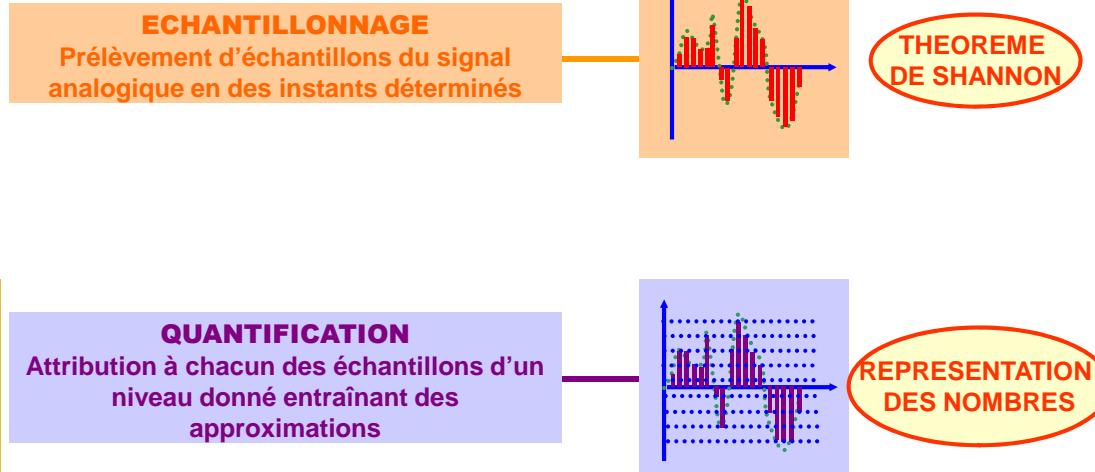
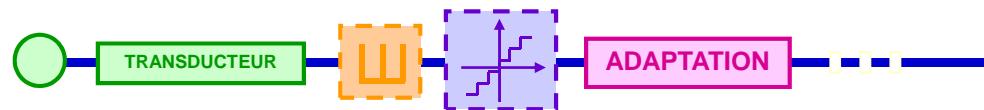
Chapitre d'introduction

- EE330 -

21

# EMETTEUR : éventuellement sous forme numérique

Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos



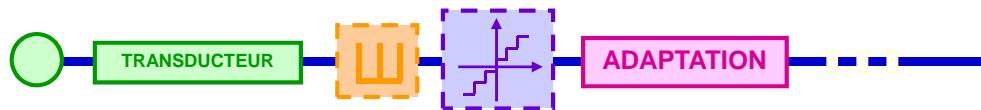
Chapitre d'introduction

- EE330 -

22

# EMETTEUR : un signal à adapter au support de transmission

Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos

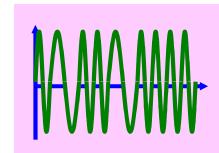
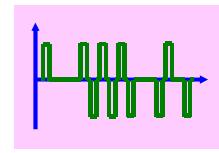


## ADAPTATION

En plusieurs étapes dont certaines facultatives

Dans tous les cas,

OBTENTION D'UN SIGNAL ANALOGIQUE  
TRANSMISSIBLE

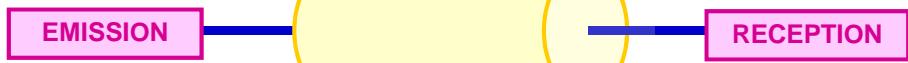


**MODULATIONS, CODAGES, CRYPTAGE, ANALYSE SPECTRALE, FILTRAGE, ...**



# SUPPORT de TRANSMISSION

Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos



Câbles conducteurs

Ondes électromagnétiques (transmissions sans fil)

Effet de filtrage, ajout de bruit, propagation à trajets multiples, variable avec le temps, ...

**Contraintes**

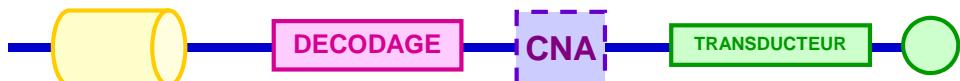
Bandes de fréquences et niveaux d'énergie émis



Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos

# RECEPTEUR

## Réception du signal transmis ET récupération de l'information



### DECODAGE

Réception du signal envoyé et reconstitution du signal utile

### CNA (Convertisseur Analogique Numérique)

Si signal numérique reçu, obtention du signal analogique

### TRANSDUCTEUR

Transformation du signal analogique sous forme d'une information (haut-parleur, image, ...)



Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et Infos

# Différentes configurations

ANALOGIQUE

INFORMATION à transmettre

NUMERIQUE

Message à transmettre :  
suite à valeurs réelles  
dans un ensemble continu

Message à transmettre :  
suite de valeurs dans un  
ensemble discret fini

SIGNAL ANALOGIQUE à transmettre

### TRANSMISSION DIRECTE BANDE DE BASE

Sans modification de la bande de fréquence d'origine du signal analogique à transmettre

### TRANSMISSION SUR FREQUENCE PORTEUSE MODULATION

Translation vers les hautes fréquences du signal analogique à transmettre



# Références bibliographiques

Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et info

- Baudoin G., « Radiocommunications numériques », Dunod, 2002
- Hwei Hsu P. , « Communications analogiques et numériques », 1993
- Molisch A.F., « Wireless Communications », J. Wiley&Sons, 2005
- Moore C. , « Transmission des signaux », Mc Graw Hill, 4° édition, 2005
- Proakis J.G., « Digital Communications », Mc Graw Hill, 4° édition, 2001
- Charbit M., « Communications numériques », polycopié, 2005
- « Digital Modulation in Communications Systems – An introduction », Application Note 1298, 1997 (disponible sur internet).



# Références générales complémentaires

Présentation
Généralités
Historique
Principes
Chaîne
Biblio et info

- ☐ Tableau National des Bandes de Fréquences**
- Agence Nationale des Fréquences <http://www.anfr.fr>
  - Mise à jour prévue pour 2008
  - Avec des modifications en cours, prévues et anticipées !
- Exemples :
- disparition des ARVAs à 2275 kHz prévue depuis 1992
  - apparition de l'UWB en 2006
- ☐ Implantation des stations radioélectriques en France métropolitaine**
- [www.cartoradio.fr](http://www.cartoradio.fr)



# Modélisation des Signaux à Bande Étroite

## Plan du chapitre

- 1. Introduction
- 2. Signaux analytiques
- 3. Enveloppe complexe
- 4. Applications
- 5. Conclusion

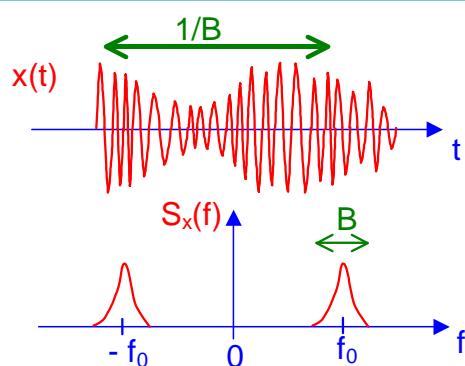
## Objectif

Représentation et manipulation des signaux fréquemment rencontrés en théorie des communications

### Signal à spectre étroit

Signal qui occupe une bande de fréquence étroite  $B$  autour d'une fréquence  $f_0$

« Signal de forme sinusoïdale dont amplitude et phase varient lentement »



### Représentation des signaux utiles et des bruits des systèmes de télécommunications

Information véhiculée par des signaux dont le spectre occupe une bande de fréquence  $B$  autour d'une fréquence porteuse  $f_0$

Bruit filtré en réception par un filtre passe bande centré en  $f_0$

Signal reçu = somme de 2 processus aléatoires

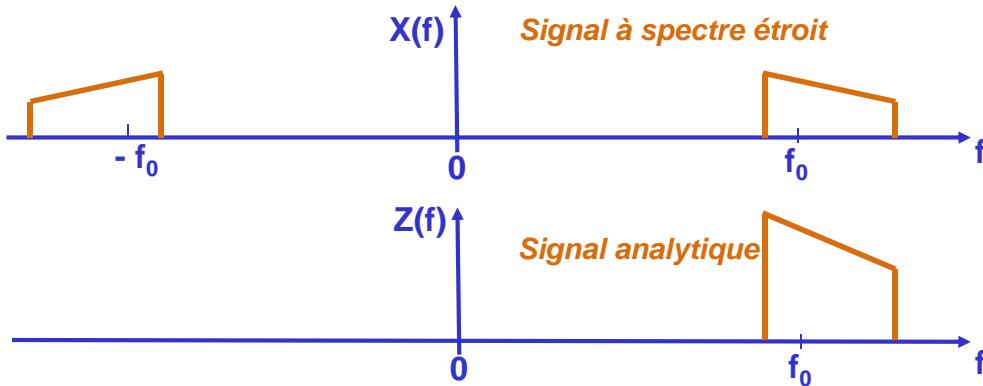


# Définition

Soit  $x(t)$  un signal réel de transformée de Fourier  $X(f)$

Le signal analytique  $z(t)$  associé à  $x(t)$  est tel que :

$$\begin{cases} TF[z(t)] = Z(f) = 2U(f)X(f) = 2X^+(f) \\ x(t) = \operatorname{Re}\{z(t)\} \end{cases}$$

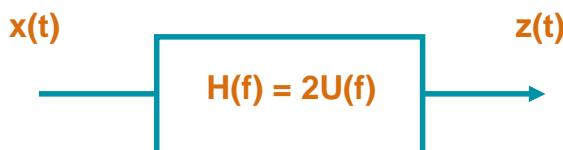


# Remarques et propriétés

1) Coefficient « 2 » pour assurer la conservation de l'énergie

2)  $x(t)$  réel  $\Rightarrow$  spectre à symétrie hermitienne  $/ X(f) = X^*(-f)$   
 $z(t)$  complexe  $\Rightarrow$  spectre sans symétrie hermitienne

3)  $z(t)$  résultat du filtrage de  $x(t)$  par un filtre de gain complexe  $2U(f)$



## Remarques et propriétés

4)  $Re\{z(t)\} = x(t)$

$$\begin{cases} Re\{z(t)\} = \frac{1}{2}(z(t) + z^*(t)) \xrightarrow{TF} TF[Re\{z(t)\}] = X(f) \\ Im\{z(t)\} = \frac{1}{2j}(z(t) - z^*(t)) \xrightarrow{TF} TF[Im\{z(t)\}] = -j \operatorname{sgn}(f)X(f) \end{cases}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}TF[z(t) + z^*(t)] &= \frac{1}{2}(Z(f) + Z^*(-f)) = X(f)U(f) + X^*(-f)U(-f) \\ &= X(f)U(f) + X(f)U(-f) = X(f) \\ \frac{1}{2j}TF[z(t) - z^*(t)] &= \frac{1}{2j}(Z(f) - Z^*(-f)) = -j[X(f)U(f) - X^*(-f)U(-f)] \\ &= -j[X(f)U(f) - X(f)U(-f)] = -j \operatorname{sgn}(f)X(f) \end{aligned}$$

**Notation**  $z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$  ;  $\operatorname{Im}\{z(t)\} = \hat{x}(t)$  : Transformée de Hilbert de  $x(t)$

$\operatorname{TH}[x(t)]$  : filtrage de  $x(t)$  par un filtre de Hilbert de gain complexe  $-j \operatorname{sgn}(f)$

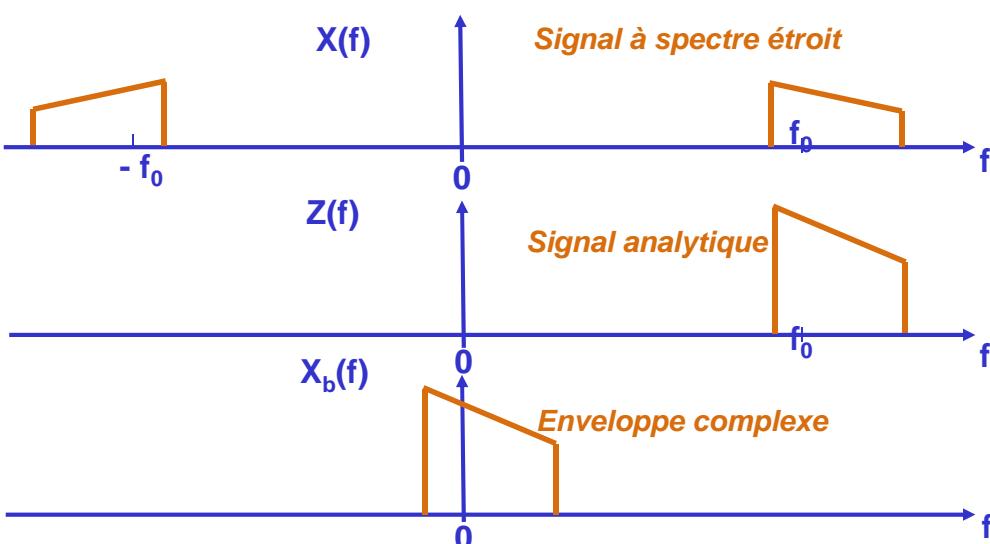


## Définition

**Enveloppe complexe par rapport à la fréquence  $f_0$  du signal  $x(t)$  réel**

$$x_b(t) = z(t) \exp(-2\pi j f_0 t) \xrightarrow{TF} X_b(f) = Z(f + f_0) = 2X^+(f + f_0)$$

$$x(t) = Re\{x_b(t) \exp(2\pi j f_0 t)\}$$



## Remarque et notations

Dans les systèmes de communication, le signal  $x(t)$  est réel et s'écrit sous la forme suivante générale :

$$x(t) = \underbrace{a_x(t)}_{\text{enveloppe instantanée}} \cos \left( 2\pi f_0 t + \underbrace{\phi_x(t)}_{\text{phase instantanée}} \right) = \operatorname{Re} \{ x_b(t) \exp(2\pi j f_0 t) \}$$

= module de  $x_b(t)$       = phase de  $x_b(t)$

$$/ x_b(t) = a_x(t) \exp(j\phi_x(t))$$
  

$$= \underbrace{a_x(t) \cos(\phi_x(t))}_{p_x(t)} \cos(2\pi f_0 t) - \underbrace{a_x(t) \sin(\phi_x(t))}_{q_x(t)} \sin(2\pi f_0 t)$$

composante en phase      composante en quadrature

$$/ f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_x(t)}{dt}$$

fréquence instantanée



## Propriétés

### Composantes en phase et en quadrature

$$x_b(t) = p_x(t) + j q_x(t) \Rightarrow \begin{cases} 2p_x(t) = x_b(t) + x_b^*(t) \\ 2jq_x(t) = x_b(t) - x_b^*(t) \end{cases}$$

$$P_x(f) = \frac{1}{2} (X_b(f) + X_b^*(-f)) = X^+(f + f_0) + X^-(f - f_0)$$

$$jQ_x(f) = \frac{1}{2} (X_b(f) - X_b^*(-f)) = X^+(f + f_0) - X^-(f - f_0)$$

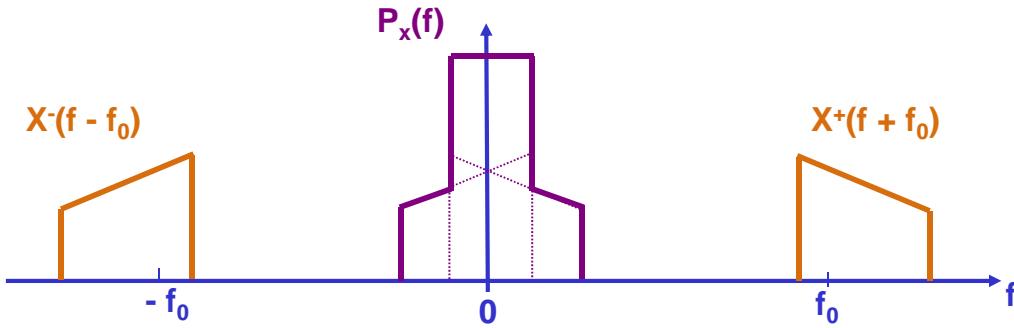
/ A l'aide du schéma de la diapo 6, se déduit que  $X_b^*(-f)$  est le spectre négatif de  $X(f)$  translaté à droite c'est-à-dire  $X^*(f - f_0)$



# Spectre de la composante en phase

## Illustration

$$P_x(f) = \frac{1}{2} (X_b(f) + X_b^*(-f)) = X^+(f + f_0) + X^-(f - f_0)$$



## Exemple (1)

Soit  $x(t)$  signal réel à bande étroite tel que :  $x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$

Quelle est l'expression de sa transformée de Hilbert ?

$$\begin{aligned} \rightarrow TF[\cos(2\pi f_0 t + \phi)] &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi j(f-f_0)t} e^{j\phi} dt + \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi j(f+f_0)t} e^{-j\phi} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ \delta(f - f_0) e^{j\phi} + \delta(f + f_0) e^{-j\phi} \} \quad / \text{propriété de la TF} \end{aligned}$$

$$\rightarrow TF[x(t)] = TF[a(t)] * TF[\cos(2\pi f_0 t + \phi)] = \frac{1}{2} \{ A(f - f_0) e^{j\phi} + A(f + f_0) e^{-j\phi} \}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow TF[\hat{x}(t)] &= -j Sgn(f) X(f) = \frac{1}{2j} \{ A(f - f_0) e^{j\phi} - A(f + f_0) e^{-j\phi} \} \\ &= TF[a(t) \sin(2\pi f_0 t + \phi)] \Rightarrow \hat{x}(t) = a(t) \sin(2\pi f_0 t + \phi) \end{aligned}$$



## Exemple (1 bis)

### Une autre façon de faire le calcul de la TF

$$\cos(2\pi f_0 t + \phi) = \cos(2\pi f_0 t) \cos(\phi) - \sin(2\pi f_0 t) \sin(\phi)$$

$\downarrow TF$

$$\begin{aligned} TF[\cos(2\pi f_0 t + \phi)] &= \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \cos(\phi) - \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \sin(\phi) \\ &= \frac{1}{2} \delta(f - f_0) \left[ \cos(\phi) - \frac{\sin(\phi)}{j} \right] + \frac{1}{2} \delta(f + f_0) \left[ \cos(\phi) + \frac{\sin(\phi)}{j} \right] \\ &= \frac{1}{2} \delta(f - f_0) [exp(j\phi)] + \frac{1}{2} \delta(f + f_0) [exp(-j\phi)] \end{aligned}$$



## Exemple (2)

Quelle est l'expression du signal analytique associé ?

$$z(t) = a(t) \exp(j\phi) \exp(2\pi j f_0 t) \quad / \quad x(t) = \operatorname{Re}\{z(t)\}$$

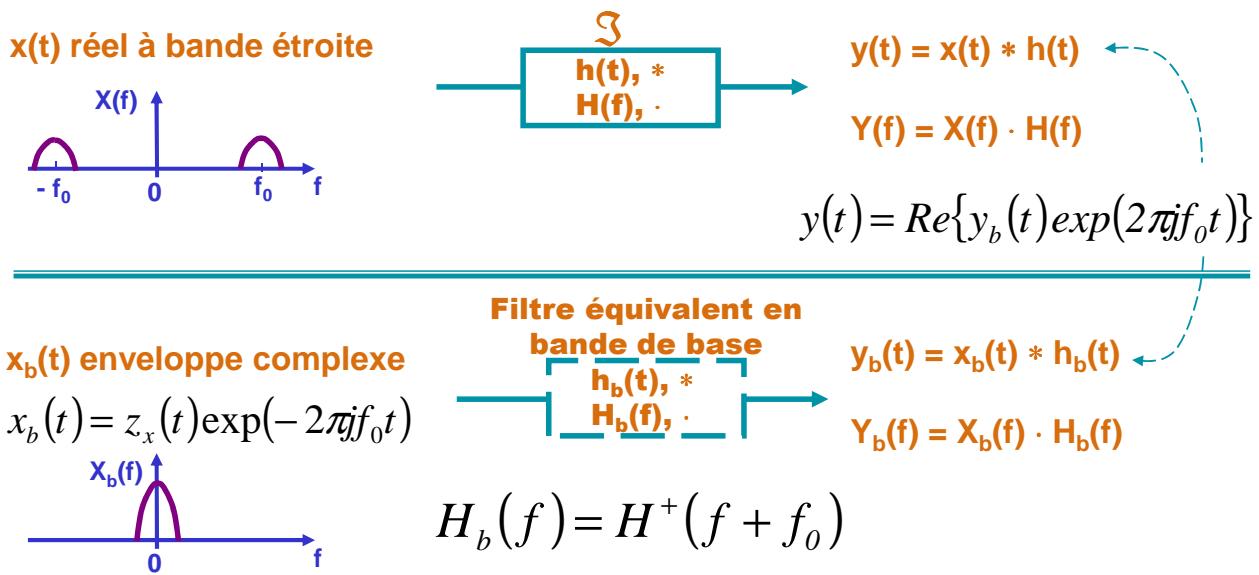
Quelle est l'expression de l'enveloppe complexe associée ?

$$x_b(t) = a(t) \exp(j\phi) \quad / \quad x_b(t) = z(t) \exp(-2\pi j f_0 t)$$



# Filtre équivalent en bande de base

## Principe général



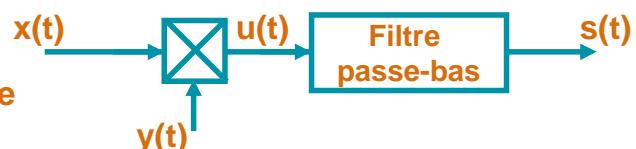
Lorsqu'un signal traverse un filtre bande étroite, l'enveloppe complexe associée est filtrée par le filtre équivalent en bande de base et il est donc possible de raisonner en bande de base de façon équivalente.



# Démodulateur synchrone (1)

## Schéma de principe

Hypothèse :  $x(t)$  et  $y(t)$  à bande étroite



Déterminons l'expression du signal de sortie en utilisant les enveloppes complexes des signaux  $x(t)$  et  $y(t)$

$$2u(t) = 2x(t)y(t) = 2(p_x(t)\cos(2\pi f_0 t) - q_x(t)\sin(2\pi f_0 t))(p_y(t)\cos(2\pi f_0 t) - q_y(t)\sin(2\pi f_0 t))$$

$$\begin{aligned} 2u(t) &= p_x(t)p_y(t) + q_x(t)q_y(t) \\ &\quad + \cos(4\pi f_0 t)(p_x(t)p_y(t) - q_x(t)q_y(t)) - \sin(4\pi f_0 t)(p_x(t)q_y(t) + q_x(t)p_y(t)) \end{aligned}$$

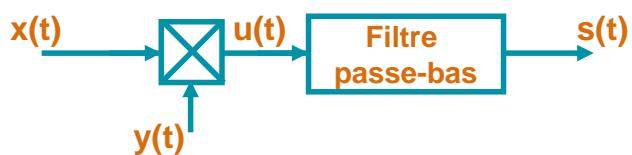
$$\text{ / } \cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2}, \sin^2(2\pi f_0 t) = \frac{1 - \cos(4\pi f_0 t)}{2}, \cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t) = \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{2}$$

/ Calcul avec un coefficient « 2 » arbitraire, pour simplifier les expressions !



## Démodulateur synchrone (2)

Après filtrage, les composantes autour de  $2f_0$  sont filtrées,



$$2s(t) = p_x(t)p_y(t) + q_x(t)q_y(t)$$

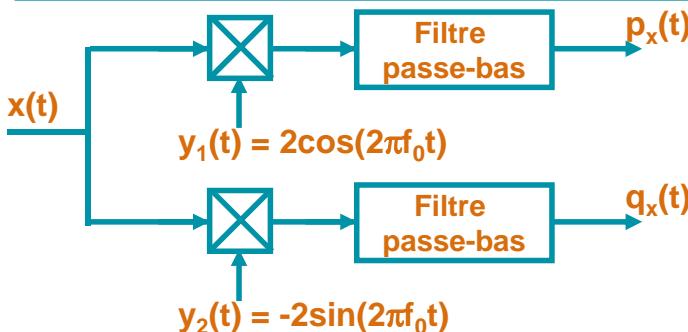
$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{x_b(t)y_b^*(t)\}$$

$$/ R_e[x_b(t)y_b^*(t)] = R_e[(p_x(t) + jq_x(t))(p_y(t) + jq_y(t))^*] = p_x(t)p_y(t) + q_x(t)q_y(t)$$

**Remarque :** Les signaux de forme  $p_x(t)p_y(t)$  sont de bande 2B



## Exemple : Détection synchrone



$$p_x(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{x_b(t)y_{1b}^*(t)\}$$

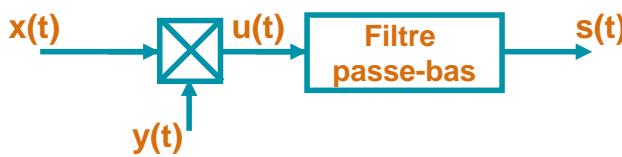
$$q_x(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{x_b(t)y_{2b}^*(t)\}$$

$$\begin{cases} y_{1b}(t) = +2 \\ y_{2b}(t) = -2j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_x(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[2x_b(t)] = \operatorname{Re}[p_x(t) + jq_x(t)] = p_x(t) \\ q_x(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[-j2x_b(t)] = \operatorname{Im}[-jp_x(t) + q_x(t)] = q_x(t) \end{cases}$$

$$/ y(t) = \operatorname{Re}\{y_b(t)\exp(2\pi j f_0 t)\}$$



## Exemple : Détection "désynchronisée"



$$y(t) = 2 \cos(2\pi f_0 t + \phi) \Leftrightarrow y_b(t) = 2 \exp(j\phi)$$

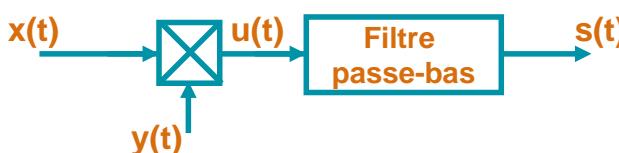
$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[x_b(t)y_b^*(t)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[2x_b(t)\exp(j\phi)] \\ &= \operatorname{Re}[(p_x(t) + jq_x(t))(\cos(\phi) - j\sin(\phi))] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s(t) = p_x(t)\cos(\phi) + q_x(t)\sin(\phi)$$

Diaphonie sur la voie en phase !



## Exemple : Comparateur de phase



$$\begin{cases} x(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \phi_x(t)) \\ y(t) = A_y \sin(2\pi f_0 t + \phi_y(t)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_b(t) = A_x \exp(j\phi_x(t)) \\ y_b(t) = A_y \exp(j\phi_y(t)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[x_b(t)y_b^*(t)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[A_x \exp(j\phi_x)(A_y \exp(j\phi_y))^*] \\ &= \frac{A_x A_y}{2} \operatorname{Re}[(\cos(\phi_x) + j\sin(\phi_x))(\cos(\phi_y) - j\sin(\phi_y))] \\ &= \frac{A_x A_y}{2} (\cos(\phi_x)\cos(\phi_y) + \sin(\phi_x)\sin(\phi_y)) \\ &\Rightarrow s(t) = \frac{A_x A_y}{2} \cos(\phi_y(t) - \phi_x(t)) \end{aligned}$$



# Processus aléatoires (1)

Soit le processus aléatoire réel centré  $x(t) = p_x(t)\cos(2\pi f_0 t) - q_x(t)\sin(2\pi f_0 t)$

avec  $p_x(t)$  et  $q_x(t)$  PA SSL centrés en zéro et d'intercovariance stationnaire

**A quelle(s) condition(s) le PA  $x(t)$  est stationnaire au sens large ?**

→ L'espérance mathématique de  $x(t)$  doit être stationnaire.

$p_x(t)$  et  $q_x(t)$  étant centrés en zéros, cette propriété est vérifiée !

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= E[p_x(t)\cos(2\pi f_0 t) - q_x(t)\sin(2\pi f_0 t)] \\ &= E[p_x(t)]\cos(2\pi f_0 t) - E[q_x(t)]\cos(2\pi f_0 t) = 0 \end{aligned}$$

→ L'autocorrélation (statistique) de  $x(t)$  doit ne dépendre que de l'écart de temps considéré.

**A quelle(s) condition(s) cette propriété est vérifiée ?**



# Processus aléatoires (2)

**Détermination de la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$**

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)]$$

$$= E[(p_x(t)\cos(2\pi f_0 t) - q_x(t)\sin(2\pi f_0 t)) \cdot (p_x(t-\tau)\cos(2\pi f_0(t-\tau)) - q_x(t-\tau)\sin(2\pi f_0(t-\tau)))]$$

$$\begin{aligned} &= E[p_x(t)p_x(t-\tau)]\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0(t-\tau)) + E[q_x(t)q_x(t-\tau)]\sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0(t-\tau)) \\ &\quad - E[p_x(t)q_x(t-\tau)]\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0(t-\tau)) - E[q_x(t)p_x(t-\tau)]\sin(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0(t-\tau)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= R_{p_x}(\tau)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0(t-\tau)) + R_{q_x}(\tau)\sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0(t-\tau)) \\ &\quad - R_{p_x q_x}(\tau)\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0(t-\tau)) - R_{q_x p_x}(\tau)\sin(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0(t-\tau)) \end{aligned}$$



## Processus aléatoires (3)

Détermination de la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$  – suite

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)]$$

$$= R_{p_x}(\tau) \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0(t-\tau)) + R_{q_x}(\tau) \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0(t-\tau)) \\ - R_{p_x q_x}(\tau) \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0(t-\tau)) - R_{q_x p_x}(\tau) \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0(t-\tau))$$

$$= \frac{R_{p_x}(\tau) + R_{q_x}(\tau)}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) + \frac{R_{p_x}(\tau) - R_{q_x}(\tau)}{2} \cos(2\pi f_0(2t-\tau)) \\ - \frac{R_{p_x q_x}(\tau) - R_{q_x p_x}(\tau)}{2} \sin(2\pi f_0 \tau) - \frac{R_{p_x q_x}(\tau) + R_{q_x p_x}(\tau)}{2} \sin(2\pi f_0(2t-\tau))$$

$$2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

$$2 \cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$$

Rappel des formules de trigonométrie utilisées



## Processus aléatoires (4)

Fonction d'autocorrélation de  $x(t)$

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)]$$

$$= \frac{R_{p_x}(\tau) + R_{q_x}(\tau)}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) + \frac{R_{p_x}(\tau) - R_{q_x}(\tau)}{2} \cos(2\pi f_0(2t-\tau)) \\ - \frac{R_{p_x q_x}(\tau) - R_{q_x p_x}(\tau)}{2} \sin(2\pi f_0 \tau) - \frac{R_{p_x q_x}(\tau) + R_{q_x p_x}(\tau)}{2} \sin(2\pi f_0(2t-\tau))$$

**En conséquence pour que  $x(t)$  soit stationnaire au sens large, il faut et il suffit que les conditions suivantes soit vérifiées :**

$$\begin{cases} R_{p_x}(\tau) = R_{q_x}(\tau) \\ R_{p_x q_x}(\tau) = -R_{q_x p_x}(\tau) \end{cases}$$



## Processus aléatoires (5)

**Propriété : si  $x(t)$  est un PA stationnaire au sens large alors l'autocorrélation de son enveloppe complexe est nulle**

$$\begin{cases} R_{p_x}(\tau) = R_{q_x}(\tau) \\ R_{p_x q_x}(\tau) = -R_{q_x p_x}(\tau) \end{cases} \Leftrightarrow E[x_b(t)x_b(t-\tau)] = 0$$

### démonstration

Soit l'enveloppe complexe associée à  $x(t)$  :  $x_b(t) = p_x(t) + j q_x(t)$

$$\begin{aligned} E[x_b(t)x_b(t-\tau)] &= E[(p_x(t) + j q_x(t)) \cdot (p_x(t-\tau) + j q_x(t-\tau))] \\ &= E[p_x(t)p_x(t-\tau)] - E[q_x(t)q_x(t-\tau)] + j\{E[p_x(t)q_x(t-\tau)] + E[q_x(t)p_x(t-\tau)]\} \\ &= R_{p_x}(\tau) - R_{q_x}(\tau) + j\{R_{p_x q_x}(\tau) + R_{q_x p_x}(\tau)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$



## Processus aléatoires SSL (1)

**Soit un PA SSL  $x(t)$  réel, centré en 0, de DSP  $S_x(f)$  sur B et soit  $f_0 > B$**

$$x(t) = \operatorname{Re}\{x_b(t) \exp(2\pi f_0 t)\} \quad \text{avec } x_b(t) = p_x(t) + j q_x(t)$$

$$x(t) = p_x(t) \cos(2\pi f_0 t) - q_x(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

**PROPRIETES / immédiates d'après l'étude précédente !**

(1)  $x_b(t)$  est un PA SSL complexe centré et vérifie  $\forall t_1, t_2, E[x_b(t_1)x_b(t_2)] = 0$

(2)  $p_x(t)$  et  $q_x(t)$  sont deux PA SSL centrés et d'intercorrélation stationnaire

(3)  $\forall \tau, R_{p_x}(\tau) = R_{q_x}(\tau)$

(4)  $\forall \tau, R_{p_x q_x}(\tau) = -R_{p_x q_x}(-\tau) \Rightarrow \forall t, E[p_x(t)q_x(t)] = 0$

**Démonstration**  $R_{p_x q_x}(\tau) = -R_{p_x q_x}(-\tau) \Leftrightarrow E[p_x(t)q_x(t-\tau)] = -E[p_x(t)q_x(t+\tau)]$   
 $si \tau = 0, E[p_x(t)q_x(t)] = -E[p_x(t)q_x(t)] \Rightarrow E[p_x(t)q_x(t)] = 0$



## Processus aléatoires SSL (2)

### PROPRIETES (suite)

$$(5) \quad E[x^2(t)] = E[p_x^2(t)] = E[q_x^2(t)] = 0,5E[|x_b(t)|^2]$$

#### Démonstration

$$\rightarrow \forall(\tau), R_{p_x}(\tau) = R_{q_x}(\tau) \Rightarrow E[p_x^2(t)] = E[q_x^2(t)]$$

$$\begin{aligned} \rightarrow E[x^2(t)] &= E[(p_x(t)\cos(2\pi f_0 t) - q_x(t)\sin(2\pi f_0 t))^2] \\ &= E[p_x^2(t)]\cos^2(2\pi f_0 t) + E[q_x^2(t)]\sin^2(2\pi f_0 t) - 2\underbrace{E[p_x(t)q_x(t)]}_{=0}\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t) \\ &= E[p_x^2(t)] = E[q_x^2(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow E[x_b(t)^2] &= E[p_x(t) + jq_x(t)]^2 = E[p_x^2(t)] + E[q_x^2(t)] - 2\underbrace{jE[p_x(t)q_x(t)]}_{=0} \\ &= E[p_x^2(t)] + E[q_x^2(t)] = 2E[p_x^2(t)] = 2E[q_x^2(t)] \end{aligned}$$



## Processus aléatoires SSL (3)

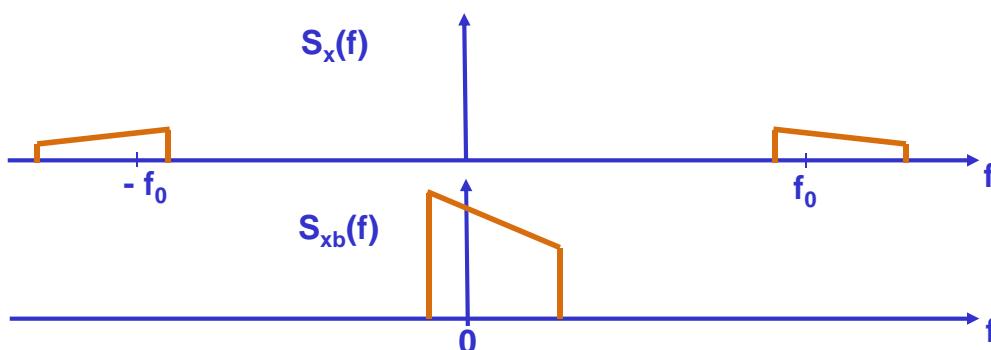
### PROPRIETES (suite)

$$(6) \quad S_{x_b}(f) = 4S_x^+(f + f_0)$$

$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_b}(f - f_0) + S_{x_b}(-f + f_0))$$

#### Démonstration

$$X_b(f) = 2X^+(f + f_0) \xrightarrow{"DSP"} S_{x_b}(f) = 4S_x^+(f + f_0)$$



## Processus aléatoires SSL (4)

### PROPRIETES (suite)

$$(7) \quad S_{p_x}(f) = S_{q_x}(f) = S_x^-(f - f_0) + S_x^+(f + f_0)$$

$$(8) \quad S_{p_x q_x}(f) = S_{q_x p_x}(-f) = \frac{1}{4j} (S_{x_b}(-f) - S_{x_b}(f)) = \frac{1}{j} (S_x^-(f - f_0) - S_x^+(f + f_0))$$

### Démonstrations

Remarque préliminaire : pour démontrer ces propriétés, il est nécessaire de partir des définitions des signaux, de déterminer les fonctions de corrélation, puis d'en déduire par transformation de Fourier les densités spectrales.



## Processus aléatoires SSL (5)

### Autocorrélation et intercorrélation des composantes en phase et en quadrature

$$R_{p_x}(\tau) = E[p_x(t)p_x(t-\tau)] = \frac{1}{4} \{ R_{x_b}(\tau) + R_{x_b}(-\tau) \}$$

$$R_{q_x}(\tau) = E[q_x(t)q_x(t-\tau)] = \frac{1}{4} \{ R_{x_b}(\tau) + R_{x_b}(-\tau) \}$$

$$R_{p_x q_x}(\tau) = E[p_x(t)q_x(t-\tau)] = \frac{1}{4j} \{ -R_{x_b}(\tau) + R_{x_b}(-\tau) \}$$

$$R_{q_x p_x}(\tau) = E[q_x(t)p_x(t-\tau)] = \frac{1}{4j} \{ R_{x_b}(\tau) - R_{x_b}(-\tau) \}$$

--- Démonstrations présentées ci-après ---



# Processus aléatoires SSL (6)

## Démonstration de (7)

$$R_{p_x}(\tau) = R_{q_x}(\tau) \xrightarrow{TF} S_{p_x}(f) = S_{q_x}(f)$$

$$R_{p_x}(\tau) = R_{q_x}(\tau) = \frac{1}{4} \{R_{xb}(\tau) + R_{xb}(-\tau)\}$$

↓ TF

$$S_{p_x}(f) = S_{q_x}(f) = \frac{1}{4} \{S_{xb}(f) + S_{xb}(-f)\}$$

$$= \frac{1}{4} \{4S_x^+(f + f_0) + 4S_x^+(-f + f_0)\} / S_{xb}(f) = 4S_x^+(f + f_0)$$

$$S_{p_x}(f) = S_{q_x}(f) = S_x^+(f + f_0) + S_x^-(f - f_0)$$

$$/ S_x^+(f + f_0) = S_x^-(f - f_0)$$

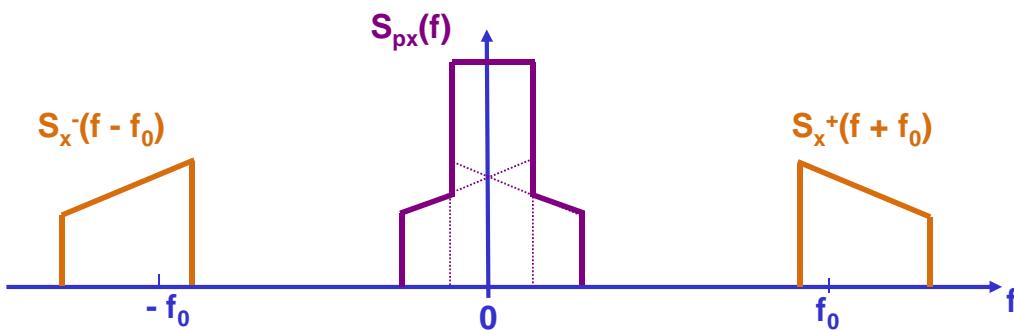
$$/ S_x^+(-f + f_0) = S_x^-(f - f_0)$$



# Processus aléatoires SSL (7)

## Illustration de (7)

$$S_{p_x}(f) = S_x^+(f + f_0) + S_x^-(f - f_0)$$



# Processus aléatoires SSL (7)

## Démonstration de (8)

$$R_{p_x q_x}(\tau) = R_{q_x p_x}(-\tau) = \frac{1}{4j} \left\{ -R_{x_b}(\tau) + R_{x_b}(-\tau) \right\}$$

$\downarrow TF$

$$S_{p_x q_x}(f) = S_{q_x p_x}(-f) = \frac{1}{4j} \left\{ -S_{x_b}(f) + S_{x_b}(-f) \right\}$$

$$= \frac{1}{4j} \left\{ -4S_x^+(f + f_0) + 4S_x^+(-f + f_0) \right\} \quad / S_{x_b}(f) = S_x^+(f + f_0)$$

$$S_{p_x q_x}(f) = S_{q_x p_x}(-f) = \frac{1}{j} \left\{ -S_x^+(f + f_0) + S_x^-(f - f_0) \right\}$$

$$/ S_x^+(f + f_0) = S_x^-(f - f_0)$$



# Processus aléatoires SSL (8)

## Calcul de la fonction d'autocorrélation de la composante en phase

$$\begin{aligned} R_{p_x}(\tau) &= E[p_x(t)p_x(t-\tau)] = E\left[\left(\frac{x_b(t)+x_b^*(t)}{2}\right) \cdot \left(\frac{x_b(t-\tau)+x_b^*(t-\tau)}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \underbrace{E[x_b(t)x_b(t-\tau)]}_{=0} + \underbrace{E[x_b(t)x_b^*(t-\tau)]}_{=R_{xb}(\tau)} + \underbrace{E[x_b^*(t)x_b(t-\tau)]}_{=R_{xb}(-\tau)} + \underbrace{E[x_b^*(t)x_b^*(t-\tau)]}_{=0} \right\} \end{aligned}$$

$$R_{p_x}(\tau) = \frac{1}{4} \{R_{xb}(\tau) + R_{xb}(-\tau)\}$$

## Rappels

$$x_b(t) = p_x(t) + j q_x(t) \Rightarrow \begin{cases} 2p_x(t) = x_b(t) + x_b^*(t) \\ 2jq_x(t) = x_b(t) - x_b^*(t) \end{cases}$$



# Processus aléatoires SSL (9)

**Calcul de la fonction d'autocorrélation de la composante en quadrature**

$$\begin{aligned}
 R_{q_x}(\tau) &= E[q_x(t)q_x(t-\tau)] = E\left[\left(\frac{x_b(t)-x_b^*(t)}{2j}\right) \cdot \left(\frac{x_b(t-\tau)-x_b^*(t-\tau)}{2j}\right)\right] \\
 &= -\frac{1}{4} \left\{ \underbrace{E[x_b(t)x_b(t-\tau)]}_{=0} - \underbrace{E[x_b(t)x_b^*(t-\tau)]}_{=R_{xb}(\tau)} - \underbrace{E[x_b^*(t)x_b(t-\tau)]}_{=R_{xb}(-\tau)} + \underbrace{E[x_b^*(t)x_b^*(t-\tau)]}_{=0} \right\} \\
 R_{q_x}(\tau) &= \frac{1}{4} \{R_{xb}(\tau) + R_{xb}(-\tau)\}
 \end{aligned}$$



# Processus aléatoires SSL (10)

**Calcul des fonctions d'intercorrélation des composantes en phase et quadrature**

$$\begin{aligned}
 R_{p_x q_x}(\tau) &= E[p_x(t)q_x(t-\tau)] = E\left[\left(\frac{x_b(t)+x_b^*(t)}{2}\right) \cdot \left(\frac{x_b(t-\tau)-x_b^*(t-\tau)}{2j}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{4j} \left\{ \underbrace{E[x_b(t)x_b(t-\tau)]}_{=0} - \underbrace{E[x_b(t)x_b^*(t-\tau)]}_{=R_{xb}(\tau)} + \underbrace{E[x_b^*(t)x_b(t-\tau)]}_{=R_{xb}(-\tau)} + \underbrace{E[x_b^*(t)x_b^*(t-\tau)]}_{=0} \right\} \\
 R_{p_x q_x}(\tau) &= \frac{1}{4j} \{-R_{xb}(\tau) + R_{xb}(-\tau)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{q_x p_x}(\tau) &= E[q_x(t)p_x(t-\tau)] = E\left[\left(\frac{x_b(t)-x_b^*(t)}{2j}\right) \cdot \left(\frac{x_b(t-\tau)+x_b^*(t-\tau)}{2}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{4j} \left\{ \underbrace{E[x_b(t)x_b(t-\tau)]}_{=0} + \underbrace{E[x_b(t)x_b^*(t-\tau)]}_{=R_{xb}(\tau)} - \underbrace{E[x_b^*(t)x_b(t-\tau)]}_{=R_{xb}(-\tau)} + \underbrace{E[x_b^*(t)x_b^*(t-\tau)]}_{=0} \right\} \\
 R_{q_x p_x}(\tau) &= \frac{1}{4j} \{R_{xb}(\tau) - R_{xb}(-\tau)\}
 \end{aligned}$$



## Processus aléatoires SSL (11)

### PROPRIETES (suite)

(9) Si  $S_x^+(f)$  symétrique autour de  $f_0$ ,  $\forall t_1 \text{ et } t_2, E[p_x(t_1)q_x(t_2)] = 0$

$p_x(t_1)$  et  $q_x(t_2)$  sont décorrélés pour tout couple d'instants  $t_1$  et  $t_2$

### Démonstration

#### Conséquence de la propriété (8)

$$S_{p_x q_x}(f) = S_{q_x p_x}(-f) = \frac{1}{j} \left\{ -S_x^+(f + f_0) + S_x^-(f - f_0) \right\} = 0$$

↓  $\overline{TF}$

$$R_{p_x q_x}(\tau) = S_{q_x p_x}(-\tau) = 0 \Leftrightarrow E[p_x(t)q_x(t-\tau)] = 0, \forall \tau$$

$$\Leftrightarrow E[p_x(t_1)q_x(t_2)] = 0, \forall (t_1, t_2)$$



## Processus aléatoires SSL (12)

### PROPRIETES (suite)

(10) Si  $x(t)$  gaussien,  $p_x(t)$  et  $q_x(t)$  gaussiens

En effet, les composantes en phase et en quadrature s'obtiennent à partir de  $x(t)$  par transformation linéaire.

