Chapitre 1 – Signaux déterministes continus

1. Classification des signaux
2. Représentation temps-fréquence
3. Transformation de Fourier
4. Distribution de Dirac
5. Séries de Fourier
6. Produit de convolution
7. Approche du filtrage
8. Exemples de traitements
9. Conclusion

Classification phénoménologique

- Signal déterministe (ou certain)

  Signal dont les états futurs peuvent être déterminés

  Signal qui peut être décrit par un modèle mathématique

  Ex : Note de musique, fréquence porteuse d'un téléphone.

- Signal aléatoire (ou stochastique)

  Signal imprévisible à l'avance

  Signal qui ne peut être décrit par une expression analytique

  Signal susceptible de porter une information

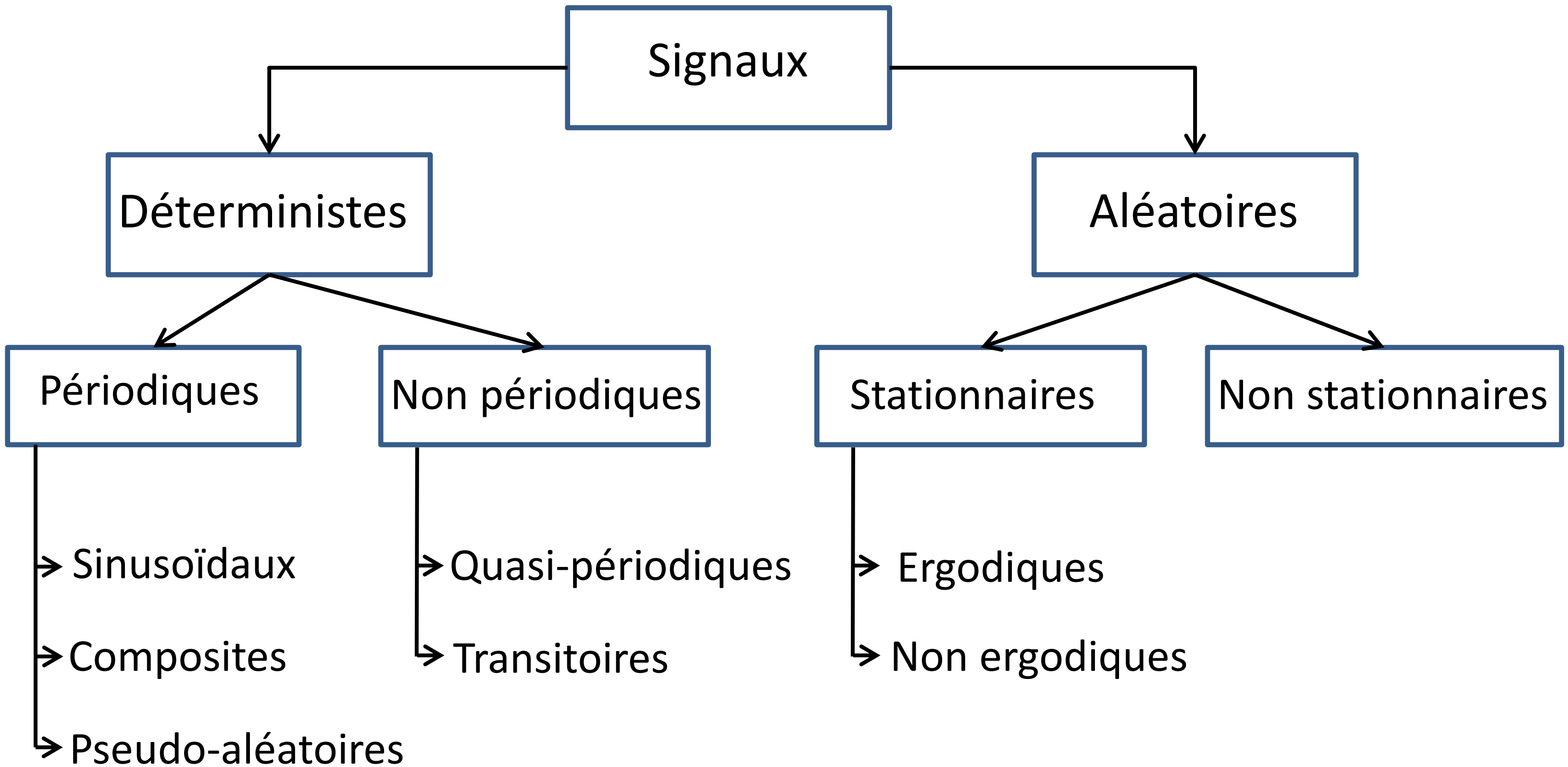
  => un signal déterministe ne porte pas d'information.

  Ex : Signal de parole d'une transmission téléphonique, tirage du loto.

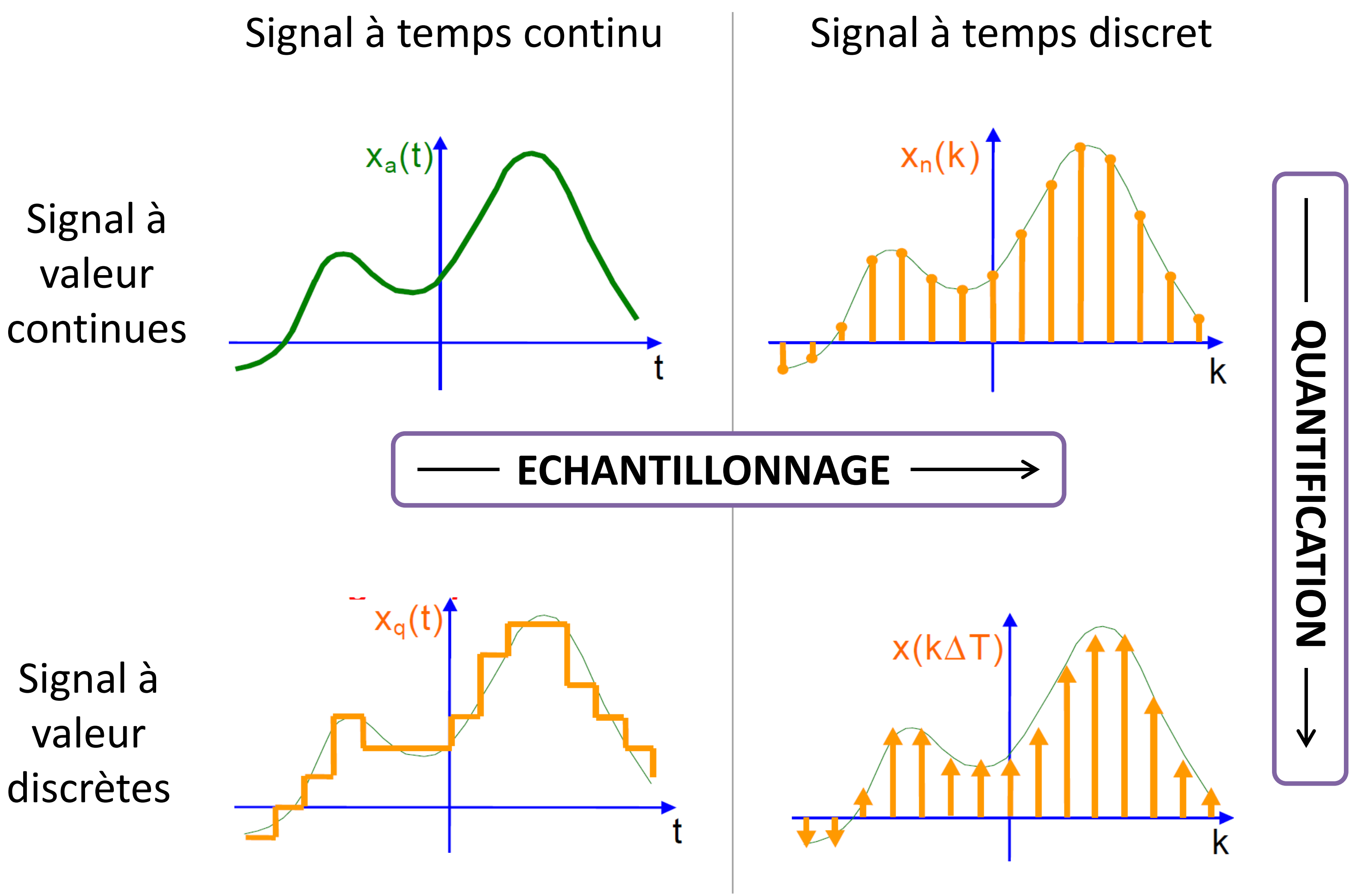
Classification phénoménologique

I. Signaux déterministes continus

Classification
Espace t-f
TF
Dirac
Séries de F
Convolution
Filtrage
Exemples
Conclusion



Classification morphologique



Classification énergétique

Energie

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Puissance

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt$$

- Signal à énergie finie $E_x < +\infty$
  - Englobe les signaux de durée finie (rencontrés en pratique)
  - Signal de puissance nulle

Etude de ces signaux par analyse de Fourier

- Signal à puissance finie $P_x < +\infty$
  - Englobe les signaux périodiques
  - Signal d'énergie infinie
  - Pour les signaux périodiques, le calcul de P se fait sur une période

Classification énergétique

Exemple

Soit le signal x(t) défini par x(t) = $a \cdot cos(2\pi f_0 t)$, a ∈ $\mathbb{R}$

Démontrer que l'énergie de ce signal est infinie et que sa puissance moyenne est finie et égale à $a^2/2$,

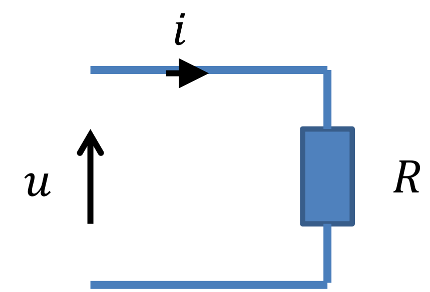
Soit le signal x(t) défini par x(t) = 1 pour $t \in [-\mathcal{E}/2, +\mathcal{E}/2]$

Démontrer que l'énergie de ce signal est finie et que sa puissance moyenne est nulle,

Classification énergétique

Analogie avec l'électricité

Soit un dipôle électrique quelconque



Par définition, la puissance instantanée : $p(t) = u(t) \cdot i(t)$

Dans le cas d'une résistance : $p(t) = R \cdot i^2(t) = u^2(t)/R$

L'énergie $E(t_1,t_2)$ (J) est donnée par : $E(t_1, t_2) = \mathrm{R} \int_{t_1}^{t_2} i^2(t)dt = {}^1/_R \int_{t_1}^{t_2} v^2(t)dt$

La puissance P(t_1,t_2) (W) est :

$$P(t_1, t_2) = \frac{R}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2(t)dt = \frac{1}{R(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} v^2(t)dt\ t)dt$$

Par analogie, le signal x(t) du slide 5 peut donc être associé à une tension aux bornes ou un courant traversant une résistance normalisée (R = 1 Ω).

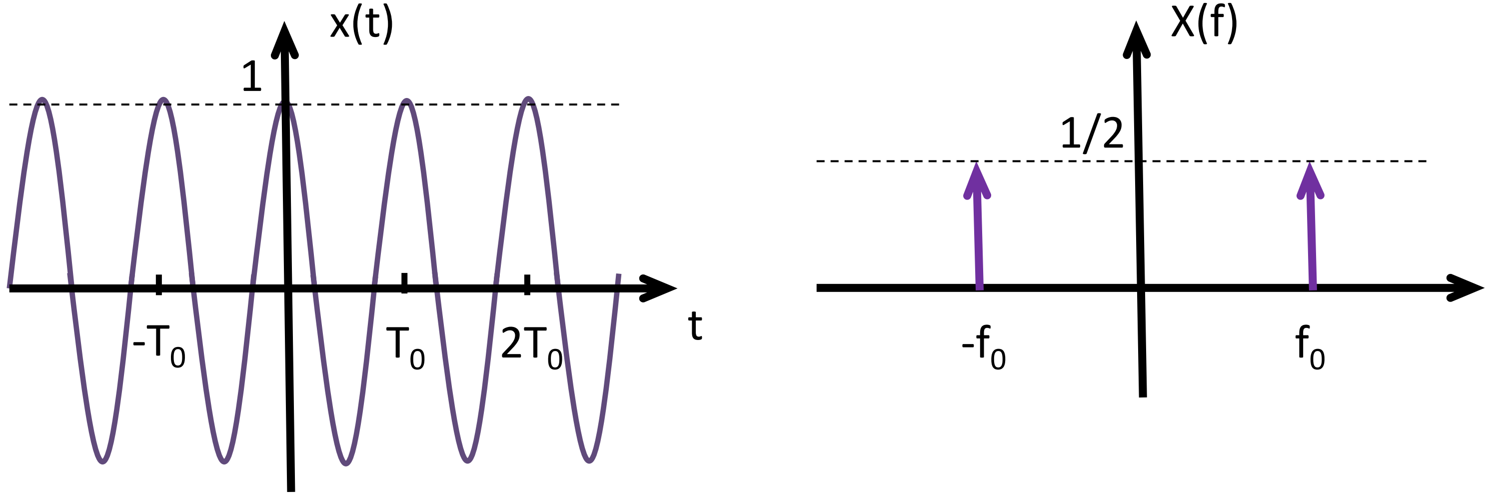
Représentation temps/fréquence

- Représentation temporelle (forme d'onde)
  - Variation de l'amplitude du signal en fonction du temps
  - Renferme toutes les informations contenues dans le signal
  - Permet de montrer l'instant d'émission ou la durée des évènements

- Représentation fréquentielle (spectre)
  - Variation de l'amplitude du signal en fonction de la fréquence
  - Renferme toutes les informations contenues dans le signal
  - Permet de montrer les composantes fréquentielles du signal.

Représentation temps/fréquence

- Exemple



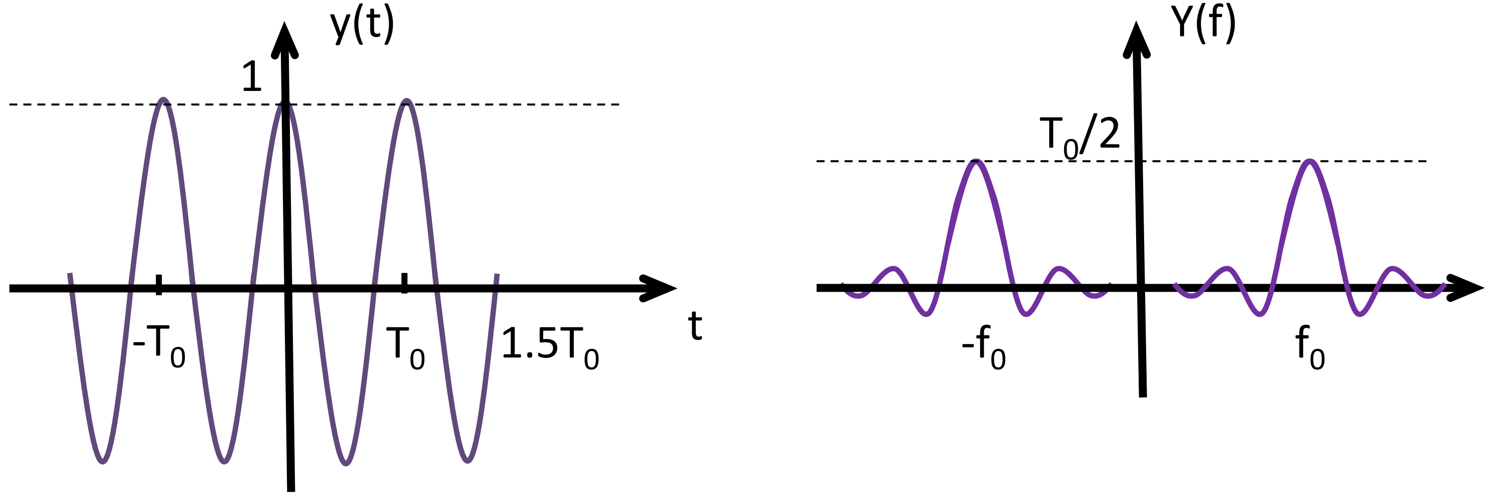
x(t) est une sinusoïde de période T_0 défini sur $\pm\infty$

Son spectre X(f) montre explicitement la présence d'une composante fréquentielle en $f = f_0$.