Rappel : dans le cas gaussien, décorréléation entraîne indépendance

**x et y décorrélées** :  $E[x y] = E[x] E[y]$

**x et y indépendantes** :  $p_{x,y}(x,y) = p_x(x) p_y(y) \Rightarrow E[x y] = E[x] E[y]$

**Indépendance  $\Rightarrow$  décorréléation**

**Réciproque vraie dans le cas gaussien !**



# Processus aléatoires SSL (13)

## PROPRIETES (suite)

(12) Si  $x(t)$  et  $y(t)$  réels     $E[x(t)y(t)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{E[x_b(t)y_b^*(t)]\}$

### Démonstration

Rappel : propriété (5)     $E[\Delta^2(t)] = \frac{1}{2} E[\Delta_b(t)^2]$

Soit  $v(t) = x(t) + y(t)$  et  $v_b(t) = x_b(t) + y_b(t)$

$$E[v^2(t)] = E[(x(t) + y(t))^2] = E[x^2(t)] + E[y^2(t)] + 2E[x(t)y(t)]$$

$$\frac{1}{2} E[v_b^2(t)] = \frac{1}{2} E[(x_b(t) + y_b(t)) \cdot (x_b(t) + y_b(t))^*]$$

$$= \frac{1}{2} \{E[x_b(t)^2] + E[y_b(t)^2] + E[x_b(t)y_b^*(t)] + E[y_b(t)x_b^*(t)]\}$$

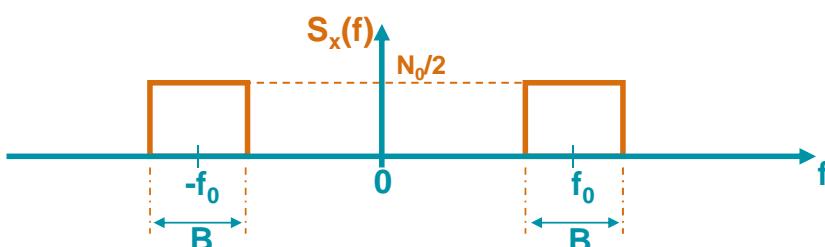
$$\Rightarrow 2E[x(t)y(t)] = \frac{1}{2} (E[x_b(t)y_b^*(t)] + E[y_b(t)x_b^*(t)]) = \frac{1}{2} (2R_e\{E[x_b(t)y_b^*(t)]\})$$

$$\Leftrightarrow E[x(t)y(t)] = \frac{1}{2} R_e\{E[x_b(t)y_b^*(t)]\}$$



# Exemple : Bruit blanc

Soit  $x(t)$  le bruit obtenu par filtrage passe-bande idéal de largeur  $B$  autour de  $f_0$  d'un bruit blanc de densité spectrale de puissance  $N_0/2$



La résolution des questions qui suivent fait appel aux propriétés qui précédent

Quelle est l'expression de sa densité spectrale de puissance ?

$$S_x(f) = \frac{N_0}{2} \text{ si } f_0 - B/2 < |f| < f_0 + B/2$$

0, ailleurs

Quelle est l'expression de sa puissance ?

$$P_x = \frac{N_0}{2} \times 2B = N_0 B$$



# Exemple : Bruit blanc

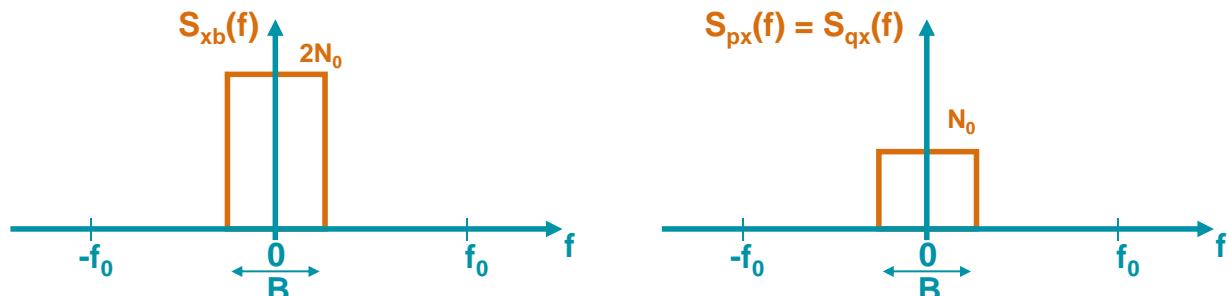
## EXAMPLE (suite)

**Quelles sont la densité spectrale de puissance et la puissance de l'enveloppe complexe ?**

$$S_{x_b}(f) = 2N_0 \text{rect}_B\left(\frac{f}{B}\right) \Rightarrow P_{x_b} = E[x_b^2(t)] = 2N_0B = 2P_x$$

**Quelles sont la densité spectrale de puissance et la puissance de ses composantes en phase et en quadrature par rapport à  $f_0$  ?**

$$S_{p_x}(f) = S_{q_x}(f) = N_0 \text{rect}_B\left(\frac{f}{B}\right) \Rightarrow P_{p_x} = P_{q_x} = E[p_x^2(t)] = E[q_x^2(t)] = N_0B$$



# 6. Conclusion

**Ce qu'il faut retenir ...**

Signal bande étroite  $\leftrightarrow$  Signal analytique  $\leftrightarrow$  Enveloppe complexe

## Intérêt de la modélisation

**Porteuse éliminée**

**→ Étude ramenée en bande de base**

**En simulation**

**→ Calculs allégés de façon considérable surtout en hautes fréquences, puisque la fréquence d'échantillonnage doit simplement vérifier  $F_e \geq 2B$  au lieu de  $2(B + f_0)$**



# Modulations d'Amplitude

## Plan

- 1. Généralités
- 2. Principes des modulations d'amplitude
- 3. Modulateurs d'amplitude
- 4. Démodulateurs d'amplitude
- 5. Principe des récepteurs
- 6. Conclusion



Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

# Modulations d'Amplitude



# Qu'est-ce qu'une modulation d'amplitude ?

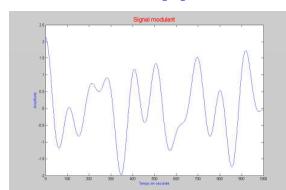
Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Principe

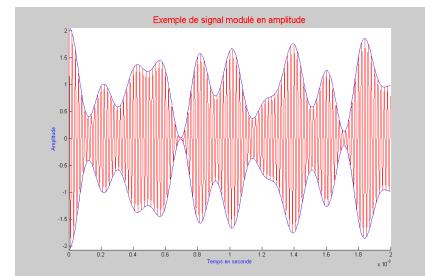
Variation de l'amplitude d'une porteuse (signal périodique souvent sinusoïdal ou carré) en fonction du signal modulant signal comportant l'information

Signal utile (modulant)

$m(t)$



Signal transmis (modulé)



Modulation

Signal porteur (porteuse)

$$p(t) = P \cos(\omega_0 t + \phi)$$

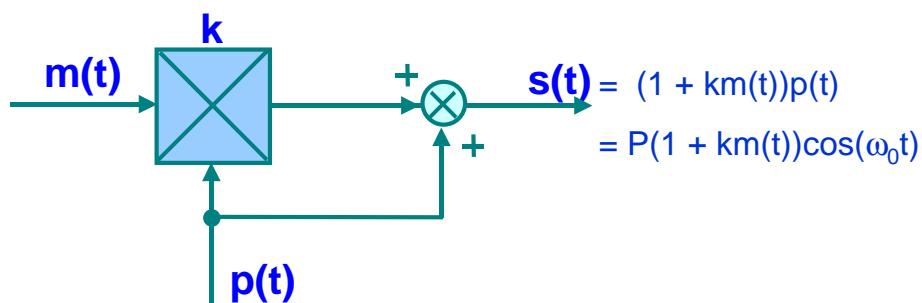
Plusieurs réalisations possibles !



Modulations d'amplitude

3

# Modulation d'amplitude avec porteuse



si  $m(t) = M \cos(\Omega t)$  alors  $s(t) = P(1 + kM \cos(\Omega t))\cos(\omega_0 t)$

Indice de modulation  $m_a = km$  (ou taux de modulation en %)

- si  $m_a < 1$  Modulation dite classique – Enveloppe ≡ Signal modulant
- si  $m_a = 1$  Cas particulier
- si  $m_a > 1$  Surmodulation – Enveloppe ≡  $|1 + km(t)|$



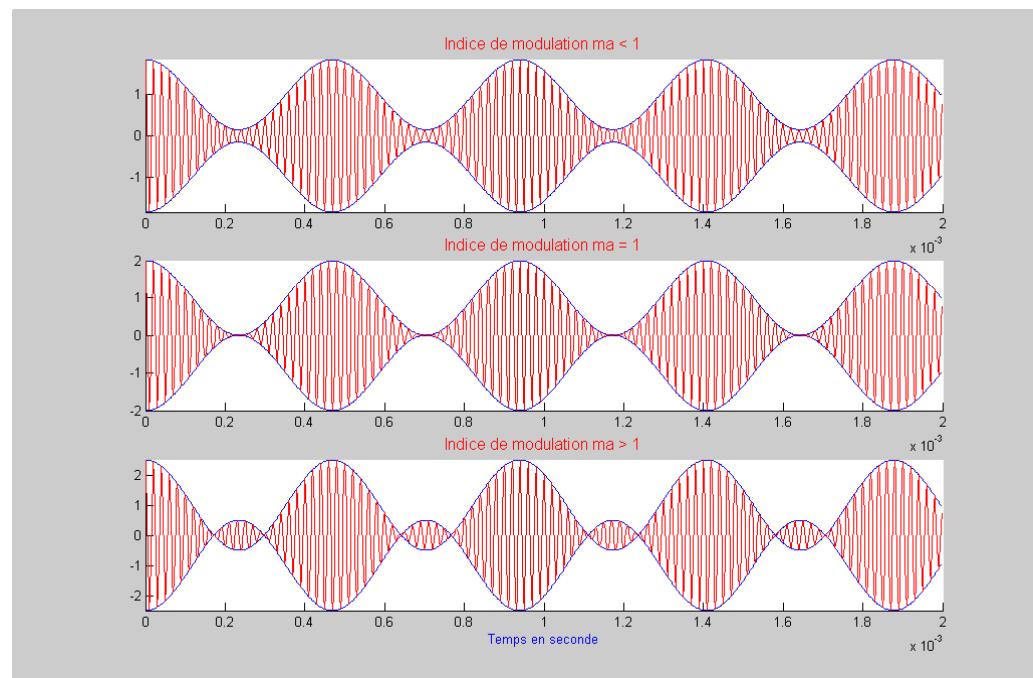
Modulations d'amplitude

4

# Modulation d'amplitude avec porteuse

- Généralités
- Principes**
- Modulateurs
- Détecteurs
- Récepteurs
- Conclusion

## Illustration



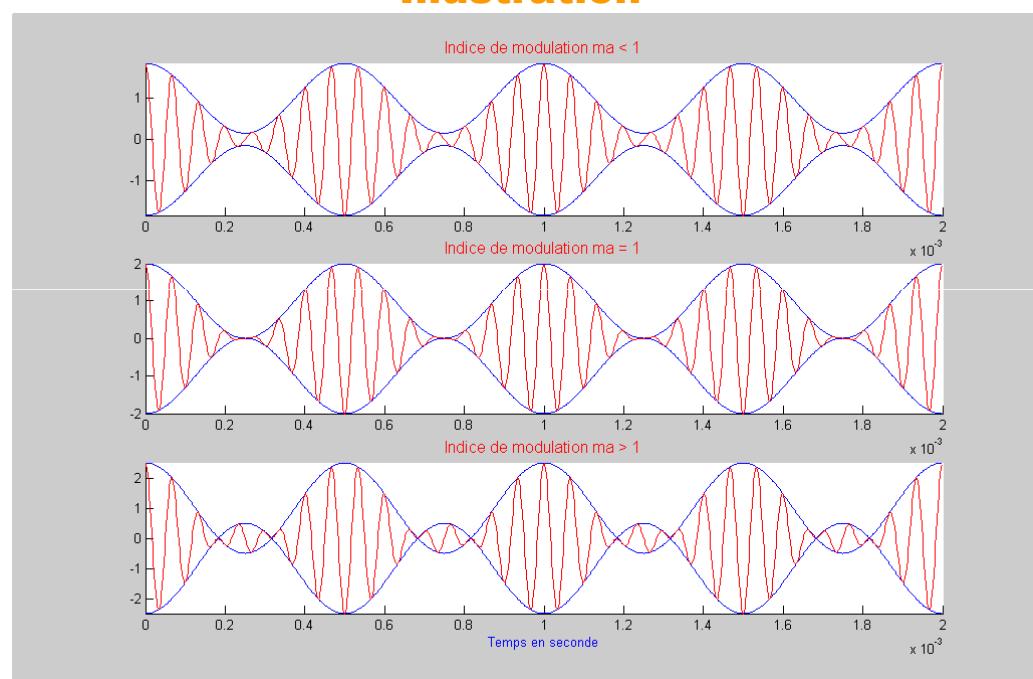
Modulations d'amplitude

5

# Modulation d'amplitude avec porteuse

- Généralités
- Principes**
- Modulateurs
- Détecteurs
- Récepteurs
- Conclusion

## Illustration



Modulations d'amplitude

6

# Modulation d'amplitude avec porteuse

## Aspect spectral

$$s(t) = P(1 + km(t)) \cos \omega_0 t$$

↓ TF

$$S(f) = \frac{P}{2} (1 + kM(f)) * (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

$$= \frac{P}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + k(M(f - f_0) + M(f + f_0))]$$

$$\text{si } m(t) = M \cos(2\pi F t)$$

$$S(f) = \frac{P}{2} \left[ \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \left( \frac{m_a}{2} (f - f_0 - F) + \frac{m_a}{2} (f - f_0 + F) + \frac{m_a}{2} (f + f_0 - F) + \frac{m_a}{2} (f + f_0 + F) \right) \right]$$



Modulations d'amplitude

7

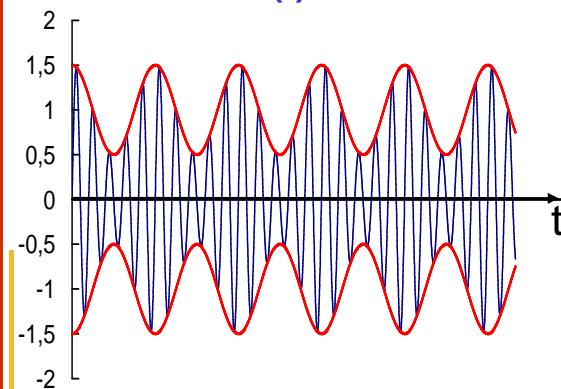
# Modulation d'amplitude avec porteuse

## Exemple : modulant sinusoïdal de fréquence F

$$m_a = 50\%$$

### Domaine temporel

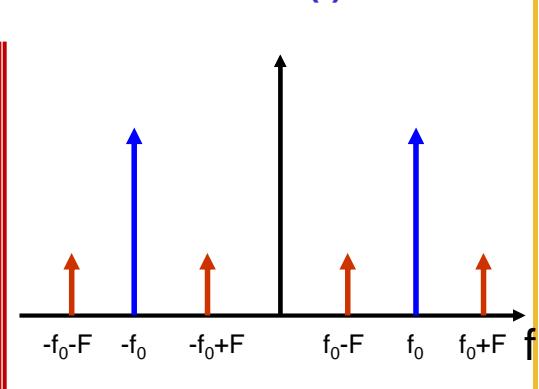
$$s(t)$$



TF

### Domaine fréquentiel

$$S(f)$$



Modulations d'amplitude

8

Généralités

Principes

Modulateurs

Détecteurs

Récepteurs

Conclusion

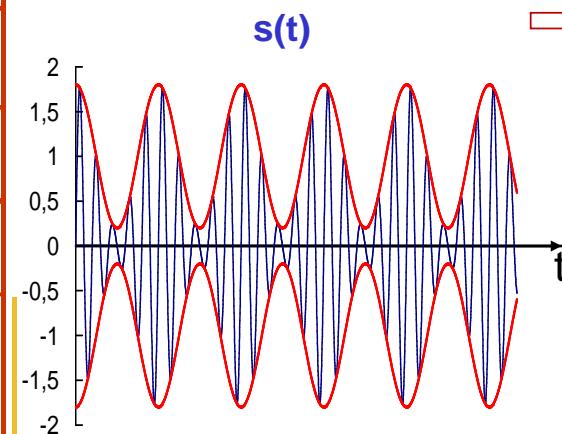


## Modulation d'amplitude avec porteuse

**Exemple : modulant sinusoïdal de fréquence F**

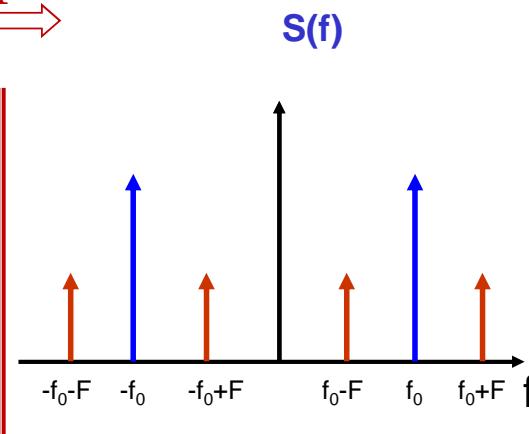
$$m_a = 80\%$$

Domaine temporel



TF

Domaine fréquentiel



Modulations d'amplitude

9

Généralités

Principes

Modulateurs

Détecteurs

Récepteurs

Conclusion

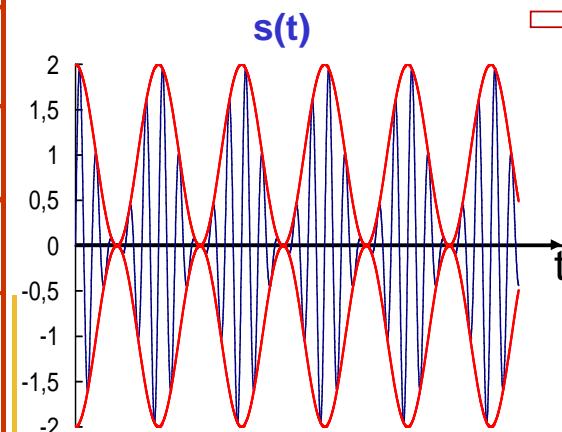


## Modulation d'amplitude avec porteuse

**Exemple : modulant sinusoïdal de fréquence F**

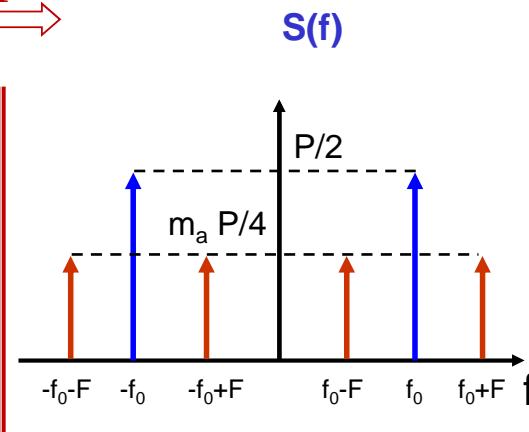
$$m_a = 100\%$$

Domaine temporel



TF

Domaine fréquentiel



Modulations d'amplitude

10

Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

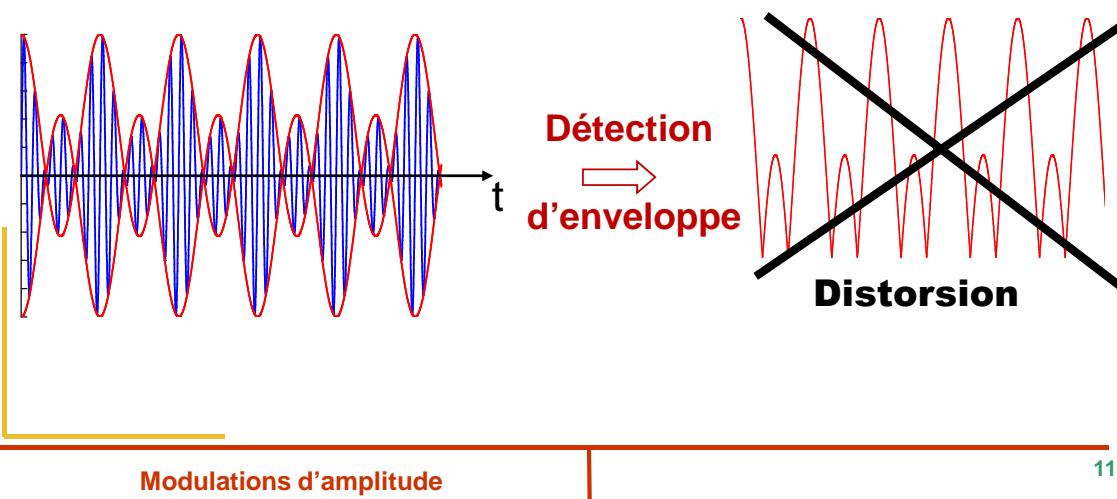


## Modulation d'amplitude avec porteuse

**Exemple : modulant sinusoïdal de fréquence F**

Et si  $m_a > 100\%$  ?

**Problème de sur-modulation d'amplitude**



Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion



## Modulation d'amplitude avec porteuse

**Quelle est la distribution spectrale de puissance du signal modulé ?**

**Puissance totale du signal**

$$P_T = \langle s^2(t) \rangle = \frac{P^2}{2} (1 + k^2 \langle m^2(t) \rangle) \quad / \quad \langle m(t) \rangle = 0, m(t) \text{ lent}$$

$$= \frac{P^2}{2} \left(1 + \frac{m_a^2}{2}\right) \quad / \quad m(t) \text{ sinusoïdale et } kM = m_a$$

$$P_T = P_{\text{porteuse}} + 2P_{\text{latérales}} \quad \text{avec } P_{\text{porteuse}} = \frac{P^2}{2} \quad \text{et } P_{\text{latérales}} = \frac{m_a^2}{4} P_{\text{porteuse}}$$

**Rendement en puissance**

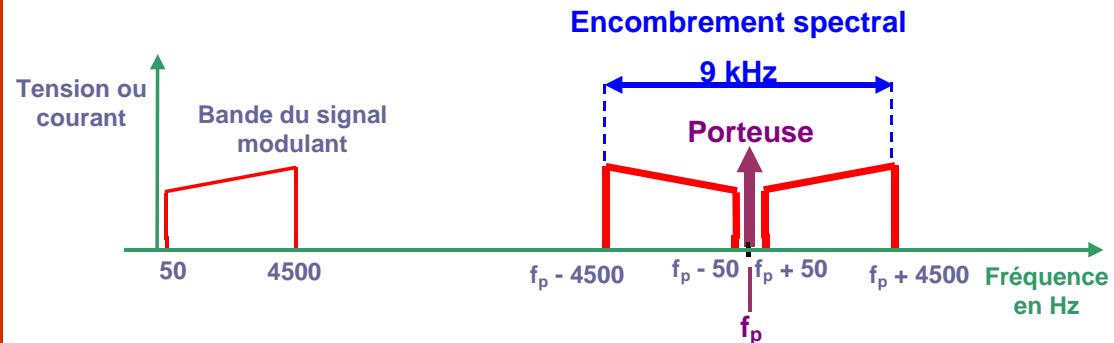
$$\eta = \frac{P_{\text{latérales}}}{P_t} = \frac{\frac{m_a^2}{4}}{1 + \frac{m_a^2}{2}}$$

Dans le meilleur cas ( $m_a = 1$ )  $\eta = \frac{1/4}{1 + 1/2} = \frac{1}{6}$

Au mieux 16,6% de puissance utilisée !

# Modulation d'amplitude avec porteuse

## Application : radiodiffusion en longues ondes (AM)



- Limitation de l'encombrement spectral liée à la qualité des haut-parleurs de l'époque
- Gamme des fréquences en longues ondes [ 144 kHz ; 290 kHz ]
- Nombre de stations limité (encombrement spectral + bande de sécurité)

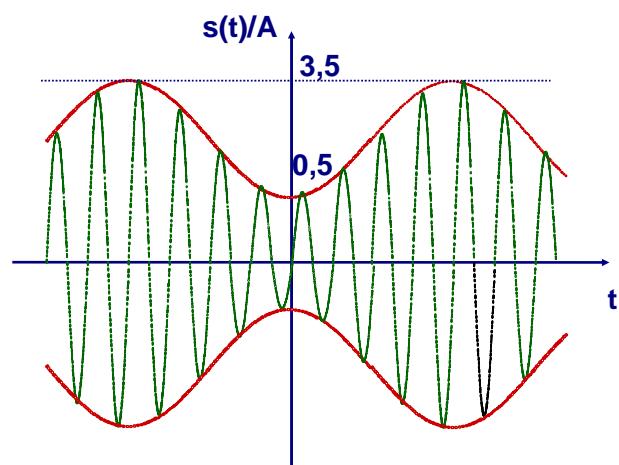
# Modulation d'amplitude avec porteuse

## Exemple

Fréquence de porteuse  
200 kHz

Fréquence modulante  
5 kHz

Puissance d'émission  
100 kW



# Modulation d'amplitude avec porteuse

Généralités

Principes

Modulateurs

Détecteurs

Récepteurs

Conclusion

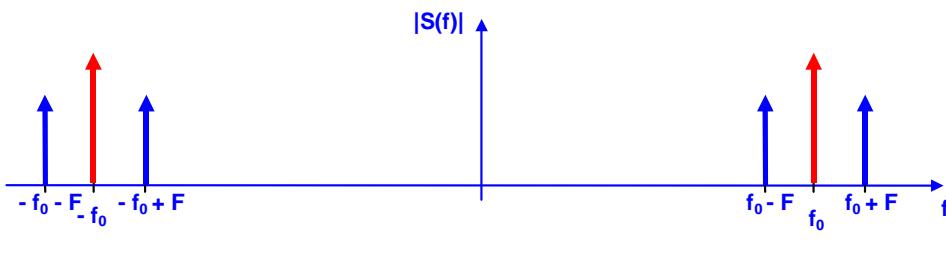
□ Fréquences contenues dans le signal modulé ?

200 kHz (fréquence de la porteuse)  
195 kHz et 205 kHz (fréquences des bandes latérales)

□ Quelle est la bande de fréquence du signal modulé ?

10 kHz

□ Représentation du module du spectre du signal modulé



Modulations d'amplitude

15

# Modulation d'amplitude avec porteuse

## Exemple

□ Indice de modulation ?

$$s(t) = P(1 + m_a \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$$

$$\frac{1+m_a}{1-m_a} = 7 \Rightarrow m_a = 0,75$$

$$P(1 + m_a) = 3,5$$

$$P(1 - m_a) = 0,5$$

□ Puissance contenue dans la porteuse et dans chacune des raies latérales ?

$$\langle s^2 \rangle = \frac{P^2}{2} \left( 1 + \frac{m_a^2}{2} \right) = 100 \text{ kW} \Rightarrow \frac{P^2}{2} = 78,048 \text{ kW}$$

$$P_{\text{porteuse}} = \frac{P^2}{2} \approx 78 \text{ kW}$$

$$P_{\text{latérales}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P^2}{2} \cdot \frac{m_a^2}{2} \approx 11 \text{ kW}$$



Modulations d'amplitude

16

# Modulation d'amplitude sans porteuse

Généralités

**Principes**

Modulateurs

Détecteurs

Récepteurs

Conclusion

## Principe

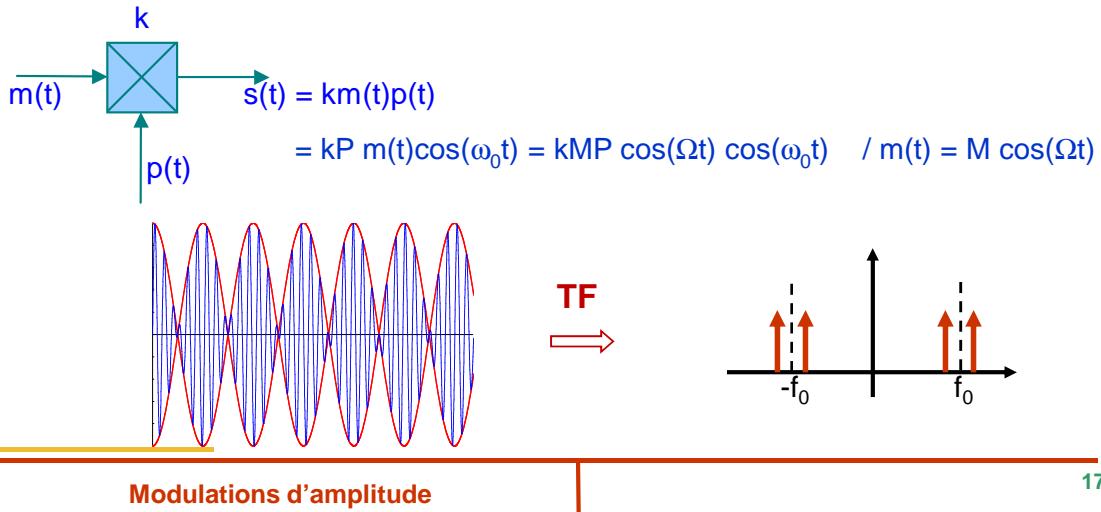
Modulation d'amplitude **avec** porteuse

Importante consommation d'énergie par l'émetteur

Au moins 67% de l'énergie consommée pour la porteuse

## Idée d'amélioration

Ne transmettre que les deux bandes latérales



Modulations d'amplitude

17



# Modulation d'amplitude sans porteuse

## Illustration avec modulant quelconque

Généralités

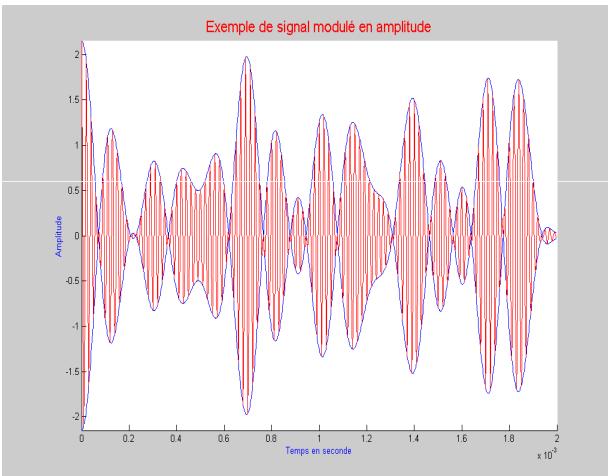
**Principes**

Modulateurs

Détecteurs

Récepteurs

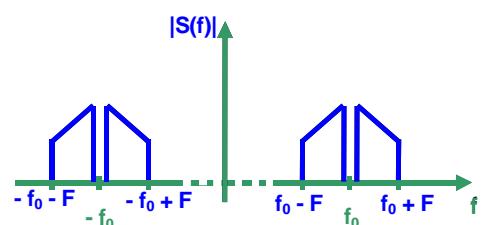
Conclusion



$$s(t) = Pkm(t)\cos\omega_0 t$$

↓ TF

$$S(f) = \frac{Pk}{2} (M(f - f_0) + M(f + f_0))$$



Modulations d'amplitude

18



# Modulation d'amplitude sans porteuse

**Quelle distribution spectrale de puissance du signal modulé ?**

## Puissance totale du signal

$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{k^2 P^2}{2} \langle m^2(t) \rangle$$

## Rendement en puissance

Puissance distribuée également sur les deux bande latérales

$$\eta = \frac{P_{\text{lat}}}{P_T} = 50\% \text{ quel que soit le signal modulant}$$

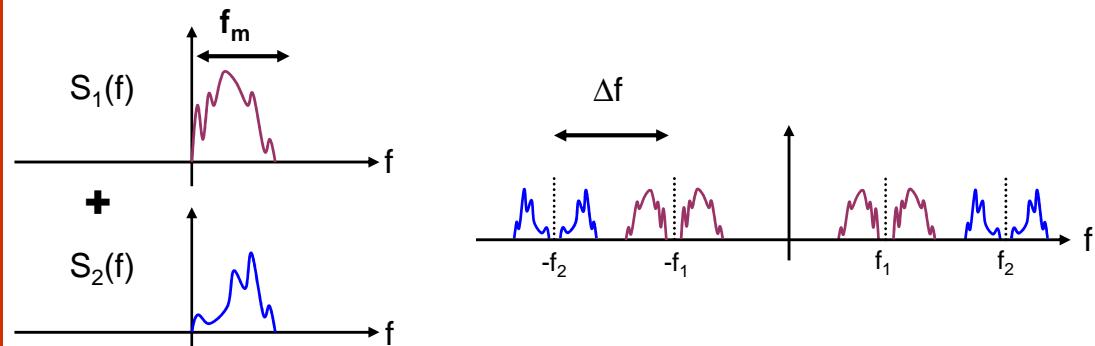
## Applications

- Mélangeurs
- Codeurs stéréophoniques
- Signaux de chrominance dans le système PAL



# Modulation à bande latérale unique (BLU)

**Problème des 2 modulations précédentes**



Si le signal à transmettre est défini sur une largeur fréquentielle  $f_m$ , l'écart fréquentiel entre deux canaux de transmission  $\Delta f$  doit être :

$$\Delta f \geq 2f_m$$

➡ Encombrement spectral inutile (car deux fois l'information)!

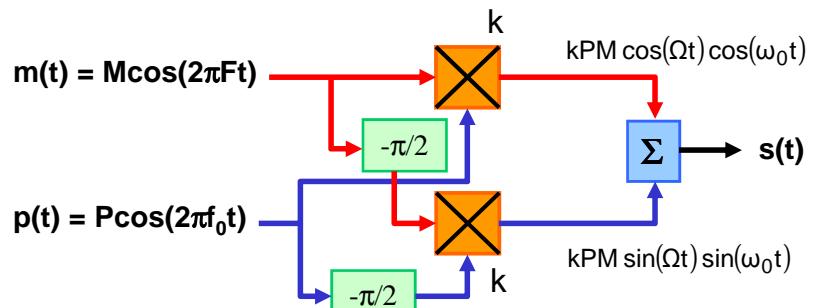


# Modulation à bande latérale unique (BLU)

Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Solution

Eliminer l'une des deux bandes latérales ( $\eta = 100\%$ )



$$\text{Si } \Sigma = - \text{ alors } s(t) = \frac{kPM}{2} \cos[2\pi(F + f_0)t] \rightarrow \text{BLS}$$

USB : Upper Side Band

$$\text{Si } \Sigma = + \text{ alors } s(t) = \frac{kPM}{2} \cos[2\pi(F - f_0)t] \rightarrow \text{BLI}$$

LSB : Lower Side Band

$$\begin{cases} \cos(a - \pi/2) = \sin a \\ 2\cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b) \\ 2\sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b) \end{cases}$$

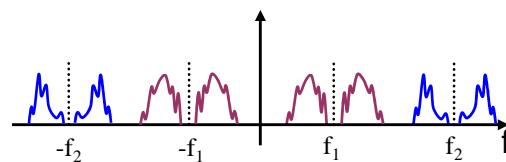
Modulations d'amplitude

21

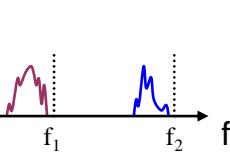


# Modulation à bande latérale unique (BLU)

Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion



BLI



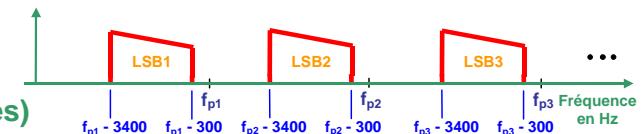
BLS

$$\Rightarrow \Delta f \geq f_m$$

$$\Rightarrow \text{Encombrement spectrale /2} \Rightarrow \text{Nombre de canaux X2}$$

## Applications

- Téléphonie
- Radioamateur (ondes courtes)



Pb : pas envisageable si le signal est défini sur une large bande

Modulations d'amplitude

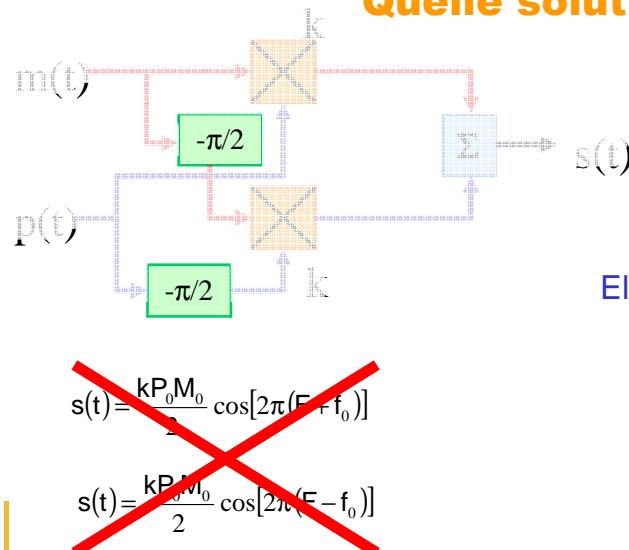
22



Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Modulation à bande latérale atténuée

Quelle solution ?



Pas de déphaseur  
large bande

↓  
Eliminer une bande latérale sans  
utiliser la modulation BLU !

?

### Modulation à Bande Latérale Atténuée (BLA)

Modulations d'amplitude

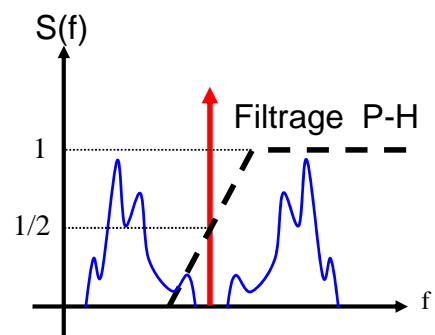
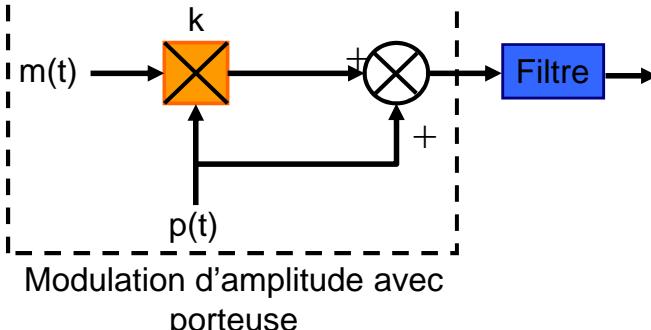
23



Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Modulation à bande latérale atténuée

Principe



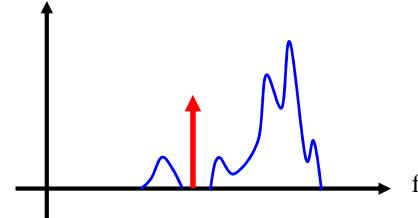
Bande latérale unique  
(quasi) sur une large  
bande spectrale

### Applications

- Transmission vidéo  
(large bande 5 à 6 MHz)



S(f)+filtrage



Modulations d'amplitude

24



## Récapitulatif des 4 modulations d'amplitude

Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

Applications	$S(f)$	Rendement ( $\eta$ )
<b>Modulation avec porteuse</b> ▪ Radiodiffusion longues ondes		Au mieux 16.6%
<b>Modulation sans porteuse</b> ▪ Mélangeur ▪ codeurs stéréo		50 %
<b>Modulation BLU</b> ▪ Téléphonie ▪ Radios amateurs		100%
<b>Modulation BLA</b> ▪ Transmission d'images		Au mieux 16.6%



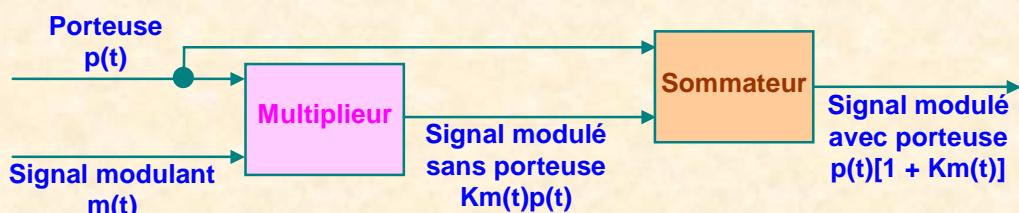
Modulations d'amplitude

25

## Comment réaliser physiquement une modulation d'amplitude ?

### Principe général

Mélanger les fréquences des deux signaux (modulant et porteuse) pour créer des sommes et différences de leurs fréquences



Circuits de modulation spécialisés : MC 1496



Modulations d'amplitude

26

# Multiplieurs analogiques intégrés à transistors bipolaires

## Principe de fonctionnement

Généralités

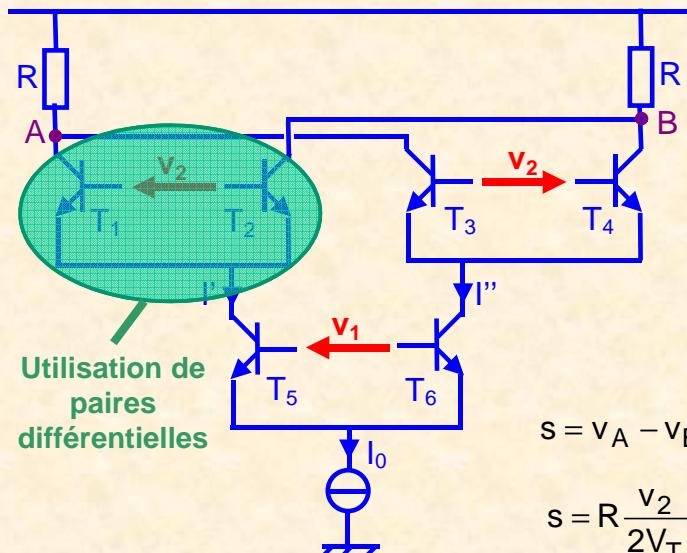
Principes

**Modulateurs**

Détecteurs

Récepteurs

Conclusion



$$I' - I'' \approx I_0 \frac{v_1}{2V_T}$$

$$\begin{cases} i_{c1} - i_{c2} \approx I' \frac{v_2}{2V_T} \\ i_{c4} - i_{c3} \approx I'' \frac{v_2}{2V_T} \end{cases}$$

$$s = v_A - v_B = R[(i_{c4} - i_{c3}) - (i_{c1} - i_{c2})]$$

$$s = R \frac{v_2}{2V_T} (I' - I'') = -\frac{R I_0}{4V_T^2} v_1 v_2 = k v_1 v_2$$

$$\Rightarrow s = k v_1 v_2$$

Modulations d'amplitude

27

# Modulateurs à transistors à effet de champ

## Principe de fonctionnement

Généralités

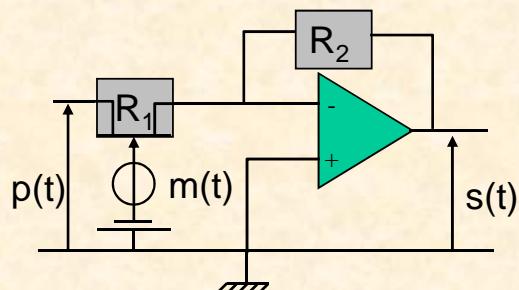
Principes

**Modulateurs**

Détecteurs

Récepteurs

Conclusion



$$s(t) = -\frac{R_2}{R_1} p(t) = G p(t)$$

$$s(t) = -\frac{R_2}{R_{DS}(t)} p(t) = -\frac{R_2}{\alpha} m(t) p(t)$$

Modulations d'amplitude

28

Généralités

Principes

**Modulateurs**

Détecteurs

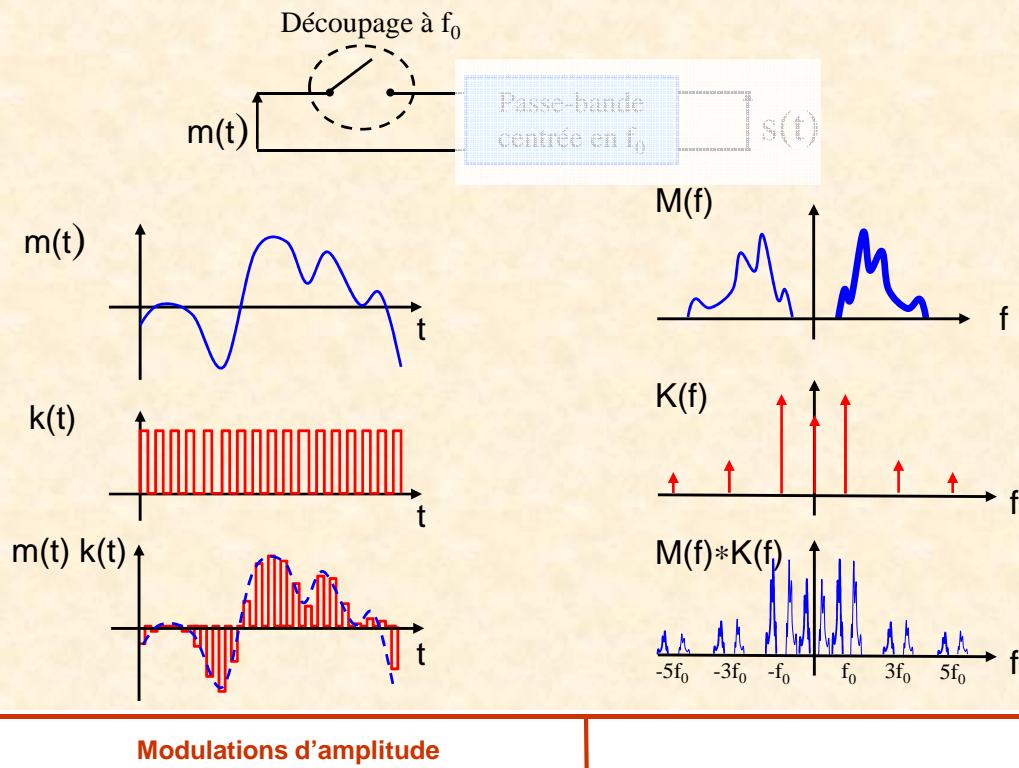
Récepteurs

Conclusion



## Modulateur à découpage

### Principe de fonctionnement



Généralités

Principes

**Modulateurs**

Détecteurs

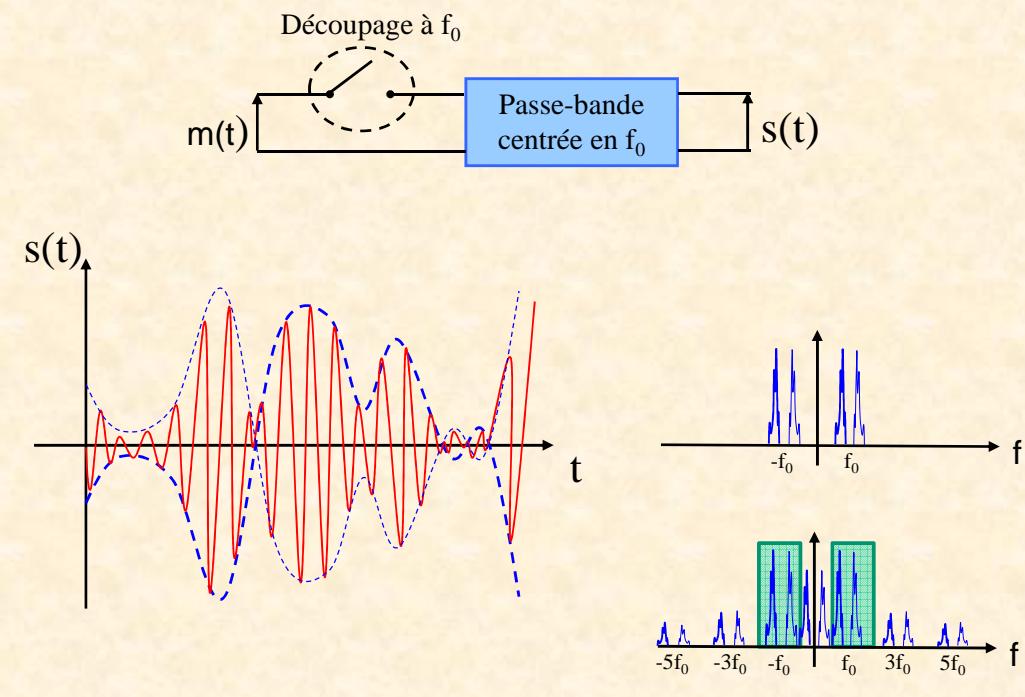
Récepteurs

Conclusion



## Modulateur à découpage

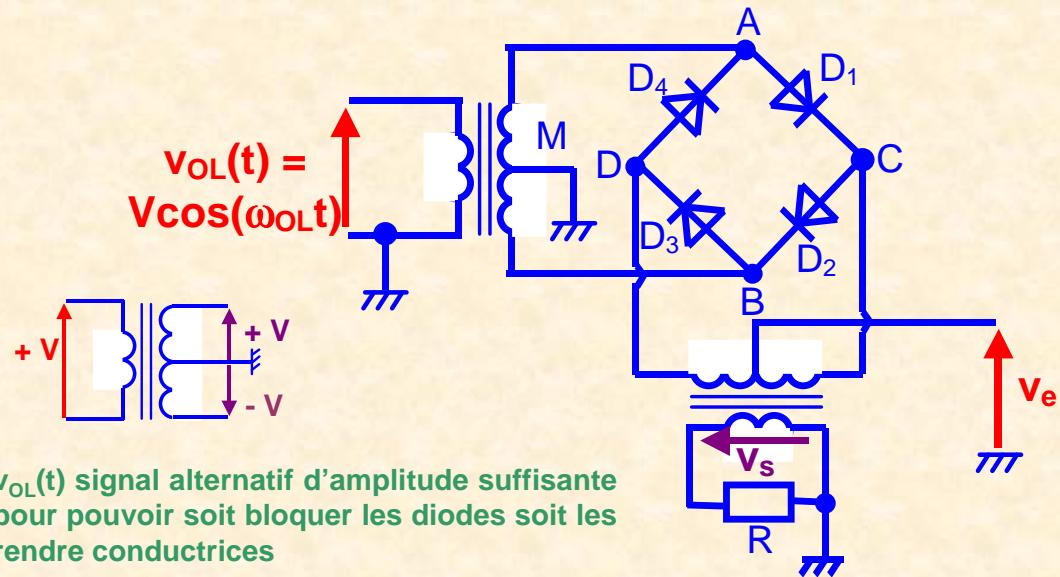
### Principe de fonctionnement



# Modulateur à découpage

Généralités
Principes
<b>Modulateurs</b>
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

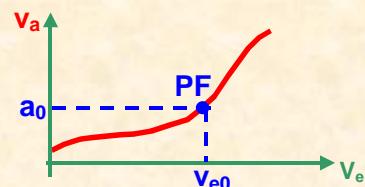
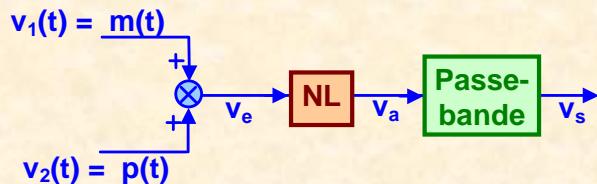
## Exemple : Modulateur en anneau



# Modulateur par élément non-linéaire

Généralités
Principes
<b>Modulateurs</b>
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Principe



Développement limité de  $v_a(t)$

$$v_a = a_0 + a_1 v_e + \dots + a_n v_e^n + \dots = f(V_e) = f(V_{e0} + v_e) \text{ avec } a_0 = f(V_{e0}) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial^n V_e} \right|_{PF}$$

$$v_e(t) = v_1(t) + v_2(t) = m(t) + p(t) = m(t) + P \cos(\omega_0 t)$$

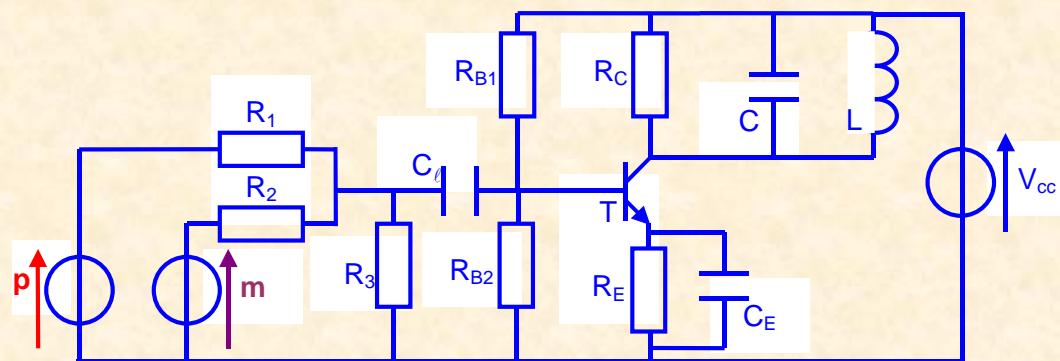
$$v_a(t) = a_0 + a_1(v_1 + v_2) + a_2(v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2) + \dots + a_n(v_1 + v_2)^n + \dots$$

$$v_s(t) = a_1 v_2 + 2a_2 v_1 v_2 + 3a_3 v_1^2 v_2 + \dots = P \cos(\omega_0 t) \{a_1 + 2a_2 m(t) + 3a_3 m^2(t) + \dots\}$$

Modulation linéaire si  $a_i = 0$ , pour  $i \geq 3$

# Modulateur par élément non-linéaire

## Exemple : Modulateur à transistor bipolaire



Modulations d'amplitude

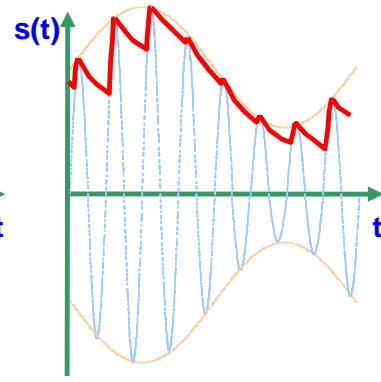
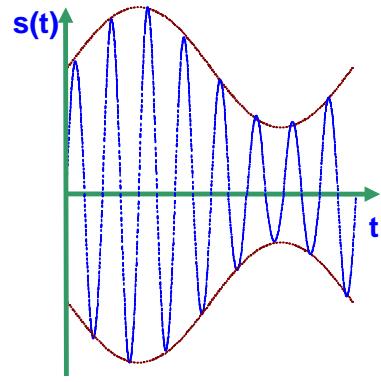
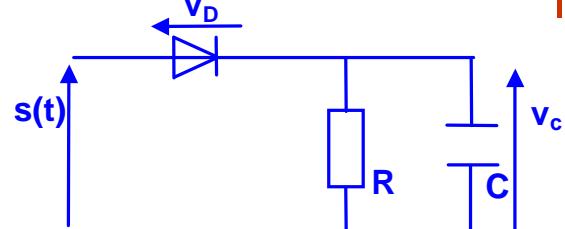
33

# Détecteur d'enveloppe (Démodulateur non cohérent)

## Principe de la détection

Redressement assuré par un ensemble {D + R}

Elimination de la porteuse par l'ensemble {R + C}



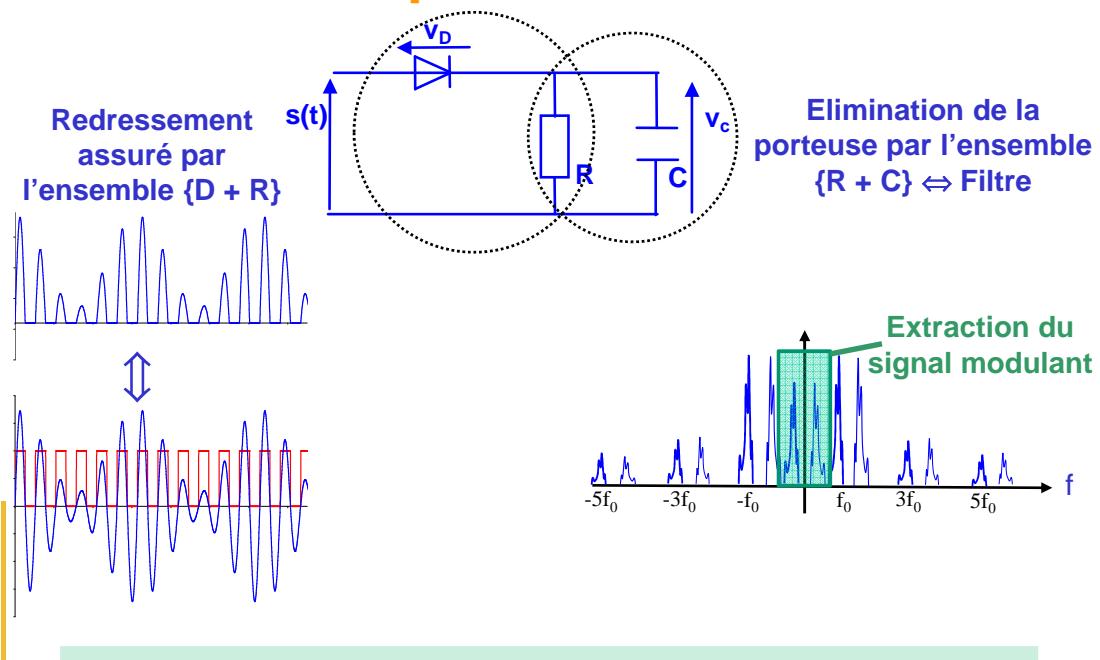
Modulations d'amplitude

34

## Détecteur d'enveloppe (Démodulateur non cohérent)

Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

### Principe de la détection



Modulations d'amplitude

35

## Détecteur d'enveloppe (Démodulateur non cohérent)

Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

### Choix des caractéristiques du filtre

Si  $f_c$  trop grand ( $RC \ll t_m$ )

Filtrage

→

$TF^{-1}$

→

Ondulation résiduelle



Trop d'informations !