(La justification du calcul du spectre sera faite dans la partie suivante)

Représentation temps/fréquence

- Exemple



y(t) est une sinusoïde de période T_0 défini sur un support fini : $\pm 1.5 T_0$

Son spectre X(f) montre l'apparition de nouvelle fréquence. Il est composé de deux sinus cardinal en $\pm f_0$

(La justification du calcul du spectre sera faite dans la partie suivante)

Transformée de Fourier - TF

- Définition

Domaine temporel ⟺ TF ⟺ Domaine fréquentiel

Soit x(t) une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. La transformée de Fourier de x(t) est définie lorsqu'elle existe par :

$$X\left(f\right) = \mathrm{TF}[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2\pi jft}dt$$

$$X(f) = A(f) + jB(f) = |X(f)|e^{j\varphi(f)}$$

Condition d'existence : x(t) sommable, c'est-à-dire, fonction à énergie finie (elle tend vers 0 en $\pm\infty$ et possède une amplitude bornée.

Toute fonction existant physiquement admet une transformée de Fourier.

Transformée de Fourier - TF

- Définition

Domaine temporel ⟺ TF ⟺ Domaine fréquentiel

Soit x(t) une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. La transformée de Fourier de x(t) est définie lorsqu'elle existe par :

$$X(f) = \mathrm{TF}[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

$$X(f) = A(f) + jB(f) = |X(f)| e^{j\varphi(f)}$$

Condition d'existence : x(t) sommable, c'est-à-dire, fonction à énergie finie (elle tend vers 0 en $\pm\infty$ et possède une amplitude bornée.

Toute fonction existant physiquement admet une transformée de Fourier.

Exemple de TF

- Transformation de Fourier d'une fonction rectangulaire

Soit x(t) une fonction rectangle définie par :

$$x(t) = rectT(t/T) = 1, \forall t \in [-T/2, T/2]$$
0, ailleurs.

Sa transformée de Fourier existe et s'écrit :

$$\boxed{X\,(f) = \frac{sin(\pi f T)}{\pi f} = T sinc(\pi f T)}$$

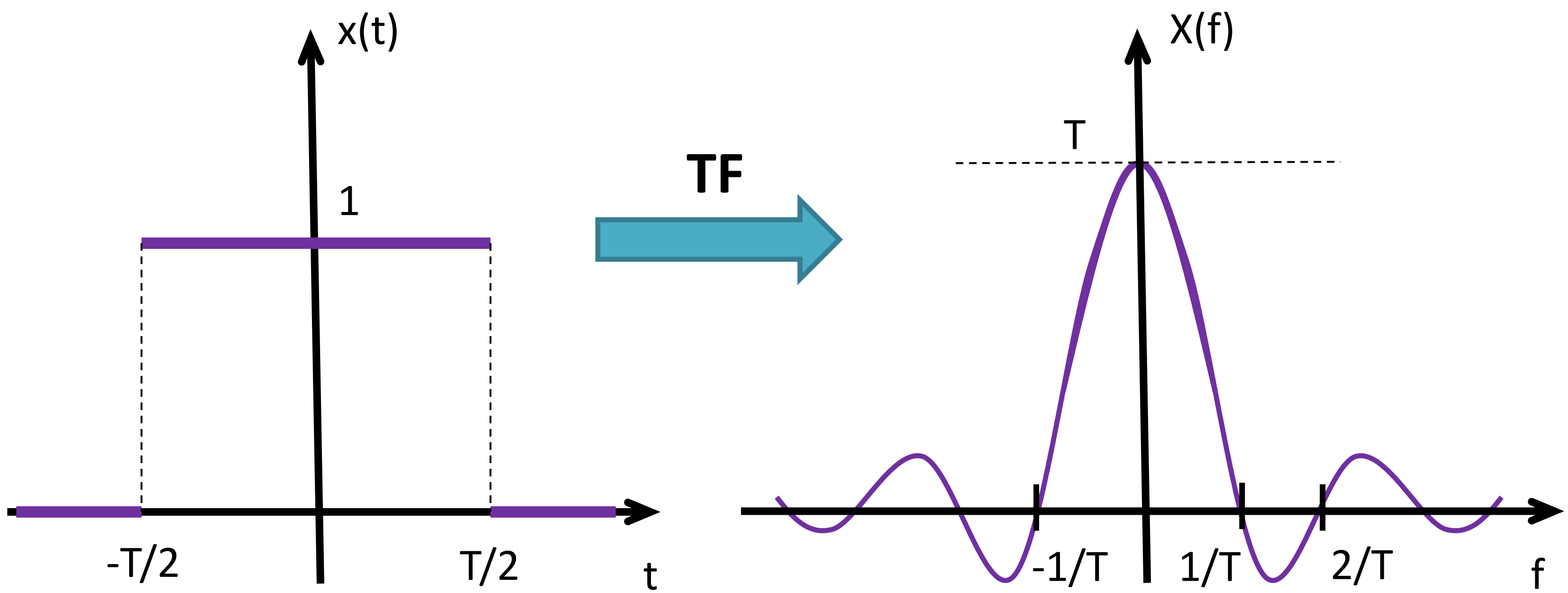
Où la fonction sinc est définie par : $sinc(x) = \sin(x)/x$

Démonstration :

Exemple de TF

- Transformation de Fourier d'une fonction rectangulaire

$$x(t) = rectT(t/T) \qquad X(f) = Tsinc(\pi f T)$$



Transformée de Fourier inverse

- Définition

La transformée de Fourier inverse est définie par :

$$\mathrm{x}(t) = \overline{\mathrm{TF}}[X(f)] = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{2\pi jft}df$$

Remarques

– La transformée de Fourier est un opérateur **dual** : $\nabla(t) \leftrightarrow \vartheta(f) \mid \vartheta(t) \leftrightarrow \nabla(f)$

Par exemple la TF inverse d'un rectangle est un sinus cardinal dans l'espace temps.

– Signal de support étroit -> Spectre de support large et inversement.

L'exemple précédent illustre ce phénomène (si T est petit, le spectre devient plus large),

– L'unité de X(f) est celle de x(t) que multiplie le temps : si x(t) en V alors X(f) est en V.s

Fréquences négatives

Des fréquences négatives apparaissent dans la représentation spectrale car la TF parcours les espaces de $+\infty$ à $-\infty$

Physiquement seul les fréquences positives ont un sens mais il est important de représenter les fréquences négatives (voir chapitre analyse spectrale),

Propriétés de la transformée de Fourier

- Linéarité

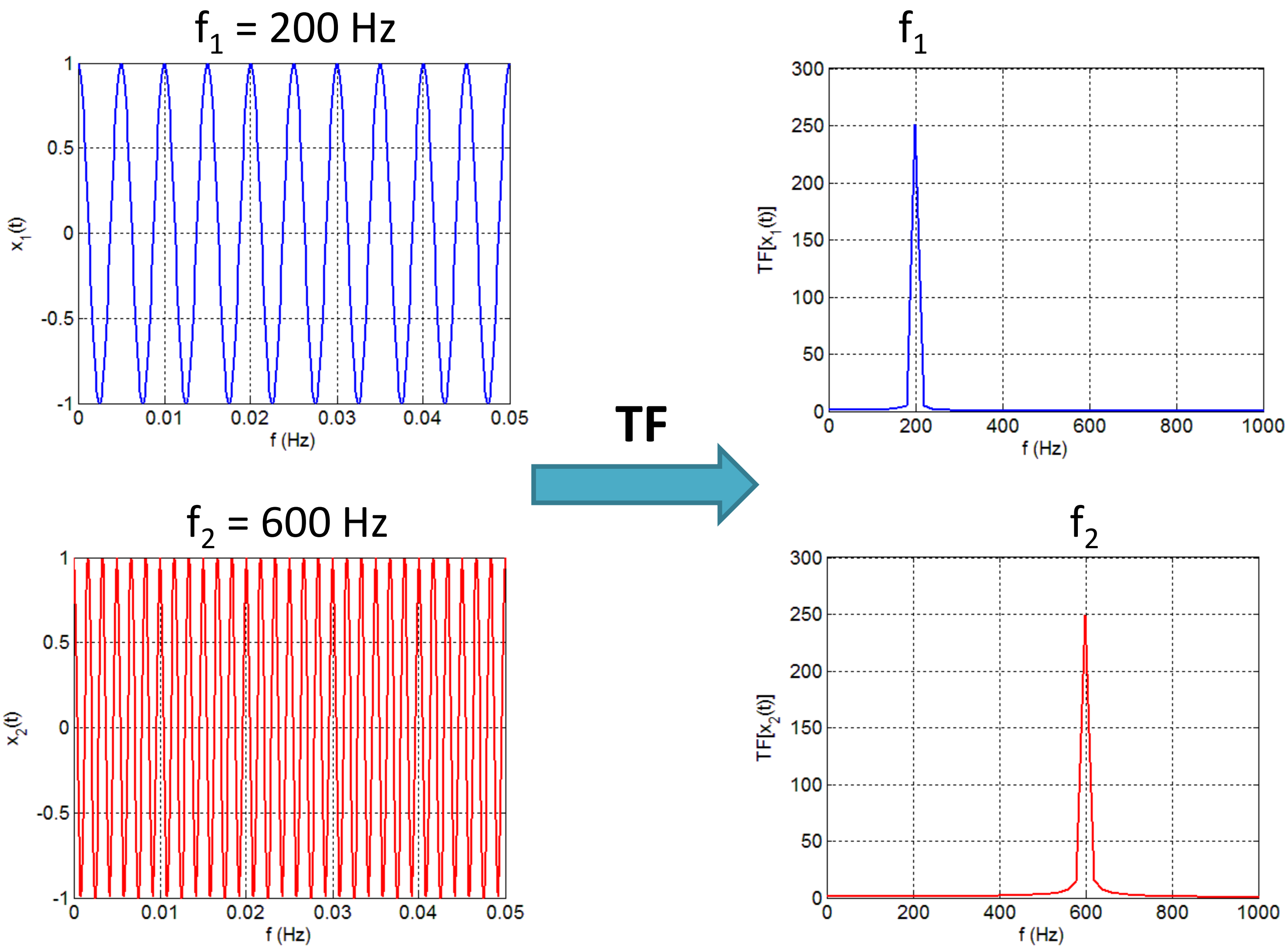
$$\forall \alpha_1 \; et \; \alpha_2 \; \in \mathbb{C}, TF[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 TF[x_1(t)] + \alpha_2 TF[x_2(t)]$$

Démonstration

Linéarité de l'opérateur intégration

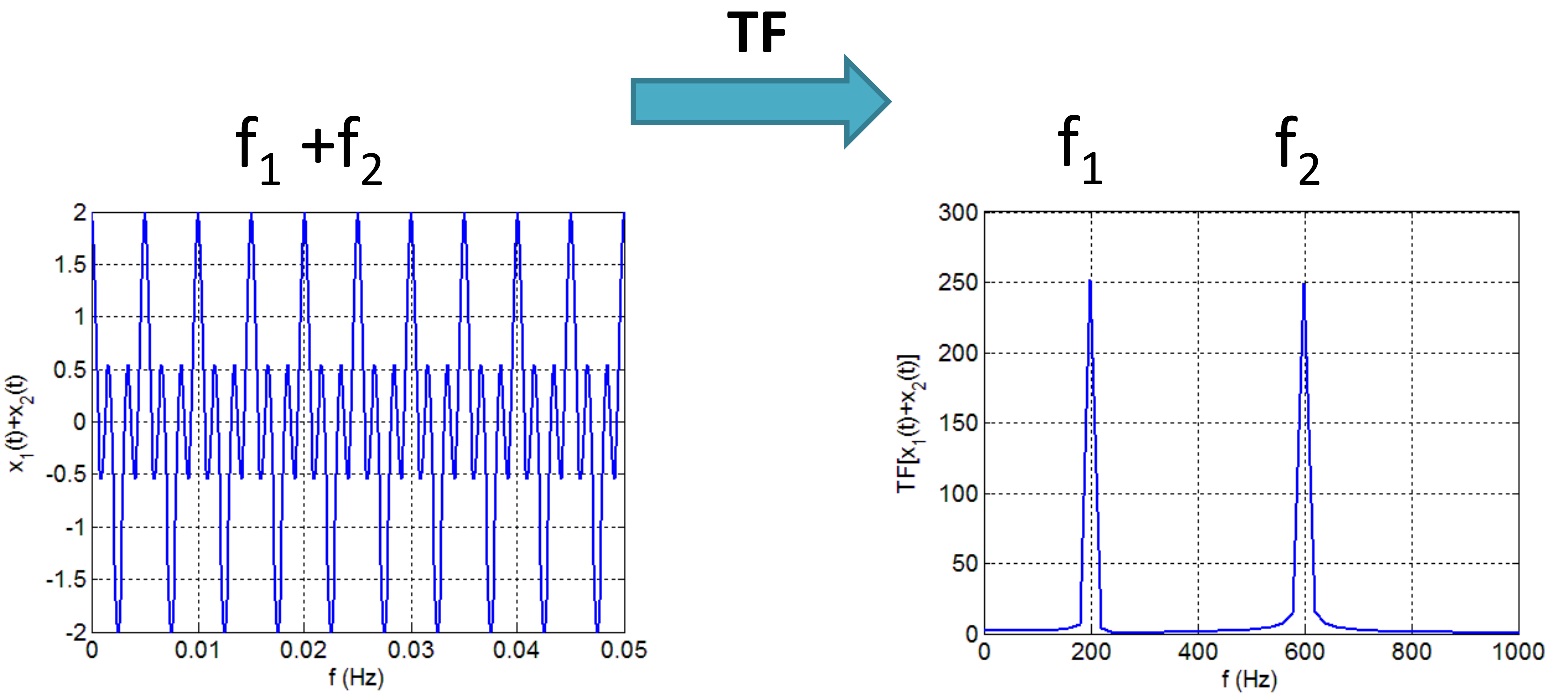
Propriétés de la transformée de Fourier

- Linéarité



Propriétés de la transformée de Fourier

- Linéarité



Propriétés de la transformée de Fourier

- Transposition

$$TF[x(-t)] = X(-f)$$

Démonstration

Propriétés de la transformée de Fourier

- Conjugaison

$$TF[x^*(t)] = X^*(-f)$$

Symétrie hermitienne :

Dans le cas d'un signal réel, $X(f) = X^*(-f)$ car $TF[x(t)] = TF[x^*(t)]$

Démonstration

Propriétés de la transformée de Fourier

- Translation (théorème du retard)

$$TF[x(t-t_0)] = e^{-2\pi jft_0}X(f)$$

Un décalage dans le temps du signal ne modifie pas le module de son spectre. Il engendre un déphasage fréquentiel.