Si  $f_c$  trop petit ( $RC > t_m$ )

Filtrage

→

$TF^{-1}$

→

Atténuation de l'enveloppe



Perte d'infos !

Compromis :  $t_p \ll RC < t_m$

Modulations d'amplitude

36

# Détecteur d'enveloppe (Démodulateur non cohérent)

Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion



## Bilan

Il est possible de rajouter :

- un **filtre passe-bas** (filtrage de la composante HF)
- un **condensateur** pour éliminer la composante continue

**Faible coût**

**Simplicité**

**Non sensible à la phase**

**Application qu'à un type de modulation, modulation avec porteuse et taux de modulation inférieur à un**

**Ne permet pas le démultiplexage**

**Démodulation cohérente**

**Modulations d'amplitude**

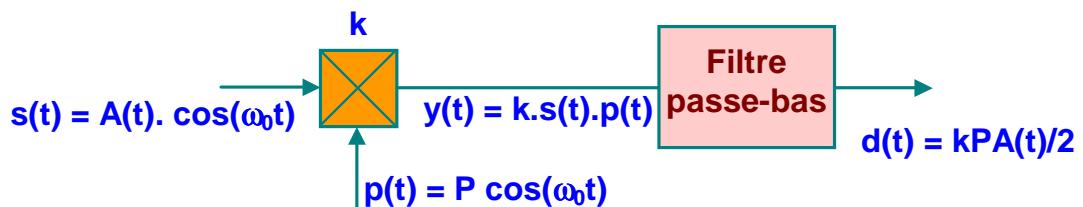
37

# Détecteur synchrone (Démodulateur cohérent)

Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion



## Principe de la détection



▪ Signal détecté en sortie du modulateur directement proportionnel au signal modulant

▪ Procédé s'appliquant donc à tous les types de modulation d'amplitude : avec ou sans porteuse, d'indice de modulation quelconque

**Modulations d'amplitude**

38

# Détecteur synchrone (Démodulateur cohérent)

## Caractéristiques et limitations

### Sensibilité à la phase

Principale difficulté pour réaliser une telle modulation disposer à la réception d'un signal parfaitement synchrone à la porteuse qui sert à l'émission

### Si déphasage entre les deux oscillateurs HF

$$y(t) = kPA(t) \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{kPA(t)}{2} [\cos(2\omega_0 t + \varphi) + \cos\varphi]$$

$$d(t) = \frac{kPA(t)}{2} \cos\varphi$$

- ➡ Si  $\varphi = \pm \pi/2$ , alors  $d(t) = 0$

- Si  $\varphi$  varie (bruit de phase), alors distorsion du signal détecté



# Détecteur synchrone (Démodulateur cohérent)

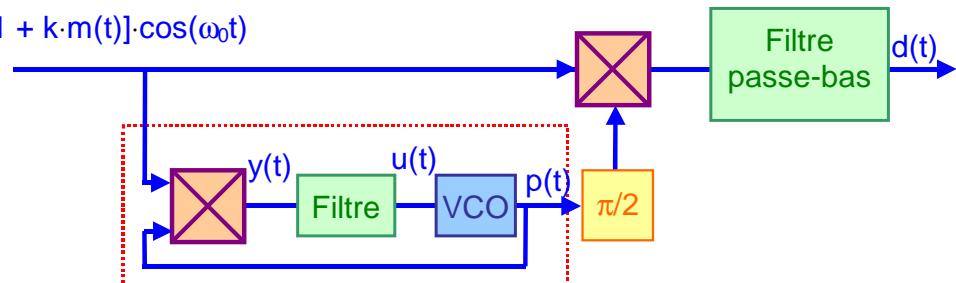
## Solutions

La démodulation n'est bonne que si le signal  $s(t)$  et  $p(t)$  sont **synchrone**s

### Synchronisme obtenu

- En transmettant la porteuse séparément (instrumentation)
- Porteuse transmise à d'autres instants (NTSC et PAL)
- Régénération de la porteuse par PLL

$$s(t) = P[1 + k \cdot m(t)] \cdot \cos(\omega_0 t)$$



# Détecteur synchrone (Démodulateur cohérent)

Généralités
Principes
Modulateurs
<b>Détecteurs</b>
Récepteurs
Conclusion

## Démodulation BLU

**Pas de nécessité d'avoir un synchronisme rigoureux**

$$s(t) = \cos(2\pi(F + f_0)t) = A \cos(\Omega + \omega_0)t \quad / \text{cas d'une BLS}$$

$$y(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\Omega + \omega_0)t = \frac{B}{2} \{ \cos(2\omega_0 + \Omega)t + \varphi + \cos(\Omega t - \varphi) \}$$

$$d(t) = \frac{B}{2} \cos(\Omega t - \varphi)$$

**Signal détecté distordu en phase, terme -  $\varphi$**

→ **Le bruit de phase reste du bruit de phase !**

## Application

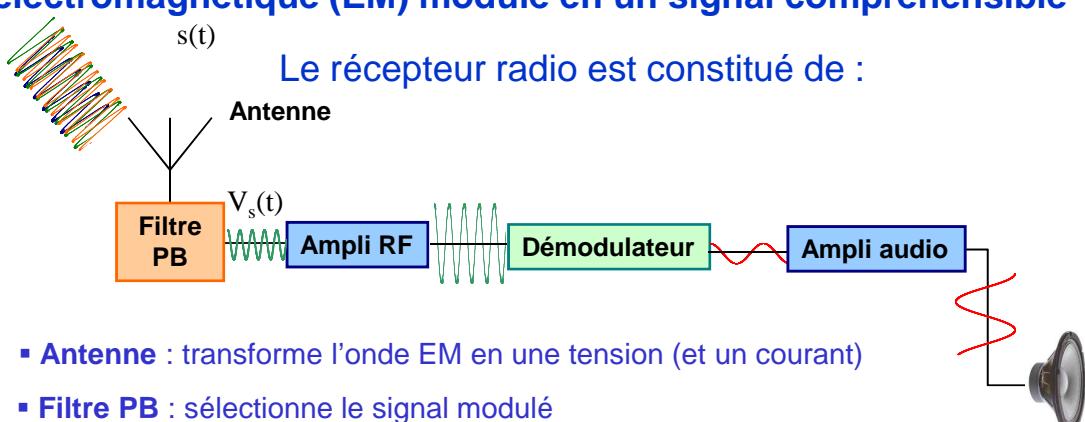
**Transmission des signaux vocaux (oreille humaine peu sensible à ce type de distorsion)**



# Récepteur direct

## Synoptique de la chaîne de réception

**La chaîne de réception doit pouvoir transformer un signal électromagnétique (EM) modulé en un signal compréhensible**



Généralités
Principes
Modulateurs
Détecteurs
<b>Récepteurs</b>
Conclusion



Généralités

Principes

Modulateurs

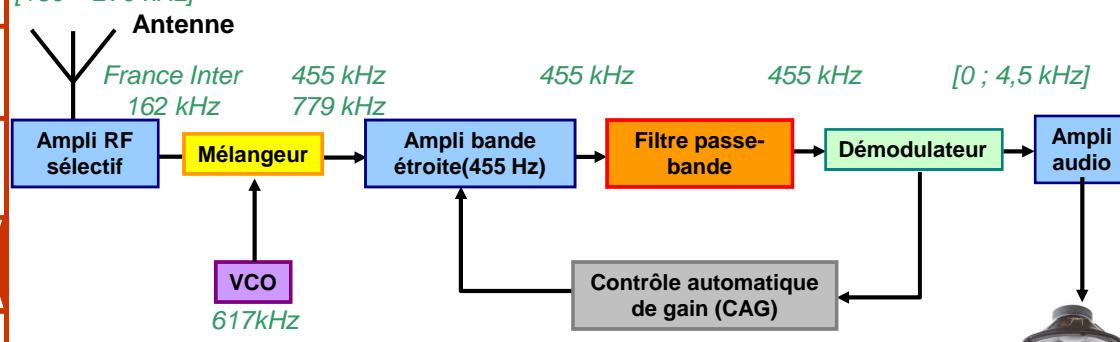
Détecteurs

Récepteurs

Conclusion

## Récepteur superhétérodyne

Permet surtout une production industrielle des étages d'amplification et de démodulation



Ce système permet d'adapter la fréquence de la porteuse aux étages d'amplification, de démodulation et de filtrage



Risque de mal fonctionnement : fréquence image  $617 + 455 \text{ kHz} = 1072 \text{ kHz}$

Précaution : l'ampli RF sélectif doit éliminer la fréquence image !



Modulations d'amplitude

43

Généralités

Principes

Modulateurs

Détecteurs

Récepteurs

Conclusion

## Critères de choix pour une modulation

Il n'existe pas de modulation d'amplitude idéale !

Le choix de la modulation doit se faire en fonction des différents critères pris en compte dont l'importance dépend de l'**application visée et du milieu de propagation**.

Ces principaux critères sont :

- l'encombrement spectral
- Le rapport signal sur bruit en sortie du démodulateur
- Puissance consommée
- complexité et coût des émetteurs et récepteurs



Modulations d'amplitude

44

# Bilan

Généralités

Principes

Modulateurs

Détecteurs

Récepteurs

**Conclusion**

Modulation	Largeur de bande	Démodulation	Complexité
MA avec P	2B	Synchrone et Asynchrone	Emission : faible Réception : faible
MA sans P	2B	Synchrone	Emission : faible Réception : importante
MA à BLU	B	Synchrone	Emission : importante Réception : importante
MA à BLA	$B(1+\varepsilon)$	Synchrone et Asynchrone	Emission : importante Réception : importante

## Applications :

- Radiocommunications commerciales (MA avec P) et privées (radio amateur)
- Systèmes à courant porteur (multiplexage fréquentiel des voies téléphoniques MA à BLU)
- Aéronautique (capacité de transmettre en MA avec P même avec une mauvaise qualité de réception)



# Modulations angulaires

## Plan du chapitre

- 1. Introduction
- 2. Modulation de fréquence et modulation de phase
- 3. Étude spectrale des signaux
- 4. Principes des modulateurs
- 5. Principes des démodulateurs
- 6. Principes des récepteurs et radio stéréo
- 7. Conclusion



Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

# Modulations angulaires



# Présentation générale

Introduction

Principe

Spectres

Modulateurs

Détecteurs

Récepteurs

Conclusion

## Première méthode pour transmettre des signaux

La modulation d'amplitude

→ simplicité des réalisations des récepteurs

## Autour des années 40

La modulation angulaire

→ insensibilité aux bruits en comparaison avec la modulation d'amplitude et apparition de la stéréo

## Modulations angulaires : Modulations de fréquence et de phase

Autour de la fréquence porteuse un grand nombre de composantes spectrales mais niveau constant du signal modulé (fixant la puissance émise)



Modulations angulaires

3

# Présentation

Introduction

Principe

Spectres

Modulateurs

Détecteurs

Récepteurs

Conclusion

## Modulation angulaire

Procédé dans lequel le signal informatif,  $m(t)$ , module la phase instantanée  $\phi(t)$  d'une porteuse sinusoïdale

### Signal émis

$s(t) = A \cos[\phi(t)]$  où  $A$  est une constante

### Fréquence instantanée

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}$$

## Deux types de modulation angulaire

Modulation de fréquence FM

Modulation de phase PM



Modulations angulaires

4

Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion



# Modulation de fréquence – FM (Frequency Modulation)

**Fréquence instantanée de la porteuse**

$$f(t) = f_0 + k_F m(t)$$

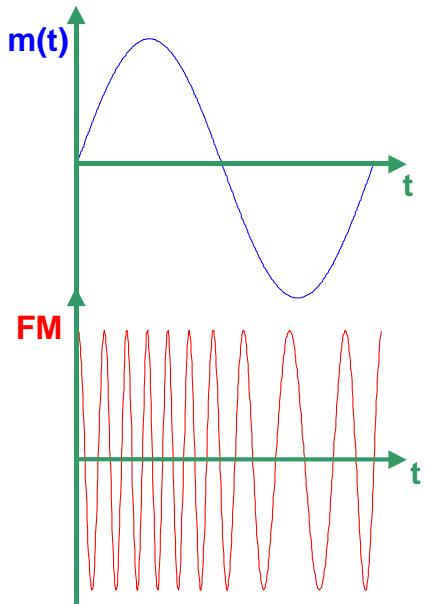
**Phase instantanée**

$$\phi(t) = \omega_0 t + \int 2\pi k_F m(t) dt$$

avec  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , pulsation de la porteuse

**Signal modulé en fréquence**

$$s(t) = A \cos[\omega_0 t + \int 2\pi k_F m(t) dt]$$



Modulations angulaires

5

Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion



# Modulation de phase – PM (Phase Modulation)

**Phase instantanée de  $s(t)$**

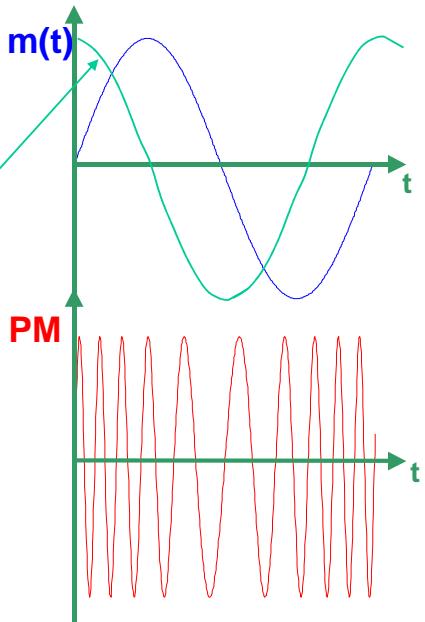
$$\phi(t) = \omega_0 t + k_P m(t)$$

**Signal modulé**

$$s(t) = A \cos[\omega_0 t + k_P m(t)]$$

**Fréquence instantanée**

$$f(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} k_F \frac{dm}{dt}$$

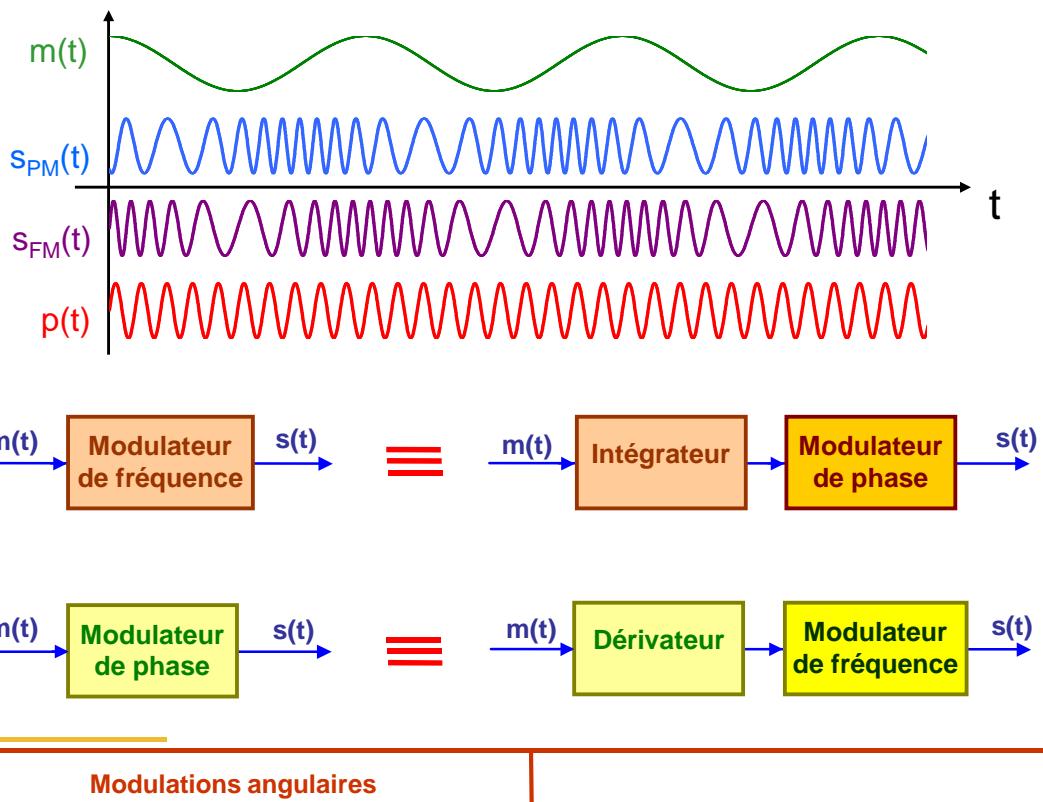


Modulations angulaires

6

# Relations entre modulation de fréquence et modulation de phase

Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion



7

## Présentation des difficultés et des contraintes

Le spectre d'un signal en modulation angulaire n'est pas simple!

Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

Non linéarité des modulations angulaires par rapport au signal modulant qui est l'argument d'une sinusoïde

→ Spectre d'un signal modulé par un signal quelconque sans expression analytique

→ Etude quantitative faite dans le cas particulier d'un signal modulant sinusoïdal



Modulations angulaires

8

# Cas d'un signal modulant sinusoïdal

Introduction

Principe

Spectres

Modulateurs

Détecteurs

Récepteurs

Conclusion

Si  $m(t) = M \cos(\Omega t)$

## Modulation de fréquence

$$\begin{aligned}s(t) &= A \cos[\omega_0 t + \int 2\pi k_F m(t) dt] \\&= A \cos[\omega_0 t + \frac{2\pi k_F}{\Omega} M \sin(\Omega t)] \\&= A \cos[\omega_0 t + m_f \sin(\Omega t)]\end{aligned}$$

## Modulation de phase

$$\begin{aligned}s(t) &= A \cos[\omega_0 t + k_p m(t)] \\&= A \cos[\omega_0 t + k_p M \cos(\Omega t)] \\&= A \cos[\omega_0 t + m_p \cos(\Omega t)]\end{aligned}$$

### Indice de modulation

$$m_f = \frac{2\pi k_F M}{\Omega} = \frac{k_F M}{F} = \frac{\Delta f}{F}$$

$$m_p = k_p M = \Delta \phi$$

$$s(t) = A \cos[\omega_0 t + m_\phi \sin(\Omega t)] \Rightarrow \text{TF ?}$$



Modulations angulaires

9

# Cas d'un signal modulant sinusoïdal

## Expression du signal modulé

$$s(t) = A \cos[\omega_0 t + m_\phi \sin(\Omega t)] = A \cos(\omega_0 t) \cos(m_\phi \sin(\Omega t)) - A \sin(\omega_0 t) \sin(m_\phi \sin(\Omega t))$$

Utilisation des fonctions de Bessel  $J_n(m_\phi)$  de première espèce d'ordre n

$$\begin{cases} \cos(m_\phi \sin(\Omega t)) = J_0(m_\phi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(m_\phi) \cos(2n\Omega t) \\ \sin(m_\phi \sin(\Omega t)) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(m_\phi) \sin((2n+1)\Omega t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow s(t) &= A J_0(m_\phi) \cos(\omega_0 t) + A J_1(m_\phi) [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] \\&\quad + A J_2(m_\phi) [\cos(\omega_0 + 2\Omega)t - \cos(\omega_0 - 2\Omega)t] \\&\quad + A J_3(m_\phi) [\cos(\omega_0 + 3\Omega)t - \cos(\omega_0 - 3\Omega)t] + \dots\end{aligned}$$



Modulations angulaires

10

Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Parenthèse

### Calcul des fonctions de Bessel

#### □ Calcul des coefficients $J_n(m_\phi)$

$$J_n(m_\phi) = \left(\frac{m_\phi}{2}\right)^n \left[ \frac{1}{n!} - \frac{(m_\phi/2)^2}{1!(n+1)!} + \frac{(m_\phi/2)^4}{2!(n+2)!} - \frac{(m_\phi/2)^6}{3!(n+3)!} + \dots \right]$$

Ou utilisation de tables (sur lesquelles représentées les courbes correspondantes aux fonctions dont l'amplitude est supérieure à 0,01 ; les raies d'amplitude inférieure étant négligées)

#### Ou tableau des coefficients

#### □ Propriété importante des fonctions de Bessel

$$J_0^2(m_\phi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(m_\phi) = 1$$

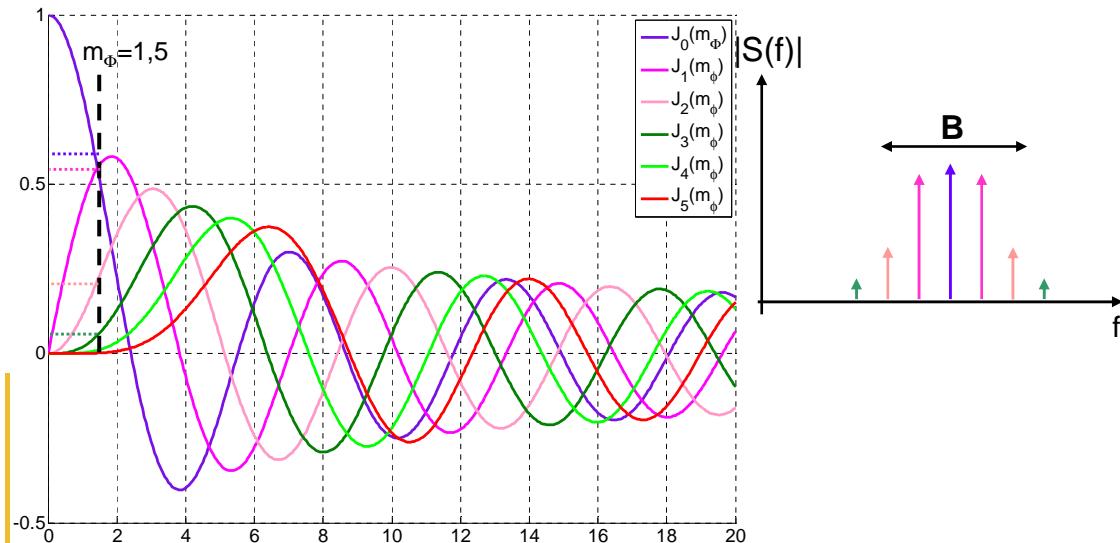


Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Cas d'un signal modulant sinusoïdal

### Spectre du signal modulé

Exemple :  $m_\phi = 1,5$



# Cas d'un signal modulant sinusoïdal

Introduction
Principe
<b>Spectres</b>
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Spectre du signal modulé

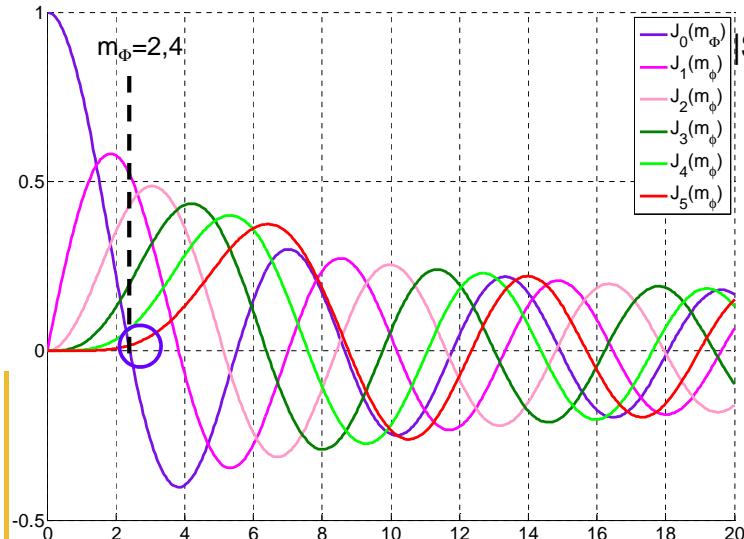
### Cas particuliers

- Si  $m_\phi = 2,4$

→ Pas de porteuse

$|S(f)|$

$B$



Modulations angulaires

13



# Cas d'un signal modulant sinusoïdal

## Spectre du signal modulé

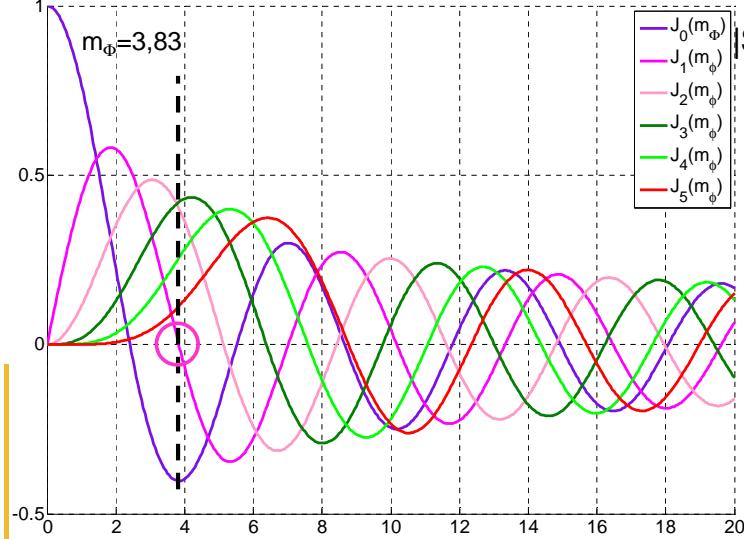
### Cas particuliers

- Si  $m_\phi = 3,83$

→ Pas de raies en  $\omega_0 \pm \Omega$

$|S(f)|$

$B$



Modulations angulaires

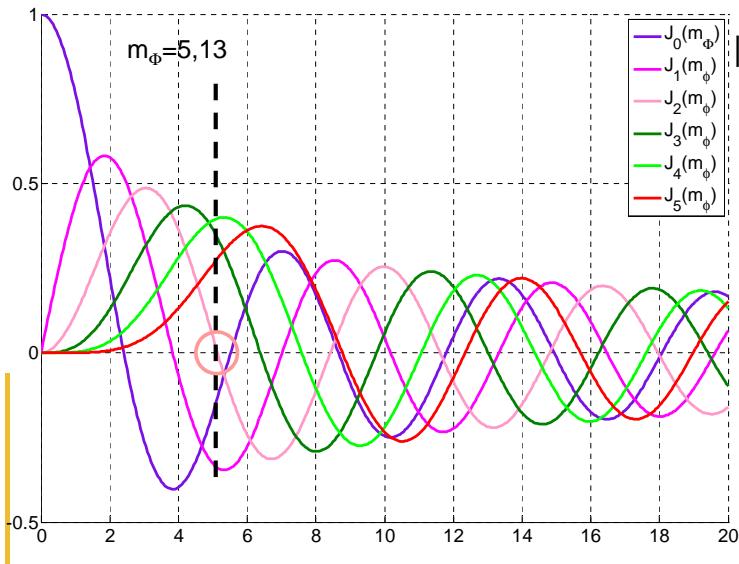
14



# Cas d'un signal modulant sinusoïdal

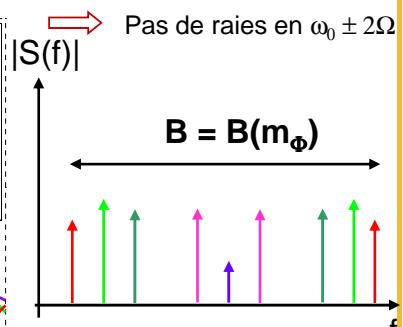
Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Spectre du signal modulé



### Cas particuliers

- Si  $m_\phi = 5,13$



Remarque :  
à  $\Delta f$  constant le nombre de raies est inversement proportionnel à  $F$



Modulations angulaires

15

# Cas d'un signal modulant sinusoïdal

Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Encombrement spectral du signal modulé

B est intrinsèquement infinie

Les harmoniques élevées sont faibles

Approximativement, la bande passante est finie

$$B = 2(m_\phi + 1)F$$

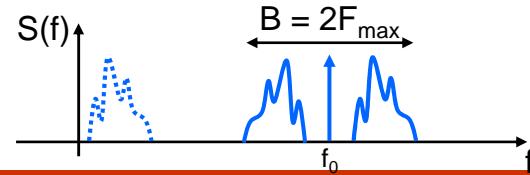
REGLE DE CARSON

/ 98% de la puissance

Et si le taux de modulation  $mF$  est faible ( $<<1$ )...

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \approx A \cos(\omega_0 t) - A \sin(\omega_0 t) \varphi(t)$$

avec  $\begin{cases} \varphi(t) = k_p m(t) \\ \text{ou} \\ \varphi(t) = k_f \int m(t) dt \end{cases}$



Modulations angulaires

16

Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion



## Cas général

- Pas d'expression analytique du spectre

$$B_C = 2(\Delta F + F_{MAX}) = 2(m_\phi + 1)F_{max}$$

**Règle de CARSON étendue**

$$[f_0 - B_c/2 ; f_0 + B_c/2]$$

Occupation spectrale

- Puissance du signal modulé  $s(t)$   $\langle s^2 \rangle = \frac{A^2}{2}$  constante

Puissance transportée par un signal modulé angulairement indépendante de l'indice de modulation donc du signal modulant

Démodulation indépendante de la puissance reçue

17

Modulations angulaires

Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion



## Bilan

### FM à bande étroite (indice de modulation faible)

- Allure de la densité spectrale de puissance du signal modulé comparable à celle obtenue en AM
- Application en radiotéléphonie

### FM à large bande (indice de modulation élevé)

- Allure de la densité spectrale de puissance égale à celle de la densité de probabilité du signal modulant
- Application en radiodiffusion
- Norme  $\Delta f = 75 \text{ kHz}$  et  $F_{max} = 15 \text{ kHz}$  ( $m = 5$ )

### Spectres des signaux PM comparables à ceux des signaux FM

### Puissance constante indépendante de l'indice de modulation

18

Modulations angulaires

Introduction
Principe
Spectres
<b>Modulateurs</b>
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

# Modulateurs de fréquence

## Oscillateurs contrôlés en tension

### Objectif

Faire varier au rythme du signal modulant, la fréquence instantanée d'un oscillateur sinusoïdal : Oscillateur Contrôlé en Tension (OCT ou VCO "Voltage Controlled Oscillator")

### Oscillateurs à variation de réactance

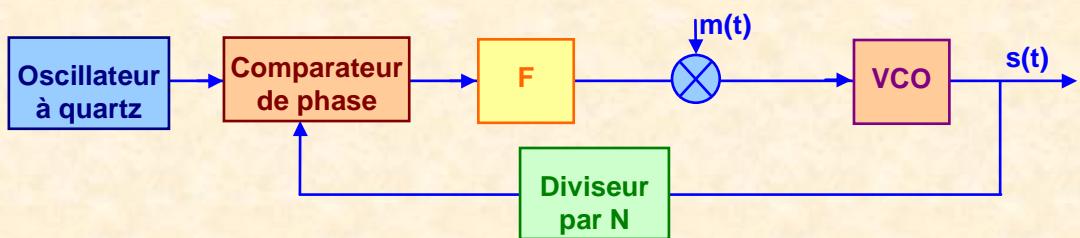
Structures d'oscillateurs classiques avec varicaps ou plus rare d'inductances saturables, dont les caractéristiques varient en fonction du signal modulant



Introduction
Principe
Spectres
<b>Modulateurs</b>
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

# Modulateurs de fréquence

## Utilisation d'une PLL



Si  $m(t) = 0$ ,  $f_s = Nf_0$  (si boucle accrochée)

Si  $m(t) \neq 0$  et variant suffisamment rapidement,  $f_s$  modulée par  $m(t)$

Mais en moyenne  $f_s = Nf_0$

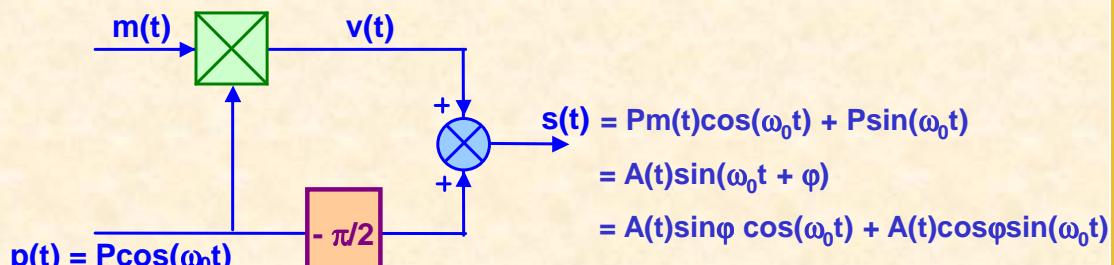


Introduction
Principe
Spectres
<b>Modulateurs</b>
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Modulateurs de phase

### Modulateur d'Armstrong

Historiquement, première modulation angulaire (1936) basée sur les solutions rencontrées dans la modulation d'amplitude



Par identification  $s(t) = P\sqrt{1+m^2(t)} \sin\{\omega_0 t + \arctan[m(t)]\}$   
 $s(t)$  modulé en amplitude et en phase

si  $m(t) \ll 1$  (faible indice de modulation)

$\arctan[m(t)] \sim m(t)$  et  $\sqrt{1+m^2(t)} \sim 1$  donc  $s(t) = P \sin\{\omega_0 t + m(t)\}$



Introduction
Principe
Spectres
<b>Modulateurs</b>
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Modulateurs de phase

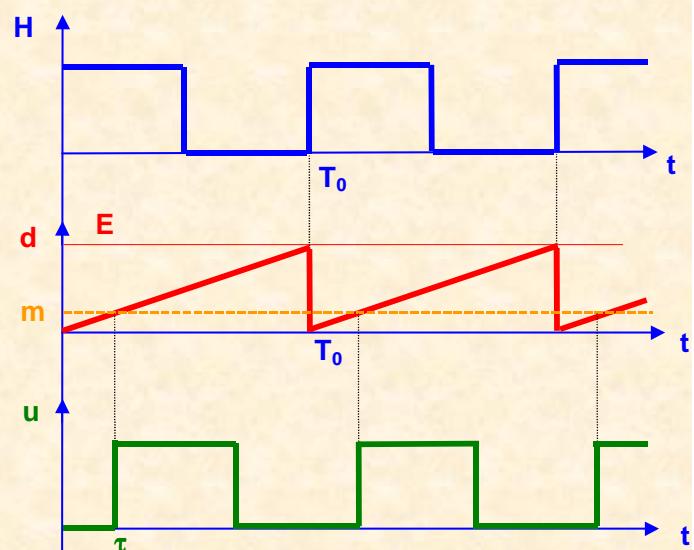
### Modulateurs de phase – Modulateurs de position

Comparaison du signal modulant à un signal en dent de scie déclenchant un monostable

Signal obtenu retardé de  $\tau$  par rapport à l'horloge  $H$

$$\tau = \frac{mT_0}{E}$$

$$\varphi = \frac{2\pi\tau}{T_0} = \frac{2m\pi}{E}$$



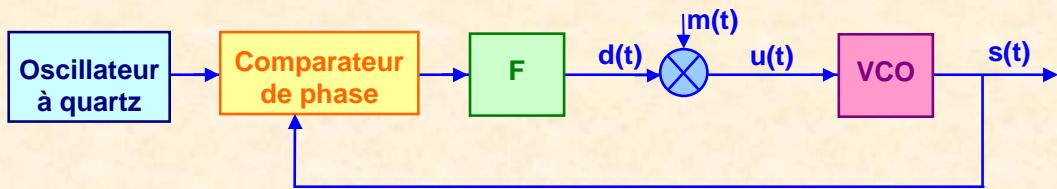
Si nécessité d'une porteuse sinusoïdale, filtrage pour ne conserver que le fondamental de  $u$



Introduction
Principe
Spectres
<b>Modulateurs</b>
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

# Modulateurs de phase

## Utilisation de PLL



Si  $m(t) = 0$ ,  $\phi_e = \phi_s$  et  $d = K_D(\phi_e - \phi_s) = 0$  / VCO fournit  $f_0$  pour  $u = 0$

Si  $m(t) \neq 0$  et lentement variable, PLL telle que  $u(t) = d(t) + m(t) = 0$

$$\Rightarrow K_D(\phi_e - \phi_s) = -m(t)$$

Déphasage entre signaux d'entrée et de sortie alors proportionnel au signal modulant  $m(t)$

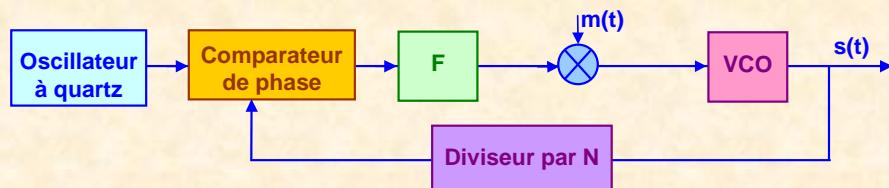


Introduction
Principe
Spectres
<b>Modulateurs</b>
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

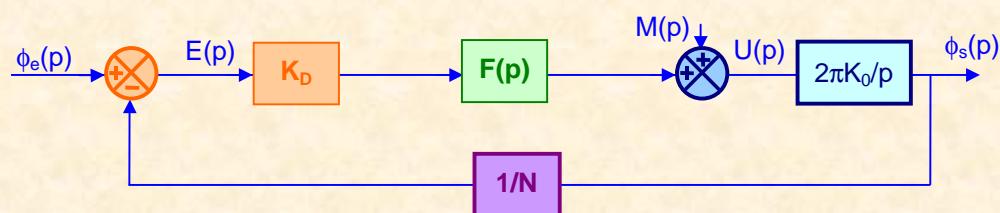
# Modulateur angulaire à PLL

## Etude détaillée

### Schéma de principe



### Modélisation – Hypothèses : modèle linéaire et boucle accrochée



Introduction

Principe

Spectres

**Modulateurs**

Détecteurs

Récepteurs

Conclusion



# Modulateur angulaire à PLL

## Fonctions de transfert caractéristiques

- Fonction de transfert liant la phase du signal de sortie (mesurée par rapport à celle de l'oscillateur à quartz prise comme référence) et le signal modulant

$$\phi_s(p) = \left[ M(p) + K_D F(p) \left( -\frac{\phi_s(p)}{N} \right) \right] \frac{2\pi K_0}{p}$$

$$\frac{\phi_s(p)}{M(p)} = \frac{2\pi K_0}{p + \frac{2\pi}{N} K_0 K_D F(p)}$$

- Fonction de transfert liant l'excursion de fréquence du signal de sortie et le signal modulant

$$f_s = f_0 + \delta f \quad , \quad \delta f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_s}{dt} \quad \Rightarrow \Delta f(p) = \frac{p}{2\pi} \phi_s(p)$$

$$\frac{\Delta f(p)}{M(p)} = \frac{p K_0}{p + \frac{2\pi}{N} K_0 K_D F(p)}$$

Modulations angulaires

25

Introduction

Principe

Spectres

**Modulateurs**

Détecteurs

Récepteurs

Conclusion



# Modulateur angulaire à PLL

## Cas particuliers

Si Filtre du premier ordre

$$F(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \quad \frac{\Delta f(p)}{M(p)} = \frac{K_0 p (1 + \tau p)}{\frac{2\pi}{N} K_0 K_D + p + \tau p^2}$$

Si  $m(t)$  quasi constant ( $M(p) = M$ )

$$\Delta f(p) = \frac{K_0 p (1 + \tau p)}{\frac{2\pi}{N} K_0 K_D + p + \tau p^2} M$$

$$\delta f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \{ p \Delta f(p) \} = \lim_{p \rightarrow 0} \left\{ \frac{K_0 p^2 (1 + \tau p)}{\frac{2\pi}{N} K_0 K_D + p + \tau p^2} M \right\} = 0$$

Modulations angulaires

26

Introduction
Principe
Spectres
<b>Modulateurs</b>
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Modulateur angulaire à PLL

### Etude de la fonction de transfert

Si  $m(t)$  sinusoïdal :  $m(t) = M \sin(\Omega t)$

$$\omega \rightarrow 0 : \frac{\Delta f(j\omega)}{M(j\omega)} = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty : \frac{\Delta f(j\omega)}{M(j\omega)} = K_0$$

**Comportement d'un filtre passe-haut**

Filtre passe-haut de fréquence de coupure  $\omega_c$

$$\frac{\Delta f(p)}{M(p)} = \frac{\frac{K_0}{K} p (1 + \tau p)}{1 + \frac{p}{K} + \frac{\tau}{K} p^2}, \text{ avec } K = \frac{2\pi K_0 K_D}{N} \text{ et } \omega_c = \sqrt{\frac{K}{\tau}}$$

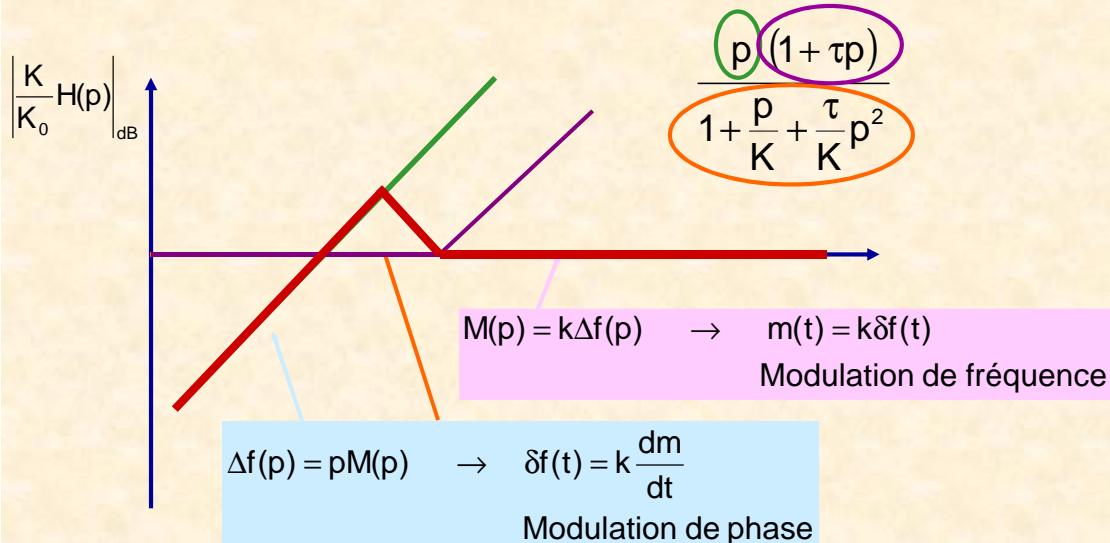
On peut supposer que  $K$  est faible ( $N$  grand !), donc la constante de temps ( $K/\tau$ ) du 2<sup>e</sup> ordre du dénominateur est inférieure à celle ( $1/\tau$ ) du 1<sup>e</sup> ordre du numérateur



Introduction
Principe
Spectres
<b>Modulateurs</b>
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Modulateur angulaire à PLL

### Diagramme de Bode



Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion



## Introduction

**Solutions très différentes suivant les applications  
“grand public” ou professionnelles**

- Dans les dispositifs bas de gamme**

Systèmes utilisant des discriminateurs  
ou

Systèmes couplés ou accordés

- Dispositifs avec de meilleures performances en terme de linéarité ou de capacité à supporter des dérives de la fréquence porteuse**

Comparateur de phase  
ou

Structure d’asservissement de phase

Modulations angulaires

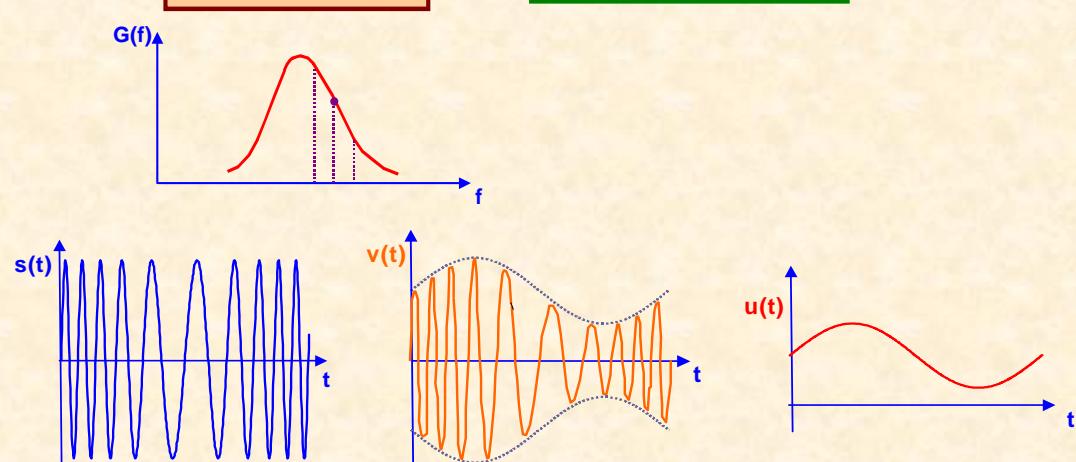
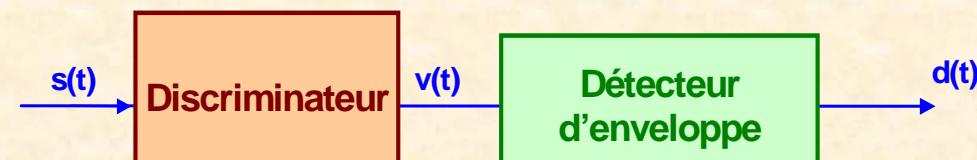
29

Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion



## Démodulateurs de fréquence

### Discriminateurs

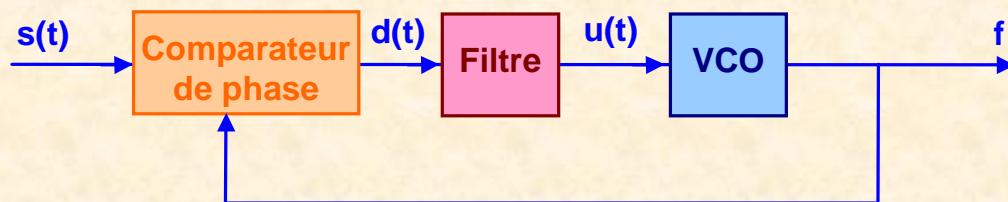


Modulations angulaires

30

Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Démodulateurs à PLL



### Démodulation de fréquence

Si boucle suffisamment rapide devant les variations du signal modulé, tension  $u(t)$  image de la fréquence de  $s(t)$  donc du signal modulant

### Démodulation de phase

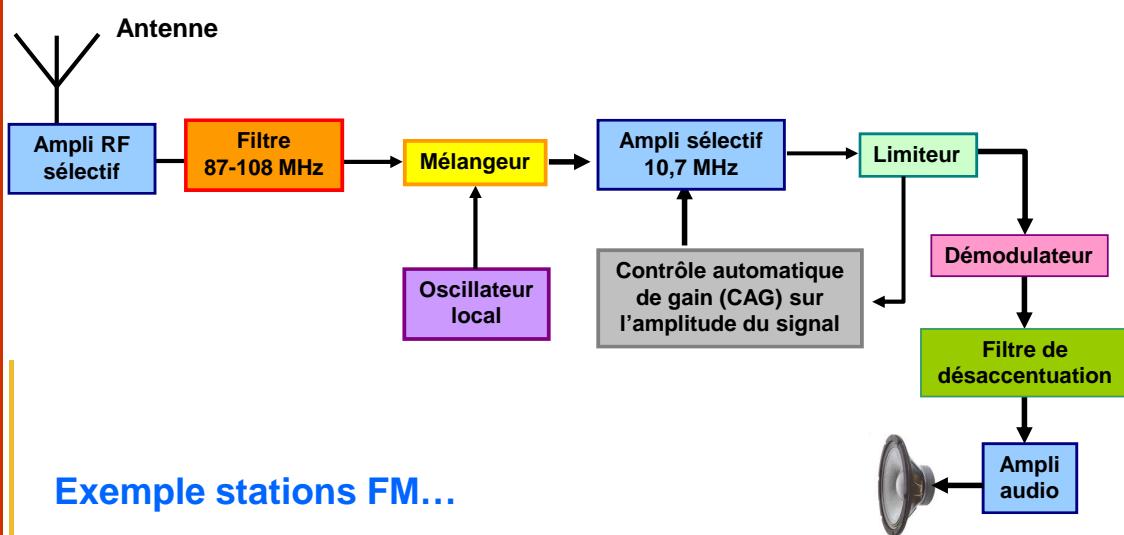
Si boucle insuffisamment rapide devant les variations du signal modulé, erreur de phase non nulle et tension  $d(t)$  image de la phase de  $s(t)$  donc du signal modulant



Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

## Récepteurs FM

**Détection superhétérodyne :**  
**Fréquence intermédiaire pour une production industrielle du système**



Exemple stations FM...



Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion



# Récepteurs FM

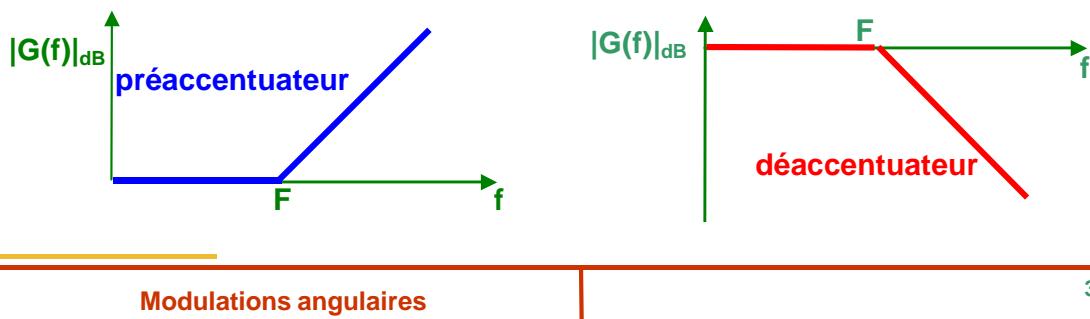
## Pourquoi un filtre de désaccentuation ?

### Constat : RSB meilleur pour les basses fréquences

En effet, pour la plupart des signaux usuels l'essentiel de la puissance est concentrée dans la partie basse du spectre (graves pour un signal audible)

### Pour améliorer la qualité des signaux à la réception

Pré-amplification des hautes fréquences du signal modulant avant la modulation, opération appelée préaccentuation et atténuation après la démodulation, désaccentuation



Modulations angulaires

33

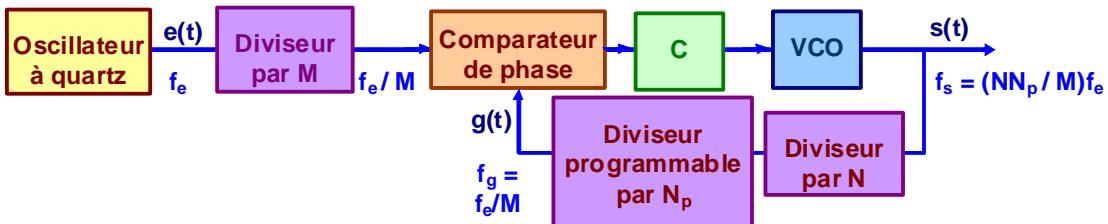
Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion



# Récepteurs FM

## Réalisation de l'oscillateur local

### PLL utilisée en synthétiseur de fréquences programmables



En supposant la boucle verrouillée :  $f_s = (N * N_p / M) * f_e$

**Application numérique :**

$f_e = 2,56 \text{ MHz}$ ,  $M = 256$ ,  $N = 20$ ,  $N_p$  : 494 à 593

$\Rightarrow f_{s_{\min}} = 98,8 \text{ MHz}$

$f_{s_{\max}} = 118,6 \text{ MHz}$

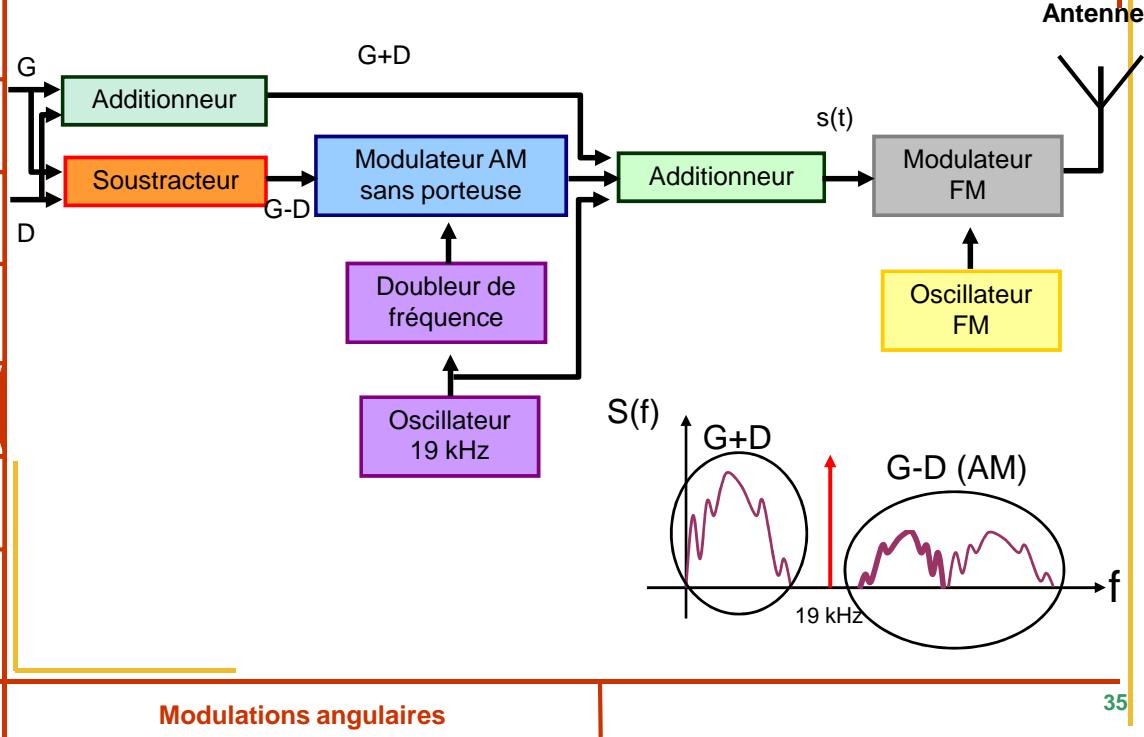
$\Delta f = 200 \text{ kHz}$

Modulations angulaires

34

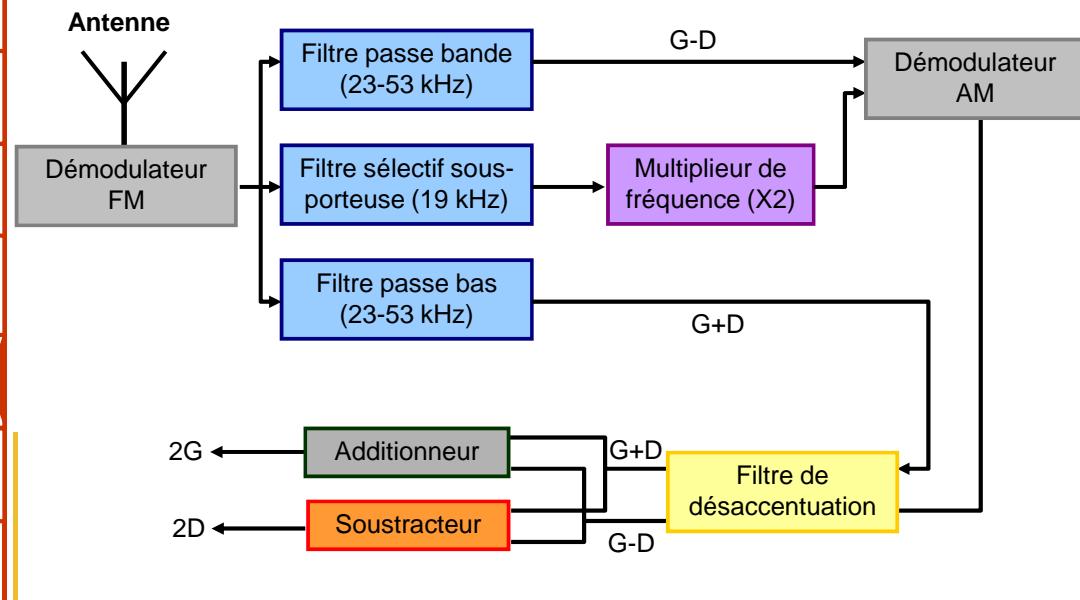
# FM stéréophonique

## A l'émission : modulateur stéréo



# Récepteur FM stéréophonique

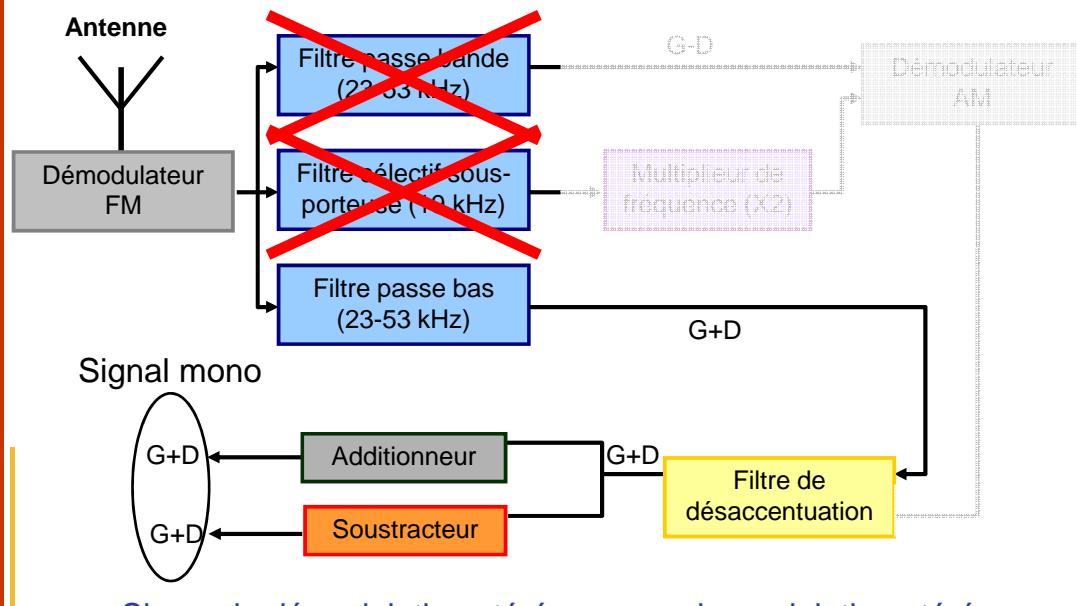
## A la réception : démodulateur stéréo



Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusion

# Récepteur FM stéréophonique

## A la réception : démodulateur stéréo



Modulations angulaires

37

Introduction
Principe
Spectres
Modulateurs
Détecteurs
Récepteurs
Conclusions

# Bilan

Il n'existe pas de modulation angulaire idéale! Le choix de la modulation doit se faire en fonction des différents critères pris en compte dont l'importance dépend de l'**application visée et du milieu de propagation.**

Ces principales propriétés sont :

- une indépendance du niveau du signal démodulé par rapport au signal reçu : immunité au bruit d'amplitude
- Une bonne résistance aux perturbations si  $m_\phi$  est grand (au détriment de l'encombrement)

**Applications** : dans les milieux de propagation fortement perturbés  
Faisceau hertziens, radiodiffusion en milieu urbain, télévision par satellite



Modulations angulaires

38

# Introduction aux Communications Numériques

## Plan du chapitre

- 1. Introduction
- 2. Chaîne de communication numérique
- 3. Principe des transmissions en bande de base
- 4. Principe des transmissions en bande transposée
- 5. Étude des spectres des signaux
- 6. Paramètres de performance
- 7. Conclusion



Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion

# Introduction aux Communications Numériques



Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion



## Modulations numériques ?

**Les modulations d'aujourd'hui : Internet, réseaux sans fil, télévision numérique, téléphonie mobile, ...**

Apparition avec l'accroissement de la puissance des calculateurs

**Idée pas réellement nouvelle**

→ Transmettre une information à partir de deux états « 0 » et « 1 »  
**(principe du Morse)**

**Intérêts ?**

- Amélioration de la qualité de la transmission
- Augmentation des services disponibles
- Interactivité

3

Communications numériques

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion



## Modulations numériques ?

**Positionnement de la présentation dans le modèle OSI  
(Open Systems Interconnection)**

**7 – Couche Application** : interfaçage avec les systèmes utilisateurs

**6 – Couche Présentation** : syntaxe et présentation des données

**5 – Couche Session** : mise en place du dialogue entre tâches distantes, synchronisation, vérification des droits d'accès

**4 – Couche Transport** : transport des messages, constitution et contrôle des paquets

**3 – Couche Réseau** : établissement et rupture de communications, routage et contrôle de flux

**2 – Couche Liaison logique** : établissement d'une communication point à point, protocoles d'échanges des données et correction des erreurs, contrôle de l'accès au support de transmission

**1 – Couche Physique** : modulation/démodulation, transcodage pour le support utilisé, émission/réception, régénération du signal

→ **Couche physique du modèle OSI : « Transmission »**

4

Communications numériques

Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

# Chaîne de communication numérique

## Schéma de base



**Source** : production du message numérique à transmettre

**Emetteur** : production d'un signal porteur du message qui doit transiter par le canal

### Canal de transmission

**Récepteur** : opération inverse de celle de l'émetteur

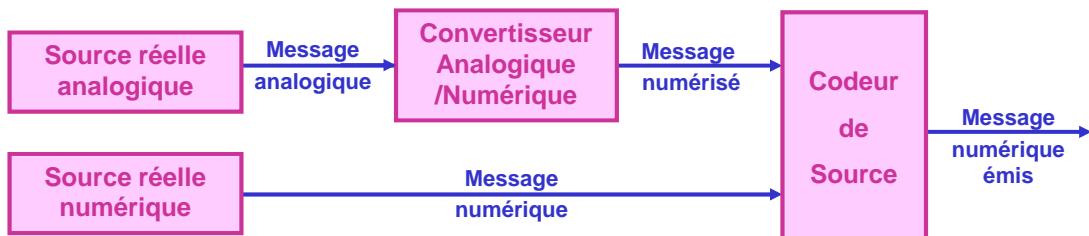
**Destinataire** : traitement du signal numérique à transmettre



Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

# Principe général de la source

## La source



### Échantillonnage – discréétisation temporelle

Fréquence d'échantillonnage  $F_e = 1/T_e$

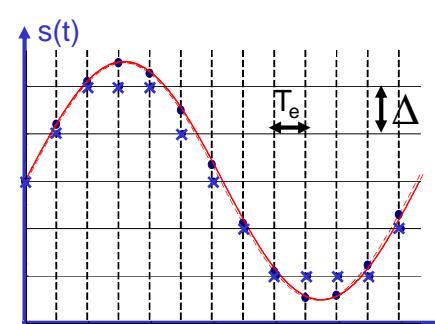
Condition de Shannon

$F_e > 2 \times$  la plus haute fréquence du signal

### Quantification – discréétisation des niveaux

Bruit de quantification ou bruit numérique

$$\langle b^2 \rangle = \frac{\Delta^2}{12}$$



Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

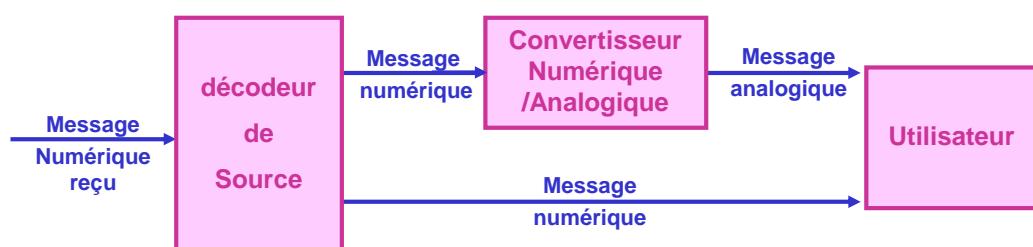
Spectre

Performance

Conclusion

# Principe général du destinataire

## Le destinataire



### Qualité du message reconstitué ?

- Dans le cas d'un message analogique, la double conversion A/N et N/A n'altère-t-elle pas trop le message ?

→ **Shannon et études sur la quantification**

- La suite de symboles délivrées au destinataire ne diffère-t-elle pas trop de celle fournie à la source ?

→ **Taux d'erreur sur les symboles ; Taux d'erreur binaire**

- Le destinataire a-t-il reçu le message dans un délai convenable ?

→ **Fonction du canal et de la complexité des traitements**



Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

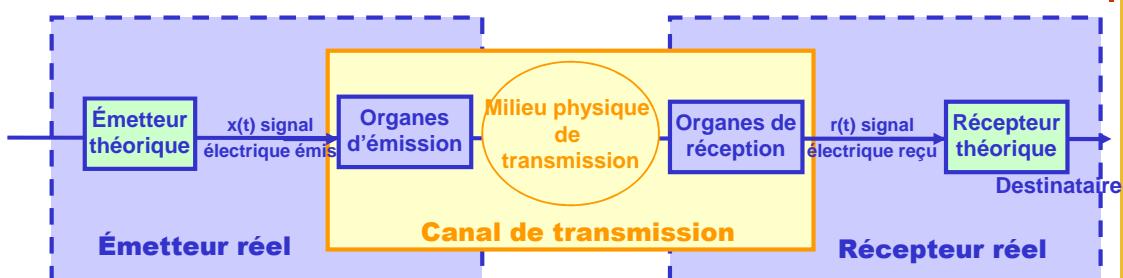
Spectre

Performance

Conclusion

# Canal de transmission

## Plusieurs définitions selon les domaines



### Canal de transmission

- Au sens de la propagation : portion du milieu physique utilisée pour la transmission
- Au sens de la théorie de l'information : tous les éléments entre la source et le destinataire
- Au sens de la théorie des communications : milieu physique et organes d'émission et de réception



# Modélisation du canal de transmission

## Fonctionnalités de l'émetteur et du récepteur

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

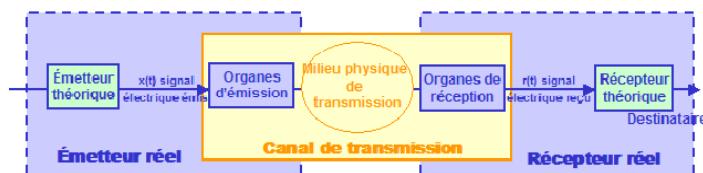
Performance

Conclusion



Communications numériques

9



### Émetteur réel

#### 1) Émetteur théorique

→ Génération de  $x(t)$  en bande de base ou sur fréquence porteuse

#### 2) Organes d'émission

→ Transformation de  $x(t)$  pour l'adapter au milieu physique de propagation : opérations de changement de fréquence, de filtrage, d'amplification, ... et opérations d'émission (antennes, ...)

### Récepteur réel

#### 1) Organes de réception

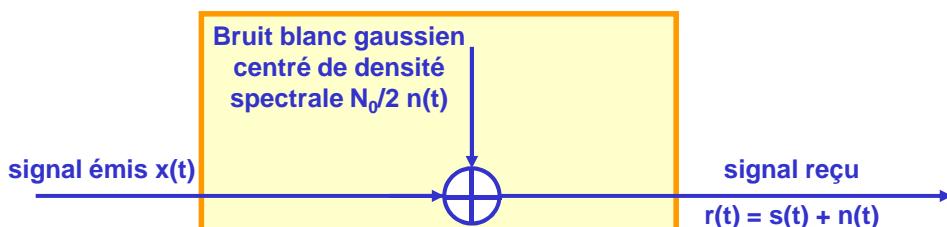
→ Dispositifs de réception dans le milieu (antennes, ...) et opérations de transformation de la nature du signal, d'amplification, de changement de fréquence, ...

#### 2) Récepteur théorique

→ Traitement du signal afin de fournir le message au destinataire

# Canal à bruit blanc gaussien additif (AWGN)

## Le modèle et sa justification



### Origine du bruit

Externe (capté par l'antenne) et interne aux éléments de transmission en liaison RF, bruit interne prépondérant d'autant que le signal reçu est faible

### Limites de la modélisation par bruit AWGN

→ Effet d'atténuation (Simple facteur d'échelle en théorie mais paramètre important pour le dimensionnement)

→ Effet de filtrage, trajets multiples, interférences avec d'autres utilisateurs, ...

→ Retard

→ Distorsion non linéaires de l'électronique

**MAIS utilisation de ce modèle justifiée dans le cas de milieux de transmission naturels et riche d'enseignement pour les autres cas**

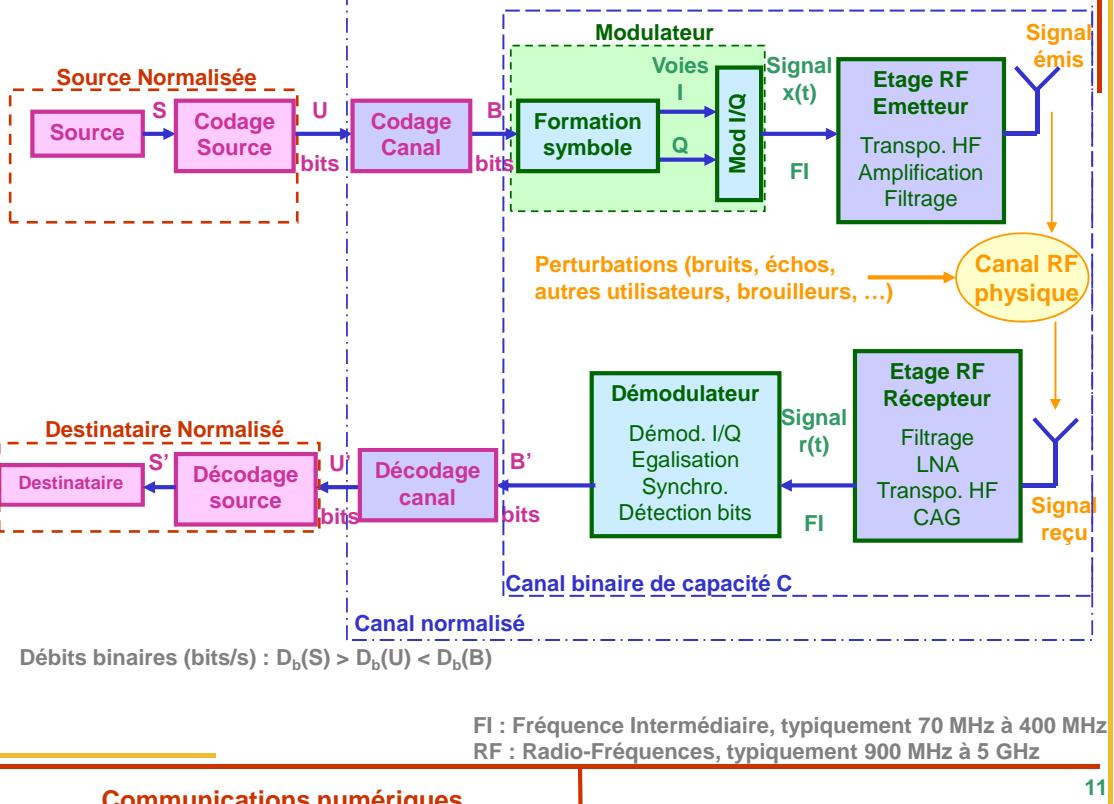


Communications numériques

10

## Synoptique général détaillé

Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion



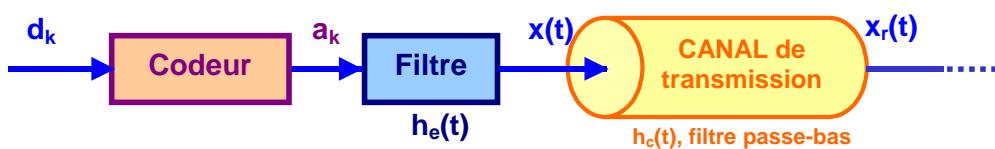
Communications numériques

11

Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

## Transmission en bande de base

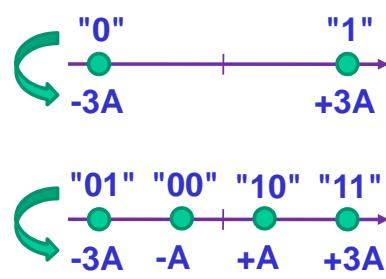
### Schéma de principe de l'émission



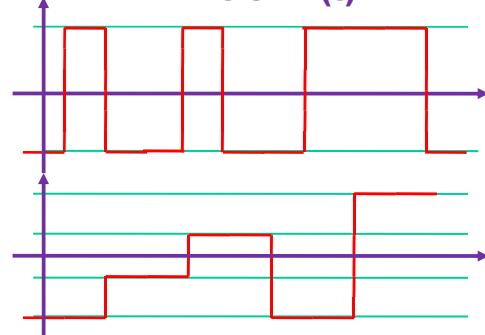
### Illustration du principe

« 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 ... »

**Codeur  $d_k \rightarrow a_k$**



**Filtre –  $x(t)$**



Communications numériques

12

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

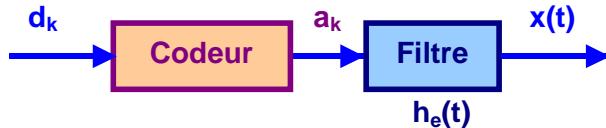
Spectre

Performance

Conclusion

## Principe de la modélisation

### Message numérique et signal numérique



#### Message numérique produit par la source

→ Suite de VA  $\{d_k\}$  à valeurs dans l'alphabet binaire {0,1}, indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) suivant une loi uniforme :  $P\{d_k = 1\} = P\{d_k = 0\} = 0,5$



HYP : source binaire, i.i.d. et uniforme

Non valable si codage d'un texte en français sur 8 bits

JUSTIFICATION : théorie de l'information et codage de source

#### Modulation



Communications numériques

13

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

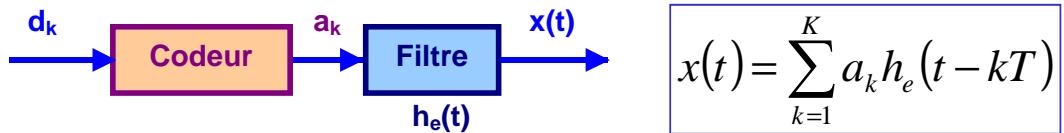
Spectre

Performance

Conclusion

## Principe de la modélisation

### Définitions et expression du signal numérique



$d_k$  suite de bits (données numériques ou issue d'un CAN)

$a_k$  suite réelle construite à partir de  $d_k$  en fonction d'un alphabet

$h_e(t)$  réponse impulsionnelle du filtre d'émission

T écart de temps entre l'émission de deux symboles consécutifs

$T_b$  intervalle de temps entre deux bits successifs :  $T = NT_b$

Débit symbole ou vitesse de modulation :  $R = 1/T$  [baud/s]

Débit binaire :  $D = R \log_2(M)$  [bit/s]



Communications numériques

14

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

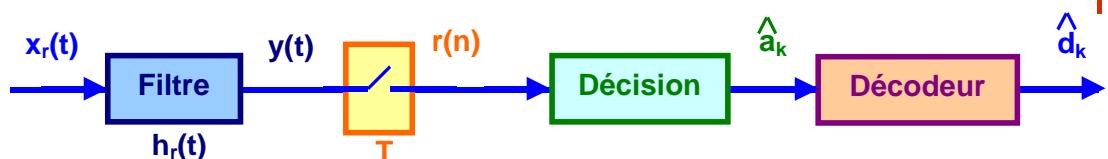
Spectre

Performance

Conclusion

## Transmission en bande de base

### Schéma de principe de la réception



**Filtre de réception : FILTRE ADAPTE (au filtre d'émission)**  
 → Filtre optimal

**Echantillonnage au rythme de l'horloge (synchronisation !)**

**Décision : COMPARATEUR à SEUIL(S)**

→ Choix du seuil optimal

⇒ Probabilité d'erreur minimale en présence de bruit

Communications numériques

15

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

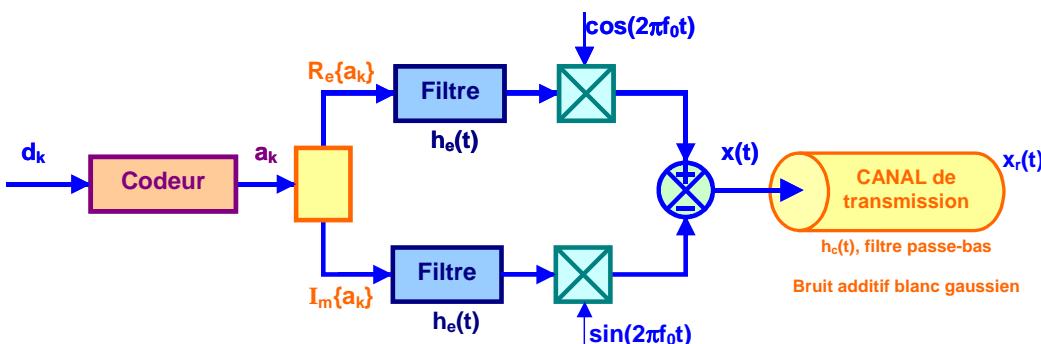
Spectre

Performance

Conclusion

## Transmission sur fréquence porteuse

### Schéma de principe de l'émission



Communications numériques

16

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

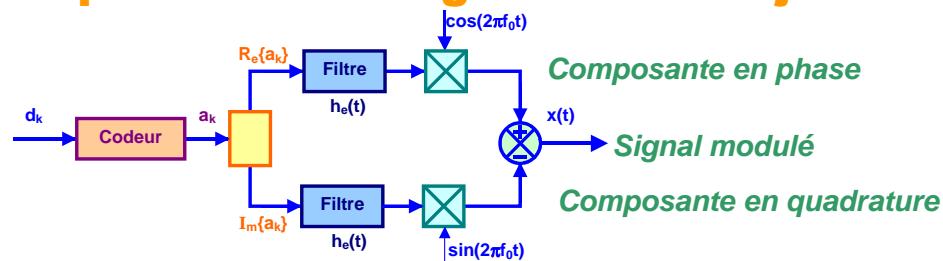
Spectre

Performance

Conclusion

## Principe de la modélisation

### Expression des signaux mis en jeu



$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k=1}^K R_e[a_k] h_e(t - kT) \cos(2\pi f_0 t) - \sum_{k=1}^K I_m[a_k] h_e(t - kT) \sin(2\pi f_0 t) \\
 &= R_e \left[ \sum_{k=1}^K a_k h_e(t - kT) \right] \cos(2\pi f_0 t) - I_m \left[ \sum_{k=1}^K a_k h_e(t - kT) \right] \sin(2\pi f_0 t) \\
 &= \underbrace{R_e[\alpha(t)]}_{x_I(t)} \cos(2\pi f_0 t) - \underbrace{I_m[\alpha(t)]}_{x_Q(t)} \sin(2\pi f_0 t) \quad / \alpha(t) = \sum_{k=1}^K a_k h_e(t - kT_b) \\
 &= R_e[\alpha(t) \exp(2\pi j f_0 t)]
 \end{aligned}$$

*Enveloppe complexe*

Communications numériques

17

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion

## Principe de la modélisation

### Constellation

$$x(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

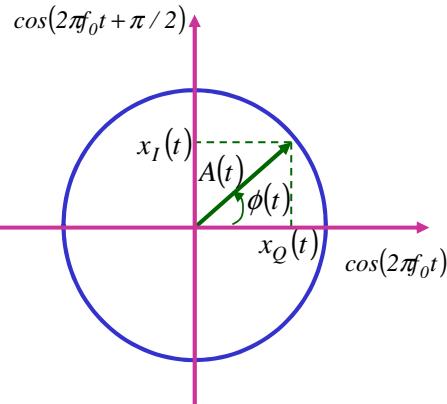
$$x(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

$$A(t) = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)}$$

**Enveloppe ou amplitude instantanée de la porteuse modulée**

$$\phi(t) = \arctan(x_Q(t)/x_I(t))$$

**Écart de phase instantané de la porteuse modulée**



**Représentation de Fresnel  
Constellation**

Communications numériques

18

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

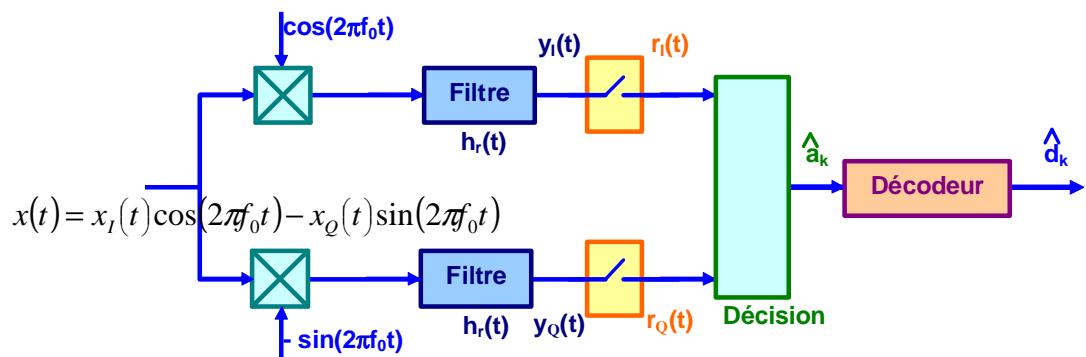
Spectre

Performance

Conclusion

## Transmission sur fréquence porteuse

### Schéma de principe de la réception



#### Après les multiplicateurs

$$x_I(t)\cos^2(2\pi f_0 t) - x_Q(t)\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t) = \frac{x_I(t)}{2}(1 + \cos(4\pi f_0 t)) - \frac{x_Q(t)}{2}\sin(4\pi f_0 t)$$

$$- x_I(t)\sin(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t) + x_Q(t)\sin^2(2\pi f_0 t) = -\frac{x_I(t)}{2}\sin(4\pi f_0 t) + \frac{x_Q(t)}{2}(1 - \cos(4\pi f_0 t))$$

#### Après les filtres

$$y_I(t) = \frac{x_I(t)}{2} \quad y_Q(t) = \frac{x_Q(t)}{2}$$



Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion

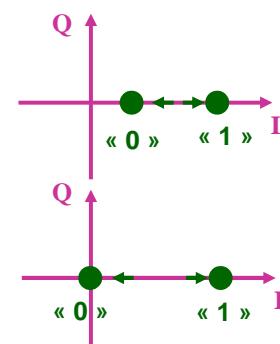
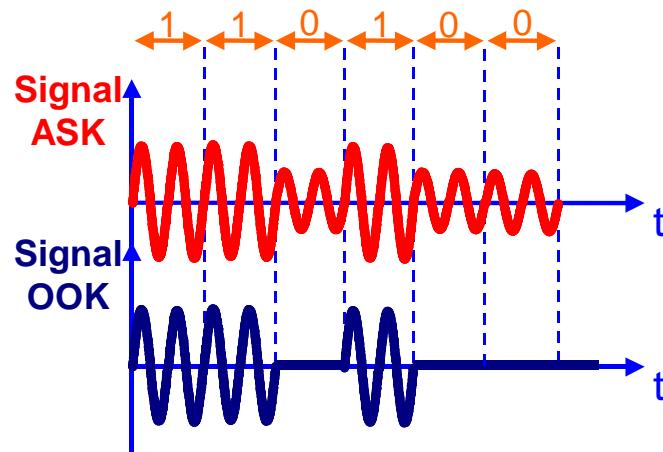
## Modulation à Déplacement d'Amplitude MDA N-ASK (Amplitude Shift Keying)

### Principe

$a_I \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm 1(N-1)\} A$  → Seule voie I utilisée

$a_Q = 0$

→ Modulation mono-dimensionnelle



Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion



# Modulation à Déplacement d'Amplitude (MDA) N-ASK (Amplitude Shift Keying)

## Caractéristiques

Modulation utilisée notamment dans les transmissions optiques car modulation en fréquence ou en phase d'une émission optique pas réalisable (fréquences de l'ordre du 200 THz (T (tera) :  $10^{12}$ )

Principal défaut : en réception pas la possibilité de faire la différence entre une suite de "0" et l'absence de tout signal

Avantage simplicité et donc faible coût

Performances en terme d'efficacité spectrale et taux d'erreur moins bonnes que les autres modulations

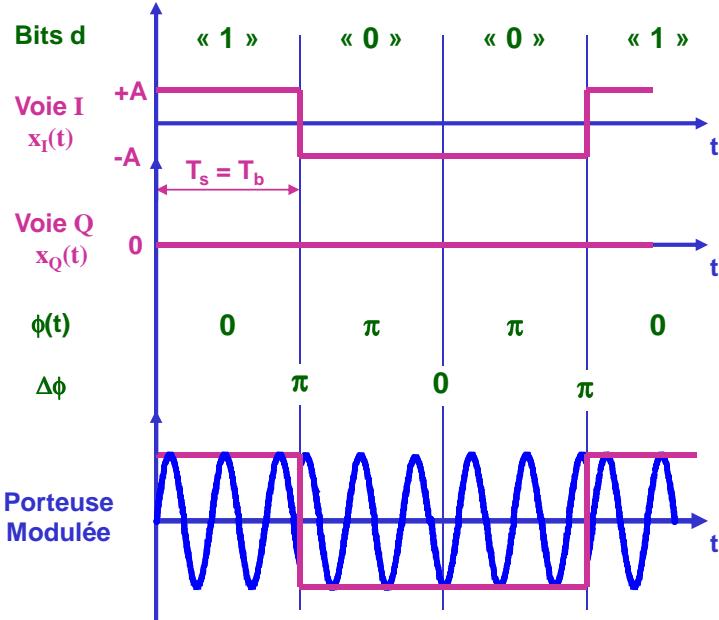
21

Communications numériques

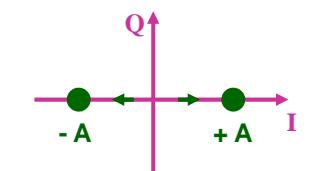
Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion



# Modulation à Déplacement de Phase (MDP) N-PSK (Phase Shift Keying) **BPSK (Binary PSK, 2-PSK)**



Symboles à N = 2 états  
soit n = 1 bit/symbole



Constellation et  
transitions possibles

Communications numériques

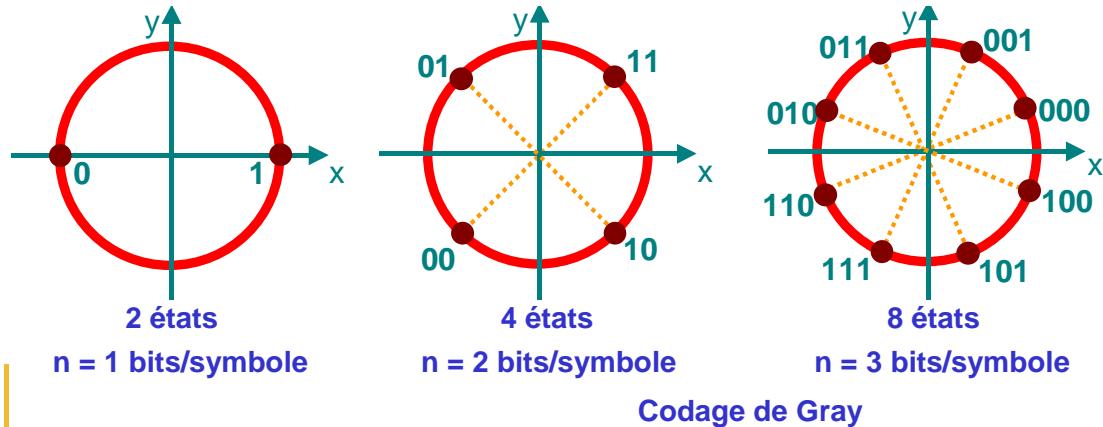
22

## Modulation à Déplacement de Phase (MDP) N-PSK (Phase Shift Keying)

Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

$$\phi = \theta_0 + 2\pi \frac{n}{N}, 0 \leq n \leq N - 1$$

$$A(t) = A$$



Modulations très utilisées qui utilisent généralement de 2 à 8 états  
Au delà, risque d'erreur trop important → modulations QAM



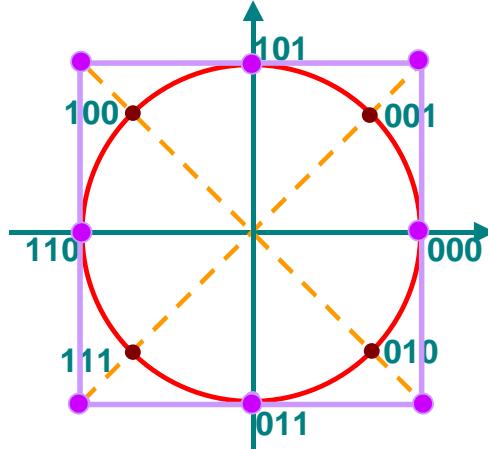
## Modulations en quadrature

### Ex : 8-QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

#### QAM- 8

Amélioration de la détection par une plus grande facilité à séparer les symboles qu'en 8-PSK : phase et amplitude changeant



# Quadrature Phase Shift Keying (= 4-QAM)

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

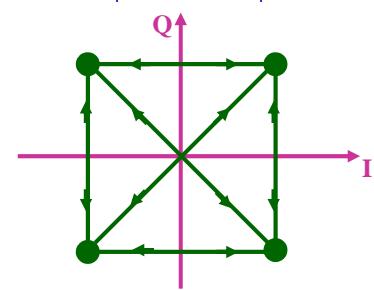
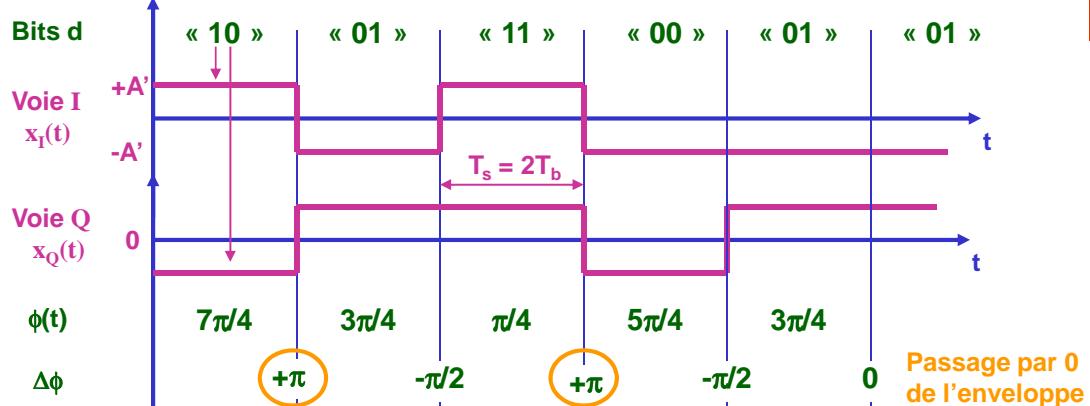
Conclusion



Symboles à  $N = 4$  états  
soit  $n = 2$  bits/symbole

Communications numériques

25



# Modulations en quadrature Ex : 16-QAM

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

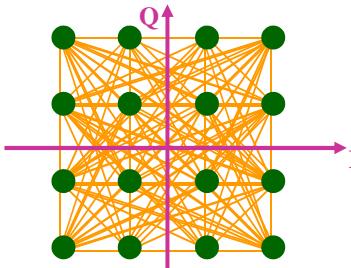
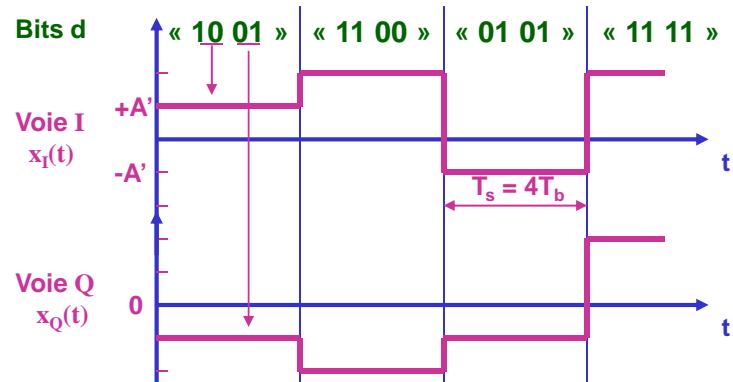
Conclusion



Symboles à  $N = 16$  états  
soit  $n = 4$  bits/symbole

Communications numériques

26



Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion

## Modulations à « trains décalés »

$$x(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_0 t) + x_Q(t) \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

avec  $x_I(t) = \sum_m a_{I[m]} h_e(t - mT_s)$

$$x_Q(t) = \sum_m a_{Q[m]} h_e(t - mT_s - T_s/2)$$

**Pourquoi ?** Moins (voir pas) de variation d'enveloppe  
 ⇒ Plus robuste aux non-linéarités (amplis de puissance, ...), pour le respect du gabarit spectral à l'émission, pour les performances en TEB en réception

### Caractéristiques

Même encombrement spectral

Modulation unidimensionnelle : une seule porteuse modulée à la fois tous les  $T_s/2$  (plus simple)