Démonstration

Propriétés de la transformée de Fourier

- Modulation

$$TF\left[x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right] = X(f - f_0)$$

La multiplication d'un signal par une harmonique pure de fréquence f_0 translate le spectre du signal de f_0 : principe de la modulation d'amplitude.

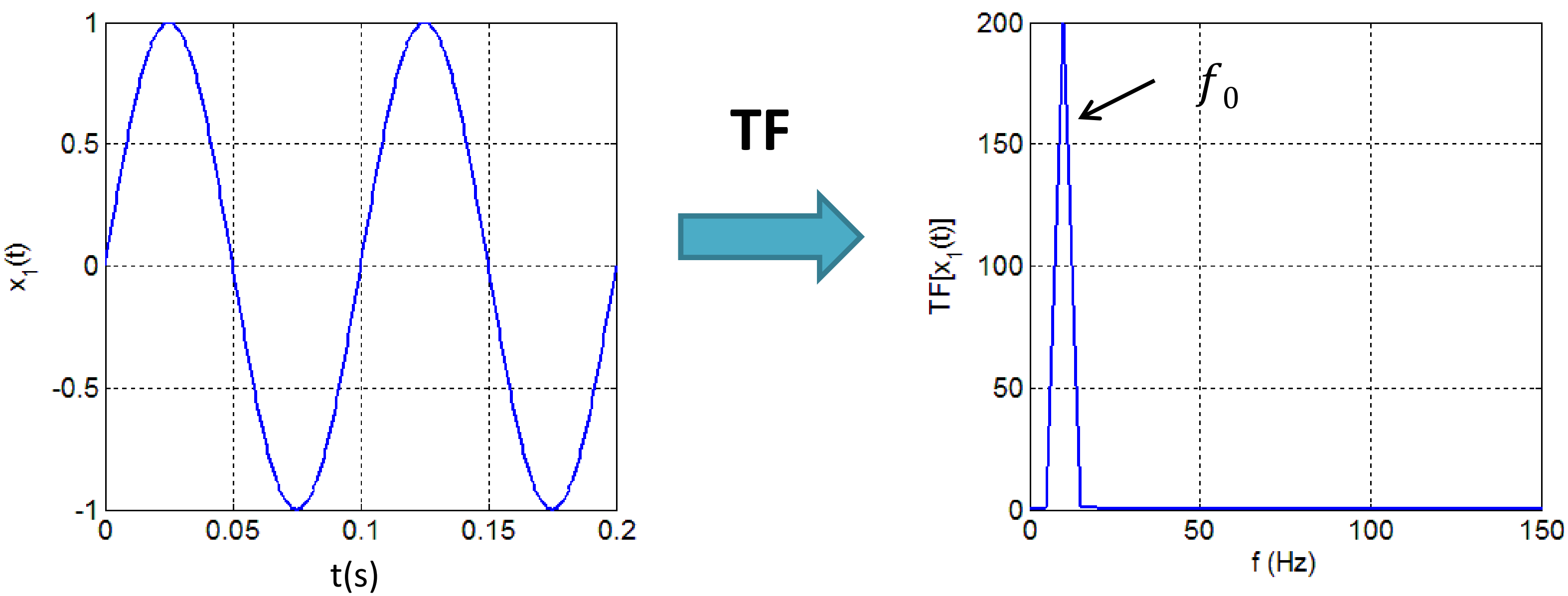
Démonstration

Propriétés de la transformée de Fourier

I. Signaux déterministes continus
Classification
Espace t-f
TF
Dirac
Séries de F
Convolution
Filtrage
Exemples
Conclusion

- Modulation : exemple

$$x_1(t) = \sin(2\pi f_0 t) \text{ avec } f_0 = 10 \text{ Hz}$$

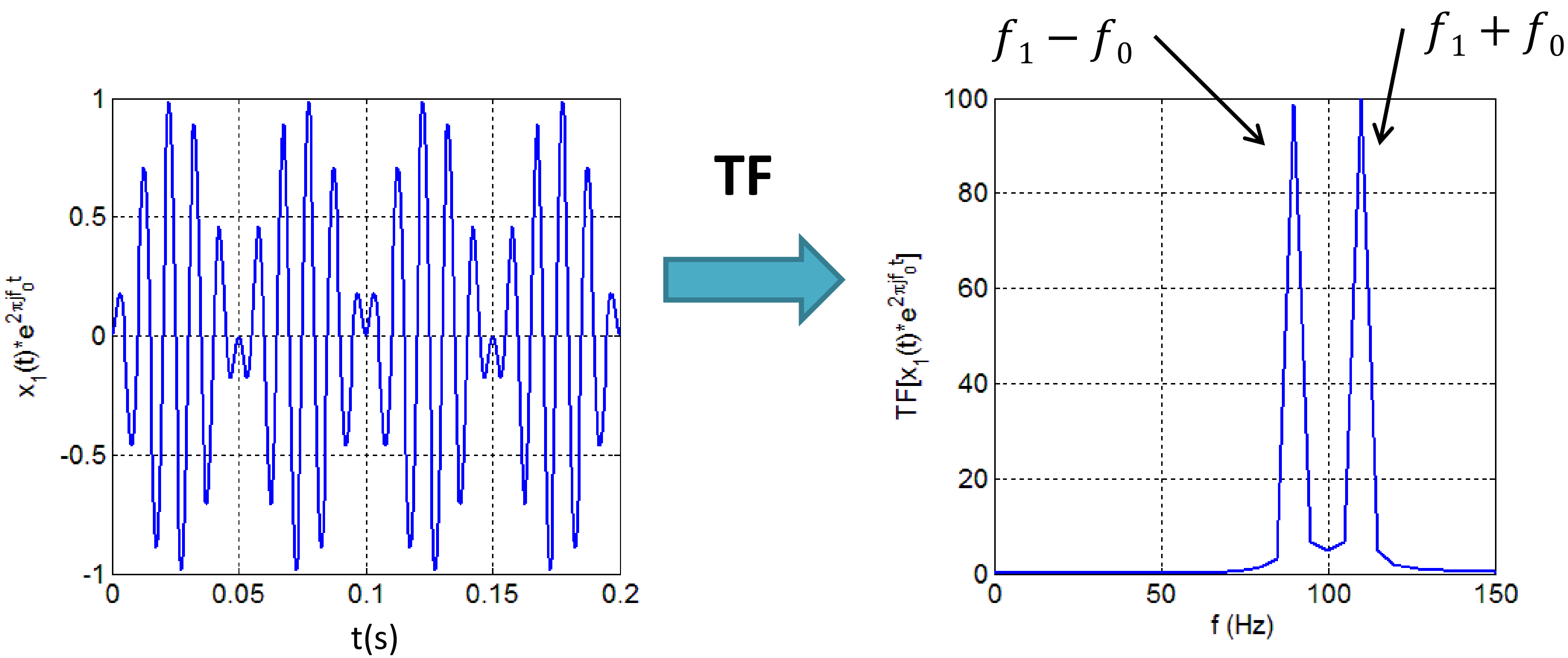


Propriétés de la transformée de Fourier

- Modulation : exemple

$$x_1(t) * e^{-2\pi j f_1 t} = \sin(2\pi f_0 t) * e^{-2\pi j f_1 t} \text{ avec } f_1 = 100 \text{ Hz}$$

$$TF[x_1(t) * e^{-2\pi j f_1 t}] = X_1(f + f_1)$$

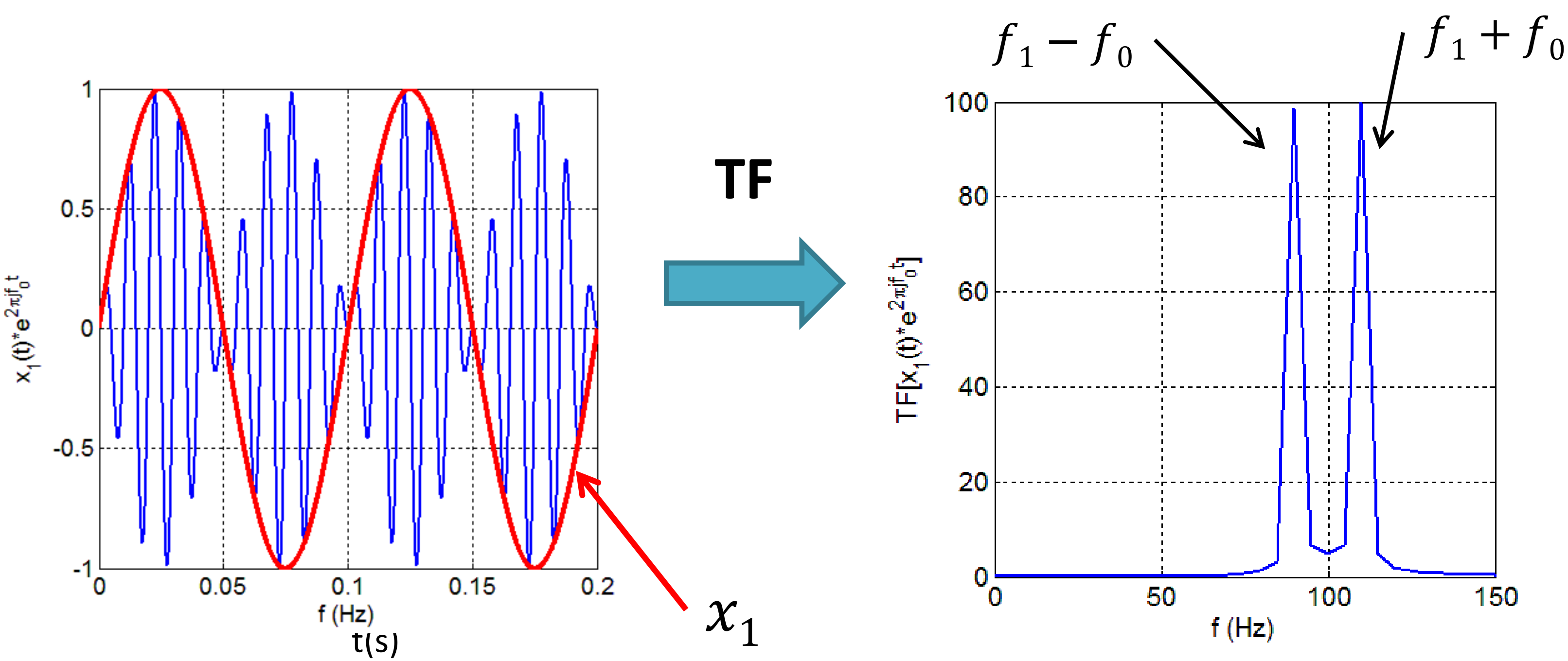


Propriétés de la transformée de Fourier

- Modulation : exemple

$$x_1(t) * e^{-2\pi j f_1 t} = \sin(2\pi f_0 t) * e^{-2\pi j f_1 t} \text{ avec } f_1 = 100 \text{ Hz}$$

$$TF[x_1(t) * e^{-2\pi j f_1 t}] = X_1(f + f_1)$$



Propriétés de la transformée de Fourier

- Dilatation - contraction

$$TF[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Une dilatation dans le domaine des temps « ralentit » le signal et entraine donc une diminution des fréquences.

Exemple : un disque 45T écouté à 33T paraît plus grave et à 78T, plus aigu.

Démonstration

Propriétés de la transformée de Fourier

- Dérivation par rapport au temps

$$TF[x'(t)] = (2\pi j f)X(f)$$
$$TF\left[x^{(n)}(t)\right] = (2\pi j f)^n X(f)$$

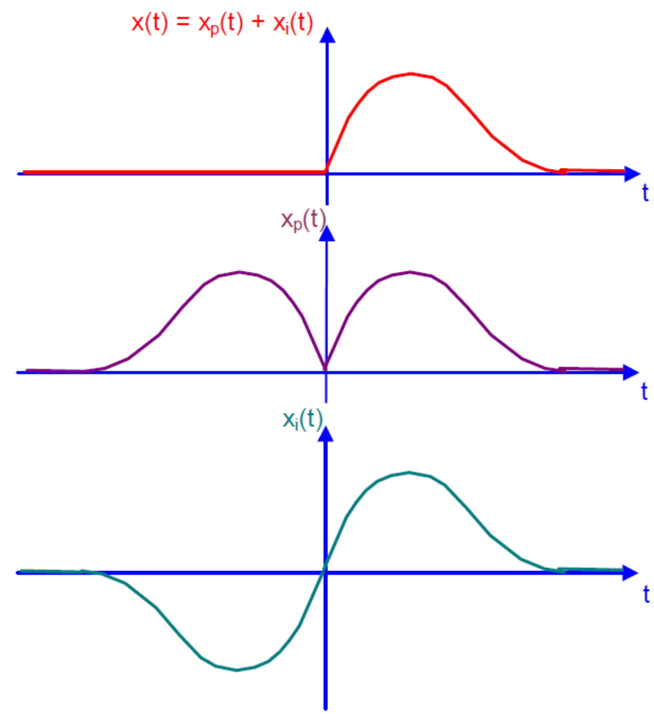
- Dérivation par rapport aux fréquences

$$X'(f) = TF[(-2\pi j t)x(t)]$$
$$X^{(n)}(f) = TF[(-2\pi j t)^n x(t)]$$

Propriétés de la transformée de Fourier

- Propriétés de parité

$$\begin{array}{cccccccccc} & x(t) & = & rp & + & jp & + & ri & + & ji \\ TF & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \searrow\!\!\!\swarrow & & \\ & X(f) & = & RP & + & JP & + & RI & + & JI \end{array}$$



Remarque :

Pour un signal **réel** x(t), le module du spectre |X(f)| est une fonction paire et la phase arg(X(f)) est une fonction impaire.

Résumé sur la TF

$$X(f) = \mathrm{TF}[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2\pi j f t} dt \qquad x(t) = \overline{\mathrm{TF}}[X(f)] = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{2\pi j f t} df$$

Linéarité
$$\forall \alpha_1 \; et \; \alpha_2 \in \mathbb{C},$$
$$TF[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 TF[x_1(t)] + \alpha_2 TF[x_2(t)]$$

Transposition
$$TF[x(-t)] = X(-f)$$

Conjugaison
$$TF[x^*(t)] = X^*(-f)$$

Translation
$$TF[x(t - t_0)] = e^{-2\pi j f t_0} X(f)$$

Modulation
$$TF\left[x(t) e^{2\pi j f_0 t}\right] = X(f - f_0)$$

Dilatation/ Contraction
$$TF[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Dérivation / t
$$TF[x'(t)] = (2\pi j f) X(f)$$

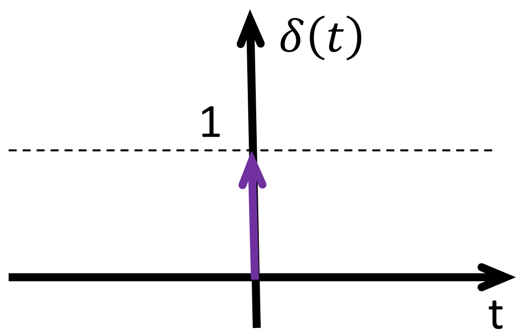
Dérivation /f
$$X'(f) = TF[(-2\pi j t) x(t)]$$

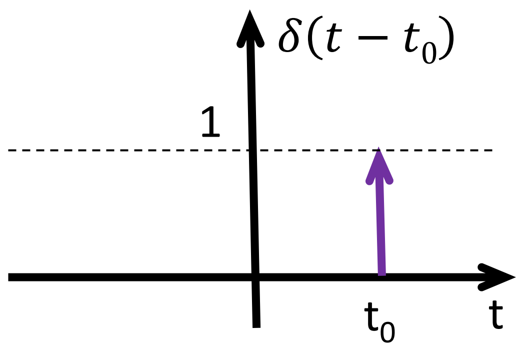
Distribution de Dirac

- Impulsion centrée sur t=0 de largeur infiniment étroite et de surface unité notée δ(t) et représentée symboliquement par un vecteur.
- Mathématiquement, la définition se traduit par : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$

$$\delta(t) = 1 \text{ si } \mathrm{t} = 0 \quad 0, \text{ailleurs}$$

$$\delta(t-t_0) = 1 \text{ si } \mathrm{t} = \mathrm{t}_0 \quad 0, \text{ailleurs}$$





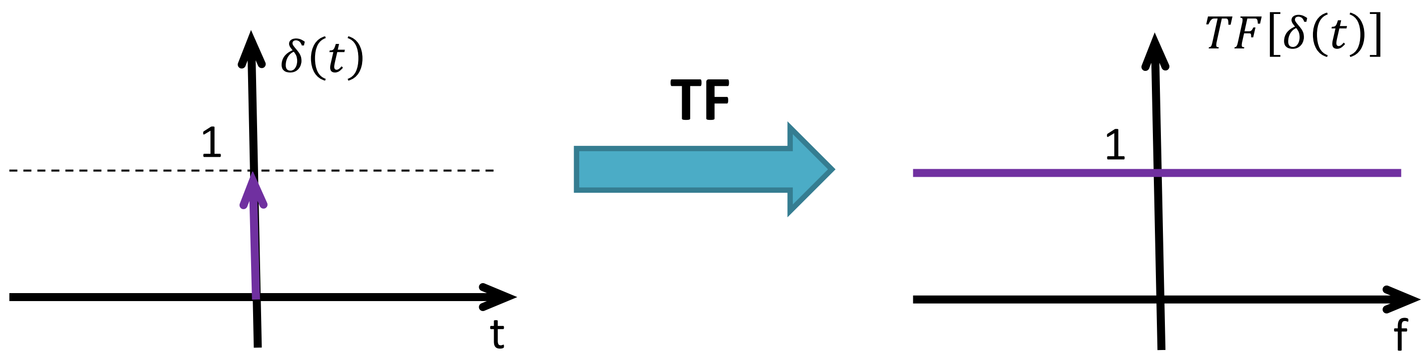
- Prélèvement de la valeur d'une fonction en un temps donné :

$$f(t).\delta(t-t_0) = f(t_0).\delta(t-t_0)$$

Transformée de Fourier d’un Dirac

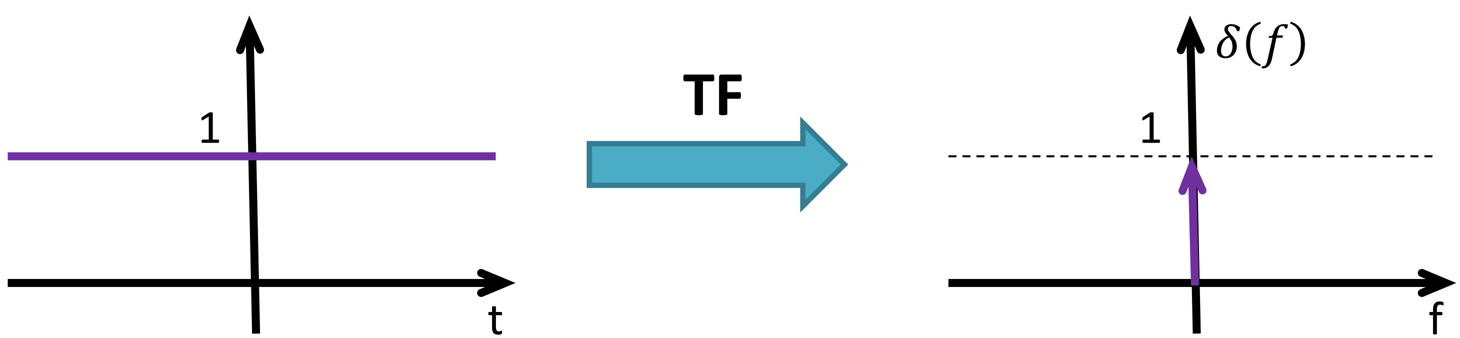
$$TF[\delta(t)] = 1$$

Un signal impulsionnel renferme toutes les fréquences



$$TF[1] = \delta(f)$$

Un signal continue ne contient pas de fréquence, hors celle en 0



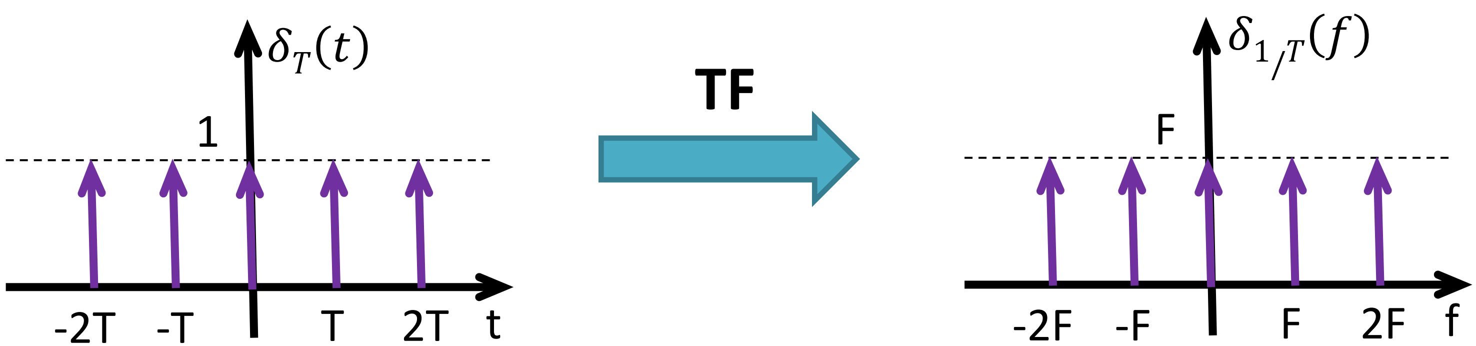
Peigne de Dirac

Le peigne de Dirac est une suite périodique de distributions de Dirac de période T :

$$\delta_T(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT)$$

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac :

$$\delta_{1/T}(f) = TF[\delta_T(t)] = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(f - n/T) = F\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(f - nF)$$



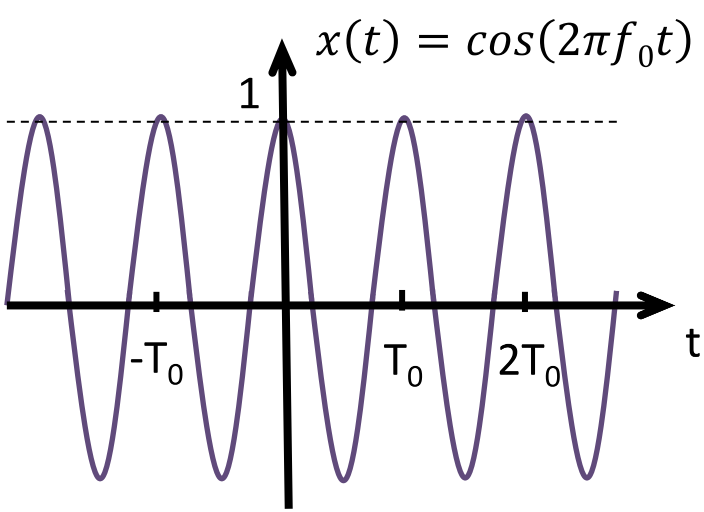
Transformées de Fourier usuelles

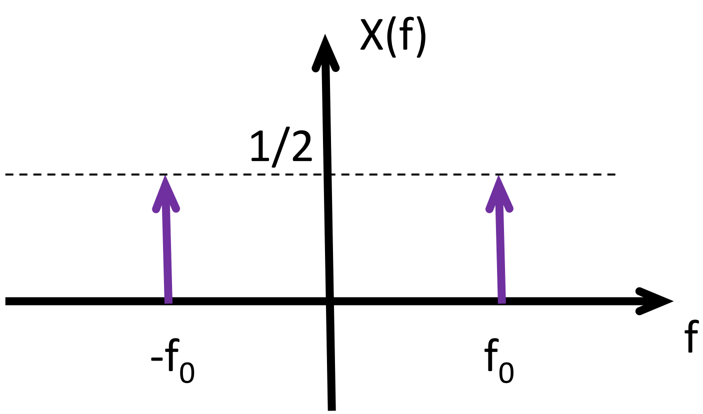
Translation $TF[\delta(t-t_0)] = e^{-2\pi j f t_0}$

Modulation $TF\left[e^{2\pi j f_0 t}\right] = TF\left[1.e^{2\pi j f_0 t}\right] = \delta(f-f_0)$

cosinus $TF[cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2}\{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\}$

sinus $TF[sin(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2j}\{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\}$





Séries de Fourier

Toute fonction x(t) périodique de période T = 1/F admet un développement en série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(2\pi nF) e^{2\pi jnFt}$$

$$avec \quad c(2\pi nF) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2\pi jnFt} dt = c_n$$

Pour une fonction réelle : $c(2\pi nF) = c^*(-2\pi nF)$

Le spectre de x(t) est alors donné par : $X(f) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - nF)$

Démonstration :

Séries de Fourier

De façon équivalente, il existe une autre formulation du développement en série de Fourier obtenue en groupant deux à deux les valeurs opposées de n :

$$x(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \{a_n cos(2\pi nFt) + bnsin(2\pi nFt)\}$$

$$avec \quad a_0 = c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt\,, valeur\ moyenne$$

$$a_n = cn + c_{-n} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)cos(2\pi nFt)dt$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)sin(2\pi nFt)dt$$

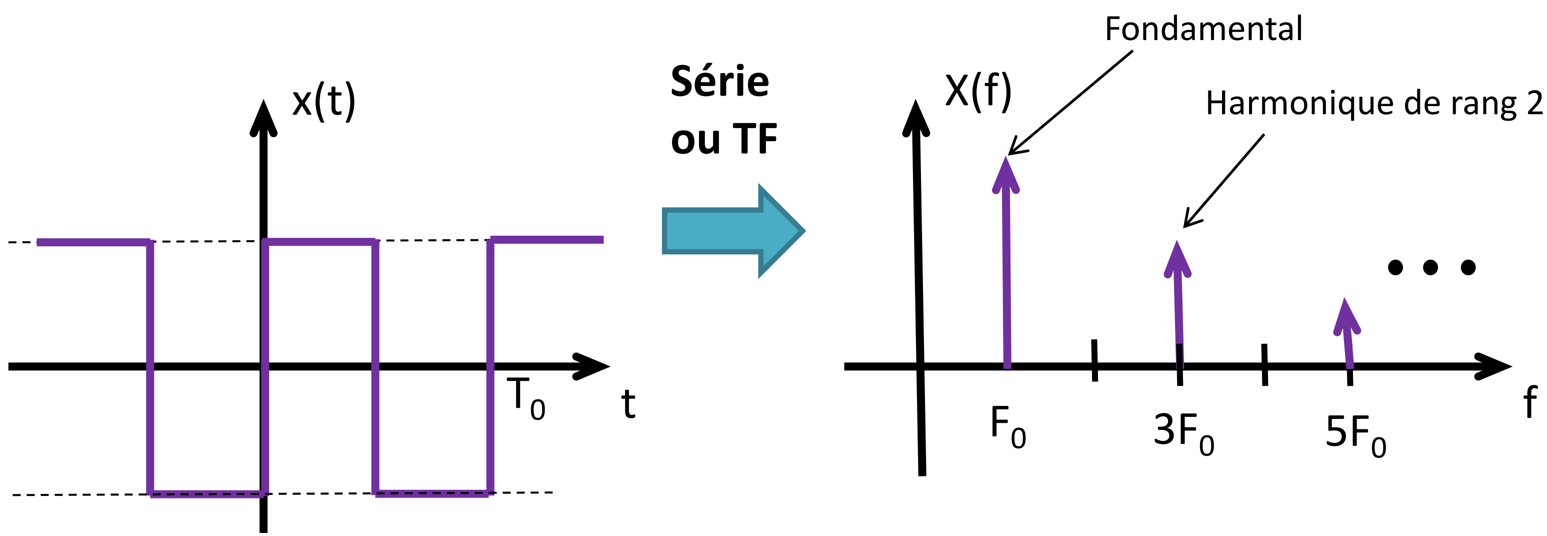
Remarques sur les séries de Fourier

- Si x(t) est paire, $b_n = 0, \forall\, n$.
- Si x(t) est impaire, $a_n = 0, \forall\, n$.
- Périodiser dans l'espace temps revient à échantillonner l'espace des fréquences.
- La composante à la fréquence F est appelée le fondamental.
- Les composantes aux fréquences nF sont les harmoniques
- Les séries de Fourier permettent de déterminer le spectre des signaux périodiques (donc à énergie infinie)

Exemple : signal rectangulaire

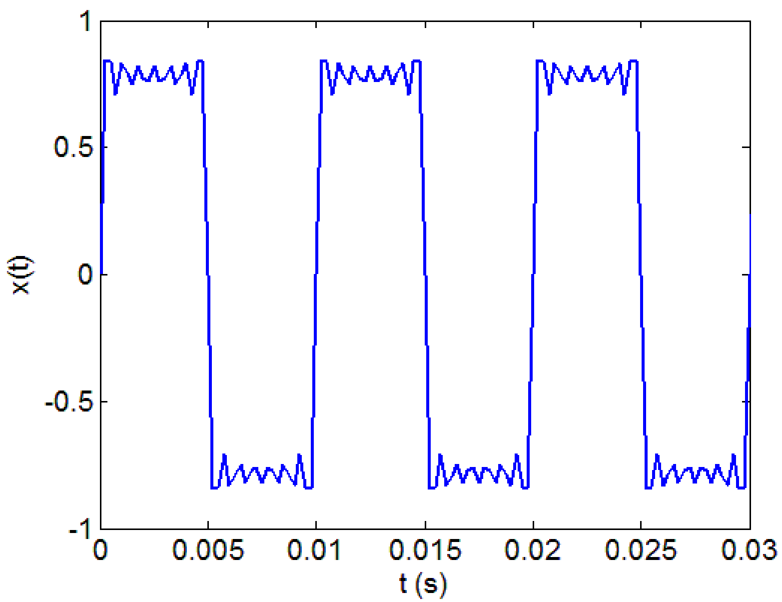
Soit x(t), un signal rectangulaire d'amplitude ±1, de rapport cyclique 0,5 et de fréquences F.
Il peut être décomposé sous la forme d'une infinité de fonction sinusoïdales :