Présentation

Chaîne

B. de base

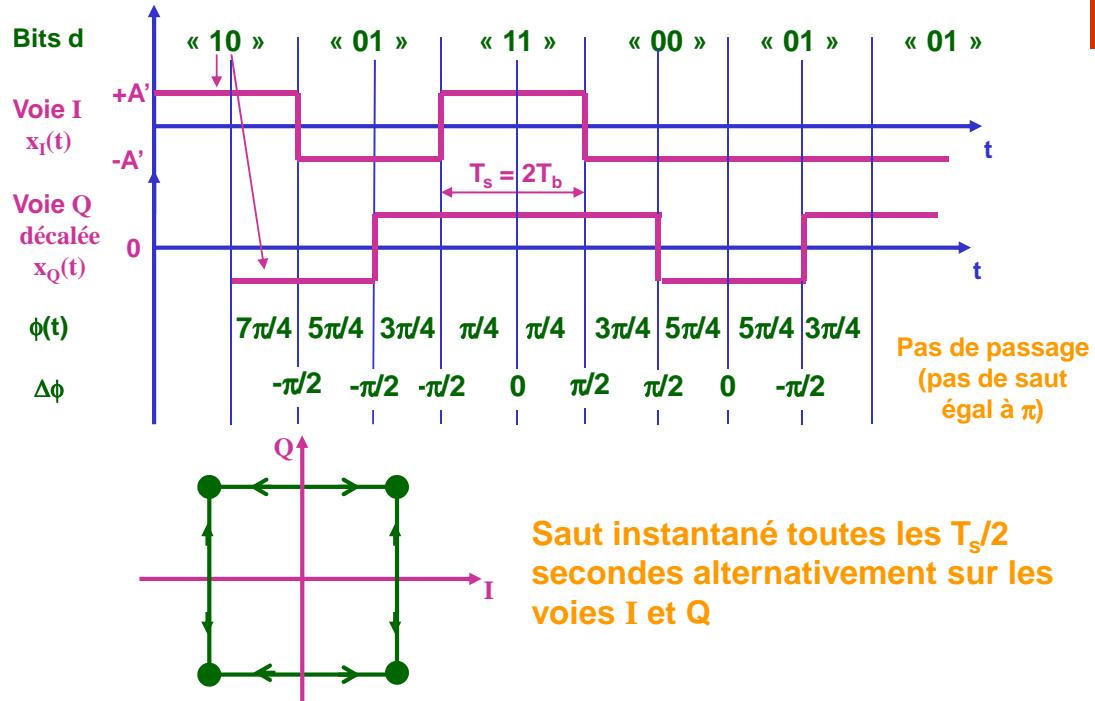
B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion

## Modulations à trains décalés OQPSK (Offset QPSK)

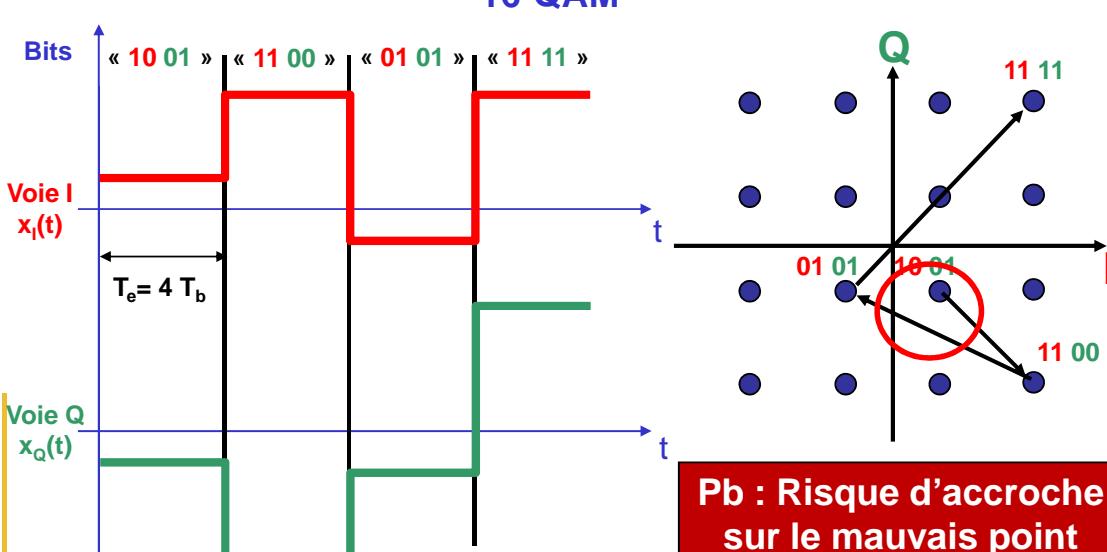


# Modulations à trains décalés

## OQPSK (Offset QPSK)

### Comparaison 16-QAM et 16-QAM « décalé »

Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion



Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion



# Modulations à trains décalés MSK (Minimum Shift Keying)

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

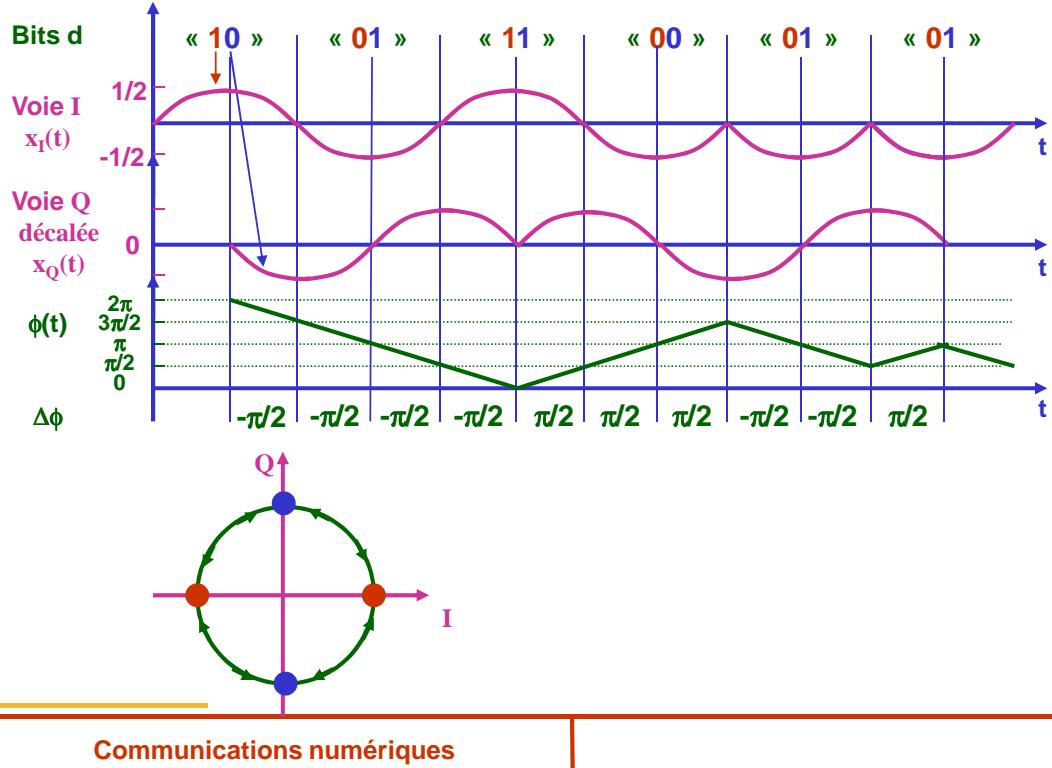
Performance

Conclusion



Communications numériques

31



# Modulation de fréquence à phase discontinue (FSK)

## Principe

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

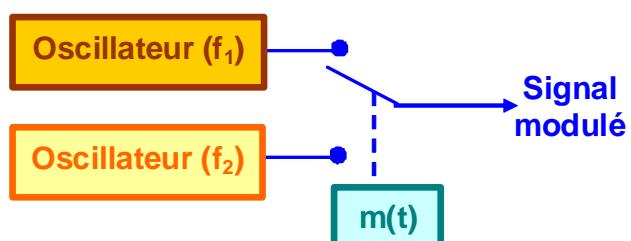
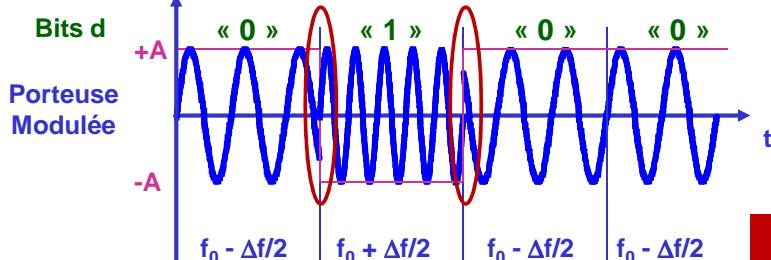
Conclusion



Communications numériques

**INCONVENIENT :**  
saut de phase

⇒ Occupation  
spectrale importante

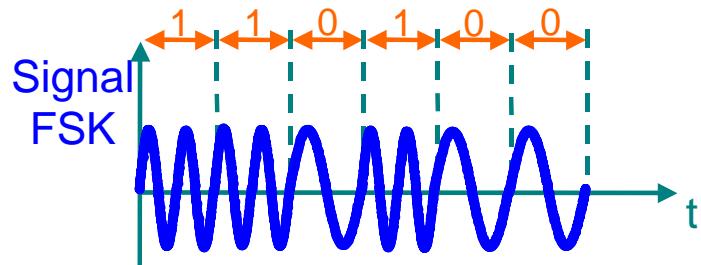


32

# Modulation de fréquence à phase continue (FSK)

Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

## Principe



Phase des signaux pour assurer la continuité du signal modulé

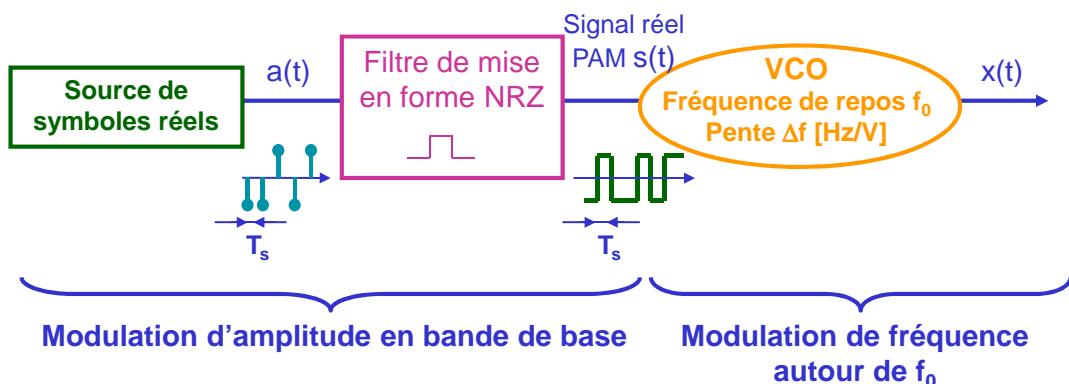
Possibilité d'avoir des symboles de plus d'un bit donc un signal avec n fréquences



# Modulation de fréquence à phase continue (FSK)

## Modulateur

Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion



$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

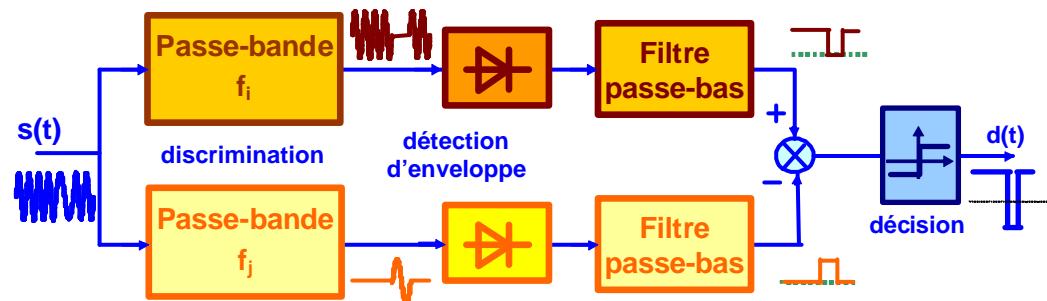
$$\frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi \Delta f s(t)$$



# Modulation de fréquence à phase continue (FSK)

## Démodulateur – Déetecteur d'enveloppe

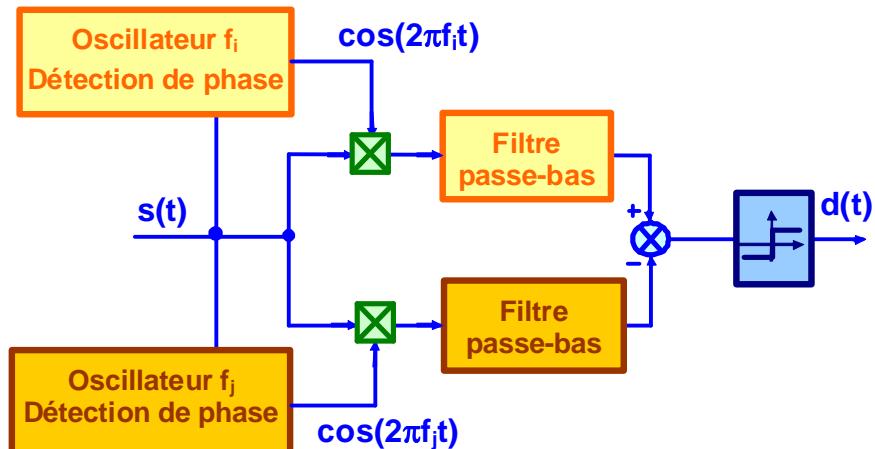
Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion



Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

# Modulation de fréquence à phase continue (FSK)

## Démodulateur – DéTECTEUR synchrone



# Modulation de fréquence à phase continue (FSK)

## Caractéristiques

- Amplitude constante : insensibilité aux variations des conditions de transmission et possibilité de contrôle automatique de gain
- Spectre difficile à établir et dépendant fortement de l'indice de modulation
- Encombrement spectral augmenté par rapport à la modulation d'amplitude – Faible efficacité spectrale
- Applications : télécommande, modem à 1200 bauds sur ligne téléphonique (Minitel), enregistrement de données sur cassettes audio, systèmes de radiotéléphones cellulaires comme le GSM à 950 MHz

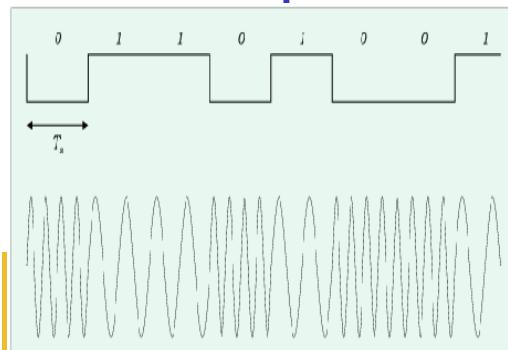


## Exemple : Modem V23

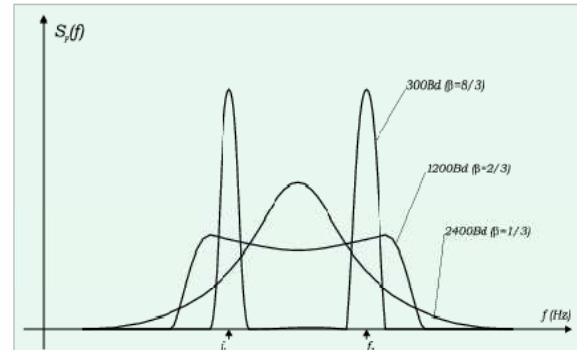
« 1 » →  $f_1 = 1300 \text{ Hz}$  « 0 » →  $f_2 = 2100 \text{ Hz}$

**Indice de modulation**  $\beta = \frac{f_2 - f_1}{D_s}$  D<sub>s</sub> rapidité de modulation [bauds]

Allure temporelle



Densité spectrale de puissance



→ Spectre fonction du débit symbole



# Modulation Gaussian Minimum Shift Keying (GMSK)

Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

## Présentation

Modulation de fréquence binaire à phase continue d'indice de modulation 0,5, dont l'occupation spectrale est limitée par l'utilisation d'un filtre gaussien sur les données

### Caractéristiques du filtre gaussien

$$H(f) = \exp\left(-\frac{f^2}{B^2} \ln \sqrt{2}\right) \xleftrightarrow{\text{TF}} h(t) = B \sqrt{\frac{\pi}{\ln \sqrt{2}}} \exp\left(-\frac{\pi^2 B^2 t^2}{\ln \sqrt{2}}\right)$$

B fréquence de coupure à – 3dB

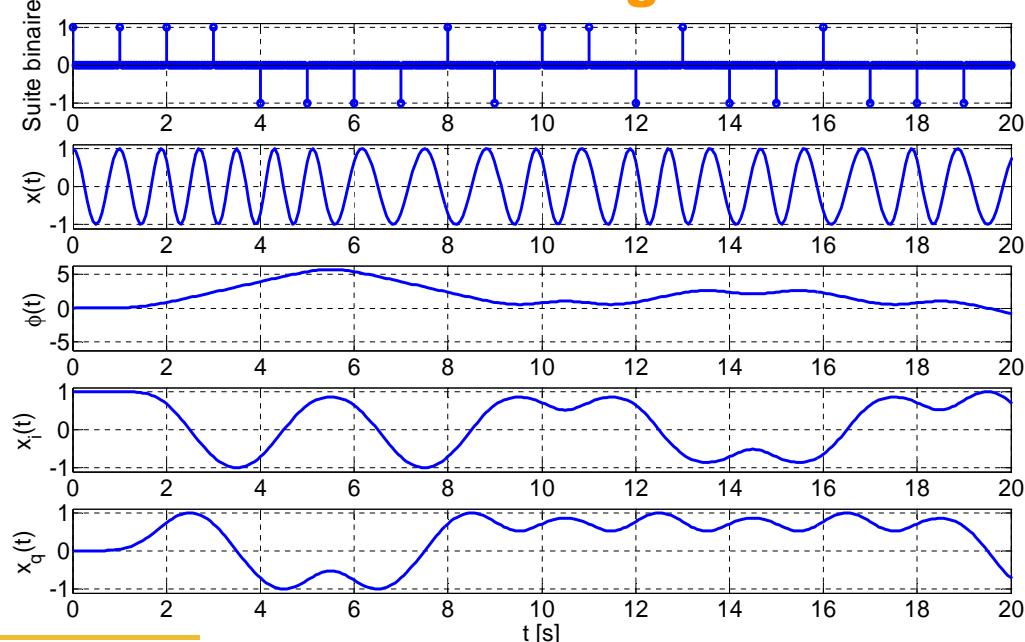
### Applications :

liaisons GSM de communications mobiles et systèmes DECT (Digital Enhanced Cordless Telephone) de téléphonie sans fil



# Modulation Gaussian Minimum Shift Keying (GMSK)

## Allures des signaux



# Bilan sur les modulations sur porteuse

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion



## Modulations linéaires

→ Modulations d'amplitude (M-ASK), modulations de phase (BPSK, QPSK, M-PSK) et modulation en quadrature (M-MAQ)

→ Enveloppe complexe de la forme suivante :

$$x_b(t) = \sum_k a_k g(t - kT), a_k = \alpha_k + j\beta_k \quad (\beta_k = 0 \text{ en M-ASK})$$

## Modulations non linéaires

→ Modulation en fréquence (FSK)

→ Modulations à phase continue (MSK, GMSK)

41

Communications numériques

# Remarque

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion



**Même formalisme pour étudier les transmissions en bande de base et en bande transposée (cas linéaire)**

### Signal numérique en bande de base

$$x(t) = \sum_{k=1}^K a_k h(t - kT_b) \quad / a_k \text{ réel}$$

### Enveloppe complexe d'un signal modulé sur fréquence porteuse

$$\alpha(t) = \sum_{k=1}^K a_k h(t - kT_b) \quad / a_k \text{ complexe ou réel}$$

**Même formalisme pour étudier :**

→ **Les propriétés spectrales des signaux**

→ **Les performances de la réception**

42

Communications numériques

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion

# Spectres des signaux numériques

## Approche théorique : Formule de Bennett

**Expression d'un signal numérique en bande de base ou expression de l'enveloppe complexe d'un signal modulé sur porteuse**

$$x(t) = \sum_k a_k h(t - kT)$$

**Expression du spectre de  $x(t)$  (en supposant sa stationnarité)**

$$S_x(f) = \underbrace{\frac{1}{T} |H(f)|^2 \sum_k V_a(k) \exp(-2\pi jfkT)}_{S_x^c(f)} + \underbrace{\frac{1}{T^2} |\mu_a|^2 \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)}_{S_x^d(f)}$$

→ Fort impact de l'impulsion utilisée !



Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion

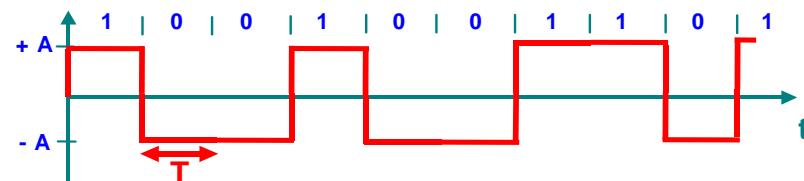
# Signal binaire NRZ (Non Retour à Zéro)

## Présentation théorique

**Signal binaire NRZ**

→  $a_k = 1$  si « 1 » et  $a_k = -1$  si  $\alpha_k = « 0 »$

→  $h(t) = A, \forall t \in [0, T[$  et 0 ailleurs



$$V_x(0) = A^2$$

$$E[a_n] = 0 \quad \text{et} \quad E[a_n a_{n-k}] = \delta_k \quad (\Leftrightarrow V_a(0) = 1)$$

/ symboles supposés équiprobables et indépendants

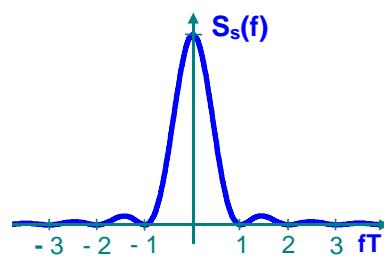
$$S_x(f) = A^2 T \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}$$

**Allure de la DSP du signal binaire NRZ**

→ Lobe principal de largeur  $2/T$  et contient

91% de la puissance

→ Décroissance à l'infini en  $1/f^2$



# Signal binaire NRZ (Non Retour à Zéro)

## Principales caractéristiques

### Propriétés

- Spectre sans raies
- Si niveaux différents (par exemple 0/5 V en TTL), même spectre à une composante continue près
- Lobe principal 91 % de la puissance transportée  
Canal nécessaire à la transmission du signal NRZ de largeur 1/T (si on ne tient compte que des fréquences positives)

### Inconvénients

- Forte densité spectrale en basses fréquences éliminant la possibilité d'utiliser des canaux avec condensateurs ou transformateurs en cascade
- Pas de raie à la fréquence 1/T compliquant la récupération de l'horloge
- Si longues suites de symboles identiques, risque de perdre le rythme

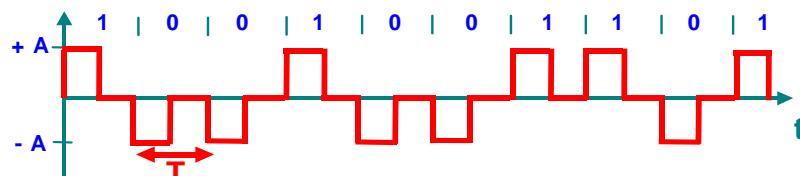


# Signal binaire RZ (Retour à Zéro)

## Présentation théorique

### Signal binaire RZ

$$\begin{aligned} \rightarrow a_k &= 1 \text{ si } « 1 » \text{ et } a_k = -1 \text{ si } \alpha_k = « 0 » \\ \rightarrow h(t) &= A, \forall t \in [0, \theta < T[ \text{ et } 0 \text{ ailleurs } \quad (\text{Ex: } \theta = T/2) \end{aligned}$$

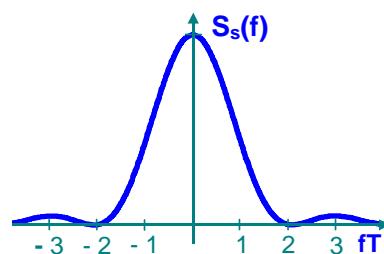


$$V_x(0) = A^2 / 2$$

$$S_x(f) = A^2 T \frac{\sin^2(\pi f T / 2)}{(\pi f T)^2} / \theta = T / 2$$

### Allure de la DSP du signal binaire RZ

- Semblable au cas NRZ avec lobes deux fois plus larges



Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

# Signal biphasé (ou de Manchester)

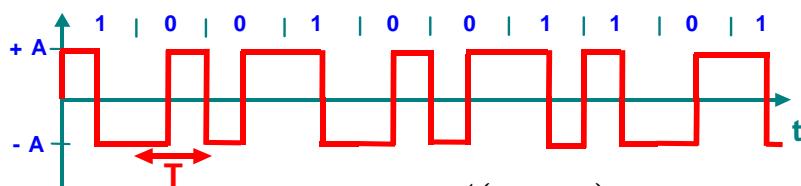
## Présentation théorique

### Signal biphasé

$\rightarrow a_k = 1 \text{ si } « 1 » \text{ et } a_k = -1 \text{ si } \alpha_k = « 0 »$

$$\rightarrow h(t) = \begin{cases} A, & \forall t \in [0, T/2[ \\ -A, & \forall t \in [T/2, T[ \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

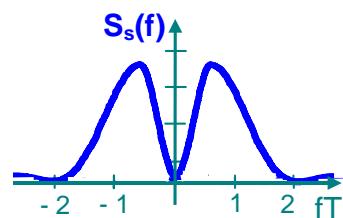
bit transmis caractérisé par un front montant ou descendant en  $T/2$



$$V_x(0) = A^2 \quad \text{et} \quad S_x(f) = 4A^2T \frac{\sin^4(\pi fT/2)}{(\pi fT)^2}$$

### Allure de la DSP du signal biphasé

- Pas de composante continue
- Utilisé dans Ethernet à 10Mbit/s (IEEE MAC802.3)



Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

# Signal biphasé (ou de Manchester)

## Principales caractéristiques

### Propriétés

- Spectre continu sans composante continue : Propriété requise dans les dispositifs qui transmettent mal l'énergie autour de la fréquence nulle (liaisons capacitatives, couplage au réseau par transformateur d'isolation, ...) et avantage pour la télé-alimentation

→ Bande occupée de l'ordre de  $2/T$

→ Codage et décodage très simples (à base de circuits logiques)

### Variante

- Code biphasé différentiel
  - « 0 » codé par une transition de même sens que la précédente
  - « 1 » par une transition de sens opposé

Signal de même densité spectrale de puissance

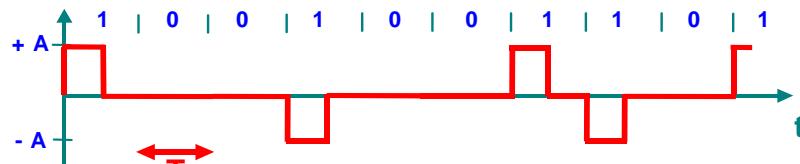


# Signal AMI (Alternate Mark Inversion)

## Présentation théorique

### Signal AMI

- Alphabet ternaire  $\{-1,0,+1\}$  : « 0 » par 0 et « 1 » par  $-1$  ou  $+1$  alternativement
- Code en ligne à symboles dépendants !
- Impulsion RZ par exemple (comme illustré)



$$V_a(k) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } k=0 \\ -1/4 & \text{si } k=\pm 1 \\ 0 & \text{si } |k| \geq 2 \end{cases}$$

$$R_x(0) = A^2 / 4$$

$$S_x(f) = \frac{A^2 T}{4} \sin^2(\pi f T) \sin c^2\left(\frac{\pi f T}{2}\right)$$



# Signal AMI (Alternate Mark Inversion)

## Principales caractéristiques

### Propriétés

- Spectre continu sans composante continue et basses fréquences
- Bande occupée de l'ordre de  $1/T$
- Possibilité de détection d'erreurs par le contrôle de la somme courante
- Récupération possible du rythme symbole :
  - Redressement du signal reçu
  - et
  - Obtention d'un signal RZ unipolaire à moyenne non nulle qui possède donc un spectre de raies et notamment une raie à la fréquence  $1/T$  d'amplitude  $A^2/\pi^2$ .

$$S_x(f) = S_x^c(f) + \frac{A^2}{T^2} \sum_k \left| \frac{\sin(\pi f T / 2)}{\pi^2 f^2} \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

### → MAIS

Si longue suite de 0, risque de perte du rythme de la transmission et donc de la synchronisation → HDBn !



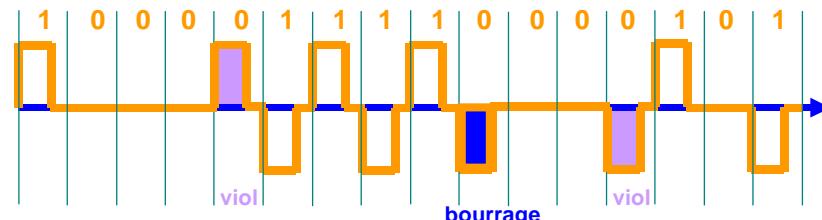
# Codage HDBn (Haute Densité Bipolaire d'ordre n)

## Principe général

### Principe – Variante du code bipolaire

→ Après une suite de  $n$  « 0 », codage du  $(n+1)^{\text{ème}}$  par une tension non nulle violant la règle d'alternance des polarités afin de maintenir le rythme en cas de longue suite de « 0 »

→ Introduction d'un bit de bourrage ensuite pour rétablir la neutralité électrique



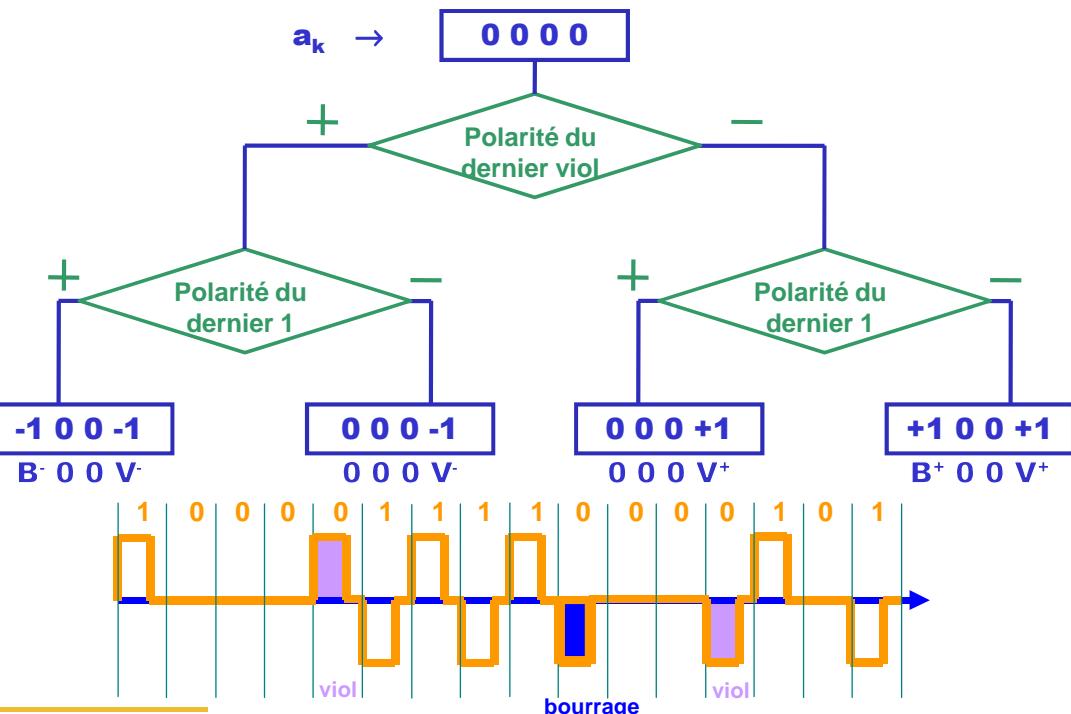
### Propriété

→ Densité spectrale du code HDB3 réduite et premier lobe centré autour de  $1/2T$



# Codage HDBn (Haute Densité Bipolaire d'ordre n)

## Algorithme de codage

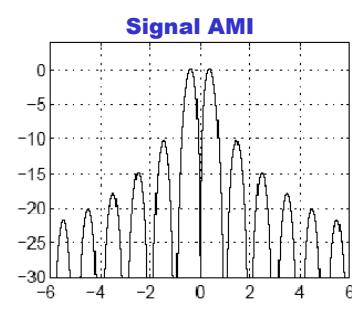
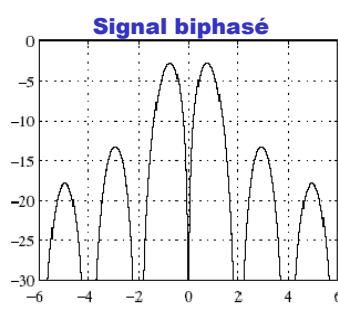
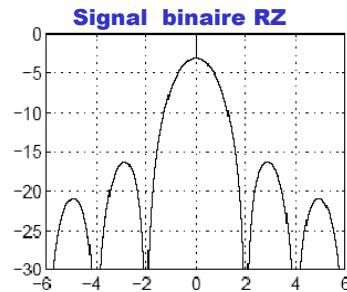
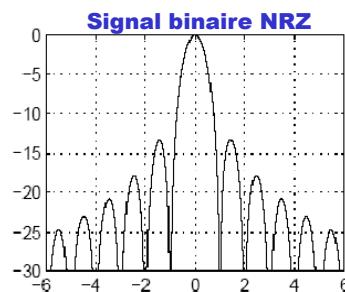


Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion



## Illustration comparative des codes en ligne

**Spectres en dB de signaux de puissance égale à 1 en fonction de fT**



Communications numériques

53

Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion



## Modulation avec porteuse

**Exemple pour la modulation de phase**

**Enveloppe complexe du signal modulé en phase**

$$x_b(t) = \sum_{k=1}^K a_k h(t - kT_b) \quad a_k = \exp(j\phi_k) \quad \text{avec } \phi_k \in \{0, 2\pi/M, \dots, 2(M-1)\pi/M\}$$

$h(t)$  impulsion

**Propriétés statistiques de symboles  $a_k$**

suite de variables aléatoires indépendantes et équiprobables

$$E[a_k] = E[\exp(j\phi_k)] = \sum_{k=0}^{M-1} \exp(2\pi jk/M) \frac{1}{M} = 0$$

$$E[|a_k|^2] = R_a(0) = V_a(0) = \sum_{k=1}^{M-1} |\exp(2\pi jk/M)|^2 \frac{1}{M} = 1$$

$$\forall k, R_a(k) = E[a_n a_{n-k}^*] = E[a_n] E[a_{n-k}^*] = 0$$

Communications numériques

54

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion

# Modulation avec porteuse

## Exemple pour la modulation de phase

### Densité spectrale du signal modulé

$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_b}(f - f_0) + S_{x_b}(-f + f_0)) \quad / \text{connu}$$

### Densité spectrale de l'enveloppe complexe

$$S_{xb}(f) = TF[R_{xb}(\tau)] = |H(f)|^2 \quad R_{xb}(\tau) = E[x_b(t)x_b^*(t-\tau)]$$

### Si par exemple, $h(t) = \text{Arect}_{T/2}(t/T)$

$$S_{xb}(f) = A^2 T \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}$$

$$R_{xb}(\tau) = E\left[\left(\sum_k a_k h(t-kT)\right)\left(\sum_{k'} a_{k'} h(t-\tau-k'T)\right)^*\right]$$

$$= \sum_k \sum_{k'} E[a_k (a_{k'})^*] h(t-kT) h^*(t-\tau-k'T)$$

$$= \sum_k h(t-kT) h^*(t-\tau-k'T)$$

$$= \sum_k h(u) h^*(u-\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau)$$

### Puissance transmise

$$R_x(0) = \frac{A^2}{2} \quad / \text{immédiat en raisonnant à partir de } x(t)$$



Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion

# Limite fondamentale

## Formule de Shannon (1948)

Soit un canal de bande en fréquence  $B$  soumis à un bruit additif gaussien blanc et soit un rapport signal sur bruit  $RSB$

On appelle **capacité du canal gaussien** la quantité mesurée en bits/s et définie par :

$$C = B \log_2(1 + RSB) \quad [\text{bits / s}]$$

**Alors si le débit binaire de la source  $D_b < C$ , il existe un ensemble (modulateur/démodulateur) asymptotiquement sans erreur**

**Le bruit ne constitue pas une limite aux transmissions sûres MAIS une limite au débit !**

**Exemple : canal téléphonique  $B \approx 3 \text{ kHz}$  [300 – 3400 Hz]**

**Pour un RSB de 30 dB, alors  $C = 30 \text{ kbit/s}$**



# Paramètres d'évaluation de performance

Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

## Définitions

**Efficacité spectrale**  $\eta = \frac{D_b}{B} = \frac{\text{Débit binaire}}{\text{Bande de fréquence du canal}} [\text{bits / s / Hz}]$

**Rapport signal sur bruit**  $\rho = \frac{E_b}{N_0} = \frac{\text{Energie par bit [J/bit]}}{\text{Densité spectrale du bruit [W/Hz]}}$

## Rapport signal sur bruit en puissance

$$\frac{P_s}{P_b} = \frac{\text{puissance du signal}}{\text{puissance du bruit dans la bande } B} = \frac{E_b D_b}{N_0 B} = \frac{E_b}{N_0} \frac{D_b}{B} = \rho \eta$$

**Probabilité d'erreur par symbole**  $P_e = P(\hat{a}_k \neq a_k)$

**Taux d'erreur par éléments binaire**  $TEB = \frac{\text{Nombre de bits reçus erronés}}{\text{Nombre total de bits émis}}$



# Transmissions Analogiques et Numériques

Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

## COMMUNICATIONS ANALOGIQUES

Phénomène physique  
Infinité de valeurs

## COMMUNICATIONS NUMÉRIQUES

Suite de symboles  
Alphabet fini, connu du destinataire

### Message

### Critère de qualité

### Transmissions

### Fidélité : RSB

Erreurs : TEB (Taux d'Erreur Binaire)

Signal « numérique »  
Signal véhiculant des informations numériques

### Type de signal

Signal analogique véhiculant des informations analogiques



# Avantages des transmissions numériques

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion

## Exactitude ou fiabilité à volonté

(à l'aide du codage approprié le bruit ne limite pas l'exactitude désirée mais seulement le débit maximum transmis)

## Multiplexage temporel de services différents

(parole, HiFi, image, données, ...)

## Traitements numériques

(DSP, VLSI, µP, ...)

## Débits élevés

## Qualité de service (QoS)



Communications numériques

59

# Intérêt des modulations à grand nombre d'états

Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion

## Exemple : $F_e = 10 \text{ kHz}$ – $N = 8 \text{ bits}$

⇒ Modulation telle que 1 bit/symb : 80 kbit/s

⇒ Modulation telle que 2 bit/symb : 40 kbit/s

⇒ Modulation telle que 8 bit/symb : 10 kbit/s

La largeur de bande décroît mais la sensibilité au bruit augmente !

**Efficacité spectrale** : Capacité de la modulation à adapter les données à l'intérieur d'une bande limitée de fréquence

$$e = \frac{\text{débit binaire avec une certaine } Pe}{\text{l'largeur de bande occupée autour de la porteuse}} \quad [\text{bit / s / Hz}]$$



Communications numériques

60

Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

## Inconvénients

**Retard dû aux traitements numériques**

**Encombrement spectral**

**Exemple :** Téléphonie

En analogique :  $B = 3,4 \text{ kHz}$

En numérique :  $F_e = 8 \text{ kHz} - N = 8 \text{ bits} \Rightarrow B = 32 \text{ kHz}$

**Solutions possibles :**

Compression et/ou modulations à grand nombre d'états



Présentation
Chaîne
B. de base
B. transposée
Spectre
Performance
Conclusion

## Exemples d'applications

Modulation	e	Applications
MSK	1	GSM
BPSK	1	Télémétrie spatial, modems
QPSK	2	Satellite DVB-S (Digital Video Broadband)
FSK		DECT (Digital European Cordless Technique)
8PSK	3	Télémétrie de systèmes large bande
16QAM	4	Modems, DVB-C, DVB-T (Cable, Terristrial)
256QAM	8	Télévision numérique (US)



Présentation

Chaîne

B. de base

B. transposée

Spectre

Performance

Conclusion



# Perspectives

## Étude des performances en présence de bruit

Dans le cas des transmissions en bande de base et en bande transposée

## Problèmes en réception : Égalisation et synchronisation

## Techniques d'accès multiples et duplexage (FDMA, TDMA, CDMA et FDD/TDD)

## Modulations avancées

(Modulations codées, en treillis, à étalement de spectre, à porteuses multiples, OFDM)

## Systèmes MIMO

## Systèmes UWB

## Modélisation des canaux de propagation (canaux à trajets multiples, ...)

Communications numériques

63

# Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base

## Plan du chapitre

- 1. Présentation de la problématique
- 2. Récepteur optimal
- 3. Canal de Nyquist et ISI
- 4. Paramètres d'évaluation
- 5. Conclusion



1. Problématique    2. Réc. Optimal    3. Nyquist / ISI    4. Évaluation    5. Perspectives    6. Annexe

## Comment retrouver l'information en réception ?

### Quel traitement en réception ?



**$x(t)$  signal portant les informations transmis à travers le canal**

**$z(t)$  signal reçu correspondant à  $x(t)$  perturbé par le canal**



## Vers la conception d'un récepteur optimal ...

### HYPOTHESE : canal idéal (à bande illimitée)

#### Canal bruité sans distorsion et sans diaphonie

Bruit blanc, gaussien, centré, SSL, de d.s.p.  $N_0/2$ , indépendant du signal

Gain du canal constant et supposé compensé en réception

Retard négligé (sans perte de généralité)

Bande de fréquence illimitée

Canal idéal

⇒ Signal reçu : Information + Bruit

**Un mot sur la diaphonie** (appelée en anglais « crosstalk ») :

- Perturbation d'un signal due à l'influence d'un canal de transmission sur un autre canal (voisin)
- Ce transfert indésirable d'une partie de l'énergie du signal d'une voie sur une autre se traduit par des bruits ou un signal inintelligible affaibli



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

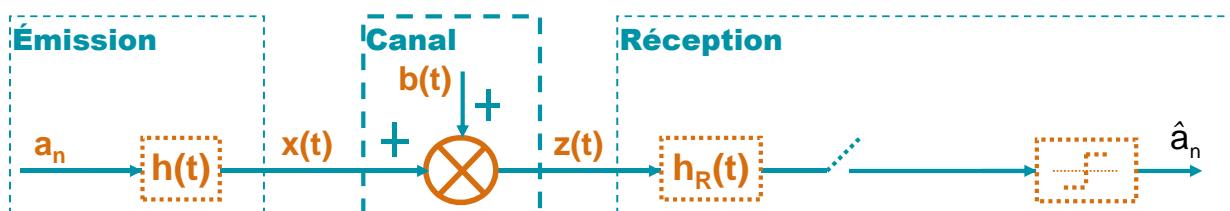
3

## Solution envisagée

Première idée : filtrer pour minimiser la puissance du bruit !

→ Mais alors signal utile également affecté

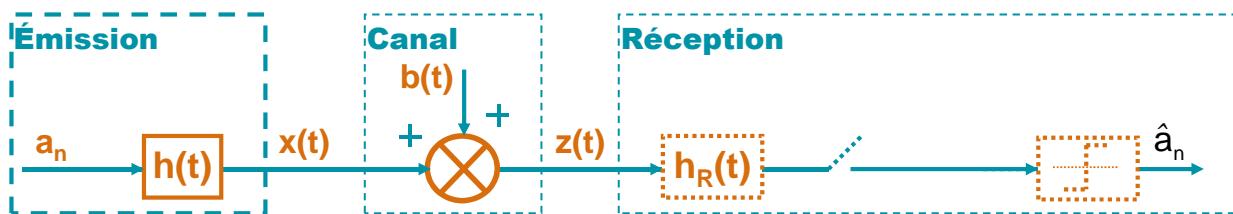
**Solution retenue :** Récepteur linéaire pour obtenir le meilleur compromis entre la réduction de la puissance du bruit ET la dégradation du signal utile



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

4

## Modélisation de l'émetteur



- (1)  $a_n$  suite aléatoire indépendante et identiquement distribuée (i.i.d) à valeurs dans  $\{a_1, a_2\}$  équiprobales

→ Hypothèse : transmission telle que  $\{0, 1\} \leftrightarrow \{a_1, a_2\}$

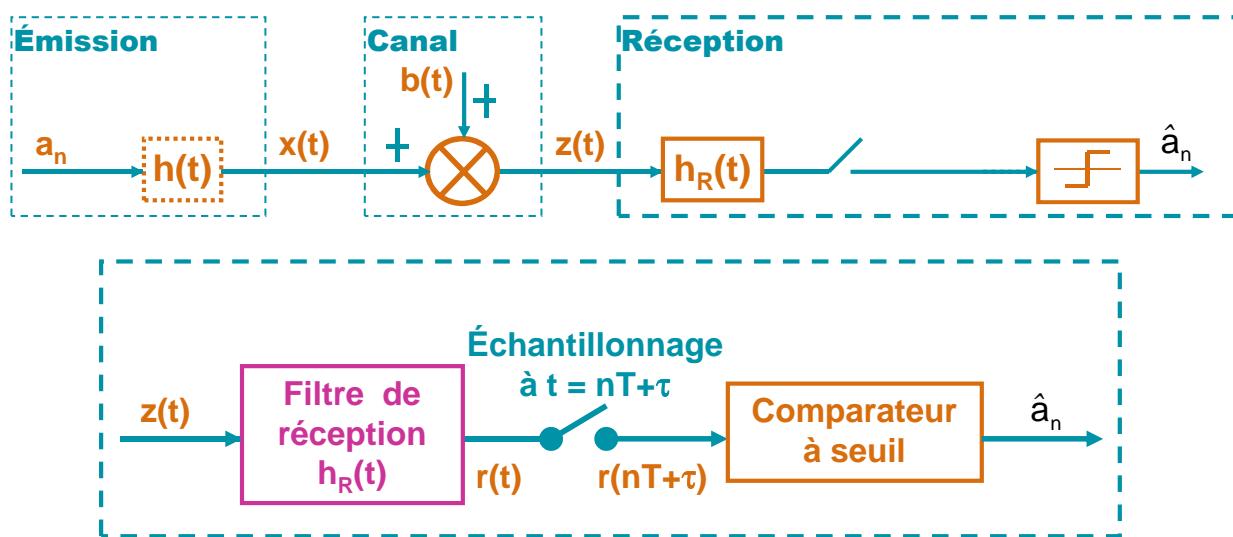
- (2)  $h(t)$  réponse impulsionnelle réelle incluant la mise en forme et le filtre d'émission (qui sera défini ultérieurement)



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

5

## Modélisation du récepteur



**Signal reçu : Information + Bruit**

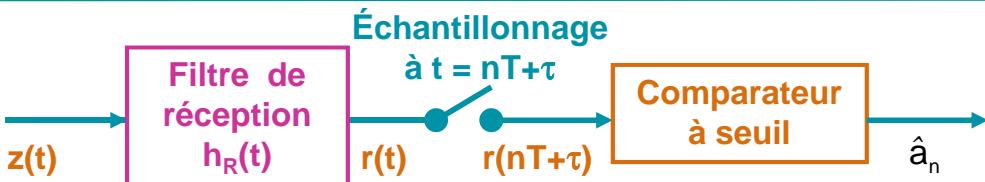
$$z(t) = x(t) + b(t) \quad \text{avec } x(t) = a_i * h(t) = x_i(t), i = 1, 2$$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

6

## Principe de la réception



### Signal reçu : Information + Bruit

$$z(t) = x(t) + b(t) \quad \text{avec} \quad x(t) = a_i * h(t) = x_i(t), i = 1, 2$$

--- 1° phase --- Transformation du signal reçu  $z(t)$  en une valeur  $r(nT + \tau)$

#### Filtrage

$$r(t) = z(t) * h_R(t) = (x(t) + b(t)) * h_R(t) = a_i * \underbrace{\alpha(t)}_{h(t)*h_R(t)} + \underbrace{w(t)}_{b(t)*h_R(t)}, i = 1, 2$$

#### Puis échantillonnage

$$r(nT + \tau) = Y_n = \alpha_{i_n} + w_n \quad \text{avec} \quad \alpha_{i_n} = a_{i_n} \alpha_n, i = 1, 2$$

$Y_n$  VA gaussienne de moyenne  $\alpha_{i_n}$   
de variance  $\sigma^2 = |H_R(f)|^2 N_0 / 2$

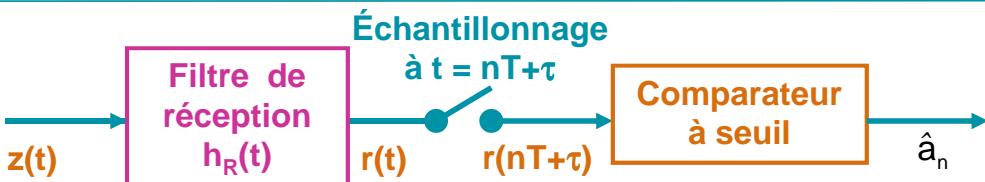
⇒ Démo en annexe



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

7

## Principe de la réception



### Signal reçu échantillonné

$$Y_n = r(nT + \tau) = \alpha_{i_n} + w_n \quad \text{avec} \quad \alpha_{i_n} = a_{i_n} \alpha_n, i = 1, 2$$

--- 2° phase --- Comparateur à seuil

Valeur test  $Y$  comparée à une valeur donnée  $S$

#### Test d'hypothèse

$$H_1 \quad H_1 : a_1 \text{ transmis } (Y > S)$$

$$Y \gtrless S$$

$$H_2 \quad H_2 : a_2 \text{ transmis } (Y < S)$$

Les hypothèses  $H_1$  et  $H_2$  sont mutuellement exclusives !