- D'amplitude $4/\left(\pi(2n+1)\right)$
- De fréquences $\mathrm{F} \cdot (2n+1)$

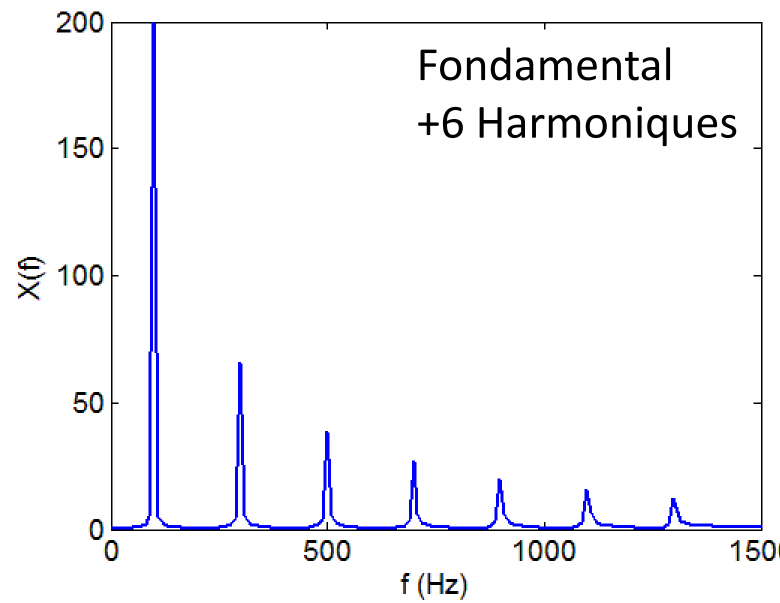


Exemple : signal rectangulaire

Série de Fourier



Spectre

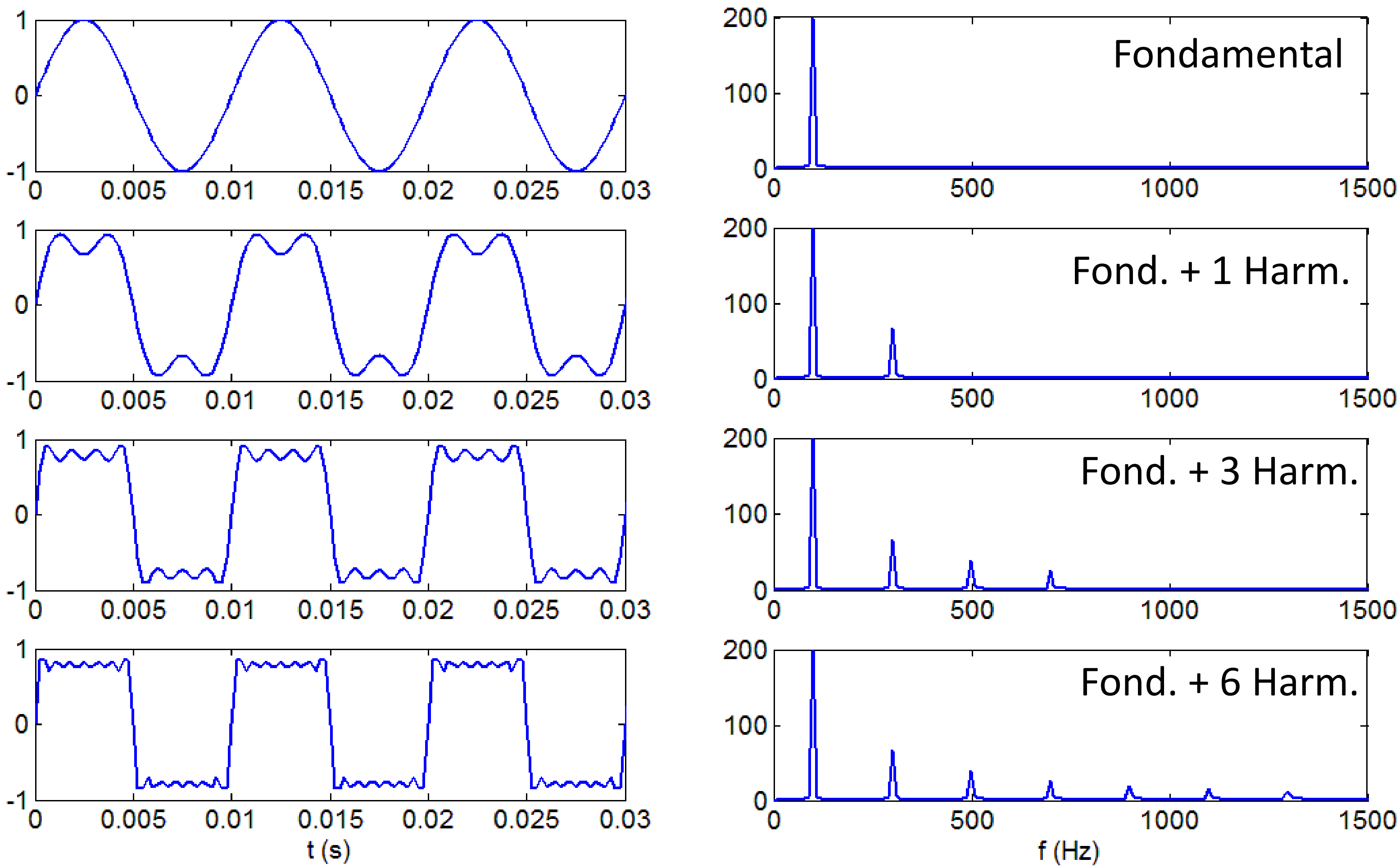


Exemple : signal rectangulaire

I. Signaux déterministes continus
Classification
Espace t-f
TF
Dirac
Séries de F
Convolution
Filtrage
Exemples
Conclusion

Série de Fourier

Spectre



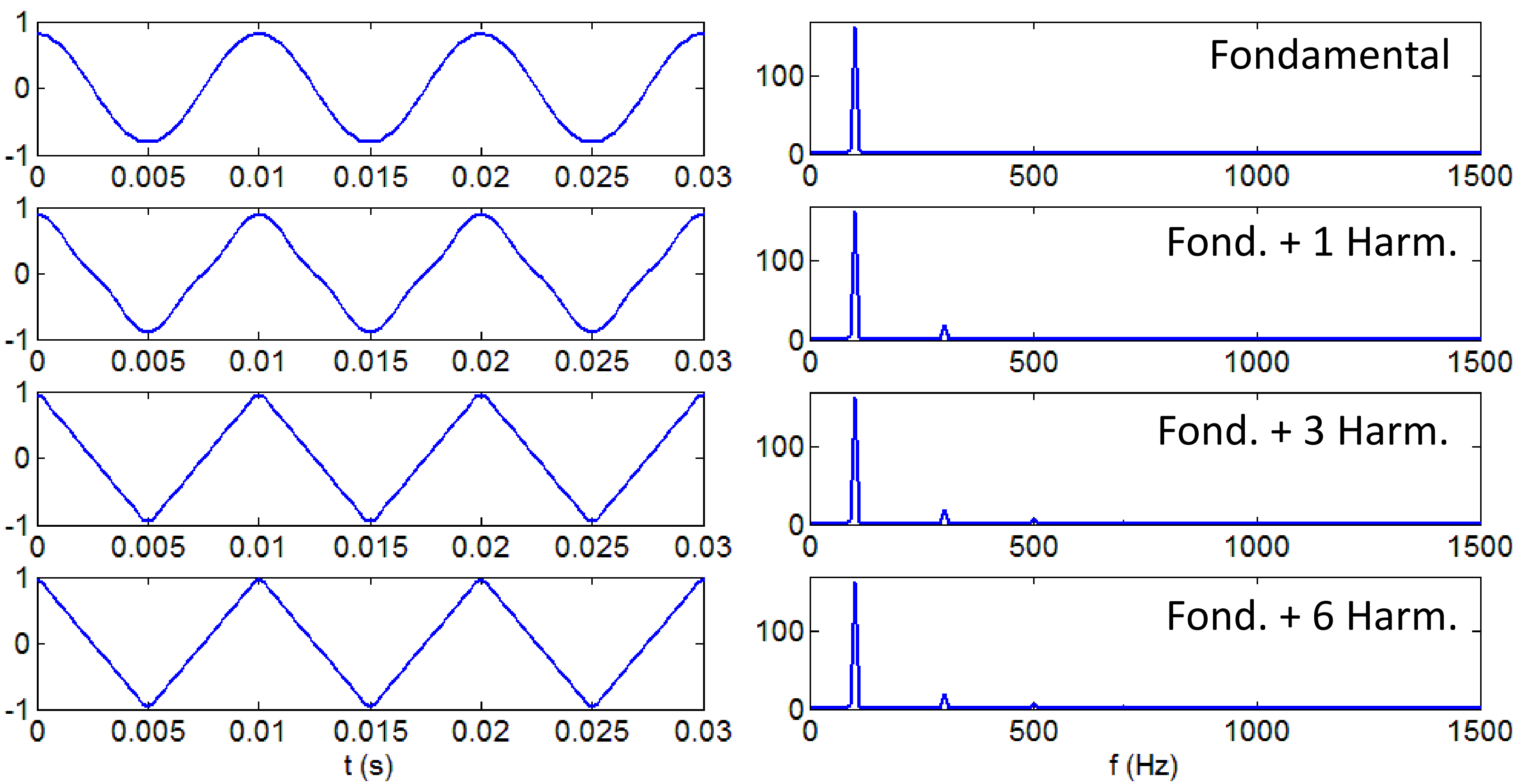
Exemple : signal triangulaire

Il peut être décomposé sous la forme d'une infinité de fonction cosinusoïdales :

- D'amplitude $8/\big(\pi(2n+1)\big)^2$
- De fréquences $\mathrm{F}\cdot(2n+1)$

Série de Fourier

Spectre



TF et signaux périodiques

Soit $x_p(t)$ un signal périodique de période T : $x_p(t) = xp(t + kT)$, $\forall k \in \mathbb{Z}\; et\; T \in \mathbb{R}$

En notant $x_0(t)$, le signal tel que $x_0(t) = x_{p(t)}, \forall\; t \in [0; T]\; et\; 0\; ailleurs$
Le signal $x_p(t)$ peut s'écrire :

$$x_p(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_0(t) * \delta(t - nT)$$

Le spectre de $x_p(t)$ est alors :

$$X_p(f) = X_0(f) F \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(f - nF) = F \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_0(nF)\delta(f - nF)$$

Le spectre d'un signal périodique est un spectre de raie.

Produit de convolution

- Définition

Le produit de convolution de deux fonctions x(t) et y(t) réelles ou complexes est défini, lorsqu'il existe, par :

$$\boxed{x(t) * y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) y(t-\tau) d\tau}$$

- Conditions d'existence
  - L'une des deux fonctions à un support compact
  - Ou les deux fonctions ont des supports bornés du même côté

Propriétés du produit de convolution

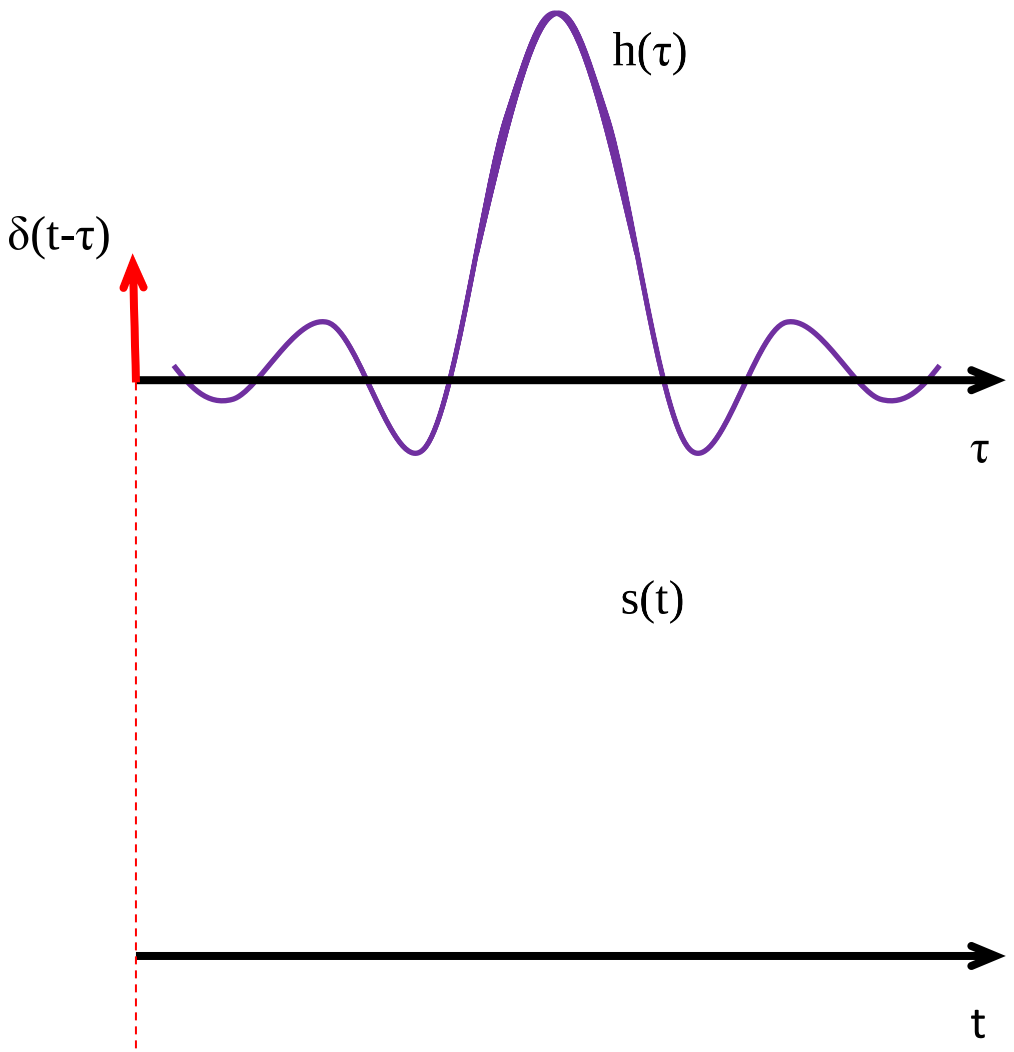
- Commutativité $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
- Distributivité $x(t) * [y(t) + z(t)] = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
- Associativité $x(t) * [y(t) * z(t)] = [x(t) * y(t)] * z(t)$
- Convolution par un dirac

$x(t) * \delta(t) = x(t)$ Elément neutre de la convolution

$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$ Permet d'effectuer une translation