→  $H_1$  : décider que le signal  $s_1(t)$ , soit  $a_1$ , a été transmis

→  $H_2$  : décider que le signal  $s_2(t)$ , soit  $a_2$ , a été transmis

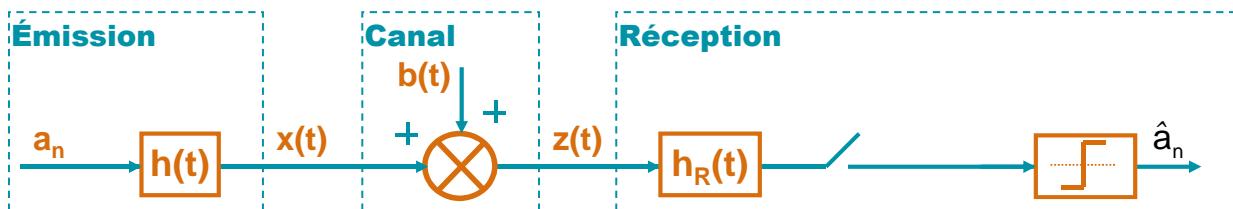


Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

8

# PRINCIPE DE LA CHAINE DE COMMUNICATION

## Solution retenue !



**Comment choisir et paramétriser les différents traitements en émission et en réception ?**

**1/ Chercher l'expression de la probabilité d'erreur en fonction des paramètres de la chaîne de transmission**

**2/ Optimiser cette chaîne en cherchant la valeur des paramètres pour minimiser la probabilité d'erreur**



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

9

## Expression générale de la probabilité d'erreur

### Définition

**Probabilité d'erreur :**  $P_e = P(H_2|a_1)P(a_1) + P(H_1|a_2)P(a_2)$   $H_1 : Y > S$  et  $a_1$   
 $H_2 : Y < S$  et  $a_2$

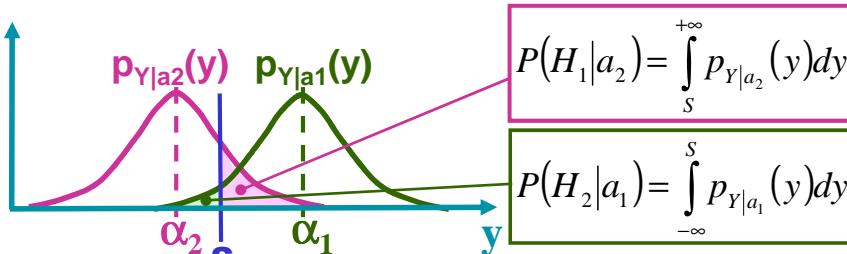
$P(a_i)$  Probabilité a priori que  $a_i(t)$  ait été transmis

$P(H_j|a_i)$  Probabilité que  $H_j$  validé alors que  $a_i$  transmis

**REMARQUE : si équiprobabilité en transmission**  $P(a_1) = P(a_2) = 0,5$

$$\Rightarrow P_e = \frac{1}{2} \{ P(H_2|a_1) + P(H_1|a_2) \}$$

**Probabilités conditionnelles**  $p_{Y|a_i}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - \alpha_i)^2}{2\sigma^2}\right)$  / Loi gaussienne



$$P(H_1|a_2) = \int_S^{+\infty} p_{Y|a_2}(y) dy$$

$$P(H_2|a_1) = \int_{-\infty}^S p_{Y|a_1}(y) dy$$

Si  $a_2$  a été transmis, le signal  $y$  se situe sur la courbe rose ET si  $y > S$  alors il y a erreur puisque la décision est que  $a_1$  a été transmis



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

10

## Expression de la probabilité d'erreur (2)

**Calcul :**  $P_e = P(H_1|a_2)P(a_2) + P(H_2|a_1)P(a_1)$

$$\begin{aligned}
 P_e &= P(a_2) \int_S^{+\infty} p_{Y|a_2}(y) dy + P(a_1) \int_{-\infty}^S p_{Y|a_1}(y) dy \\
 &= P(a_2) \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_S^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-\alpha_2)^2}{2\sigma^2}\right) dy}_{I_1} + P(a_1) \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^S \exp\left(-\frac{(y-\alpha_1)^2}{2\sigma^2}\right) dy}_{I_2} \\
 I_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(S-\alpha_2)/\sigma\sqrt{2}}^{+\infty} \exp(-u^2) du \quad / u = \frac{y-\alpha_2}{\sigma\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{S-\alpha_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) \\
 \operatorname{erfc}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-u^2) du
 \end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-(S-\alpha_1)/\sigma\sqrt{2}}^{-\infty} \exp(-u^2) du \quad / u = \frac{y-\alpha_1}{\sigma\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{(S-\alpha_1)/\sigma\sqrt{2}} \exp(-u^2) du \quad / \text{par symétrie} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_1-S}{\sigma\sqrt{2}}\right)
 \end{aligned}$$
  

$$P_e = \frac{1}{2} P(a_2) \operatorname{erfc}\left(\frac{S-\alpha_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} P(a_1) \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_1-S}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

11

## Parenthèse sur les fonctions d'erreur

**Attention aux définitions et donc aux confusions !**

### Fonction complémentaire d'erreur $\operatorname{erfc}(z)$

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} \exp(-\lambda^2) d\lambda$$

### Fonction $Q(z)$

$$Q(z) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow \operatorname{erfc}(z) = 2Q(z\sqrt{2})$$

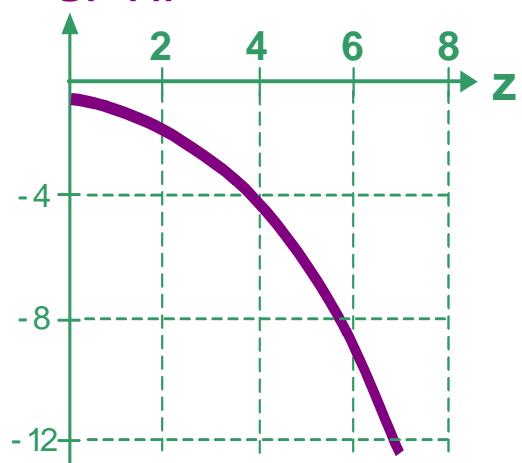
$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-\lambda^2/2} d\lambda$$

**Fonction parfois utilisée à la place de  $\operatorname{erfc}$**

### Fonction d'erreur $\operatorname{erf}(z)$

$$\operatorname{erf}(z) = \dots \int_0^z \dots$$

**$\log(Q(z))$**



$$Q(0) = \frac{1}{2} \quad Q(-z) = 1 - Q(z)$$

$$Q(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} e^{-z^2/2} \text{ si } z \gg 1 (z > 4)$$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

12

## Table de la fonction d'erreur Q(z)

<b>z</b>	<b>Q(z)</b>	<b>z</b>	<b>Q(z)</b>	<b>z</b>	<b>Q(z)</b>	<b>z</b>	<b>Q(z)</b>	<b>z</b>	<b>Q(z)</b>
<b>0</b>	<b>0,5</b>	<b>1</b>	<b>0,1587</b>	<b>2</b>	<b>0,0228</b>	<b>3</b>	<b>0,00135</b>	<b>4</b>	<b>0,00003</b>
<b>0,05</b>	<b>0,4801</b>	<b>1,05</b>	<b>0,1469</b>	<b>2,05</b>	<b>0,0202</b>	<b>3,05</b>	<b>0,00114</b>	<b>4,25</b>	<b>1,0E-05</b>
<b>0,1</b>	<b>0,4602</b>	<b>1,1</b>	<b>0,1357</b>	<b>2,1</b>	<b>0,0179</b>	<b>3,1</b>	<b>0,00097</b>	<b>4,75</b>	<b>1,0E-06</b>
<b>0,15</b>	<b>0,4404</b>	<b>1,15</b>	<b>0,1251</b>	<b>2,15</b>	<b>0,0158</b>	<b>3,15</b>	<b>0,00082</b>	<b>5,2</b>	<b>1,0E-08</b>
<b>0,2</b>	<b>0,4207</b>	<b>1,2</b>	<b>0,1151</b>	<b>2,2</b>	<b>0,0139</b>	<b>3,2</b>	<b>0,00069</b>	<b>5,6</b>	<b>1,0E-09</b>
<b>0,25</b>	<b>0,4013</b>	<b>1,25</b>	<b>0,1056</b>	<b>2,25</b>	<b>0,0122</b>	<b>3,25</b>	<b>0,00058</b>		
<b>0,3</b>	<b>0,3821</b>	<b>1,3</b>	<b>0,0968</b>	<b>2,3</b>	<b>0,0107</b>	<b>3,3</b>	<b>0,00048</b>		
<b>0,35</b>	<b>0,3632</b>	<b>1,35</b>	<b>0,0885</b>	<b>2,35</b>	<b>0,0094</b>	<b>3,35</b>	<b>0,0004</b>		
<b>0,4</b>	<b>0,3446</b>	<b>1,4</b>	<b>0,0808</b>	<b>2,4</b>	<b>0,0082</b>	<b>3,4</b>	<b>0,00034</b>		
<b>0,45</b>	<b>0,3264</b>	<b>1,45</b>	<b>0,0735</b>	<b>2,45</b>	<b>0,0071</b>	<b>3,45</b>	<b>0,00028</b>		
<b>0,5</b>	<b>0,3085</b>	<b>1,5</b>	<b>0,0668</b>	<b>2,5</b>	<b>0,0062</b>	<b>3,5</b>	<b>0,00023</b>		
<b>0,55</b>	<b>0,2912</b>	<b>1,55</b>	<b>0,0606</b>	<b>2,55</b>	<b>0,0054</b>	<b>3,55</b>	<b>0,00019</b>		
<b>0,6</b>	<b>0,2743</b>	<b>1,6</b>	<b>0,0548</b>	<b>2,6</b>	<b>0,0047</b>	<b>3,6</b>	<b>0,00016</b>		
<b>0,65</b>	<b>0,2578</b>	<b>1,65</b>	<b>0,0495</b>	<b>2,65</b>	<b>0,004</b>	<b>3,65</b>	<b>0,00013</b>		
<b>0,7</b>	<b>0,242</b>	<b>1,7</b>	<b>0,0446</b>	<b>2,7</b>	<b>0,0035</b>	<b>3,7</b>	<b>0,00011</b>		
<b>0,75</b>	<b>0,2266</b>	<b>1,75</b>	<b>0,0401</b>	<b>2,75</b>	<b>0,003</b>	<b>3,75</b>	<b>0,00009</b>		
<b>0,8</b>	<b>0,2169</b>	<b>1,8</b>	<b>0,0359</b>	<b>2,8</b>	<b>0,0026</b>	<b>3,8</b>	<b>0,00007</b>		
<b>0,85</b>	<b>0,1977</b>	<b>1,85</b>	<b>0,0322</b>	<b>2,85</b>	<b>0,0022</b>	<b>3,85</b>	<b>0,00006</b>		
<b>0,9</b>	<b>0,1841</b>	<b>1,9</b>	<b>0,0287</b>	<b>2,9</b>	<b>0,0019</b>	<b>3,9</b>	<b>0,00005</b>		
<b>0,95</b>	<b>0,1711</b>	<b>1,95</b>	<b>0,0256</b>	<b>2,95</b>	<b>0,0016</b>	<b>3,95</b>	<b>0,00004</b>		



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

13

## Détermination du seuil optimal

### Condition pour obtenir une probabilité d'erreur minimale

$$\frac{dP_e}{dS} = 0 \quad / P_e = P(a_2) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_s^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-\alpha_2)^2}{2\sigma^2}\right) dy + P(a_1) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^s \exp\left(-\frac{(y-\alpha_1)^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

$$\frac{dP_e}{dS} = -P(a_2) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(S-\alpha_2)^2}{2\sigma^2}\right) + P(a_1) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(S-\alpha_1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$$

La primitive obtenue est ensuite dérivée et donc :

- La dérivée de la valeur  $F(+\infty)$  est nulle
- La dérivée de la fonction  $F(a)$  donne  $f(a)$  !

$$\frac{dP_e}{dS} = 0$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(\frac{(S-\alpha_2)^2 - (S-\alpha_1)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{P(a_2)}{P(a_1)} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 + 2S(\alpha_1 - \alpha_2)}{2\sigma^2}\right) = \ln \frac{P(a_2)}{P(a_1)}$$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

14

## Détermination du seuil optimal (2)

**Condition pour obtenir une probabilité d'erreur minimale**

$$\frac{dP_e}{dS} = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 + 2S(\alpha_1 - \alpha_2)}{2\sigma^2} \right) = \ln \frac{P(a_2)}{P(a_1)}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\sigma^2}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \frac{P(a_2)}{P(a_1)}$$

**Si équiprobabilité**       $S = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \quad / P(a_1) = P(a_2)$

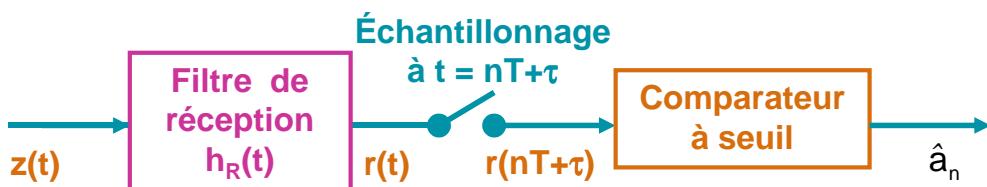
**Si symétrie**       $S = \frac{\sigma^2}{2\alpha_1} \ln \frac{P(a_2)}{P(a_1)} \quad / a_2 = -a_1 \text{ et } \alpha_2 = -\alpha_1$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

## Filtre de réception optimal

**Recherche de la réponse optimale du filtre de réception**



Le seuil optimal étant maintenant connu, il faut :

- déterminer la probabilité d'erreur correspondante ;
- et ensuite chercher la réponse du filtre qui la minimise.

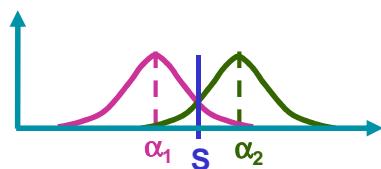


Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

## Probabilité d'erreur avec seuil optimal

**Cas de l'équiprobabilité :  $P(a_1) = P(a_2) = 0,5$**

$$P_e = \frac{1}{2} P(a_2) \operatorname{erfc}\left(\frac{S - \alpha_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} P(a_1) \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_1 - S}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow P_e &= \frac{1}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{S - \alpha_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_1 - S}{\sigma\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{S - \alpha_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_1 - S}{\sigma\sqrt{2}}\right) \text{ / par symétrie} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad /S = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\sqrt{2}\sigma}\right) = Q\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\sigma}\right) \quad / Q(z) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

17

## Condition pour obtenir un filtre optimal

$$\text{Minimiser } P_e = Q\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\sigma}\right) \Leftrightarrow \text{Maximiser } \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sigma} \text{ ou } \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{\sigma^2}$$

/  $Q(z)$  fonction décroissante

$\alpha_1 - \alpha_2$  Différence entre composantes du signal à la sortie du filtre à l'instant  $t = nT + \tau = \theta$

$(\alpha_1 - \alpha_2)^2$  Puissance instantanée

$\sigma^2$  Puissance moyenne du bruit en sortie du filtre

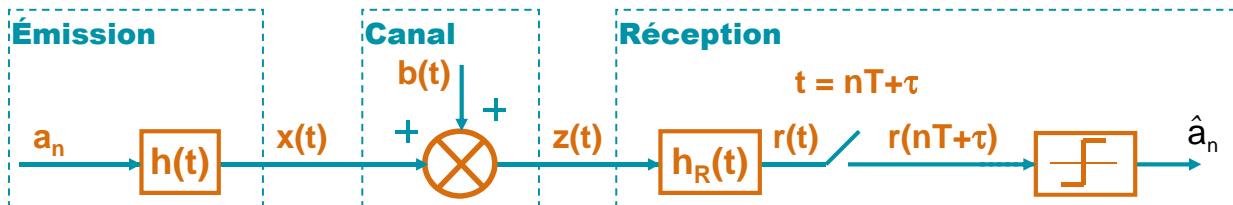
⇒ Maximiser le rapport signal sur bruit en sortie du filtre



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

18

## Calcul du rapport signal sur bruit en sortie



$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{\text{Puissance instantanée du signal}}{\text{Puissance du bruit}} = \frac{|\alpha_1(\theta) - \alpha_2(\theta)|^2}{\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (X_1(f) - X_2(f)) H_R(f) e^{2\pi f \theta} df \right|^2}{(N_0/2) \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df}$$

### Justifications

- $\alpha_1(t) - \alpha_2(t) = (x_1(t) - x_2(t)) * h_R(t)$   
 $= \overline{TF}[(X_1(f) - X_2(f)) H_R(f)]$
- $\alpha_1(t = \theta) - \alpha_2(t = \theta) = \int_{\mathbb{R}} (X_1(f) - X_2(f)) H_R(f) e^{2\pi f \theta} df$
- $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

19

## Majoration du rapport signal sur bruit

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_s \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |X_1(f) - X_2(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df}{(N_0/2) \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_s \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |(X_1(f) - X_2(f))|^2 df = \frac{2E_d}{N_0}$$

Rapport Signal sur Bruit majoré par  $E_d / (N_0/2)$

### Rappel : inégalité de Schwartz

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt \quad \text{égalité si } f(t) = k g^*(t)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (X_2(f) - X_1(f)) H_R(f) e^{2\pi f \theta} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |(X_1(f) - X_2(f))|^2 df$$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

20

## Condition pour obtenir le majorant du RSB

### Condition pour atteindre l'égalité de Schwartz

$$H_R(f) \exp(2\pi j f \theta) = k(X_1(f) - X_2(f))^*$$

$$\Leftrightarrow H_R(f) = k((a_1 - a_2)H(f))^* \exp(-2\pi j f \theta) = KH^*(f) \exp(-2\pi j f \theta)$$

$$/ \quad x(t) = a_i * h(t) = x_i(t), i = 1, 2$$

si  $H_R(f) = KH^*(f) \exp(-2\pi j f \theta)$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{2E_d}{N_0}$$

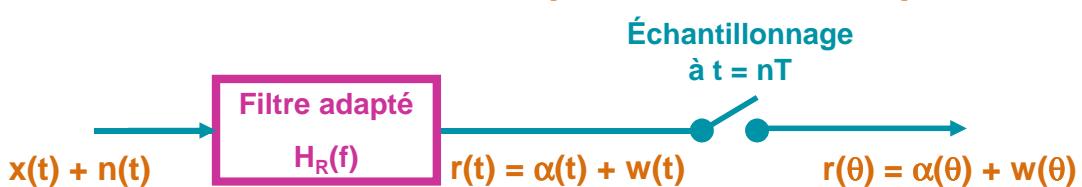
$E_d$  : énergie du signal différentiel ( $x_1(t) - x_2(t)$ ) à l'entrée de l'organe de réception

$N_0/2$  : puissance bilatérale du bruit du canal



## Réponse en Fréquence et Réponse Impulsionnelle

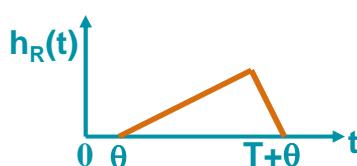
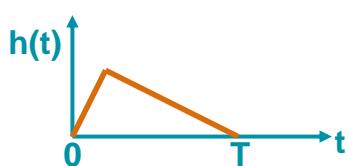
### - Filtre Adapté (matched filter) -



$$\left(\frac{S}{N}\right)_{MAX} = \frac{2E}{N_0} \Rightarrow H_R(f) = KH^*(f)e^{-2\pi j f \theta}$$

$$\Leftrightarrow h_R(t) = \overline{TF}[H_R(f)] = Kh^*(\theta - t)$$

Réponse temporelle du filtre adapté : version retardée de l'image en miroir du signal (filtre d'émission) auquel il est adapté



Pour assurer la causalité du filtre de réception, il faut que l'instant de décision  $\theta$  soit supérieur ou égal à la durée de l'impulsion



## Application : Détection optimale

### Expression de la probabilité d'erreur minimale

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \Big|_{MAX} = \frac{2E_d}{N_0} \Rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_d}{4N_0}}\right) \quad / P_e = Q\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\sigma}\right)$$

#### REMARQUE : Probabilité d'erreur

→ indépendante de la forme d'onde du signal (donc de  $h(t)$ )

→ uniquement fonction de son énergie



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

23

## Équivalence entre filtre adapté et corrélation

### Démonstration

$$r(t) = z(t) * h_R(t) = (x(t) + b(t)) * h_R(t) = x(t) * h_R(t) + b(t) * h_R(t)$$

$$r(t) = K(x(t) * h^*(\theta - t) + b(t) * h^*(\theta - t)) \quad / h_R(t) = K h^*(\theta - t)$$

$$\begin{cases} x(t) * h^*(\theta - t) = a_n \int_{\mathbb{R}} h(\tau) h^*(\tau - (t - \theta)) d\tau = a_n R_h(t - \theta) \\ b(t) * h^*(\theta - t) = \int_{\mathbb{R}} b(\tau) h(\tau - (t - \theta)) d\tau = R_{bh}(t - \theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow r(t) = K(a_n R_h(t - \theta) + R_{bh}(t - \theta))$$

#### Cas non bruité

Sortie du filtre adapté = Fonction d'autocorrélation du filtre centrée en  $\theta$  (instant de décision) et maximale en  $t = \theta$  (par définition)

$$r(\theta) = K a_n R_h(0) = K a_n \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|^2 d\tau = K a_n E_h$$

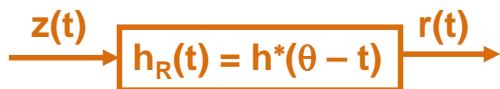


Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

24

## Équivalence entre filtre adapté et corrélation

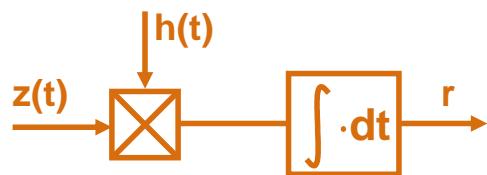
### Filtre Adapté



$$r(t) = a_n R_h(t - \theta) + R_{bh}(t - \theta)$$

$$r(\theta) = a_n R_h(0) + R_{bh}(0)$$

### Corrélation



$$r = \int x(t)h(t)dt + \int b(t)h(t)dt$$

$$r = a_n R_h(0) + R_{bx}(0)$$

**Équivalence lors de l'instant d'échantillonnage  $t = \theta$**



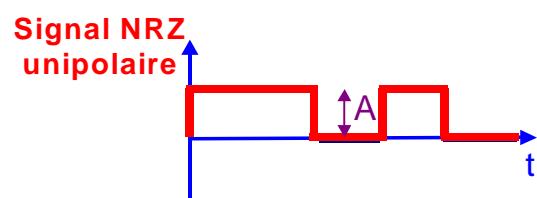
Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

25

## Exemples d'applications

### Transmission en bande de base unipolaire

$$x_i(t) = \begin{cases} x_1(t) = A, & 0 \leq t \leq T \\ x_2(t) = 0, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{bit "1"} \\ \text{bit "0"} \end{matrix}$$



$$E_d = \int_0^T (x_1(t) - x_2(t))^2 dt = A^2 T$$

$$E_b = \frac{A^2 T}{2} \quad \text{Énergie moyenne par digit du signal reçu (équiprobabilité)}$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$$



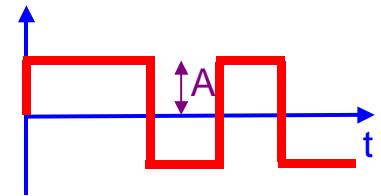
Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

26

## Exemples d'applications

### Transmission en bande de base bipolaire

$$x_i(t) = \begin{cases} x_1(t) = A, & 0 \leq t \leq T \\ x_2(t) = -A, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad \text{bit "1"} \\ \text{bit "0"}$$



$$E_d = \int_0^T [x_1(t) - x_2(t)]^2 dt = \int_0^T (2A)^2 dt = 4A^2 T$$

$$E_b = \int_0^T [x_i(t)]^2 dt = \int_0^T (\pm A)^2 dt = A^2 T$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2 T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



**Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330**

27

## Généralisation à un symbole M-aire

**Non présentée ici ...**

**Dans le cas où les différents signaux sont proportionnels à une même forme d'onde, la structure du récepteur reste semblable :**

**- le 1° étage est toujours le filtre adapté à l'impulsion**

**- le 2° étage est un comparateur qui comporte plusieurs seuils**

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \log_2(M) \frac{3}{M^2 - 1}}\right)$$

**Pour garantir une même probabilité d'erreur, la puissance moyenne requise est augmentée par rapport au cas binaire, et ce d'autant que M est grand**

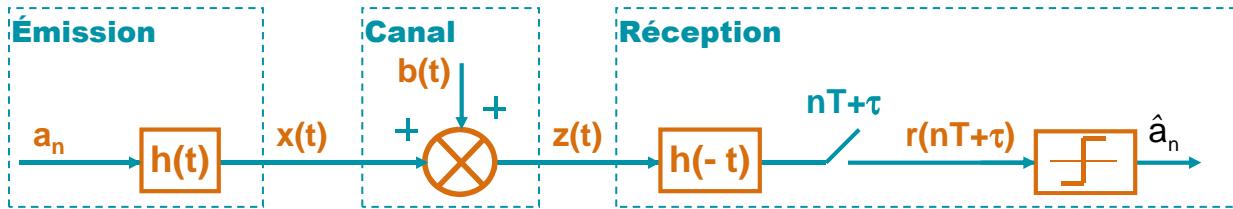


**Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330**

28

# Conclusion

## Chaîne de transmission en bande de base



**Modulation numérique décrite par le signal réel**  $x(t) = \sum a_k h(t - kT)$

**Canal non distordant, à bande illimitée, soumis à un bruit **b(t)** additif, blanc, gaussien, de densité spectrale de puissance **N<sub>0</sub>/2****

**Signal reçu :**  $z(t) = x(t) + n(t)$

**Réception optimal : Filtre adapté et seuil optimal**

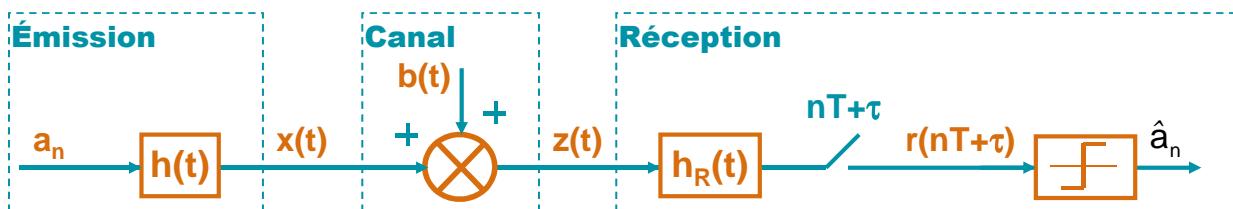


Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

29

# Présentation de la problématique

## Approche de la modélisation et hypothèses d'étude



**Modulation numérique décrite par x(t) :**  $x(t) = \sum_k a_k h(t - kT)$

**Signal réel en bande de base**

**Signal reçu [ Information + Bruit ] :**  $z(t) = x(t) + b(t)$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

30

## Canal de Nyquist

### Expression de l'observation en sortie du filtre adapté

$$\begin{aligned}
 r(t) &= z(t) * h_R(t) = (x(t) + b(t)) * h_R(t) \\
 &= \sum_k a_k h(t - kT) * h_R(t) + b(t) * h_R(t) \\
 &= \sum_k a_k \int_{-\infty}^{+\infty} h(u - kT) h_R(t - u) du + b(t) * h_R(t) \\
 &= \sum_k a_k \int_{-\infty}^{+\infty} h(u - kT) h^*(u - t + \theta) du + b(t) * h_R(t) \quad / h_R(\tau) = h^*(\theta - \tau) \\
 &= \sum_k a_k \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) h^*(v - (t - \theta - kT)) du + b(t) * h_R(t) \quad / v = u - kT \\
 &= \sum_k a_k p(t - \theta - kT) + b(t) * h_R(t)
 \end{aligned}$$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

31

## Canal de Nyquist

### Expression de la sortie de l'échantillonneur

$$r(t) = \sum_k a_k p(t - \theta - kT) + b(t) * h_R(t)$$

$$\downarrow t = nT + \theta$$

$$r(nT + \theta) = a_n p(0) + \sum_{k \neq n} a_k p((n-k)T) + w$$

- Terme relatif au symbole émis à l'instant  $t = nT$  :  $a_n p(0)$

- Terme relatif à tous les autres symboles :  $\sum_{k \neq n} a_k p((n-k)T)$   
→ Interférences entre symboles (ISE) (ou ISI, Inter Symbol Interferences)

- Terme relatif au bruit additif sur le canal :  $w$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

32

## Canal de Nyquist (2)

**Comment effectuer la décision malgré le terme d'ISE ?**

### PLUSIEURS SOLUTIONS POSSIBLES

→ **Algorithme de décision optimale : algorithme de Viterbi**

Décision réalisée en recherchant la séquence de symboles la plus vraisemblable ; à l'émission, utilisation d'un code convolutif

Non traités ici

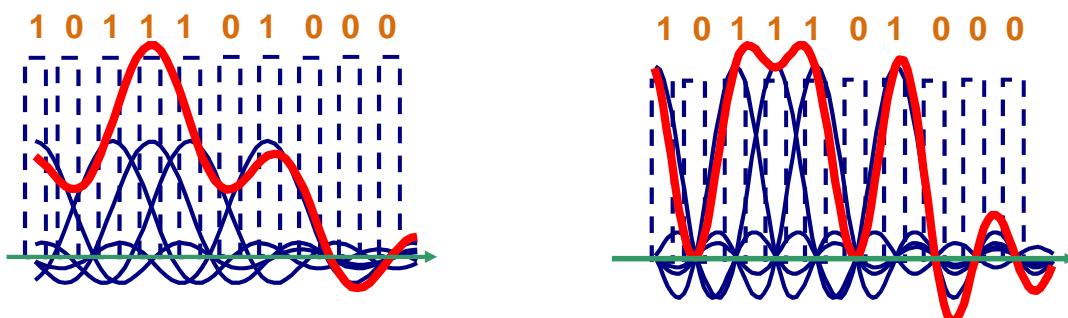
→ **Algorithme de déconvolution : permet de réduire l'ISE et de rendre possible la décision symbole par symbole**

→ **Canal de Nyquist : canal tel que ISE nul !**

A noter : en raison du terme ISE, décision optimale symbole par symbole impossible !



## Critère de Nyquist



**Si les échantillons sont statistiquement indépendants et si  $p(mT) = 0, \forall m \neq 0$ , alors**

→ ISE nul

→ Échantillon prélevé à  $t = nT + \theta$  ne dépend statistiquement QUE du signal émis à l'instant  $t = nT$

**Remarque :** condition toujours vérifiée si  $h(t)$  de durée finie et inférieure à  $T$



# Condition de Nyquist

## Domaine temporel et domaine fréquentiel

**Condition de Nyquist :**  $p(mT) = 0, \forall m \neq 0$

/ Condition sur la forme temporelle du signal  $p(t)$

**Condition équivalente dans l'espace des fréquences :**

$$\sum_k P\left(f - \frac{k}{T}\right) = Tp(0) = \text{constante}$$

### Démonstration

Soit le signal échantillonné de la fonction  $p(t)$  :  $p_e(t) = p(t) \sum_m \delta(t - mT)$

$$TF\left[p(t) \sum_m \delta(t - mT)\right] = P(f) * \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$\Leftrightarrow TF\left[\sum_m p(mT) \delta(t - mT)\right] = \frac{1}{T} \sum_k P\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$\Leftrightarrow TF[p(0) \delta(t)] = \frac{1}{T} \sum_k P\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$\Leftrightarrow p(0) = \frac{1}{T} \sum_k P\left(f - \frac{k}{T}\right)$$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

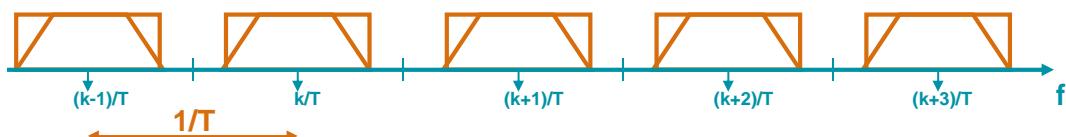
35

## Conséquence de la condition de Nyquist

$$\sum_k P\left(f - \frac{k}{T}\right) = Tp(0) = \text{constante}$$

« La somme des  $P(f)$  périodiques de période  $k/T$  est égale à une constante »

⇒ Si  $P(f)$  occupe une bande inférieure à  $1/T$  : condition irréalisable



Cas limite :  $P(f)$  rectangulaire de largeur  $1/T$   $P(f) = Trect_{1/T}(f / T)$

→ Bande occupée ( $1/2T$ ) Hz (fréquences positives)

En pratique pour une transmission en bande de base, cela traduit que pour transmettre sans ISI un signal de rapidité de modulation  $R = 1/T$ , il faut un canal de bande  $B$  supérieure à  $1/2T = R/2$   $\Rightarrow B \geq R/2 \Leftrightarrow R \leq 2B$

**1/2T est appelée bande de Nyquist**



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

36

## Impulsions en cosinus surélevé (raised-cosine)

**Cas limite (cas théorique) : spectre rectangulaire de largeur 1/T**

- Discontinuités dans le spectre
- Tolérance nulle de l'imprécision sur l'instant d'échantillonnage

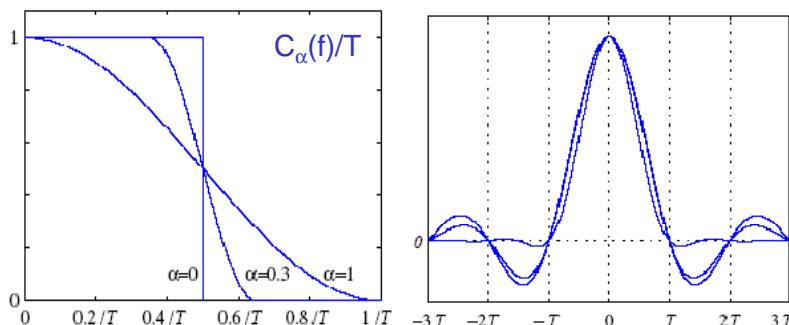
**Cas pratique : spectre de largeur supérieure à 1/T**

- Filtre en cosinus surélevé

$$C_\alpha(f) = \begin{cases} T & \text{pour } |f| < \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2} \left(1 - \sin\left(\frac{\pi T}{\alpha} (f - 1/2T)\right)\right) & \text{pour } \frac{1-\alpha}{2T} < |f| < \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{pour } |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases}$$

**Bandes occupées pour transmettre**

$$B = \frac{1+\alpha}{2T} = (1+\alpha) \frac{D_b}{2 \log_2(M)}$$



$\alpha \in [0, 1]$   
facteur de débordement ou coefficient d'arrondi (roll-off)

Plus  $\alpha$  grand,  
- plus bande B grande  
- moins l'amplitude des lobes secondaires est grande



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

37

## Répartition du filtrage

### Filtre en racine carrée de Nyquist

**Nécessité de répartir à part égale l'impulsion en cosinus surélevé entre émission et réception**

$$\begin{cases} H_R(f) = H^*(f) & \text{(Filtre adapté)} \\ |H(f)| = |H_R(f)| = \sqrt{C_\alpha(f)} & \text{(afin que : } H(f)H_R(f) = C_\alpha(f)) \end{cases}$$

**Fonction telle que :**  $g_\alpha(t) * g_\alpha(-t) = c_\alpha(t) = \overline{TF}[C_\alpha(f)]$

$$g_\alpha(t) = \frac{4\alpha}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos\left((1+\alpha)\frac{\pi t}{T}\right) + \frac{T}{4\alpha t} \sin\left((1-\alpha)\frac{\pi t}{T}\right)}{1 - 16\alpha^2 t^2 / T^2}$$

$$g_\alpha(T/4\alpha) = -\frac{1}{2} \cos(\gamma) + \frac{\pi}{4} \sin(\gamma), \quad \gamma = \frac{\pi(1+\alpha)}{4\alpha}$$



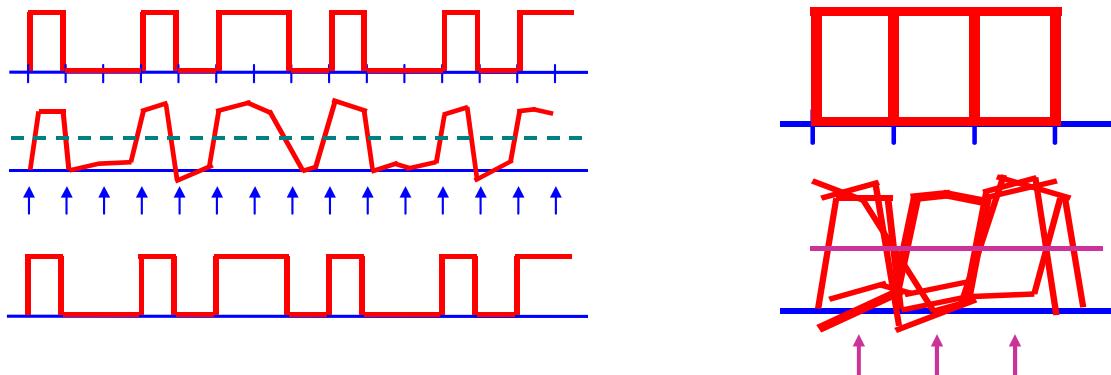
Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

38

# Diagramme de l'œil (eye pattern)

## Présentation

**Moyen pratique pour « évaluer » la situation de non interférence entre symboles dans une transmission**



Observation largement utilisée en pratique à l'aide d'un oscilloscope en se synchronisant sur le temps de durée d'un symbole

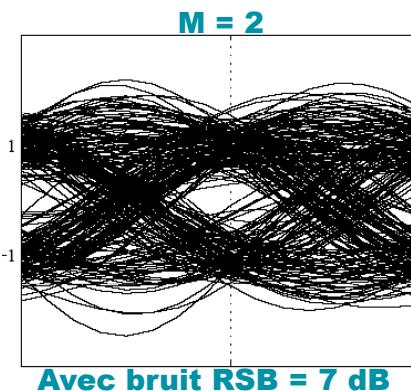
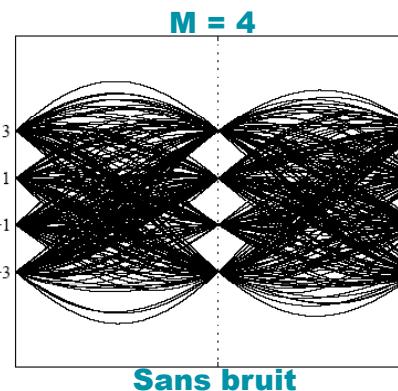
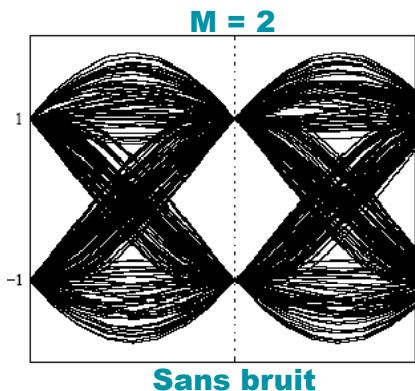


Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

39

# Diagramme de l'œil

Illustrations pour une impulsion  $p(t)$  en cosinus surélevé



Si critère de Nyquist vérifié :

- Trajectoires concourantes aux instants  $kT$
- Œil très ouvert verticalement à ces instants

→ Décision symbole meilleure là où l'œil est le plus ouvert verticalement

→ Malgré le bruit, niveaux discernables

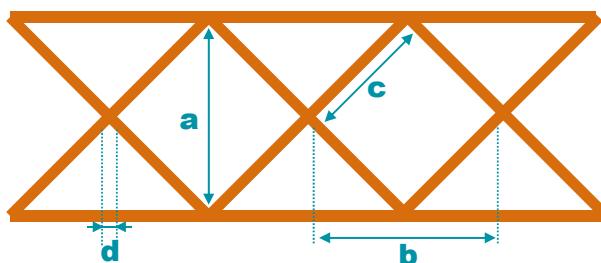


Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

40

## Diagramme de l'œil

### Précisions des indications recueillies



#### a) Ouverture verticale : immunité au bruit

Si présence d'ISI faible, nécessité d'échantillonner  $r(t)$  aux instants où l'œil a une ouverture maximale

#### b) Ouverture horizontale : immunité au déphasage de l'horloge

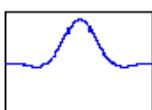
Plus l'œil est ouvert en largeur, plus les lobes secondaires de la réponse en temps sont faibles ( $\alpha$  des fonctions en cosinus surélevé grand)

#### c) Pente : immunité à la gigue d'horloge

#### d) Fluctuation du point de passage par zéro : amplitude de gigue



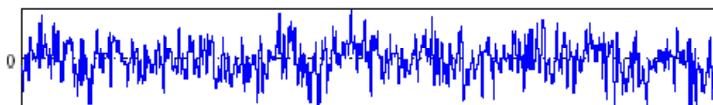
## Illustration des signaux et des traitements



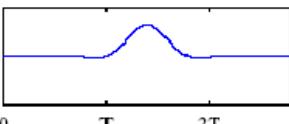
$h(t)$  : impulsion combinant le filtre d'émission et le filtre modélisant le canal



$x(t)$  : signal émis

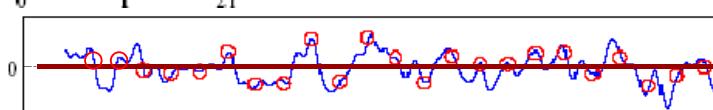


$z(t) = x(t) + b(t)$  : signal bruité reçu



$p(t) = h(t) * h_R(t)$  : impulsion combinant le filtre  $h(t)$  et le filtre de réception

Typiquement :  $h_R(t) = h(-t)$  / filtre adapté (matched filter)



Signal en sortie du filtre et échantillons prélevés à la cadence  $T$

1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 0 1 0

Erreurs liées à la présence de bruit

Décision symbole par symbole en comparant les échantillons au niveau 0



## Distorsion maximale d'ISE

Moyen quantitatif de juger du niveau d'ISE

**Distorsion maximale d'ISE (cas général d'une modulation M-aire)**

$$D_{max} = (M - 1) \frac{\sum_k |p_k| - |p_{max}|}{|p_{max}|}, \text{ avec } p_{max} = \max_k (p_k)$$

**Si  $D_{max} \ll 1$  : décision symbole par symbole possible (œil très ouvert verticalement)**

**Si  $D_{max} \approx 1$  ou  $> 1$  : décision optimale symbole par symbole impossible**

**Solution possible :** prise en compte de l'ensemble des observations pour détecter la séquence la plus probable (algorithme de Viterbi)



## Taux d'erreur par éléments binaires (TEB)

### Définition

$$BER = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{b \in \mathcal{A}} \tau(a, b) P\{\hat{a}_n = b | a_n = a\} \quad (\text{BER : Bit Error Rate})$$

$\tau(a,b)$  : taux de bits erronés entre les deux mots-code  $a$  et  $b$

$\hat{a}_n$  : symbole décidé à l'instant  $n$

$a_n$  : symbole émis à l'instant  $n$

→ Calcul très compliqué dans le cas général

→ En pratique, détermination d'une formule approchée avec les hypothèses :

- Rapport signal sur bruit suffisamment grand
- Codage de Gray utilisé



# Taux d'erreur par éléments binaires

## Formule approchée

### Exemple M = 8 : BER conditionnellement à $a_n = +3$

Différentes possibilités de détection	Suite d'éléments binaires décidée	Probabilité d'une telle décision	Taux d'éléments binaires erronés
$b \in \mathcal{A}$	Élément binaire	$P\{\hat{a}_n = b   a_n = 3\}$	$\tau(b, +3)$
-7	111	$\approx 0$	3/3
-5	110	$\approx 0$	2/3
-3	100	$\approx 0$	1/3
-1	101	$\approx 0$	2/3
+1	001	$\approx P_e/2$	1/3
+3	000	$= 1 - P_e$	0/3
+5	010	$\approx P_e/2$	1/3
+7	011	$\approx 0$	2/3

**Hypothèse :** rapport signal sur bruit supposé grand  
**⇒ Si erreur, seuls symboles juxtaposés possibles**

$$BER = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{b \in \mathcal{A}} \tau(a, b) P\{\hat{a}_n = b | a_n = a\}$$

**Par définition :**

$$BER_3 = 0 \times 3/3 + 0 \times 2/3 + \dots + P_e/2 \times 1/3 + (1 - P_e) \times 0/3 + P_e/2 \times 1/3 + 0 \times 2/3$$

$$\Rightarrow BER_3 = P_e/3$$

**Généralisation**  $BER = \frac{P_e}{\log_2(M)}$

**En supposant les symboles équiprobables :  $BER = P_e/3$**

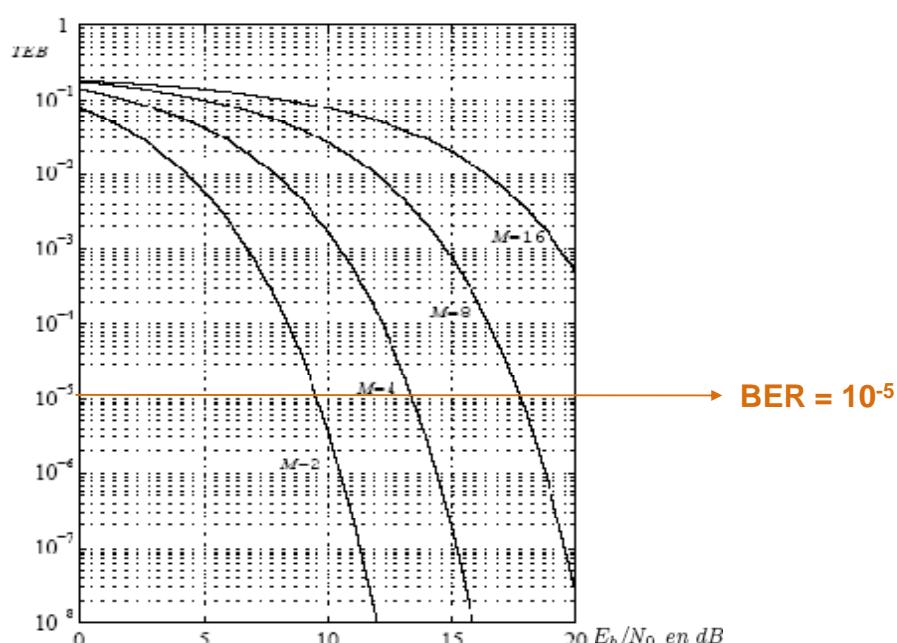


Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

45

# Taux d'erreur par éléments binaires

## Illustration du BER en fonction du rapport signal sur bruit pour différents valeurs de M



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

46

# Efficacité spectrale / rapport signal sur bruit

## Présentation

**Efficacité spectrale en M-aire sur le canal de Nyquist et avec une impulsion en cosinus sur-élévé**

$$\eta = \frac{D_b}{B} = 2 \frac{\log_2(M)}{1+\alpha} \quad / \quad B = \frac{1+\alpha}{2T} = (1+\alpha) \frac{D_b}{2 \log_2(M)}$$

**Cas le plus favorable  $\alpha = 0$  :**  $\eta = 2 \log_2(M)$

M	2	4	8	16
$\eta$ [bits/s/Hz]	2	4	6	8
$E_b/N_0$ [dB]	9,6	13,6	18	22,9
$\Delta$ [dB]	0	4	8,4	13,3

Remarque : en regard des courbes précédentes qui sont quasiment parallèles, on peut admettre que ces écarts restent pertinents pour les faibles valeurs de BER.

$E_b/N_0$  : RSB en M-aire pour BER =  $10^{-5}$   
 $\Delta$  : augmentation du RSB pour compenser en terme de BER  
l'augmentation de M par rapport à M = 2



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

47

# Efficacité spectrale / rapport signal sur bruit

## Limite fondamentale de Shannon

C [bit/s] : capacité du canal

B [Hz] : bande du canal

RSB : rapport signal sur bruit en puissance

$E_b$  [J/bit] : quantité d'énergie par bit

$N_0/2$  [W/Hz] : dsp du bruit blanc additif

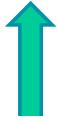
$D_b$  [bit/s] : débit binaire

$P_s = E_b D_b$  [W] : puissance moyenne du signal

$P_b = N_0 B$  [W] : puissance du bruit dans la bande B

$RSB = P_s/P_b = \eta \rho$

$$C = B \log_2(1 + RSB)$$



→ Rapport signal sur bruit :  $\rho = E_b / N_0$

→ Efficacité spectrale :  $\eta = D_b / B$



$$\eta = \log_2(1 + \eta \rho) \Leftrightarrow \rho = \frac{2^\eta - 1}{\eta}$$

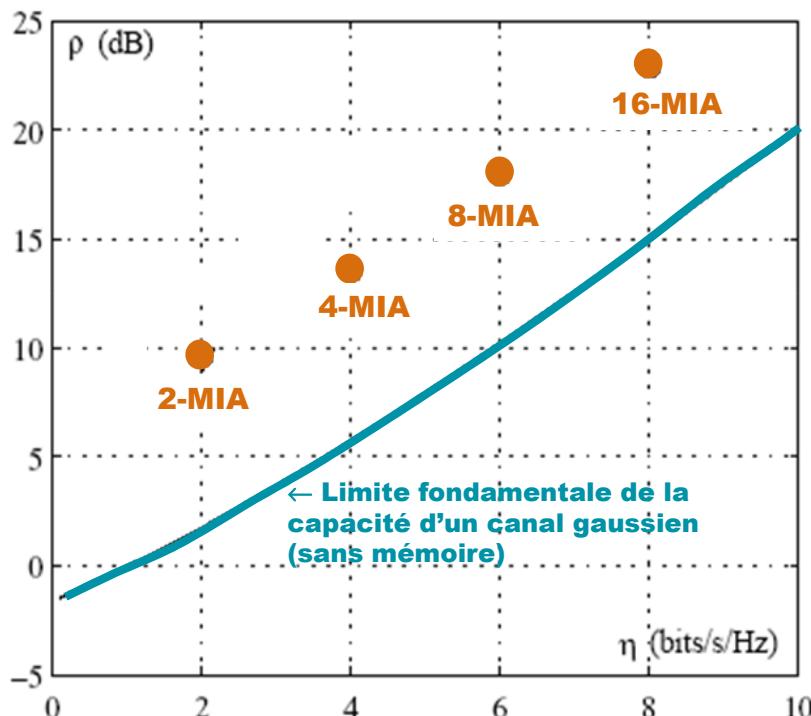


Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

48

## Efficacité spectrale / rapport signal sur bruit (2)

### Illustration pour les modulations M-aire



Existence d'un système de communication de probabilité d'erreur aussi faible que désiré pour les points situés au dessus de la courbe

## Pour aller plus loin ...

### Egalisation de canal

**Canal égalisé si la réponse globale vérifie le critère de Nyquist**

**Solution très répandue**

→ **Hypothèse : canal de transmission de gain indépendant de la fréquence dans la bande passante et de retard pur**

⇒ Filtres demi-Nyquist de même gain en émission et en réception

**Si canal inconnu voir variable dans le temps**

→ **Insertion d'un filtre supplémentaire appelé égaliseur pour corriger la distorsion linéaire introduite par le canal**

- Filtre placé après l'échantillonneur
- Filtre réalisé sous forme numérique à coefficients constants voir variables
- Filtre dit adaptatif (si coefficients variables)
- Utilisé dans les communications numériques avec les mobiles pour lesquelles le canal radio est fluctuant et à trajets multiples

## Pour aller plus loin ...

### Synchronisation

**Nécessité de récupérer à partir du signal reçu le rythme de transmission utile en réception pour échantillonner**

#### Solutions

- Extraire, par filtrage, l'information de rythme disponible dans le spectre du signal (par exemple présence d'une raie à la fréquence  $1/T$ )
- Si le signal sans raie à la fréquence  $1/T$ , construction d'un autre signal par traitement non linéaire (« élévation au carré ») qui la fournit
- Utilisation de boucles à verrouillage de phase

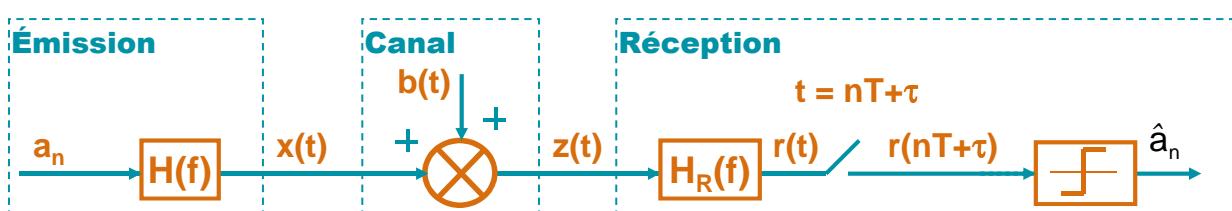
#### Critère

- Gigue (« jitter » en anglais) : fluctuation en fréquence du signal d'horloge par rapport à sa valeur nominale



## Annexe

**Démonstration que l'observation en sortie du filtre adapté  $Y$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $a_1$  ou  $a_2$**



Le signal réceptionné  $r(nT + \tau)$  s'écrit sous la forme suivante :

$$Y_n = a_{i_n} + w_n, \quad i = 1, 2$$

↓                    ↓

Symbole émis      Bruit filtré



## Annexe

**Démonstration que l'observation en sortie du filtre adapté Y est une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $a_1$  ou  $a_2$**

### 1) Caractéristiques de $\omega(t)$

**b(t) bruit blanc gaussien, centré, SSL, de DSP  $N_0/2$ , indépendant**

$$\omega(t) = b(t) * h_R(t) \quad \text{et} \quad \omega_n = \omega(t) \Big|_{t=nT}$$

→  $\omega(t)$  est une VA gaussienne

/ Opération de filtrage linéaire et caractère gaussien du bruit

→ Caractéristiques de  $\omega(t)$

$$E[\omega(t)] = 0 \quad E[\omega(t)\omega^*(t-\tau)] = \frac{N_0}{2} s_{H_r}(\tau)$$

$$S_\omega(f) = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 \quad E[\|\omega(t)\|^2] = \sigma_\omega^2 = \frac{N_0}{2} s_{H_R}(0)$$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

53

## Annexe

**Démonstration que l'observation en sortie du filtre adapté Y est une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $a_1$  ou  $a_2$**

### 1) Caractéristiques de $\omega(t)$

$\omega_n$  variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\omega^2$  égale à  $(N_0/2) s_{H_R}(0)$  avec  $s_{H_R}(t) = h_R(t) * h_R^*(-t)$

### 2) $a_n$ suite aléatoire iid à valeurs dans $\{a_1, a_2\}$ équiprobables

$$E[a_n] = \sum_{i=1}^2 a_i p(a_i) = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad E[a_n^2] = \sum_{i=1}^2 a_i^2 p(a_i) = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$$

⇒  $Y_n$  variable aléatoire gaussienne de moyenne  $a_1$  ou  $a_2$   
de variance  $\sigma_\omega^2$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330

54

## Annexe

### Démonstration que l'observation en sortie du filtre adapté Y est une variable aléatoire gaussienne de moyenne $a_1$ ou $a_2$

#### Démonstrations concernant les caractéristiques de $\omega(t)$

- $E[\omega(t)] = E[b(t)] \cdot H_R(f=0) = 0 \times cte = 0 \quad \Rightarrow E[\omega(t)] = 0$
- $S_\omega(f) = S_b(f) |H_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 \quad \Rightarrow S_\omega(f) = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2$
- $$\begin{aligned} E[\omega(t)\omega^*(t-\tau)] &= E[(b(t)*h_R(t)) \cdot (b(t)*h_R(t))^*] = \overline{TF}[S_\omega(f)] = R_\omega(\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}} S_\omega(f) e^{2\pi j \tau} df = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_R(f)|^2 e^{2\pi j \tau} df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} S_{H_R}(f) e^{2\pi j \tau} df \\ &\Rightarrow E[\omega(t)\omega^*(t-\tau)] = \frac{N_0}{2} s_{H_R}(t) \end{aligned}$$



**Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330**

55

# Performances en présence de bruit pour les modulations sur fréquence porteuse

## Une introduction ...

### Plan du chapitre

- 1. Présentation de la problématique
- 2. Étude de la modulation de phase M-PSK
- 3. Bilan général



1. Présentation    2. M-PSK    3. Bilan

### Éléments de modélisation

#### Expression des signaux : modulation sur fréquence porteuse

**Signal numérique transmis**     $x(t) = R_e[x_b(t)\exp(2\pi f_0 t)]$

**Enveloppe complexe**     $x_b(t) = \sum_k a_k h(t - kT)$

$h(t)$  impulsion, dans le cas général, complexe  
 $a_k$  suite de symboles complexes pris dans un alphabet de  $M$  symboles

**Signal reçu : Information + Bruit**     $z(t) = x(t) + n(t)$

Bruit  $n(t)$  additif, gaussien, centré, de dsp  $N_0/2$  dans la bande utile

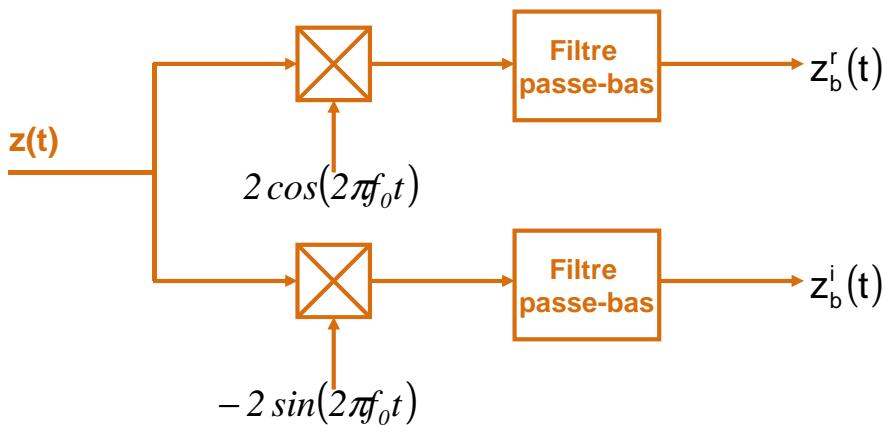
**Enveloppe complexe**     $z_b(t) = x_b(t) + n_b(t), \quad n_b(t) = n_b^r(t) + jn_b^i(t)$

Composantes du bruit en phase et en quadrature : PA gaussiens, centrés, indépendants, ayant même dsp  $N_0$  dans la bande utile de  $x_b(t)$



## Éléments de modélisation

### Rappel : la démodulation synchrone



Minimum de probabilité d'erreur obtenu en effectuant la décision sur les échantillons complexes pris à la cadence  $T$  en sortie du filtre de réception, filtre adapté (idem transmission en bande de base)

Filtre adapté : filtre passe-bas plus étroit (en général dans les cas pratiques) que le filtre du détecteur synchrone et qui peut donc être omis !



Performances en présence de bruit pour les modulations sur fréquence porteuse – EE330 – 3

## Caractéristiques des signaux

### Enveloppe complexe du signal M-PSK par rapport à la fréquence $f_0$

$$x_b(t) = \sum_k a_k h(t - kT) \quad \left| \begin{array}{l} h(t) \text{ impulsion réelle} \\ \text{alphabet de } M = 2^m \text{ points} \\ a_n = \exp(j\phi_n) \text{ où } \phi_n \in \{0, 2\pi/M, \dots, 2\pi(M-1)/M\} \end{array} \right.$$

Hypothèse :  $\phi_n$  suite de VA indépendantes et réparties uniformément

$$\begin{aligned} P\{a_n = \exp(2\pi jk / M)\} &= 1/M \quad \rightarrow E[a_n] = 0 \\ &\rightarrow E[a_n a_k^*] = \delta(n - k) \end{aligned}$$

$$E[a_n] = E[\exp(j\phi_n)] = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \exp\left(\frac{2\pi j}{M} n\right) = \frac{1}{M} \times 0 = 0$$

$$\forall n \neq k, E[a_n a_k^*] = E[a_n] E[a_k^*] = 0$$

$$\text{pour } n = k, E[a_n a_k^*] = E[|a_n|^2] = E\left[\left|\exp\left(\frac{2\pi j}{M} n\right)\right|^2\right] = 1$$



Performances en présence de bruit pour les modulations sur fréquence porteuse – EE330 – 4

# Annulation de l'ISE

## Critère de Nyquist

### Contraintes sur le filtre en bande base et l'impulsion p(t)

- Filtre en bande de base  $h(t)$  choisi tel que l'impulsion  $p(t) = h(t) * h(-t)$
- vérifie le critère de Nyquist :  $p(mT) = 0, \forall m \neq 0$
- Typiquement  $p(t)$  fonction en cosinus sur-élevé de bande  $(1+\alpha)/2T$  où  $\alpha$  le roll-off dépend de la bande du canal

### Modélisation du canal de transmission

- Filtre passe-bande idéal de bande  $B$  autour de  $f_0$
- Filtre équivalent en bande de base : passe-bas idéal de bande  $(-B/2, B/2)$

### Conditions pour n'avoir pas de distorsion de l'impulsion

$$\frac{1}{2T}(1+\alpha) = \frac{B}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{B}{R} - 1 \Rightarrow B > R \quad \text{Condition nécessaire à l'absence d'interférence entre symboles}$$

**Par comparaison à une transmission en bande de base, la bande nécessaire est deux fois plus grande**



# Réception dans le cas sans ISE

## Modélisation

### Échantillon obtenu en sortie du filtre de réception $h_R(t)$

- Échantillon complexe dépendant que d'un seul symbole

$$\begin{cases} Y_n^r = p(0)\cos(\phi_n) + w_n^r / p(t) \text{ supposé réel} \\ Y_n^i = p(0)\sin(\phi_n) + w_n^i \end{cases}$$

où  $\phi_n$  phase associée au  $n^{\text{ième}}$  symbole et où  $p(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt$

$w_n^r$  et  $w_n^i$  VA gaussiennes centrées indépendantes de même variance :

$$\sigma^2 = N_o \int_{-\infty}^{+\infty} |h_R(t)|^2 dt = N_o p(0)$$

→ Conditionnellement à l'émission du symbole  $\phi$ , l'observation  $(Y_n^r, Y_n^i)$  est un vecteur aléatoire gaussien de dimension 2, de moyenne  $p(0)\cos(\phi), p(0)\sin(\phi)$ , de matrice de covariance  $\sigma^2 I_2$  et de densité de probabilité

$$p_{Y_n^r Y_n^i | \phi}(y_r, y_i) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} ((y_r - p(0)\cos(\phi))^2 + (y_i - p(0)\sin(\phi))^2) \right\}$$



## Réception dans le cas sans ISE (2)

### Détection symbole par symbole (possible)

→ Tester l'appartenance de  $Z_n = (Y_n^r, Y_n^i)$  à l'un des M secteurs angulaires centrés sur les points de la constellation

→ Soit  $\Lambda_k$  le secteur associé au symbole  $A \exp(2\pi j k / M)$

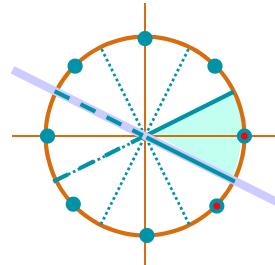
$$P_e = 1 - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M P[Z_n \in \Lambda_k | \phi_n = 2\pi k / M] \quad / \text{Probabilité d'erreur par symbole}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (1 - P[Z_n \in \Lambda_k | \phi_n = 2\pi k / M])$$

$$P_e = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M P[Z_n \notin \Lambda_k | \phi_n = 2\pi k / M]$$

$$\leq \frac{2}{M} \sum_{k=1}^M P[Z_n \notin D_k | \phi_n = 2\pi k / M]$$

$$= 2P[Z_n \notin D_0 | \phi_n = 0]$$



Approximation qui se justifie pour M grand et RSB grand : la région comptée 2 fois étant de probabilité négligeable

$D_k$  : demi-disque dont le diamètre est la médiatrice entre les points  $M_k$  et  $M_{k-1}$  (points associés respectivement aux phases  $2\pi k / M$  et  $2\pi(k-1) / M$  et qui contient le point de coordonnées  $(p(0)\cos(2\pi k / M), p(0)\sin(2\pi k / M))$ )

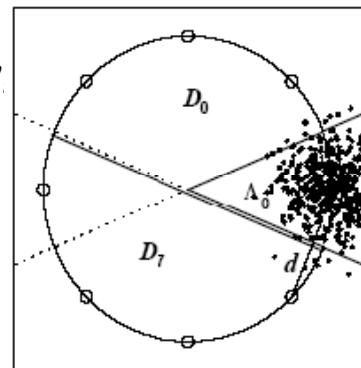
Performances en présence de bruit pour les modulations sur fréquence porteuse – EE330 – 7

## Calcul de la probabilité d'erreur

$$P[Z_n \notin D_0 | \phi_n = 0] = \iint_{D_0} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(y_r - p(0))^2 + y_i^2}{2\sigma^2}\right\} dy_r dy_i$$

$$= Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \quad \text{Non démontré ici (décision statistique)}$$

avec  $\sigma^2 = N_0 p(0)$  et  $d = 2p(0)\sin(\pi / M)$



$d$  : distance euclidienne entre les points  $(p(0), 0)$  et  $(p(0)\cos(2\pi/M), p(0)\sin(2\pi/M))$   
soit  $2p(0)\sin(\pi/M)$

### Énergie par symbole

$$E_s = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2 dt = \frac{p(0)}{2}$$

### Énergie par bit

$$E_b = \frac{p(0)}{2 \log_2(M)}$$

/ Énergie par symbole associé au signal transmis = Moitié de l'énergie par symbole associée à l'enveloppe complexe

Performances en présence de bruit pour les modulations sur fréquence porteuse – EE330 – 8

## Expressions de la probabilité d'erreur et du BER

### Probabilité d'erreur

$$P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{p(0)\sin^2(\pi/M)}{N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\sin^2(\pi/M)\log_2(M)}\right)$$

**BER** (en utilisant un codage de Gray et une RSB suffisamment grand)

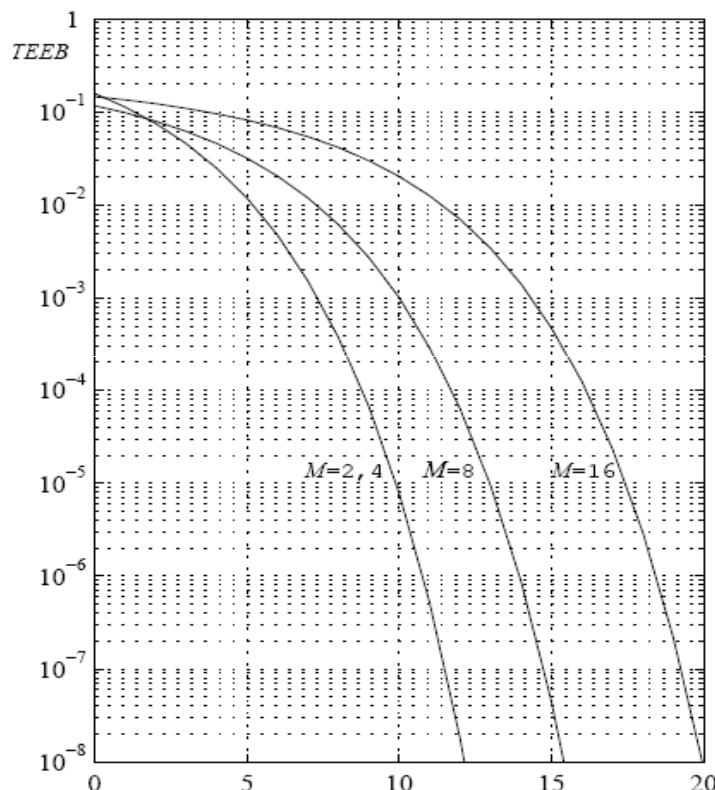
$$BER \approx \frac{2}{\log_2(M)} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\sin^2(\pi/M)\log_2(M)}\right)$$

Pour  $M = 2$  ou  $4$      $BER = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$  / Calcul précis !



Performances en présence de bruit pour les modulations sur fréquence porteuse – EE330 – 9

## BER en fonction du rapport $E_b/N_0$ en dB



Performances en présence de bruit pour les modulations sur fréquence porteuse – EE330 – 10

## Efficacité spectrale / rapport signal sur bruit

**Efficacité spectrale en M-PSK sur le canal de Nyquist et avec une impulsion en cosinus sur-élévé**

$$\eta = \frac{D_b}{B} = \frac{\log_2(M)}{1+\alpha} \quad / \quad \frac{B}{2} = \frac{1+\alpha}{2T} = (1+\alpha) \frac{D_b}{\log_2(M)}$$

**Cas le plus favorable  $\alpha = 0$  :**  $\eta = \log_2(M)$

M	2	4	8	16
$\eta$ [bits/s/Hz]	1	2	3	4
$E_b/N_0$ [dB]	9,6	9,6	13	17,4
$\Delta$ [dB]	0	0	3,4	7,8

$E_b/N_0$  : RSB en M-PSK pour BER =  $10^{-5}$

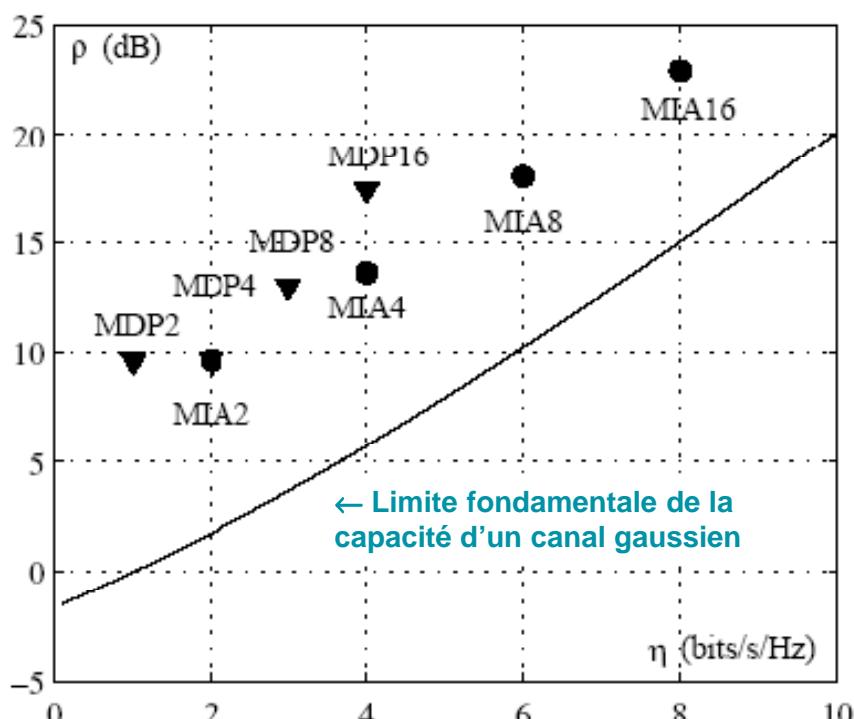
$\Delta$  : augmentation du RSB pour compenser en terme de BER l'augmentation de M par rapport à 2



Performances en présence de bruit pour les modulations sur fréquence porteuse – EE330 – 11

## Efficacité spectrale / rapport signal sur bruit

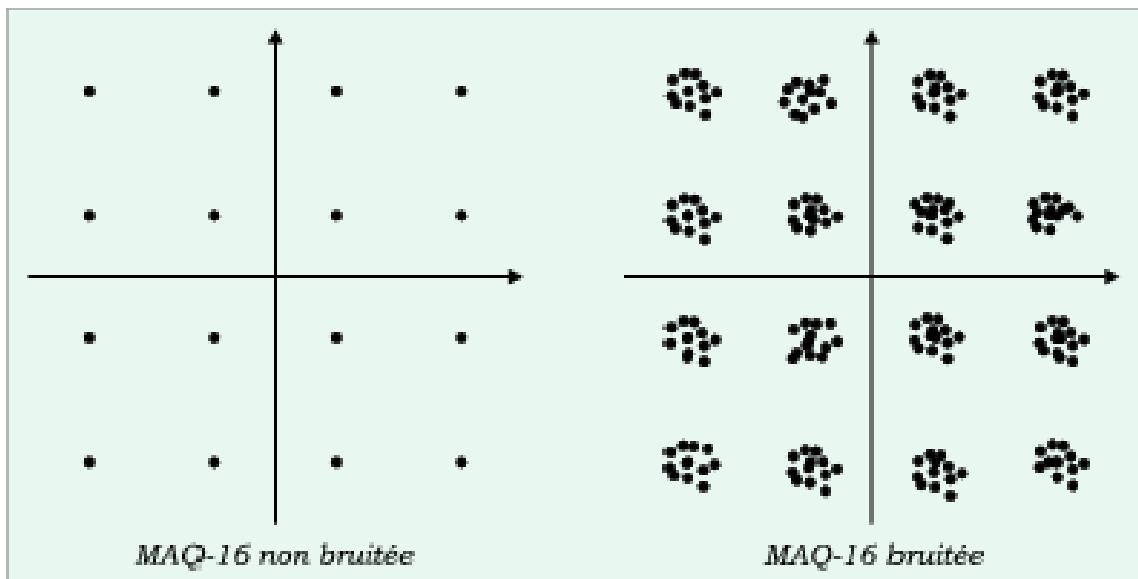
### Comparaison des modulations MDP et MIA



Performances en présence de bruit pour les modulations sur fréquence porteuse – EE330 – 12

## Exemple de constellation

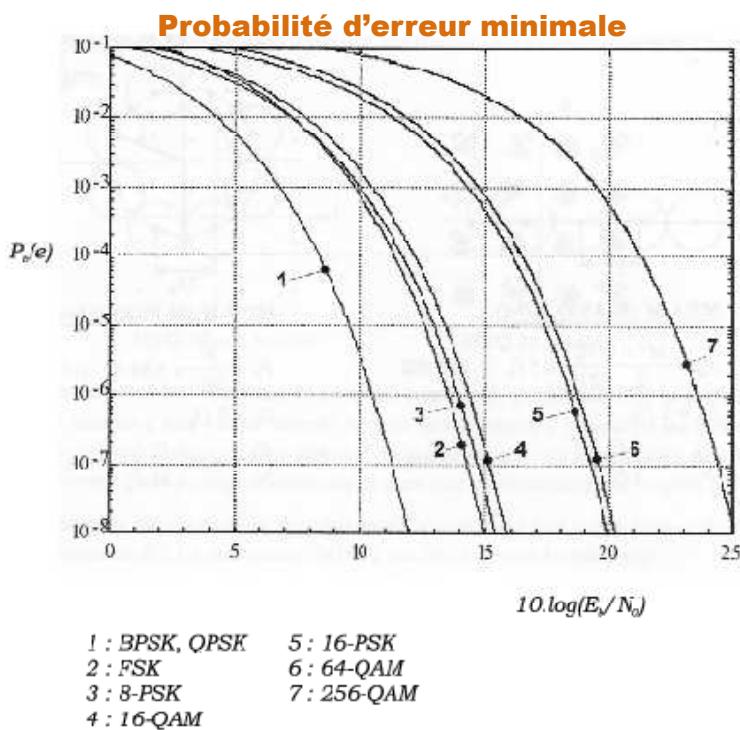
### MAQ sans et avec bruit



Performances en présence de bruit pour les modulations sur fréquence porteuse – EE330 –

13

## Performance des modulations



### Remarques :

1) 4-PSK et 2-PSK même  $P_e$  mais 4-PSK a une efficacité spectrale double  
 → 4-PSK « optimum » très utilisée

2) Échange puissance contre bande passante : pour un débit binaire et une probabilité d'erreur donnés, augmenter  $M$  réduit la bande passante (efficacité spectrale augmente) MAIS exige une augmentation de la puissance (rapport signal sur bruit plus élevé)



Performances en présence de bruit pour les modulations sur fréquence porteuse – EE330 –

14

## Comparaison des procédés de transmission

Modulation	Bande de base	OOK	FSK	PSK-2	PSK - 4
Encombrement spectral (lobe principal)	$\frac{1}{T}$	$\frac{2}{T}$	$\frac{2}{T} + (f_1 - f_0)$	$\frac{2}{T}$	$\frac{1}{T}$
Probabilité d'Erreurs	$Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$	$Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$	$Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$ <small>Calcul approché</small>	$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$	$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$
$E_b / N_0$ (en dB) $P_E = 10^{-8}$	15 dB	15 dB	15 dB (si $m > 0,5$ )	12 dB	12 dB

$10 \log(E_b / N_0)$  Taux d'Erreurs par élément binaire en dB (Bite Error Rate)



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330 –

15

## Comparaison des procédés de transmission

Modulation	PSK – 2 <sup>N</sup>	QAM - 16	DPSK - 2
Encombrement spectral (lobe principal)	$\frac{2}{NT}$	$\frac{1}{2T}$	$\frac{2}{T}$
Probabilité d'Erreurs	$\frac{2}{N} Q\left(\sqrt{\frac{2NE_b}{N_0}} \sin \frac{\pi}{2^N}\right)$	$\frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}\right)$ <small>Méthode statistique complexe</small>	$\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)$
$E_b / N_0$ (en dB) $P_E = 10^{-8}$	15,5 dB 8 états	16 dB	12,5 dB



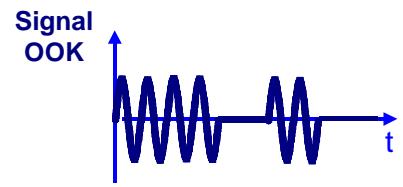
Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330 –

16

## Remarque : calcul de la $P_e$ en OOK

### Transmission sur porteuse en OOK

$$x_i(t) = \begin{cases} x_1(t) = A \cos(2\pi f_0 t), & 0 \leq t \leq T \\ x_2(t) = 0, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{bit "1"} \\ \text{bit "0"} \end{matrix}$$



$$E_d = \int_0^T [x_1(t) - x_2(t)]^2 dt = \int_0^T A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) dt = \frac{A^2 T}{2}$$

$$E_b = \frac{E_d}{2}$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_o}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{4N_o}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_o}}\right)$$



Performances en présence de bruit pour les transmissions en bande de base – EE330 –

Pour aller un peu plus loin ...

## Radiocommunications avancées

### Plan du chapitre

- 1. Multiplexage
- 2. Etalement de spectre
- 3. Canal et propagation
- 4. Techniques de diversité
- 5. Systèmes OFDM
- 6. Exemples d'applications



**Pour aller un peu plus loin ...**

## Radiocommunications avancées

- Multiplexage
- Etalement
- Can. & Prop.
- Diversité
- OFDM
- Applications



# Multiplexage

## Techniques d'accès

*Objectif*

--- PARTAGER DES RESSOURCES COMMUNES ---

**Comment combiner plusieurs signaux pour les transmettre sur un même support ?**

Multiplexage

Etalement

Can. & Prop.

Diversité

OFDM

Applications



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

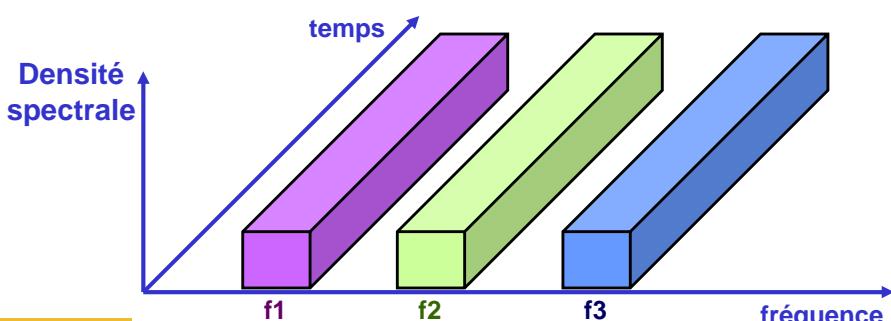
3

# Multiplexage

## Frequency Division Multiple Access - FDMA

### Accès Multiple à Répartition en Fréquences (AMRT)

- Méthode d'accès multiple la plus utilisée et la plus ancienne
- Différentiation des utilisateurs par une différentiation fréquentielle
- Réception en considérant la fréquence associée à l'utilisateur
- En numérique : possibilité de « frequency hopping » (meilleure immunité au bruit)



Multiplexage

Etalement

Can. & Prop.

Diversité

OFDM

Applications



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

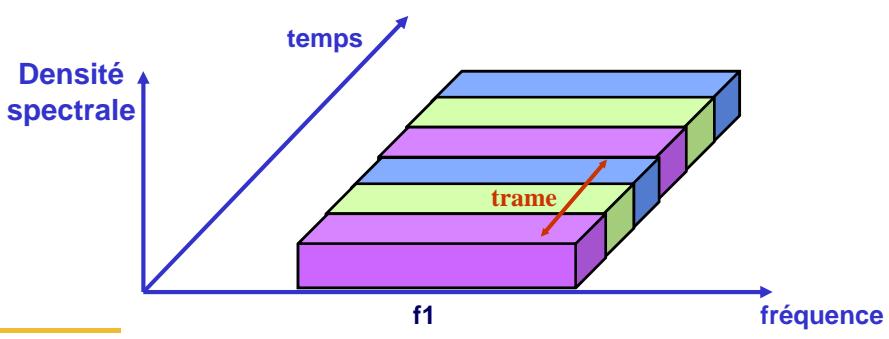
4

# Multiplexage

## Time Division Multiple Access - TDMA

### Accès Multiple à Répartition dans le Temps (AMRT)

- Répartition des ressources dans le temps
- Emission de chaque utilisateur dans un intervalle de temps donné
- Réception en considérant l'intervalle de temps associé
- Utilisation quand forte capacité de transmission (fibres optique)
- Utilisation dans les duplex par multiplexage (téléphones DECT)



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

5

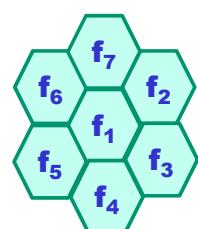
# Multiplexage

## Multiplexage géographique

- Limitation de la portée de l'émission au strict nécessaire, afin de pouvoir utiliser la même fréquence d'émission simultanément à un autre endroit

**Applications :** nouvelles technologies de liaison sans fil  
(Bluetooth, Wi-Fi, DECT ...)

- Les systèmes de téléphone cellulaire et GSM, qui ont besoin d'une portée supérieure, font appel à un système de cellules travaillant chacune sur un nombre restreint de fréquences. Pour éviter les interférences entre cellules voisines, il est nécessaire de disposer d'au moins 7 fréquences distinctes, afin que chaque cellule ait une fréquence différente de ses 6 plus proches voisins.



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

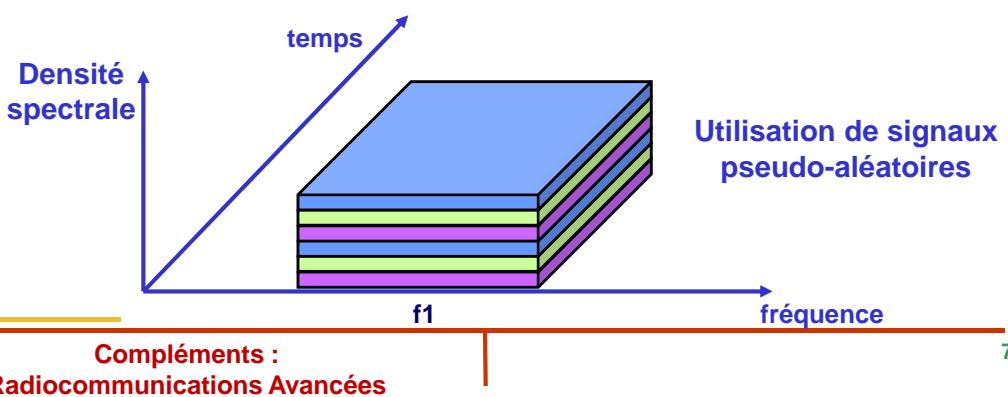
6

# Multiplexage

## Code Division Multiple Access - CDMA

### Accès Multiple à Répartition par les Codes (AMRC)

- Méthode récente
- Différenciation par un code orthogonal attribué au début de la communication à chaque utilisateur
- Réception par multiplication du signal reçu par le code associé
- Application : système de positionnement par satellite GPS



7

# Etalement de spectre – Spread Spectrum

## Systèmes à spectre étalé

### Quelle motivation historique ?

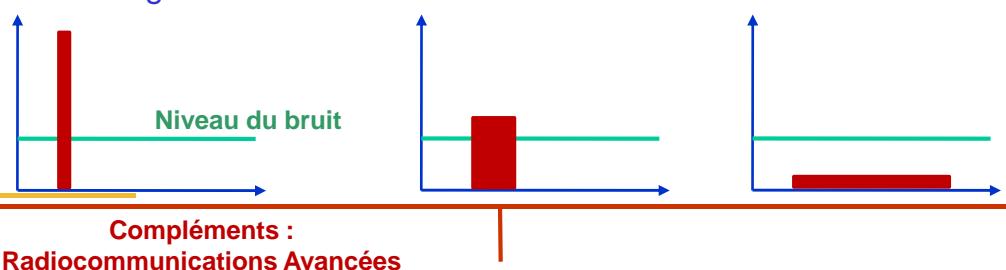
- Résister aux efforts ennemis pour brouiller le signal
- Cacher la communication elle-même

### Application aujourd'hui

- Partager une bande de fréquence par plusieurs utilisateurs (accès multiple !)

### Principe général

- Transmission du signal sur une bande passante considérablement plus large que l'ensemble des fréquences composant le signal original
  - diminue le risque d'interférences avec d'autres signaux reçus tout en garantissant une certaine confidentialité



8

# Etalement de spectre – Spread Spectrum

## Systèmes à spectre étalé

### Plusieurs techniques

#### Séquence directe (Direct Sequence) - DS

Le signal binaire à émettre est modulé par un autre signal binaire (le code chip) avec un débit plus élevé. La largeur du spectre correspond alors à cette modulation

#### Saut de fréquence (Frequency Hopping) - FH

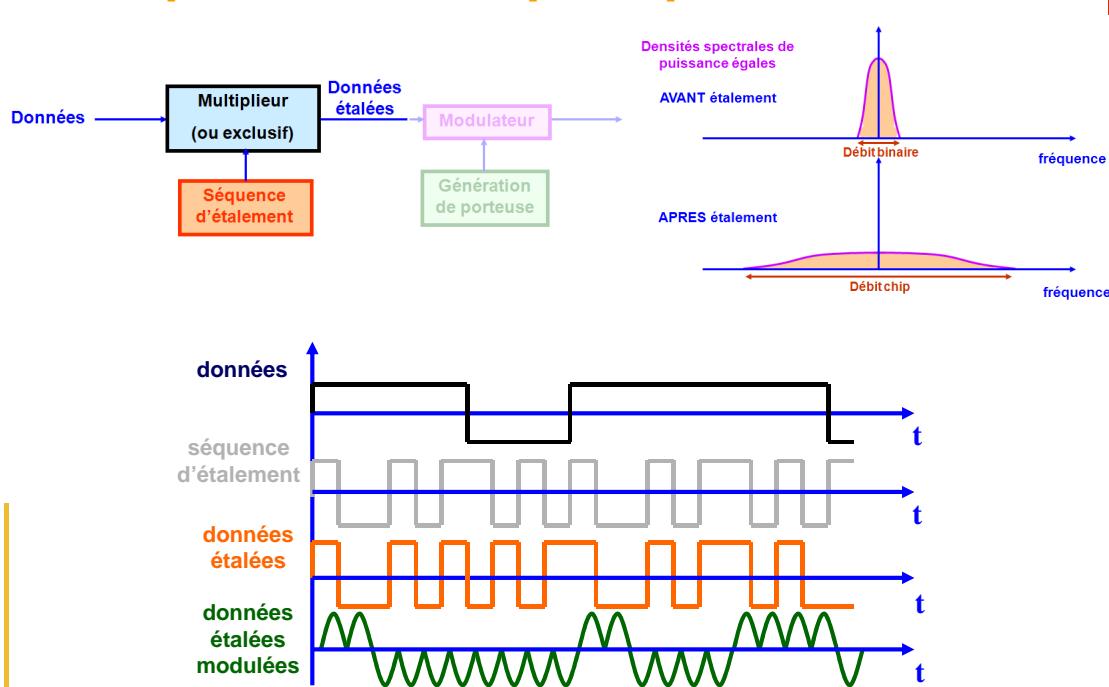
Le signal est émis autour d'une série de porteuses choisies aléatoirement suivant une séquence pilotée par un code

Compléments :  
Radiocommunications Avancées

9

# Etalement de spectre

## Principe de l'étalement par séquence directe DS-SS



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

10

## Etalement de spectre

### Principe de l'étalement par séquence directe DS-SS

Multiplexage

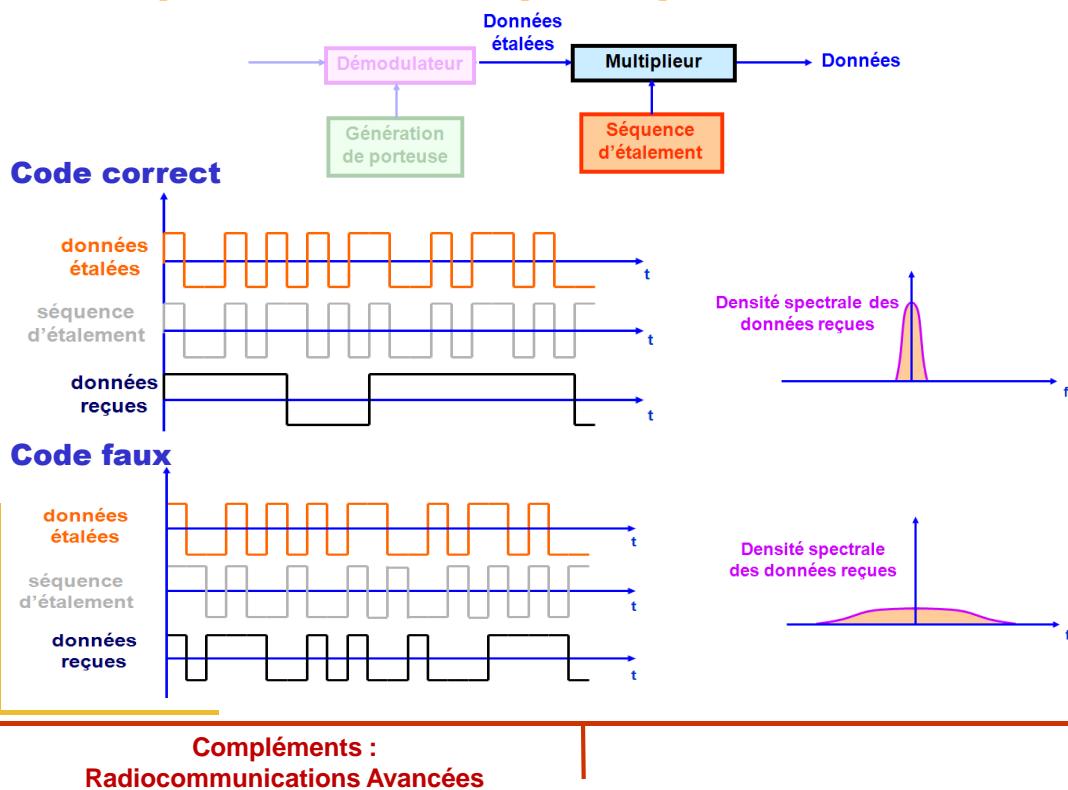
Etalement

Can. & Prop.

Diversité

OFDM

Applications



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

11

Multiplexage

Etalement

Can. & Prop.

Diversité

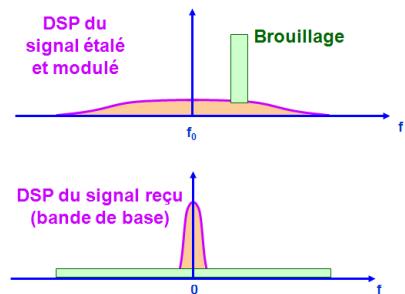
OFDM

Applications

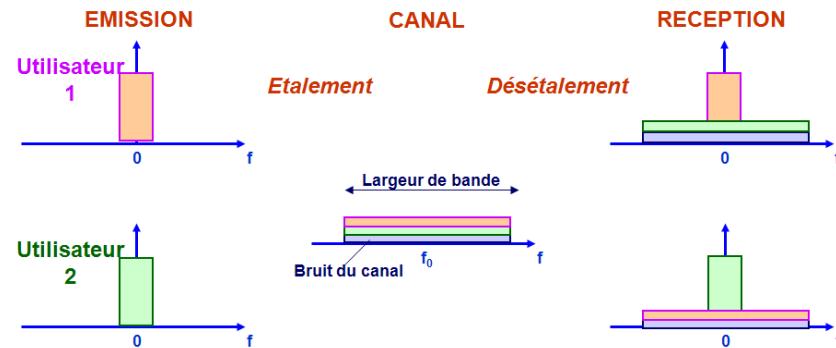
## Etalement de spectre

### Avantages du DS-SS

- Robustesse face aux brouilleurs étalés en réception



- Accès multiple



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

12

## Etalement de spectre

### Principe de l'étalement par saut de fréquence HS-SS

Multiplexage

Etalement

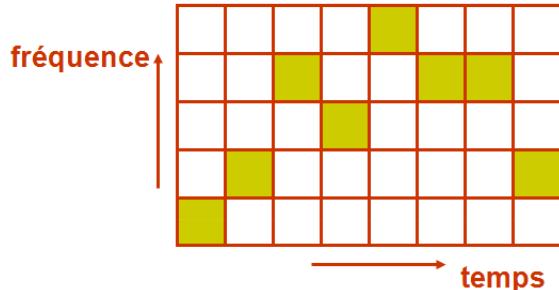
Can. & Prop.

Diversité

OFDM

Applications

**Changement périodique et « pseudo-aléatoire » de la fréquence porteuse du signal modulé**



- Technique issue du milieu militaire
- Changement de fréquence porteuse toutes les 400ms
- Fait parti du standard IEEE 802.11



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

13

## Canal et propagation

### Transmission par ondes radioélectriques

Multiplexage

Etalement

Can. & Prop.

Diversité

OFDM

Applications

- Propagation libre ou dirigée
- Bande passante limitée par l'encombrement des fréquences (ressource naturelle de plus en plus rare !)
- Atténuation faible et très variable
- Sensibilité forte à la diaphonie et aux brouillages
- Confidentialité nulle (sauf si cryptage)
- Coût du support nul et coût des interfaces assez faible
- Transmission d'énergie (télé-alimentation) impossible



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

14

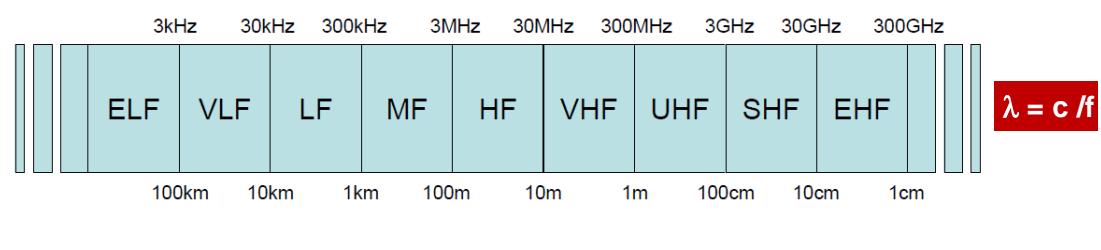
# Canal et propagation

## Occupation spectrale

### Choix d'une bande de fréquence selon :

- Distance de couverture souhaitée
- Débit nécessaire
- Mode de propagation privilégiée dans le canal
- Congestion du spectre

Affectation des fréquences par l'Agence Nationale des Fréquences (<http://www.anfr.fr>)

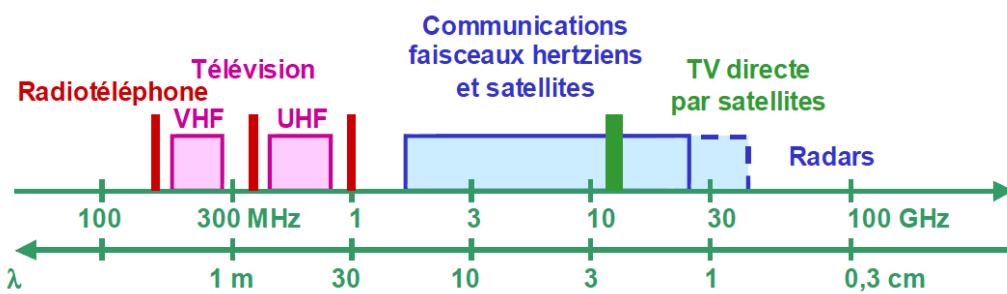
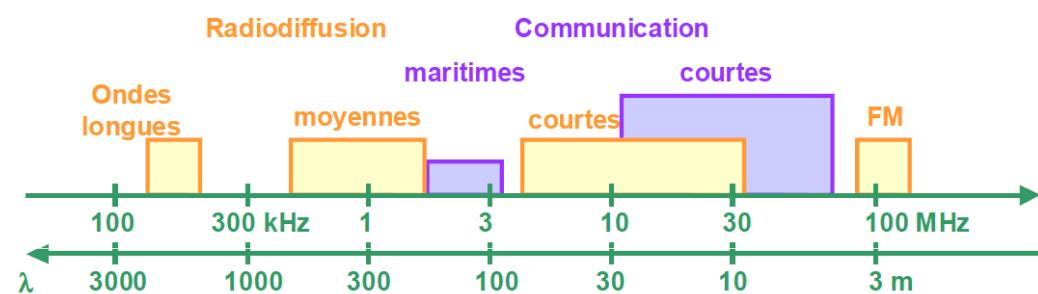


Compléments :  
Radiocommunications Avancées

15

# Canal et propagation

## Allocation des bandes de fréquences



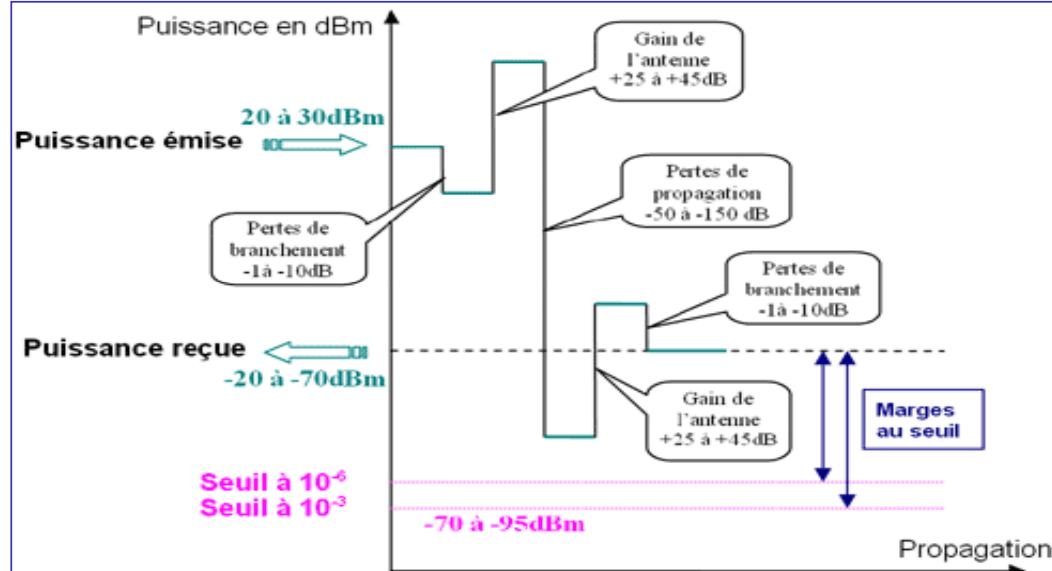
Compléments :  
Radiocommunications Avancées

16

# Canal et propagation

## Bilan de liaison « classique »

- Multiplexage
- Etalement
- Can. & Prop.**
- Diversité
- OFDM
- Applications



Autres effets dont il faut tenir compte ?