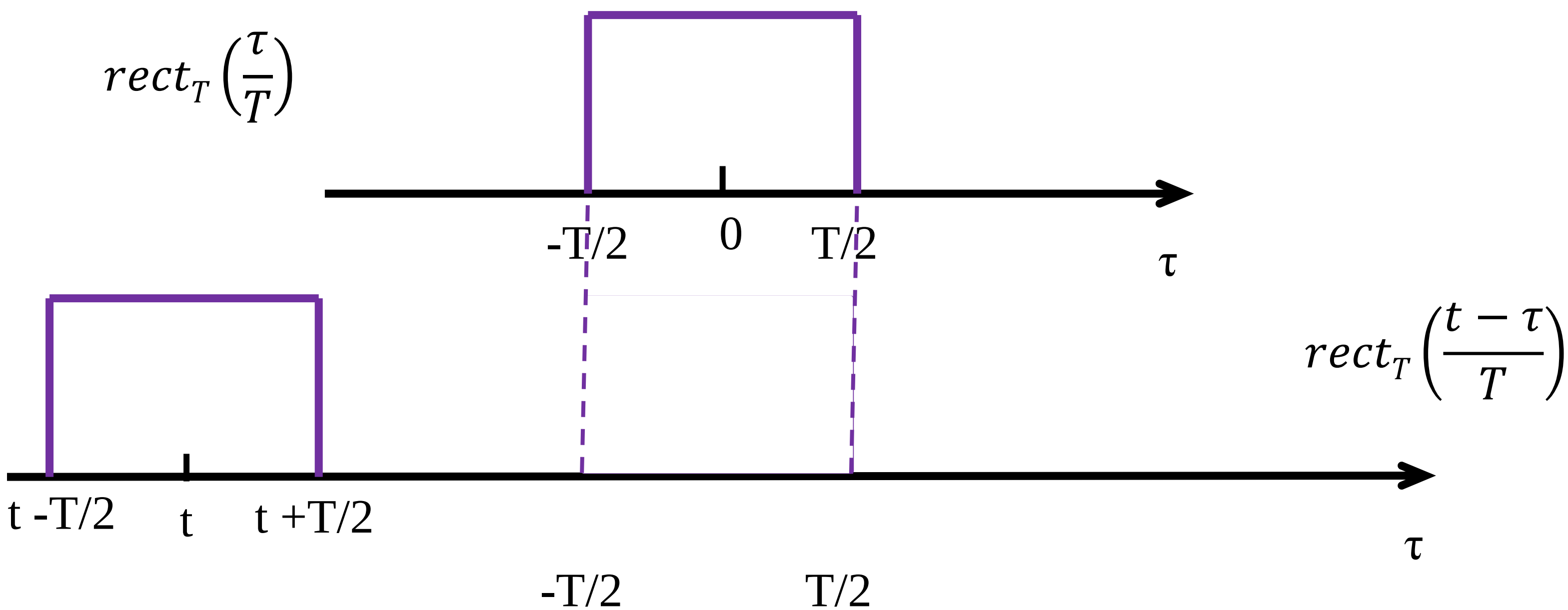
Exemple : convolution par un Dirac

s(t)= h$(t) * \delta(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = h(t)$



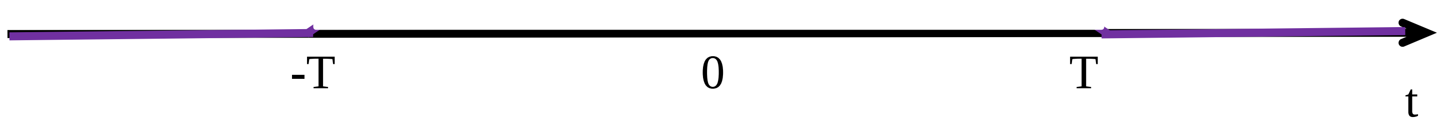
Exemple : convolution de deux rectangles

$$s(t) = h(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} rect_T\left(\frac{\tau}{T}\right) . rect_T\left(\frac{t-\tau}{T}\right) d\tau$$



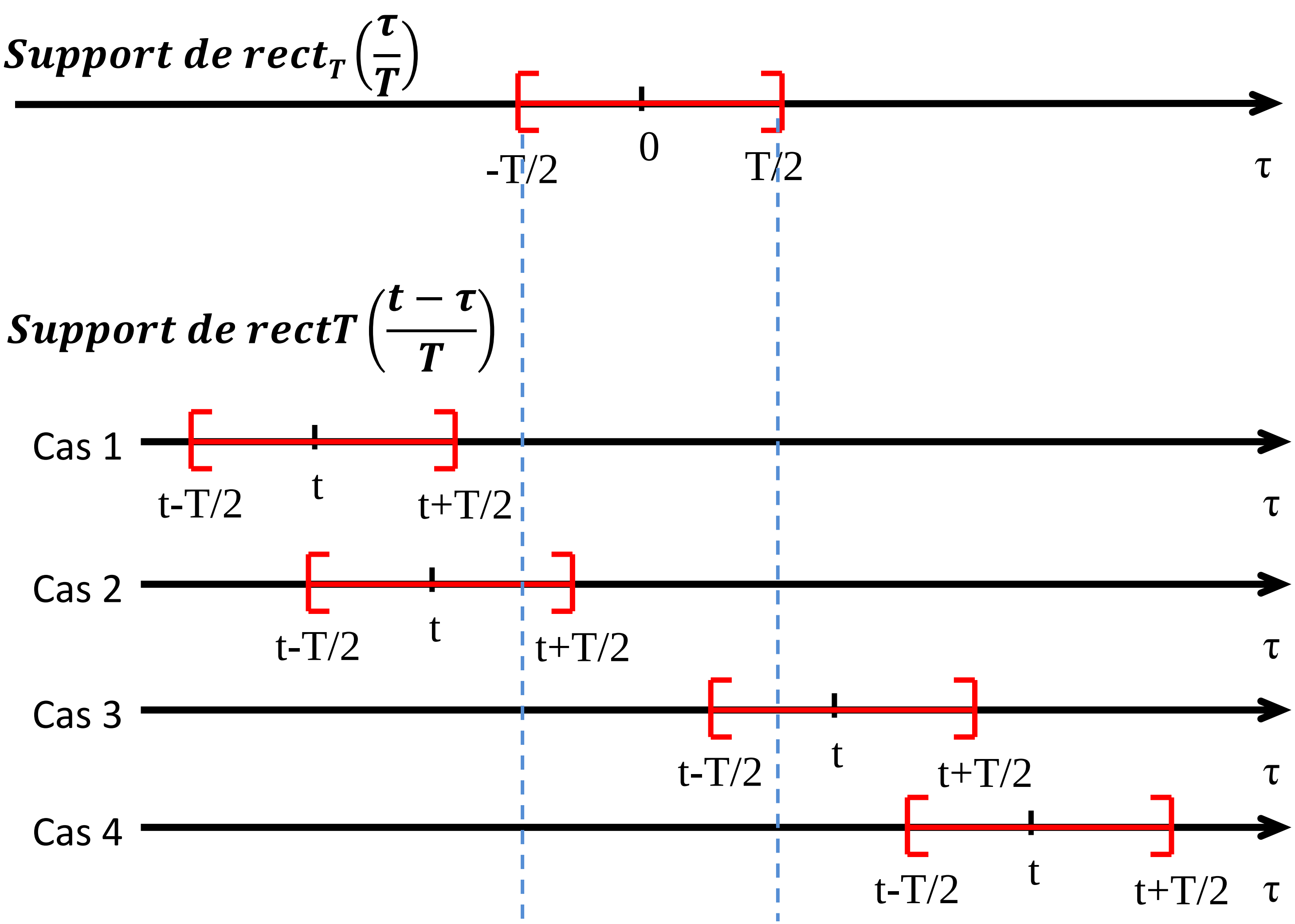
s(t)= $\int_{-T/2}^{t+T/2} d\tau = t + T$

s(t)= $\int_{t-T/2}^{T/2} d\tau = -t + T$



Exemple : convolution de deux rectangles

a. Représenter le support des deux fonctions en envisageant les différentes configurations en fonction de t.



Exemple : convolution de deux rectangles

b. Résoudre l'intégrale dans chaque cas en précisant l'intervalle de t où le calcul est valable :

Cas 1 : t<-T et cas 4 : t>T

Supports disjoints donc produit de convolution nul.

Cas 2 : -T<t<0

$$s(t)=\int_{-T/2}^{T+T/2} d\tau = t+T$$

Cas 3 : 0<t<T

$$s(t)=\int_{t-T/2}^{T/2} d\tau = -t+T$$

Conclusion :

$$s(t)=\begin{cases} t+T\ pout\ t \in [-T,0] \\ -t+T\ pour\ t\ \in [0,T] \\ 0\ ailleur \end{cases}$$

Transformée de Fourier et produit de convolution

- Propriétés

$$TF[x(t) * y(t)] = TF[x(t)] \cdot TF[y(t)] = X(f) \cdot Y(f)$$

$$TF[x(t) \cdot y(t)] = TF[x(t)] * TF[y(t)] = X(f) * Y(f)$$

$$\overline{TF}[X(f) * Y(f)] = \overline{TF}[X(f)] \cdot \overline{TF}[Y(f)] = x(t) \cdot y(t)$$

$$\overline{TF}[X(f) \cdot Y(f)] = \overline{TF}[X(f)] * \overline{TF}[Y(f)] = x(t) * y(t)$$

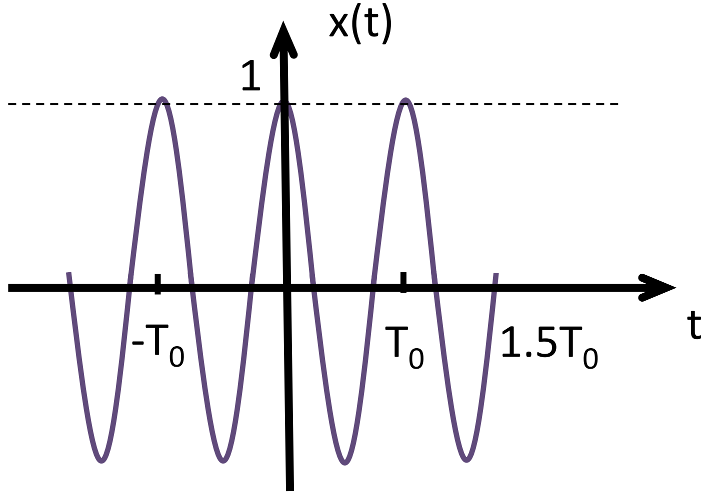
Formules très utiles pour simplifier les calculs !

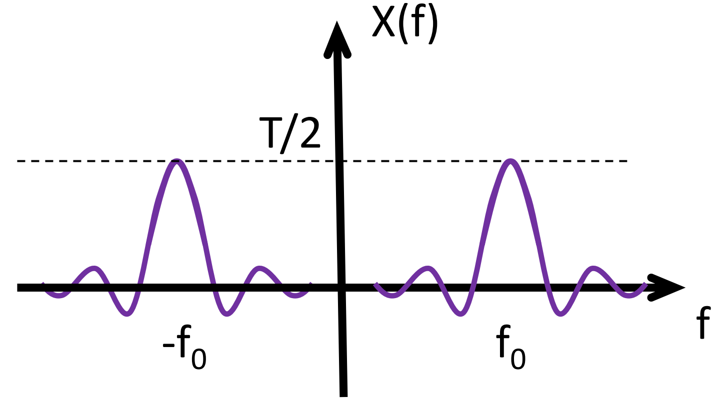
Transformée de Fourier et produit de convolution

- Exemple
  - Calculer le spectre d’un signal sinusoïdal observé à travers la fenêtre d’un oscilloscope (c’est-à-dire sur un temps fini T)

Transformée de Fourier et produit de convolution

- Exemple
  - Calculer le spectre d'un signal sinusoïdale observé à travers la fenêtre d'un oscilloscope (c'est-à-dire sur un temps fini T)





$$X(f) = \frac{T}{2}\{sinc(\pi(f - f_0)T) + sinc(\pi(f + f_0)T)\}$$

Transformée de Fourier et produit de convolution

- Théorème de Parseval

L'énergie d'un signal *x(t)* se retrouve intégralement dans son spectre *X(f)*

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df$$

- Démonstration :

Filtrage fréquentiel

- Système linéaire et invariant dans le temps (LIT)

Linéarité

$$\forall \alpha_1 \; et \; \alpha_2 \; \in \mathbb{C},$$
$$LIT[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 LIT[x_1(t)] + \alpha_2 LIT[x_2(t)]$$

Stationnarité

$$y(t) = LIT[x(t)] \rightarrow y(t - t_0) = LIT[x(t - t_0)]$$

Filtrage fréquentiel

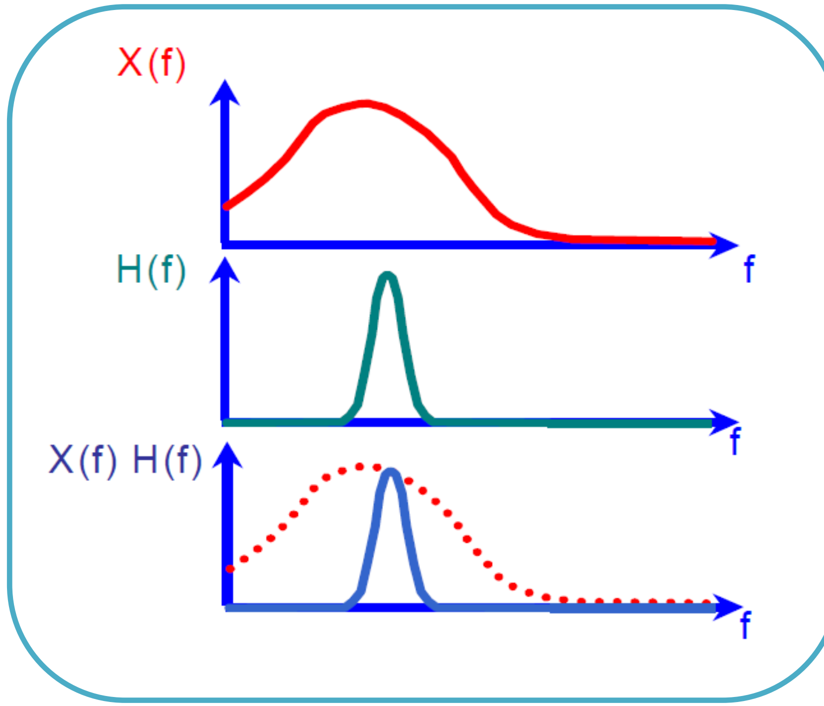
Soit x(t), un signal d'excitation et h(t), un filtre.