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

17

# Canal et propagation

## Propagation d'un signal sinusoïdal

- Multiplexage
- Etalement
- Can. & Prop.**
- Diversité
- OFDM
- Applications

### Emission d'un signal sinusoïdal

$$e(t) = E \cos(\omega_e t)$$

### En réception

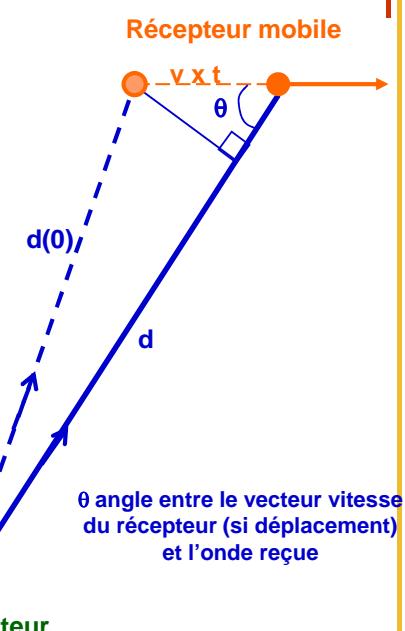
#### → Atténuation du signal

Amplitude multipliée par un facteur en  $\exp(-\alpha d)$  fonction du milieu (ici caractérisé par  $\alpha$ ) et de la distance  $d$  entre l'émetteur et le récepteur

#### → Retard de l'onde reçue

Retard de  $d/c$  avec  $c$  vitesse de l'onde et

$$d \approx d(0) + (v \times t) \cos \theta \quad (\text{distance à l'origine} + \text{déplacement du récepteur})$$



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

18

# Canal et propagation

## Propagation d'un signal sinusoïdal

### Expression mathématique du signal reçu

$$r(t) = E \exp(-\alpha d) \cos[\omega_e(t - d/c)] \\ = E \exp(-\alpha d) \cos[\omega_e(1 - v \cos \theta/c)t + d(0)/c]$$

$E_{\text{reçu}}$        $\omega_{\text{recue}}$        $\phi$

### → Atténuation du signal

Amplitude multipliée par  $\exp(-\alpha d)$

### → Retard de l'onde reçue

Fréquence différente  $F_{\text{reçue}} = F_{\text{émise}} \times (1 - v \cos \theta/c)$  **Effet Doppler**

Déphasage  $\omega_e \times d(0)/c$

Compléments :  
Radiocommunications Avancées

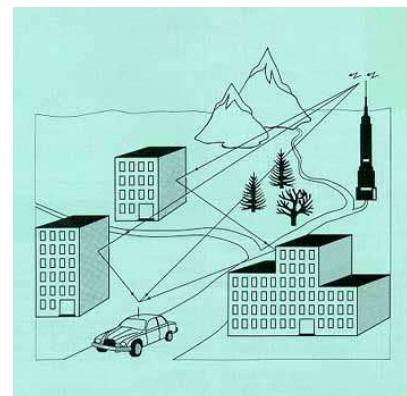
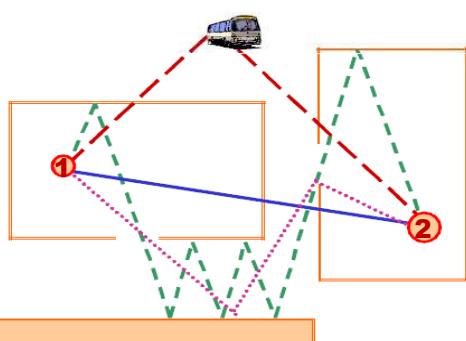
19

# Canal et propagation

## Propagation des ondes radioélectriques

### Suivant les lois de l'optique classique

- en ligne droite et à vue
- par réflexion sur des obstacles (mobiles ou fixes)
- par diffusion à travers les obstacles
- par diffraction d'autant plus importante que les fréquences sont faibles



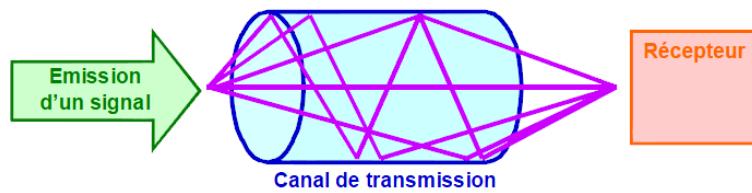
➡ Propagation multi-trajets

Compléments :  
Radiocommunications Avancées

20

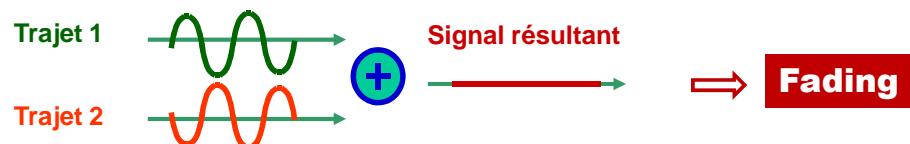
# Canal et propagation

## Propagation multi-trajets



- Au niveau du récepteur, le signal reçu est la somme de toutes les trajectoires du signal émis

➤ Risque d'évanouissement



- Evolution permanente des caractéristiques du canal de transmission consécutive aux changements du milieu et au déplacement du récepteur

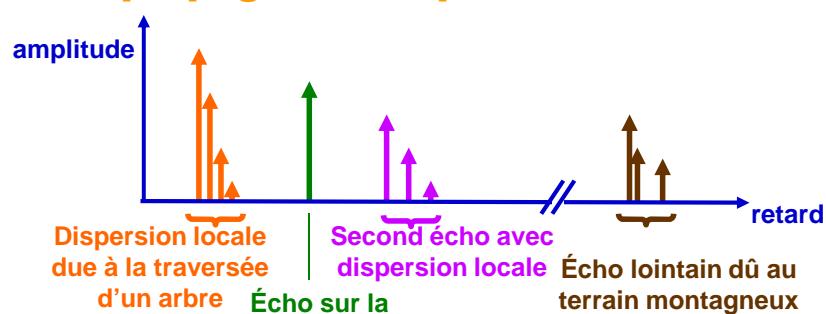
Compléments :  
Radiocommunications Avancées

21

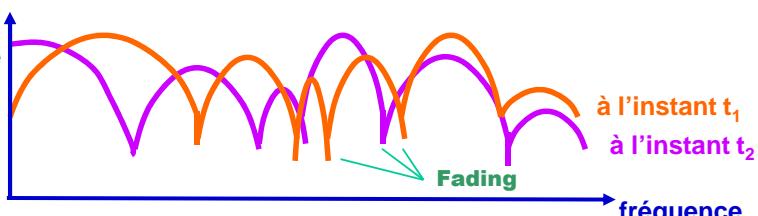


# Canal et propagation

## Canal de propagation en présence de multi-trajets



➤ Etalement en temps et risque d'interférence inter-message



➤ Canal sélectif en fréquence et non stationnaire en temps

Compléments :  
Radiocommunications Avancées

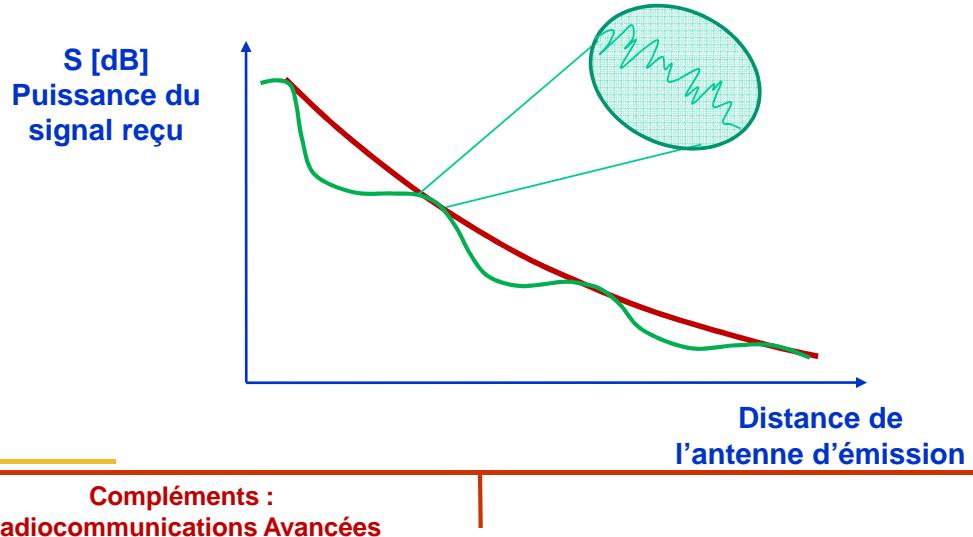
22



# Canal et propagation

## Atténuations lors de la propagation

- Atténuation en espace libre
- Evanouissement lié aux obstacles fixes (ou « shadow fading »)
- Evanouissement lié aux variations rapides du canal (ou « fast fading » ou « évanouissement de Rayleigh »)



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

23

# Techniques de diversité

## Comment lutter contre les effets multi-trajets ?

- **Augmenter la puissance d'émission**

Mais soumis aux réglementations

- **Utiliser les techniques de diversité**

Idée générale : combiner de façon adéquate plusieurs versions du signal émis statistiquement décorrélées et portant la même information

### Trois types de diversité :

- diversité de temps
- diversité de fréquences
- diversité d'antennes

Compléments :  
Radiocommunications Avancées

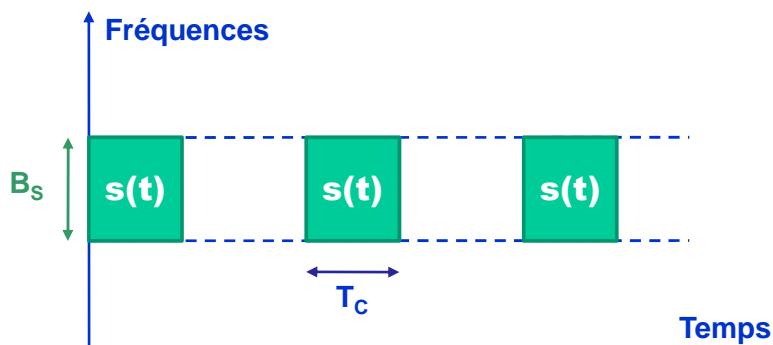
24

# Techniques de diversité

## Diversité en temps

Envoi de messages identiques mais décorrélés statistiquement ;

c'est-à-dire séparés du **temps de cohérence** : temps pour lequel le canal est considéré comme constant

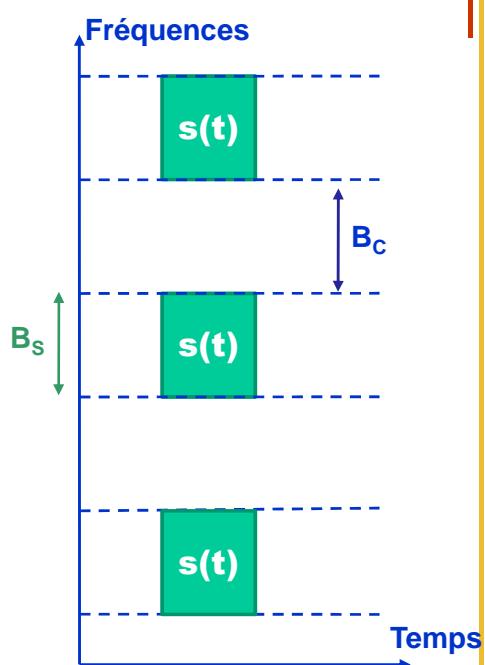


# Techniques de diversité

## Diversité en fréquence

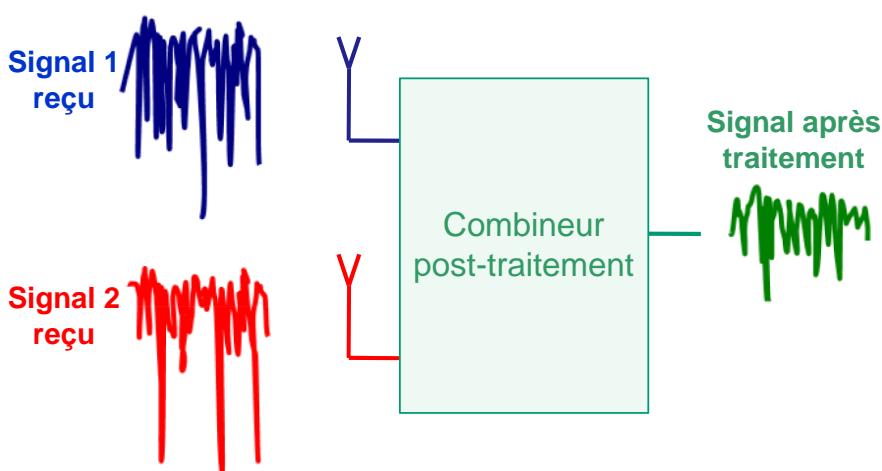
Répliques du signal source envoyées à des fréquences différentes séparées de la **bande de cohérence** du canal pour assurer une différence statistique des messages reçus.

*Bande de cohérence du canal : bande de fréquence pour laquelle la fonction de transfert du canal est constante.*



# Techniques de diversité

## Diversité d'antennes



Les diagrammes de rayonnement des antennes doivent être suffisamment différents en forme, en polarisation et/ou assez espacés pour que les signaux reçus soient les plus différents possibles.

Trois catégories de diversité d'antennes : diversité d'espace, diversité de polarisation et diversité de diagramme



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

27

# Techniques de diversité

## Diversité d'antennes : diversité d'espace

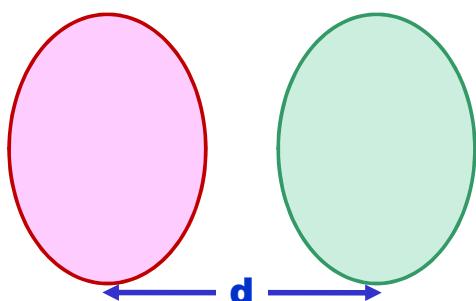


Diagramme 1

Diagramme 2

Plusieurs antennes possédant toutes le même gain mais séparées suffisamment pour introduire un facteur de phase différent

**Distance de cohérence** : seuil spatial au-delà duquel les signaux peuvent être considérés comme décorrélés

- Stations de base :  $d$  jusqu'à plusieurs longueurs d'onde
- Terminaux portables :  $d = 0,5$  fois la longueur d'onde

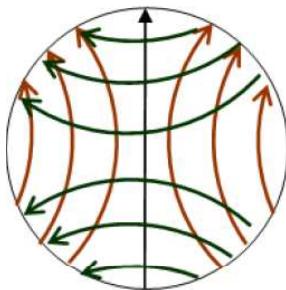


Compléments :  
Radiocommunications Avancées

28

# Techniques de diversité

## Diversité d'antennes : diversité de polarisation



Polarisation 1

Polarisation 2

Basée sur le principe selon lequel, à cause des réflexions et des diffractions multiples, l'onde émise est souvent dépolarisée à son arrivée sur l'antenne de réception

Co-localisation des antennes possibles (limitant l'encombrement)



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

29

# Techniques de diversité

## Diversité d'antennes : diversité de diagramme

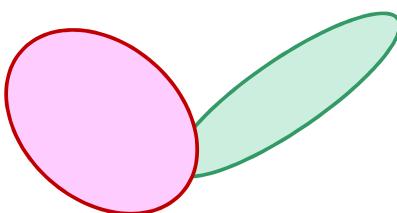


Diagramme 1

Diagramme 2

Chaque antenne capte un maximum de puissance dans des directions différentes

Étant donné que les évanescentes de signaux varient suivant la direction d'arrivée, la diversité de diagramme est facilement exploitable et elle est très intéressante.



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

30

# Techniques de diversité

## Techniques de commutation

### La sélection



#### Inconvénient :

Tous les signaux reçus sont testés pour faire le choix de la sélection

### Le switch

Si l'antenne sélectionnée présente un signal à RSB au dessus d'un seuil donné, ce signal est utilisé ; sinon une autre antenne est sélectionnée et ainsi de suite

Compléments :  
Radiocommunications Avancées

31

# Techniques de diversité

## Techniques de combinaison



### La combinaison équi-gain

Après remise en phase, les signaux sont ajoutés

### La combinaison gain maximum

Des pondérations de phase et d'amplitude sont réalisées pour obtenir un RSB de sortie égal à la somme des RSB d'entrée

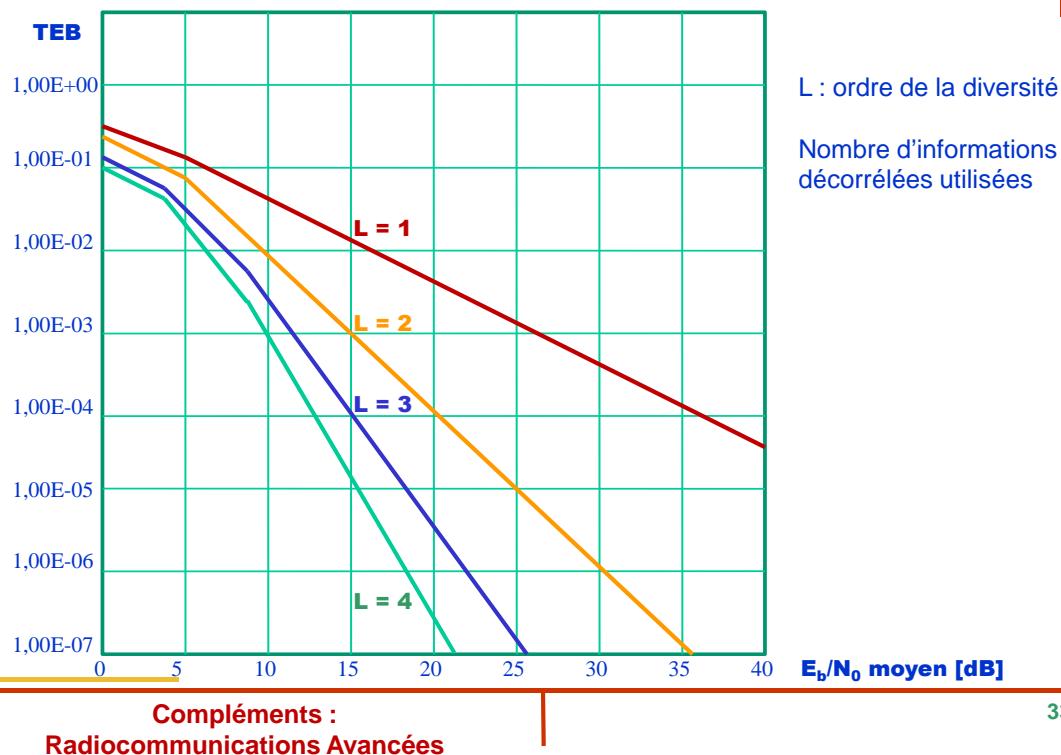
Compléments :  
Radiocommunications Avancées

32

## Techniques de diversité

**Exemple de la diversité sur le Taux d'Erreur Binaire dans un canal de Rayleigh (Comb. Gain Maximum)**

- Multiplexage
- Etalement
- Can. & Prop.
- Diversité**
- OFDM
- Applications



## OFDM

**Orthogonal Frequency Division Multiplex**

### Technique de modulation récente

- Adaptée à la radiodiffusion par voie terrestre
- Performante dans le cas d'une utilisation dans des canaux de transmission fortement perturbateurs pour les modulations classiques

### Objectifs principaux de cette nouvelle modulation

- Maintenir une qualité constante dans la chaîne de transmission
- Rendre la transmission insensible au canal de transmission
- Assurer un haut niveau de protection du signal face aux nombreuses distorsions introduites par le canal

### Idée générale

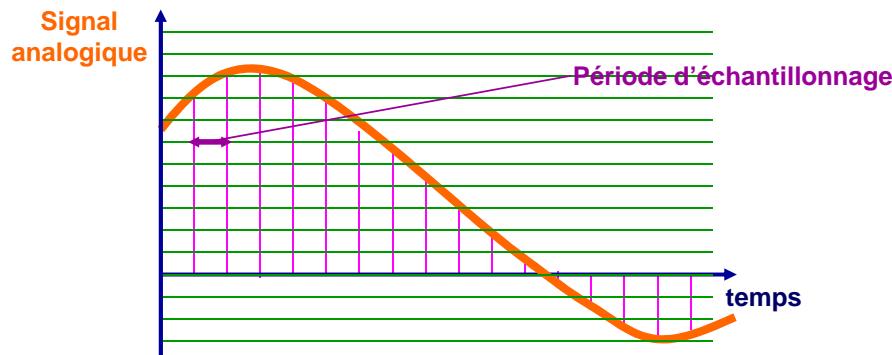
Utiliser les perturbateurs du canal de transmission pour améliorer la qualité de réception

- Multiplexage
- Etalement
- Can. & Prop.
- OFDM**
- Applications



# OFDM

## Numérisation d'un signal quelconque



Suite binaire obtenue après numérisation du signal analogique

1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 ... 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 ...

Suite binaire [1 0 1 1] [1 0 0 1] [0 1 0 1] ... [1 1 0 0] [0 1 0 0] [1 0 1 1] ...  
 Symboles associés  $s_1$   $s_2$   $s_3$  ...  $s_i$   $s_{i+1}$   $s_{i+2}$  ...

Compléments :  
Radiocommunications Avancées

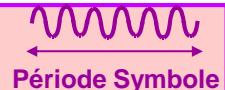
35

# OFDM

## Transmission par une porteuse unique

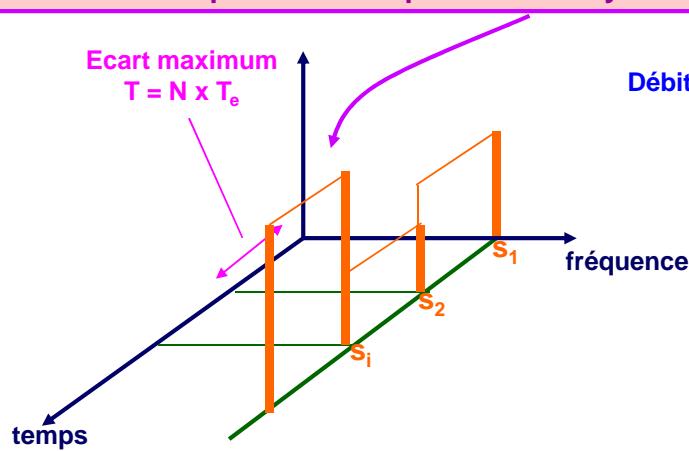
Suite binaire [1 0 1 1] [1 0 0 1] [0 1 0 1] ... [1 1 0 0] [0 1 0 0] [1 0 1 1] ...  
 Symboles associés  $s_1$   $s_2$   $s_3$  ...  $s_i$   $s_{i+1}$   $s_{i+2}$  ...

**MODULATION** → Transmission de la porteuse avec une phase et une amplitude correspondante au symbole



Ecart maximum  
 $T = N \times T_e$

Débit binaire minimal :  $D = N \times F_e$



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

36

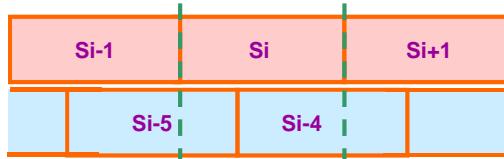
# OFDM

**Transmission par une porteuse unique**

## Réception dans le cas de trajets multiples

Si retard important

Trajet principal



Trajet retardé

**Symboles Si-5 et Si-4 équivalent à un signal brouilleur à la réception**

⇒ **Interférence inter-symbole**

## Solutions possibles

- Réduction du débit symbole avec les inconvénients que cela engendre !
- Limitation des informations susceptibles d'être acheminées par une porteuse unique

Compléments :  
Radiocommunications Avancées

37

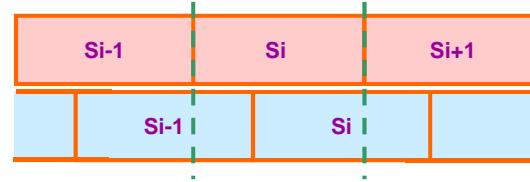
# OFDM

**Cas d'une modulation à porteuse unique**

## Réception dans le cas de trajets multiples

Si retard court

Trajet principal



Trajet retardé

**Symbol Si-1 équivalent à un signal brouilleur à la réception**

**Symbol Si destructeur ou constructeur (en fonction de sa phase) au symbole utile**

⇒ **Interférence intra-symbole**

**Pas d'alternative : forte sensibilité à ce type de perturbation dégradant la réception du signal**

Compléments :  
Radiocommunications Avancées

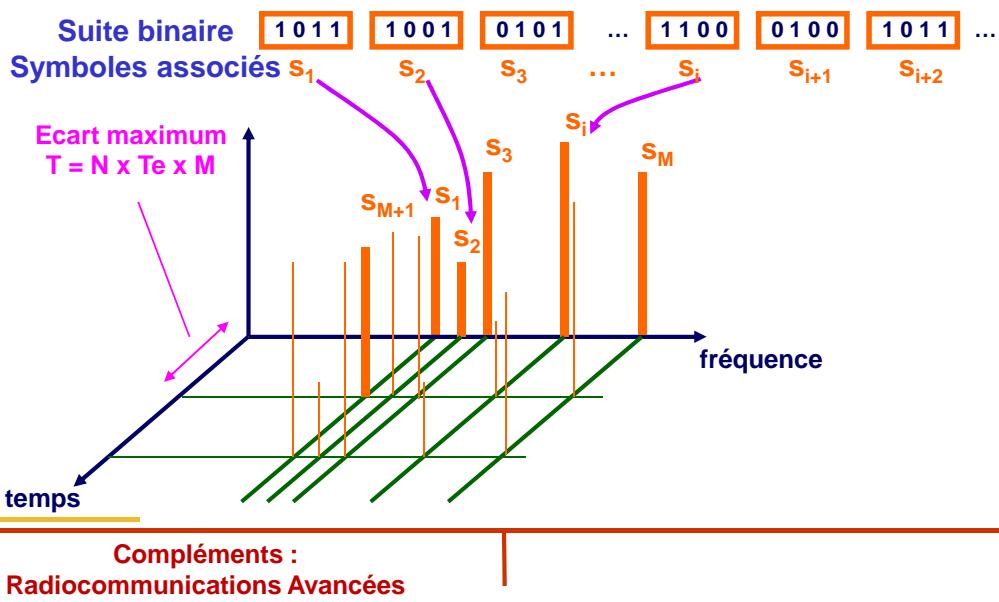
38

# OFDM

**Transmission à porteuses multiples**

**Pour éviter les interférences inter-symboles ...**

... Diviser un débit de données trop élevé en plusieurs flux parallèles de débit moins élevé acheminés chacun par sa propre porteuse



39

# OFDM

**Transmission à porteuses multiples**

**Pour éviter les interférences intra-symboles ...**

... Rajouter de la diversité ! ET du codage

### Hypothèse

Si signaux suffisamment éloignés en temps et en fréquence, distorsions différentes sur chacun de ces signaux affectés par le canal de façon différente

### Idée

Duplicer les données à transmettre et les répartir de façon pseudo-aléatoire sur différentes porteuses du canal

Ainsi, informations, initialement consécutives, réparties à des instants différents et sur des porteuses éloignées

→ Dispersion des erreurs (même si récepteur immobile)

### Conclusion

Si une porteuse supprimée, une autre sera correctement décodée

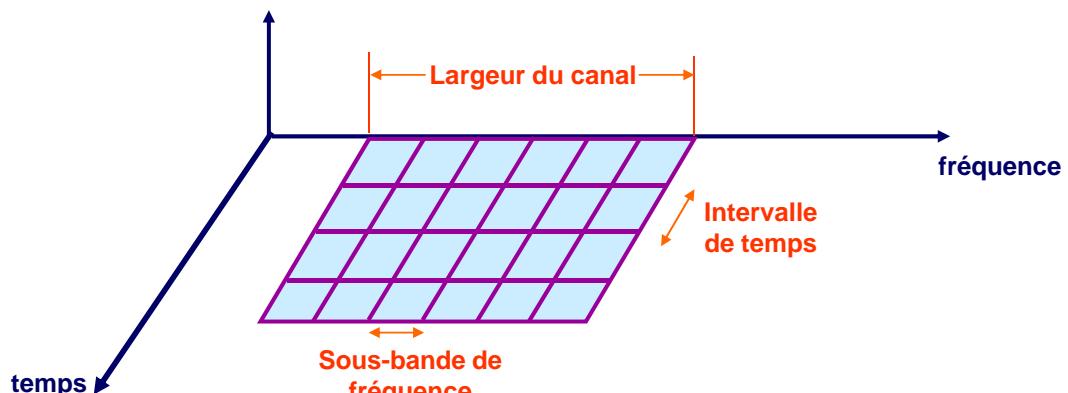


# OFDM

## Illustration du principe

**Répartir aléatoirement des symboles de durée  $T_u$  (temps du symbole utile) sur différentes porteuses modulées**

- Découpage du canal en cellules selon les axes temps et fréquence
- Canal constitué de sous-bandes fréquence et de segments temporels



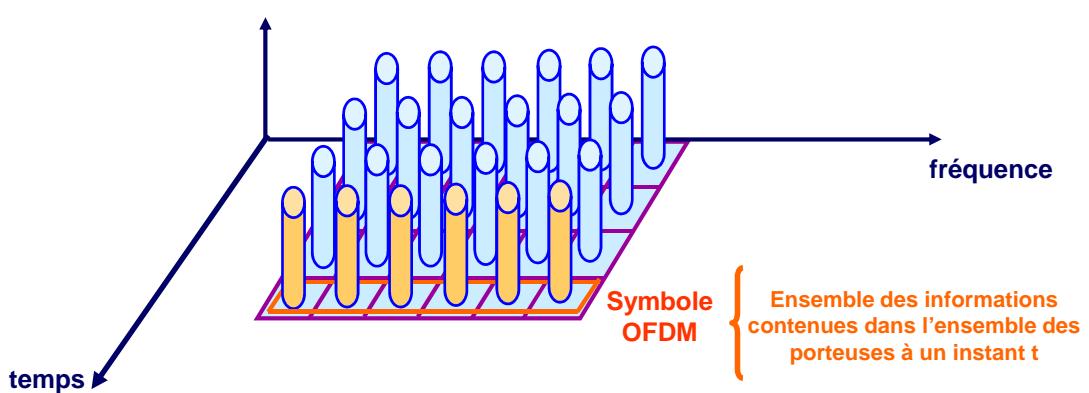
Compléments :  
Radiocommunications Avancées

41

# OFDM

## Illustration du principe : multi-porteuses

- Attribution à chaque cellule fréquence-temps d'une porteuse dédiée
- Répartition de l'information à transporter sur l'ensemble de ces porteuses, modulée chacune à faible débit par une modulation donnée rendant le canal non sélectif en fréquence pour chacune des porteuses



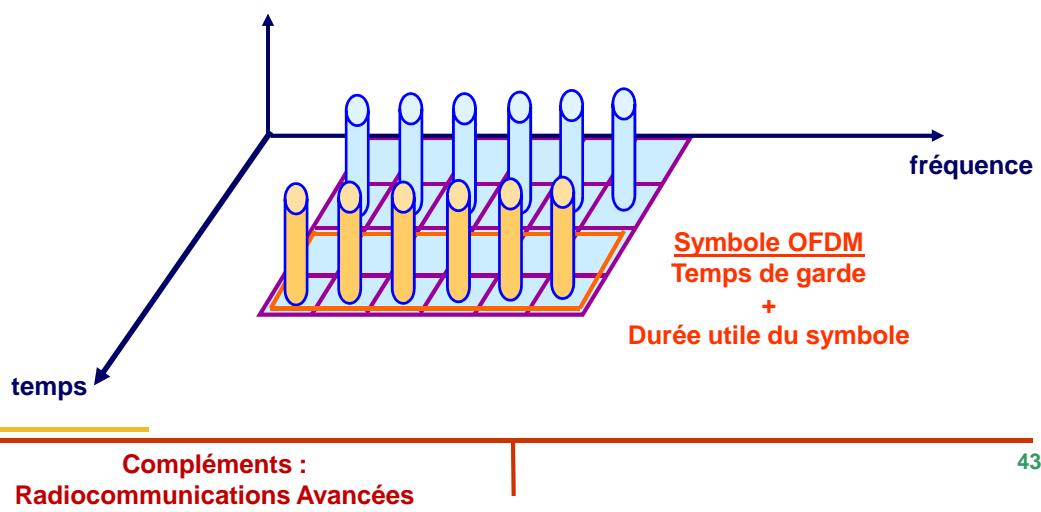
Compléments :  
Radiocommunications Avancées

42

# OFDM

## Illustration du principe : intervalle de garde

- Insertion d'un intervalle de garde entre chaque symbole et durée utile d'un symbole suffisamment grande par rapport à l'étalement des échos
- Renfort de la non sélectivité du canal en fréquence et limitation de l'interférence inter-symbole (celle-ci se produisant au début des symboles, affectant l'intervalle de garde)



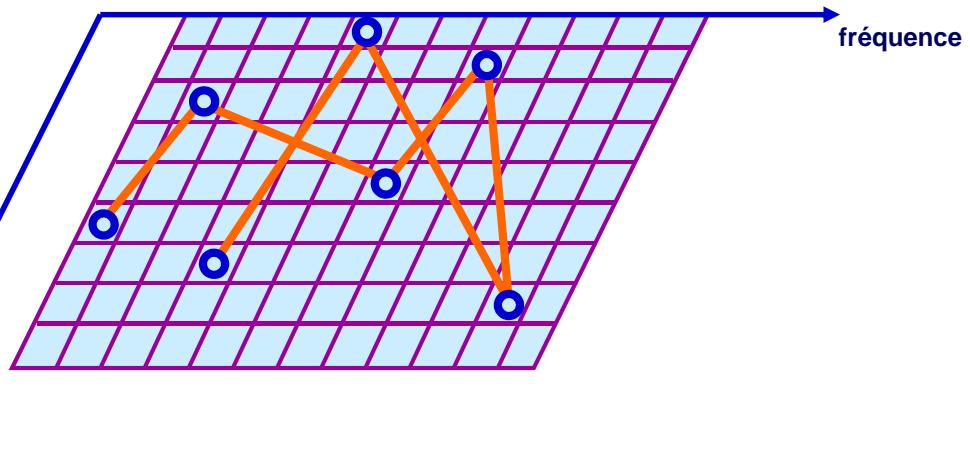
Compléments :  
Radiocommunications Avancées

43

# OFDM

## Illustration du principe : mélange « ordonné »

- Limitation intra-symbole grâce à une répartition de l'information sur un grand nombre de porteuses limitant ainsi les pertes de données en cas d'évanouissement du signal à certaines fréquences
- Correction renforcée par des systèmes de codage de protection contre les erreurs



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

44

# OFDM

**Un système qui repose sur la diversité**

Multiplexage

Diversité en fréquence

Etalement

Diversité en temps

Can. & Prop.

Diversité par codage

Diversité

Diversité en trajectoire

**OFDM**

**Signal robuste à toutes les formes d'échos**

Applications

Compléments :  
Radiocommunications Avancées

45

# OFDM

**Principe du modulateur**

Multiplexage

**Problème :** Etre capable de détecter les porteuses les unes des autres lors de la réception

Etalement

**Solution :** Utiliser des porteuses formant une **base orthogonale**

Can. & Prop.

Par analogie avec les modulations I/Q et généralisation :

Diversité

**Expression de la kième porteuse (en bande de base)**

$$\Psi_k(t) = e^{jk\omega_u t} \quad \text{avec } \omega_u = 2\pi / T_u$$

OFDM

**Condition d'orthogonalité vérifiée si**

$$\int_{\tau}^{\tau+T_u} \Psi_k(t) \cdot \Psi_\ell(t) dt = 0 \text{ si } k \neq \ell$$

$$= T_u \text{ si } k = \ell$$

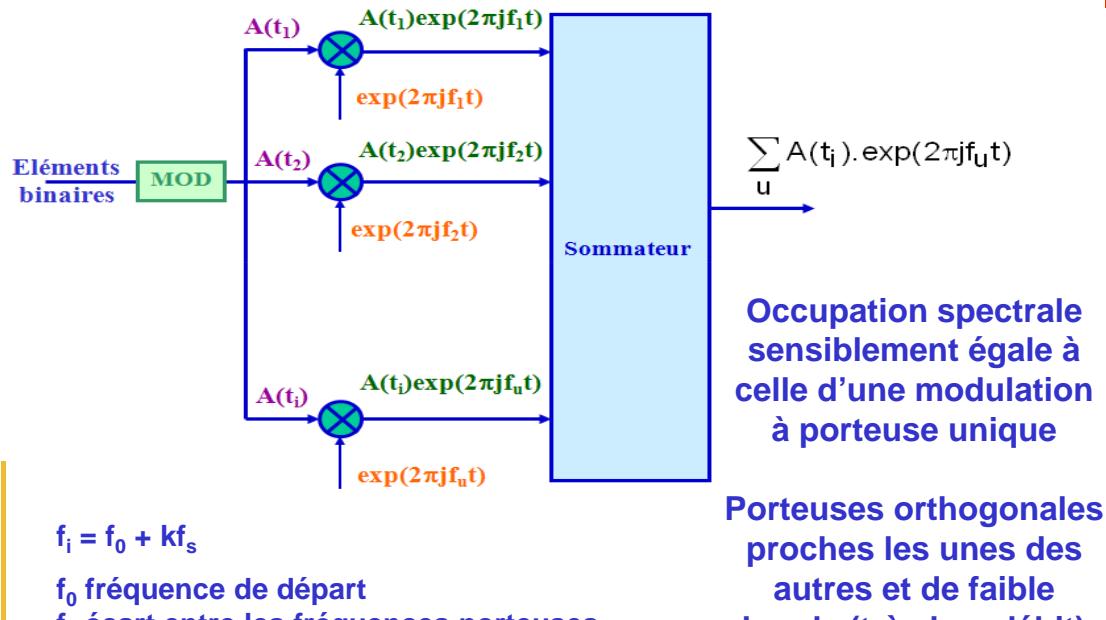
Applications

Compléments :  
Radiocommunications Avancées

46

# OFDM

## Synoptique du modulateur

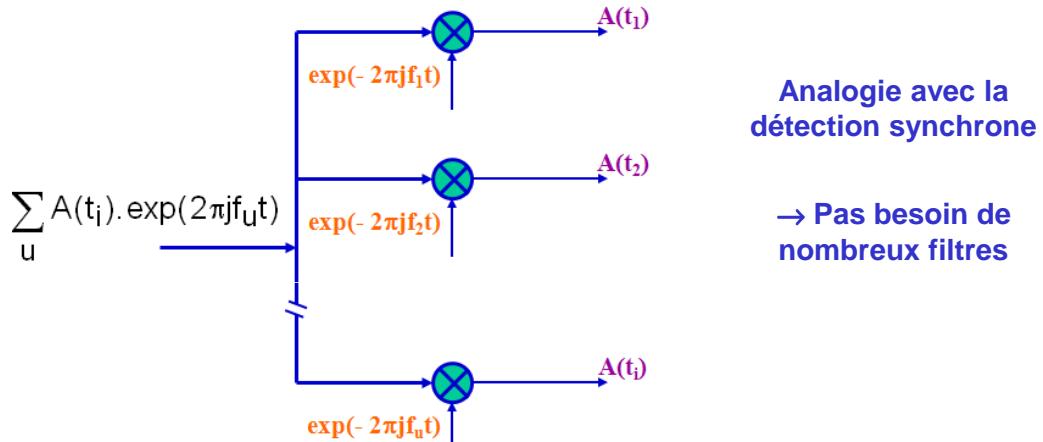


Compléments :  
Radiocommunications Avancées

47

# OFDM

## Synoptique du démodulateur



### REMARQUE :

- Démodulation analogue à une TF : coefficients fréquentiels obtenus correspondant aux données démodulées à partir des nombreuses porteuses
- De même, utilisation de la FFT inverse au niveau de l'émetteur

Compléments :  
Radiocommunications Avancées

48

# OFDM

## Bilan

- Apparition grâce aux puissances de calcul des circuits programmables actuels de traitement du signal
- Système de transmission caractérisé par sa capacité à assurer un haut niveau de protection du signal face aux nombreuses distorsions introduites par le canal de transmission
- Garantie de qualité obtenue grâce à deux procédés :
  - 1/ Répartition du flux numérique sur de multiples fréquences
  - 2/ Transformations des défauts de propagation en signaux utiles (exploitation avantageuse des phénomènes d'échos comme informations redondantes améliorant la qualité de réception)



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

49

# OFDM

## Exemple : DAB (Digital Audio Broadcasting)

- Récepteur radio d'une qualité sonore égale à celle d'un disque compact
  - Insensible aux conditions de lieux (plus de zones d'ombre, par exemple les sous les ponts, derrière des immeubles, ...) ou de vitesse (même à 180 km/h, qualité de réception assurée)
  - Multiplication possible des programmes diffusés car économie du spectre hertzien

## Autres exemples :

- Télévision numérique terrestres (DVB-T, Digital Video Broadcasting Terrestrial) mise en place reportée à 2004 en France
- Communications numériques hauts débits (ADSL Asynchronous Digital Subscriber Line) sur la boucle locale téléphonique
- WLAN (Dernières générations du WiFi)
- Technologie UWB



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

50

## Norme 802.11 ou WiFi

### Alternative aux réseaux locaux filaires type Ethernet

- **Bande de fréquence** : 2,4-2,484 GHz pour les applications liées à cette norme ; en France, centré sur 2,46GHz et 2,462GHz
- **Puissance d'émission** maximale de 1mW en France (1W aux US, 10mW au Japon)
- **Modulation** BPSK ou QPSK avec étalement de spectre DS-SS

### Evolution de la norme 802.11

- **802.11b norme la plus répandue en base installée actuellement**
  - débit théorique de 11 Mbit/s (6 Mbit/s réels)
  - portée pouvant aller jusqu'à 300 mètres (en théorie)
- **802.11g norme la plus répandue dans le commerce actuellement**
  - débit : 54 Mbit/s théoriques (25 Mbit/s réels) sur la bande de fréquences des 2,4 GHz
  - compatibilité ascendante avec la norme 802.11b
- **802.11n WWiSE (World-Wide Spectrum Efficiency) la plus récente**
  - débit théorique atteint les 600 Mbit/s (débit réel de 100 Mbit/s)
  - Portée : 90 mètres



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

51

## Bluetooth

### Objectif : Connexion d'appareil à quelques mètres

- **Mode d'accès** : TDMA
- **Modulation** : GFSK
- **Débit binaire** : 1Mbit/s
- **Espacement des canaux** : 1MHz
- **Puissance d'émission** : 1mW
- **FH-SS** : découpage la bande de fréquence (2.402 - 2.480 GHz) en 79 canaux d'une largeur de 1MHz

*Changement de canal jusqu'à 1600 fois par seconde, pour éviter les interférences avec les signaux d'autres modules radio*



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

52

# RFID – RF IDentification

Multiplexage

Etalement

Can. & Prop.

Diversité

OFDM

Applications

- **2 éléments** : 1 fixe (base station) et 1 déporté (tag)
- **Distance de fonctionnement** : très courte distance (<1cm) aux longues distances (1,5m)
- **Alimentation** : avec batterie ou sans batterie, par télé-alimentation (alimentation du tag par le champ magnétique créé par la base station)
- **Echange entre base station et tag** :

Tag Talks First (TTF) et Answer To Reset (ATR)

Reader Talks First (RTF) et Answer To Request (ATQ)

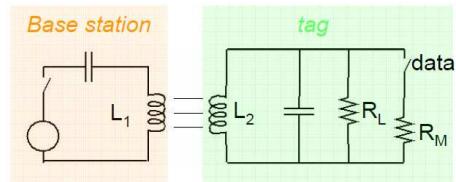
- **Fréquences de fonctionnement** : 125kHz, 13,56MHz, 2,4GHz, 5,8GHz

## Liaison montante (base station tag)

Modulation FSK ou ASK(100% ou 10%)

## Liaison descendante (tag base station)

Modulation de charge OOK



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

53

# RFID – RF IDentification

## Comparatif selon les fréquences utilisées

Multiplexage

Etalement

Can. & Prop.

Diversité

OFDM

Applications

Bandes de fréquences	LF < 135 kHz	HF 13,56 MHz	UHF 860 – 950 MHz	UHF 2,45 GHz
Portée *	< 1m	< 1m	< 9m	< 2m
Alimentation	Passif	Passif	Passif	Passif
Débit de données	Très lent	Modéré à rapide	modéré	modéré
Normes mondiales	++	++	+	-
Sensibilité métal ou humidité	Faible	Modéré	Forte	Très forte
Applications	Contrôle d'accès Chaînes d'assemblage Bétail	Contrôle d'accès Transport Banque	Logistiques Parking	Logistique Autoroute

Compléments :  
Radiocommunications Avancées

54



# UWB – Ultra Wideband

## ▪ Définition d'un signal UWB

- Critère sur la largeur de bande à -10dB
  - Plus de 20% de la fréquence centrale
  - Plus de 500 MHz
- Impulse Radio : impulsions de très courte durée (qq 100ps) avec un faible rapport cyclique

## ▪ Réglementation de la FCC (US)

- Ouverture d'une bande de 3.1 à 10,6GHz
- Puissance moyenne très limitée: - 41.3dBm/MHz
- Puissance crête : 0dBm/50MHz

## ▪ Intérêts de l'UWB

- Capacité en débit :  $C = B \times \log(1 + SNR)$
- Très faible densité spectrale de puissance : réutilisation de bandes licenciées
- Forte diversité fréquentielle : bonne résistance aux interférences bande étroite
- Forte résolution temporelle du signal (multi trajets et localisation)

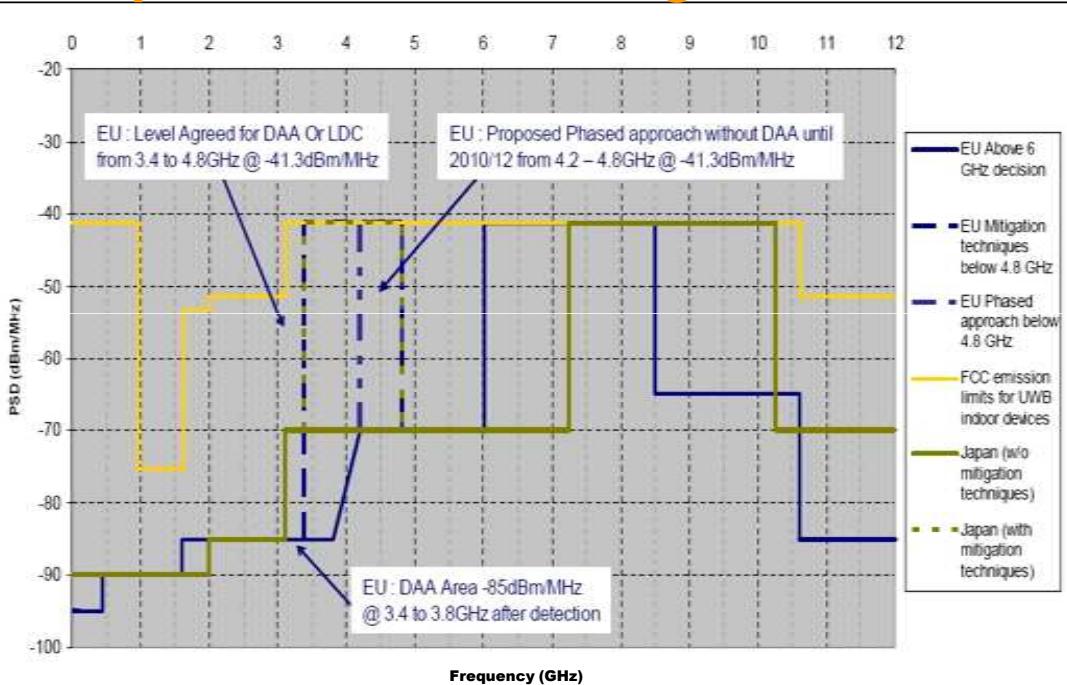


Compléments :  
Radiocommunications Avancées

55

# UWB – Ultra Wideband

## Masques d'émission selon régions du monde



Compléments :  
Radiocommunications Avancées

56

# UWB – Ultra Wideband

## ▪ Des applications "communication" multiples

- Très haut débit, très courte portée
  - Objectifs: 100 Mbit/s à 10 mètres, 480 Mbit/s à 2 mètres
  - Applications essentiellement multimédias et informatiques
- Bas débit, portée moyenne et basse consommation:
  - Objectifs: 1 à 50 Kbit/s jusqu'à 30 mètres, très forte autonomie, forte capacité à la géo-localisation
  - Applications de type réseaux de capteurs, étiquettes RF

## ▪ Modulations possibles

- PPM : modulation par la position de l'impulsion
- BPSK : Inversion de la polarité de l'impulsion
- OOK : tout ou rien

## ▪ Détection

- Récepteurs RAKE à corrélateur
- DéTECTEURS d'énergie

Compléments :  
Radiocommunications Avancées