L'opération de filtrage h correspond à atténuer ou extraire certaines composantes fréquentielles de x.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$\Updownarrow$ TF

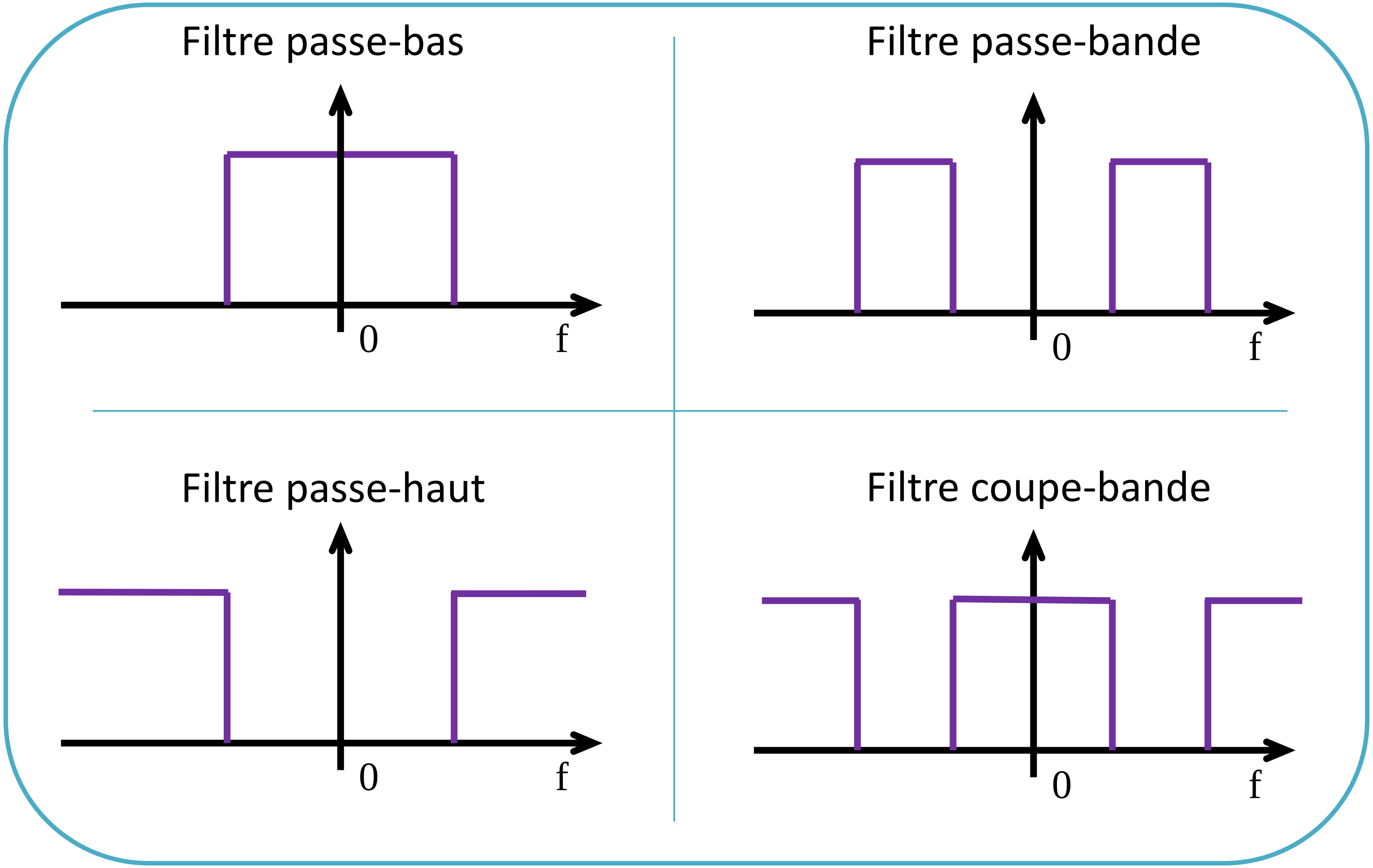
$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$



h(t) est appelé **réponse impulsionnelle** du filtre. Elle le caractérise complètement.
h(t) est obtenue en excitant le filtre par une distribution de Dirac,

Filtrage fréquentiel

- Spectre idéaux des 4 principaux types de filtrage



Filtrage fréquentiel

- Causalité et déphasage

Pour qu'un filtre soit causale, il faut que $h(t)$ soit causale.
L'effet ne doit pas précéder la cause => $h(t) \in [0, +\infty[$
En conséquence, $h(t)$ n'est ni paire ni impaire.

$$h(t) = \mathrm{fpaire(t)} + \mathrm{fimpair(t)}$$

$$\Rightarrow H(f) = TF[h(t)] = \mathrm{Re(H(f))} + \mathrm{j.Im(H(f))}$$

Un filtre physiquement réalisable déphase obligatoirement !

Diagramme de Bode

- Soit H(f) la fonction de transfert d'un système quelconque. Le diagramme de Bode est la représentation en gain et en phase de H(f) :

Module de H(f) : gain

$$|H(f)| = \sqrt{H(f) \cdot H^*(f)}$$

Gain en décibel

$$G_{dB} = 20 \cdot log(|H(f)|)$$

Argument de H(f) : phase

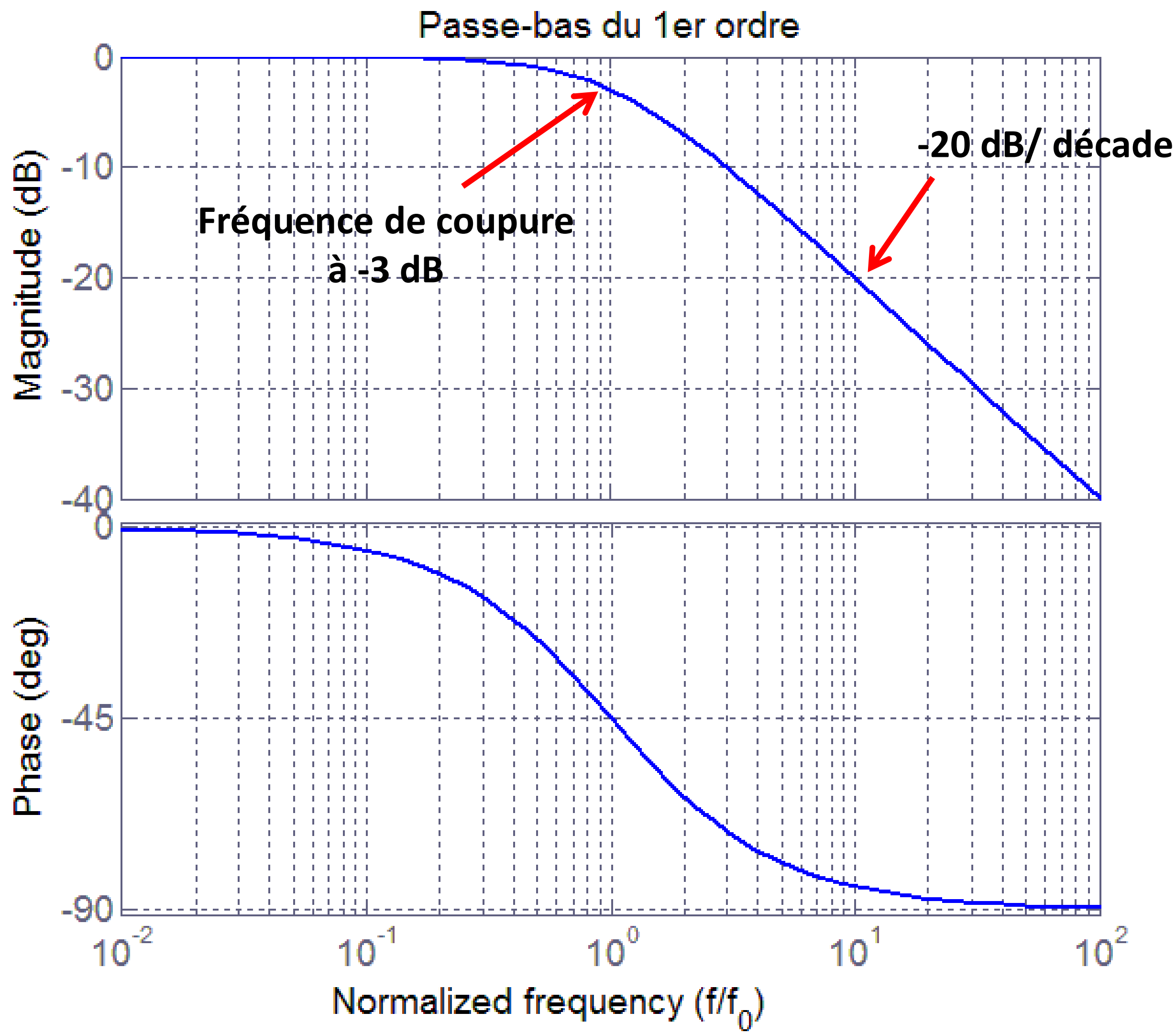
$$arg(H(f)) = arctan\left\{\frac{Im(H(f))}{Re(H(f))}\right\}$$

Exemple :

$$c = a + jb \Rightarrow \begin{cases} |c| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ arg(c) = arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

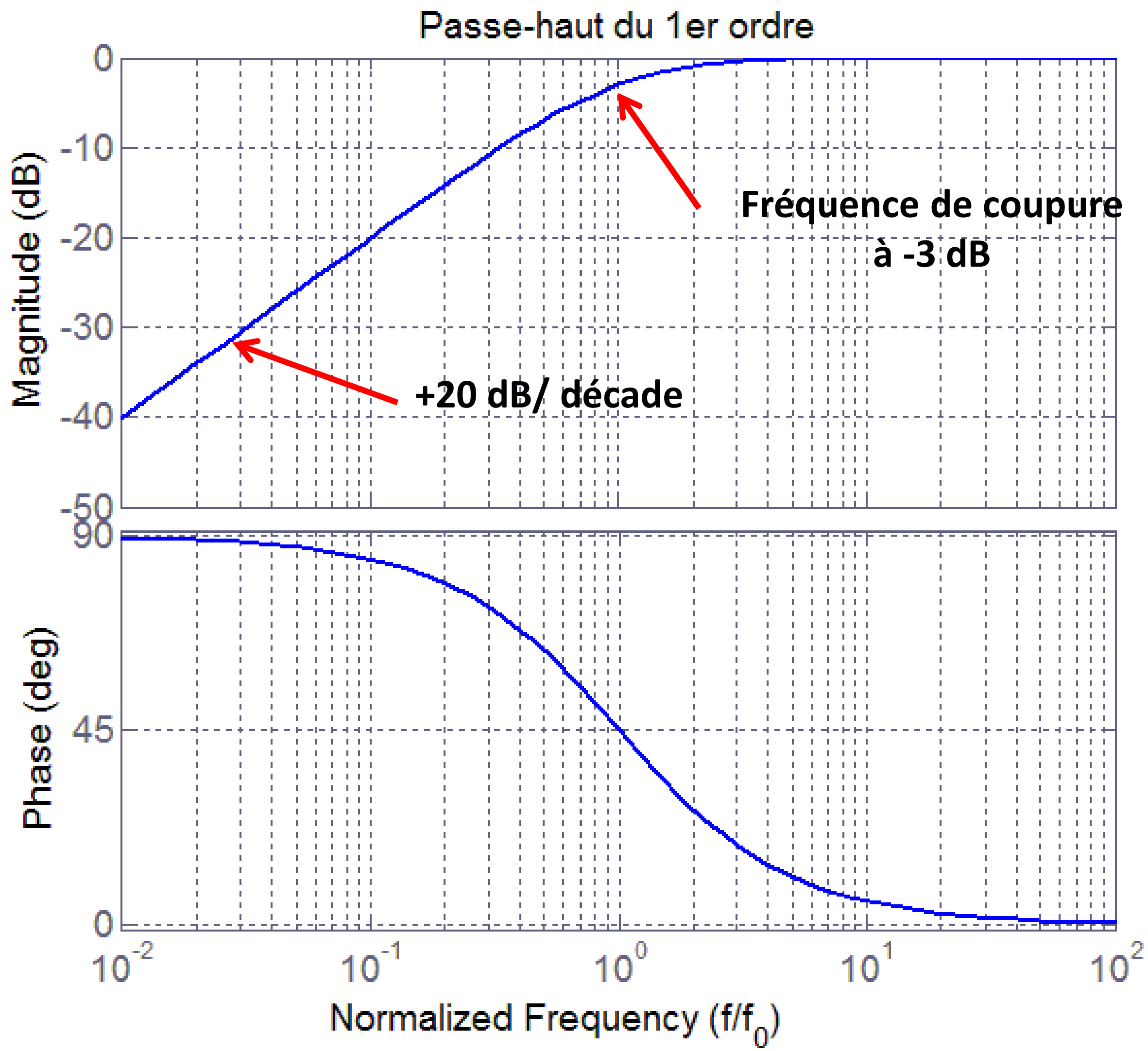
Filtre passe-bas du 1er ordre

$$H(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_0}}$$



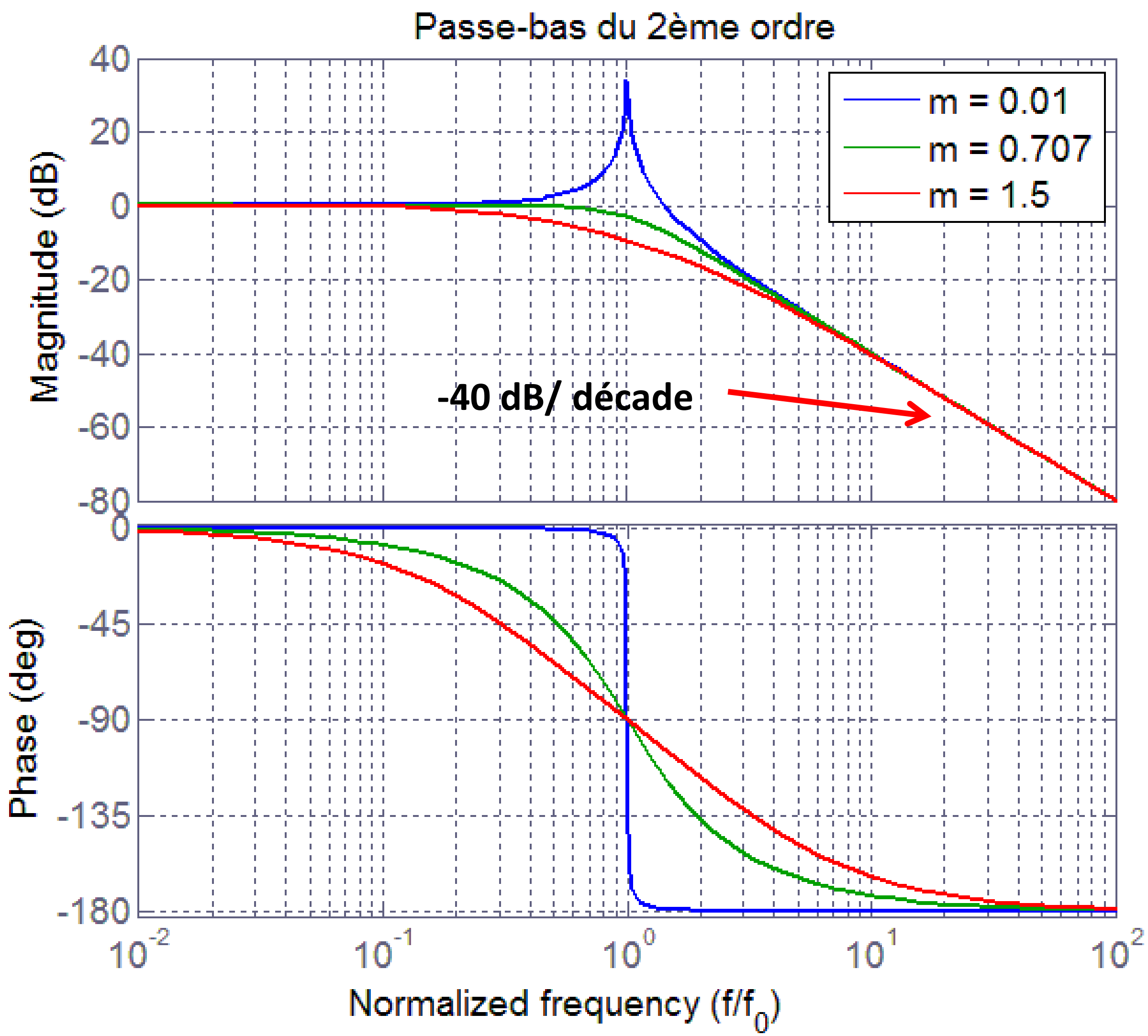
Filtre passe-haut du 1er ordre

$$H(f) = \frac{j\frac{f}{f_0}}{1 + j\frac{f}{f_0}}$$



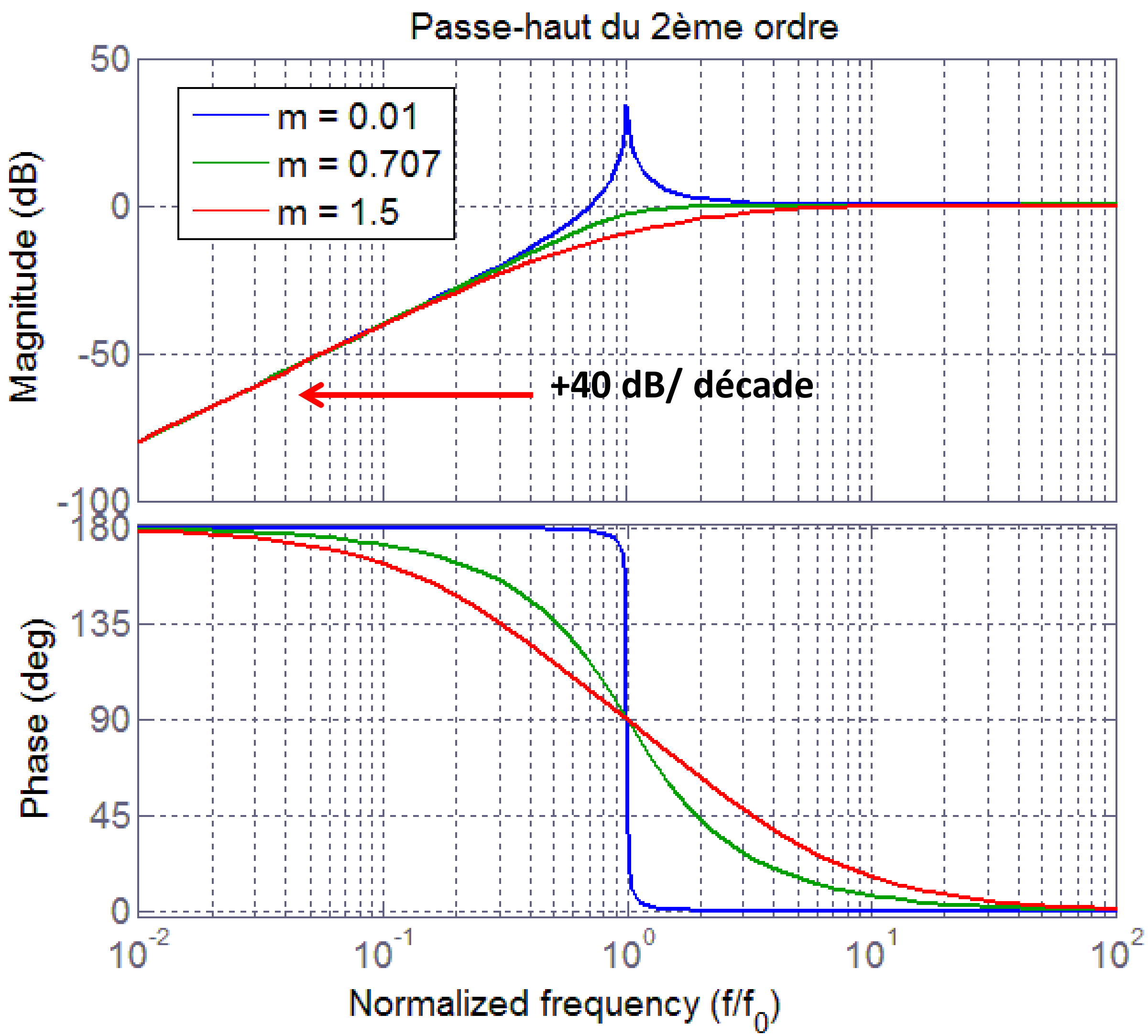
Filtre passe-bas du 2ème ordre

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2m\frac{f}{f_0} - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$



Filtre passe-haut du 2ème ordre

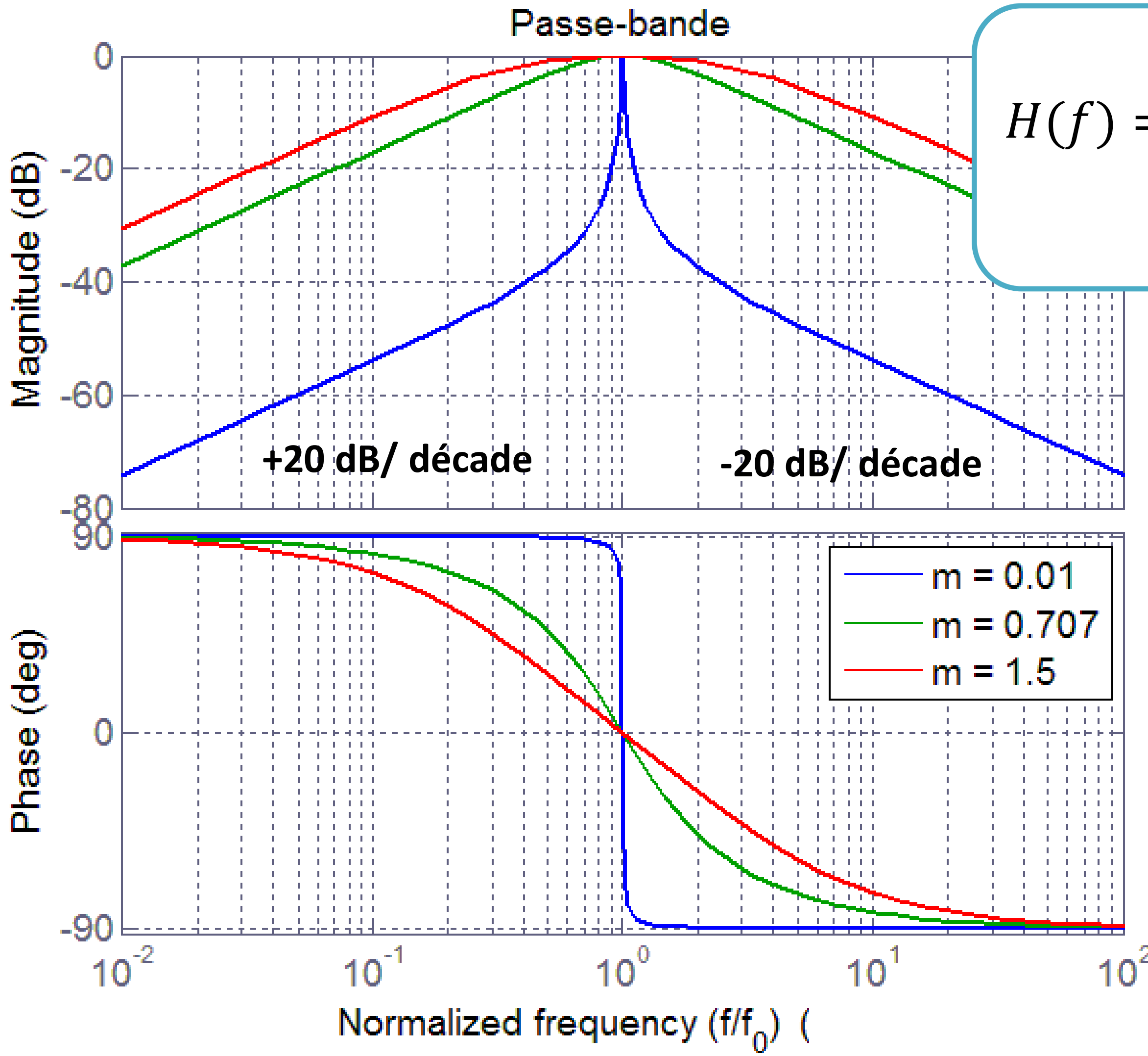
$$H(f) = \frac{-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1 + j2m\frac{f}{f_0} - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$



Filtre passe-bande du 2ème ordre

$$H(f) = \frac{j2m\frac{f}{f_0}}{1 + j2m\frac{f}{f_0} - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

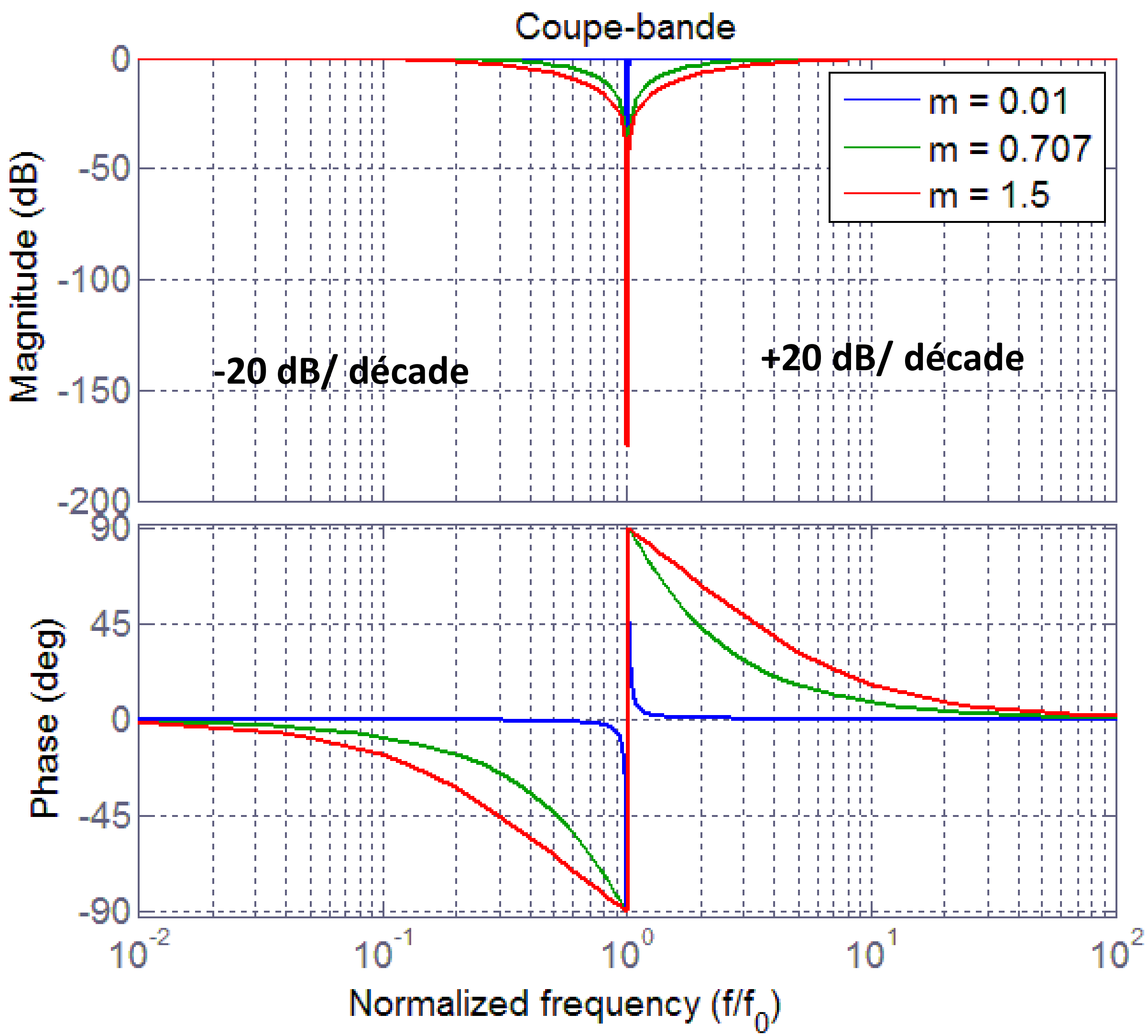
$$H(f) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$



Q : facteur de qualité
$Q = f_0/\Delta f$

Filtre coupe-bande du 2ème ordre

$$H(f) = \frac{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1 + j2m\frac{f}{f_0} - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$



Notions de distorsion

- **Distorsion d'amplitude**
  Gain non constant pour toutes les fréquences

- **Distorsion de phase**
  Phase non linéaire : fréquence retardées ou avancées de façons différentes

- **Distorsion dans les systèmes non linéaires**
  Soit x(t) $\rightarrow y(t) = x(t) + x^2(t)$

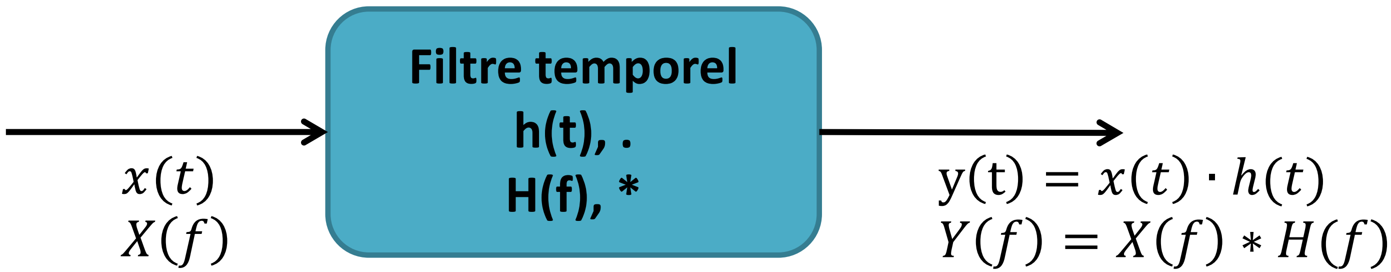
$$si\ x(t) = a_1 \cdot cos(2\pi f_1 t) + a_2 \cdot cos(2\pi f_2 t)$$

$$\rightarrow y(t) = \frac{(a_1^2 + a_2^2)}{2} + a_1 \cdot cos(2\pi f_1 t) + a_2 \cdot cos(2\pi f_2 t)$$
$$+ \frac{1}{2}\{a_1{}^2 cos(4\pi f_1 t) + a_2{}^2 cos(4\pi f_2 t)\}$$
$$+ a_1 a_2 \{cos(2\pi(f_1 - f_2)t) + cos(2\pi(f_1 + f_2)t)\}$$

- **Distorsion harmonique** : fréquence $2f_1$ et $2f_2$
- **Distorsion d'intermodulation** : fréquence $(f_1\text{-}f_2)$ et $f_1\text{+}f_2)$

Apodisation (Filtrage temporel)

Apodisation : Multiplieur temporel – convolueur fréquentiel



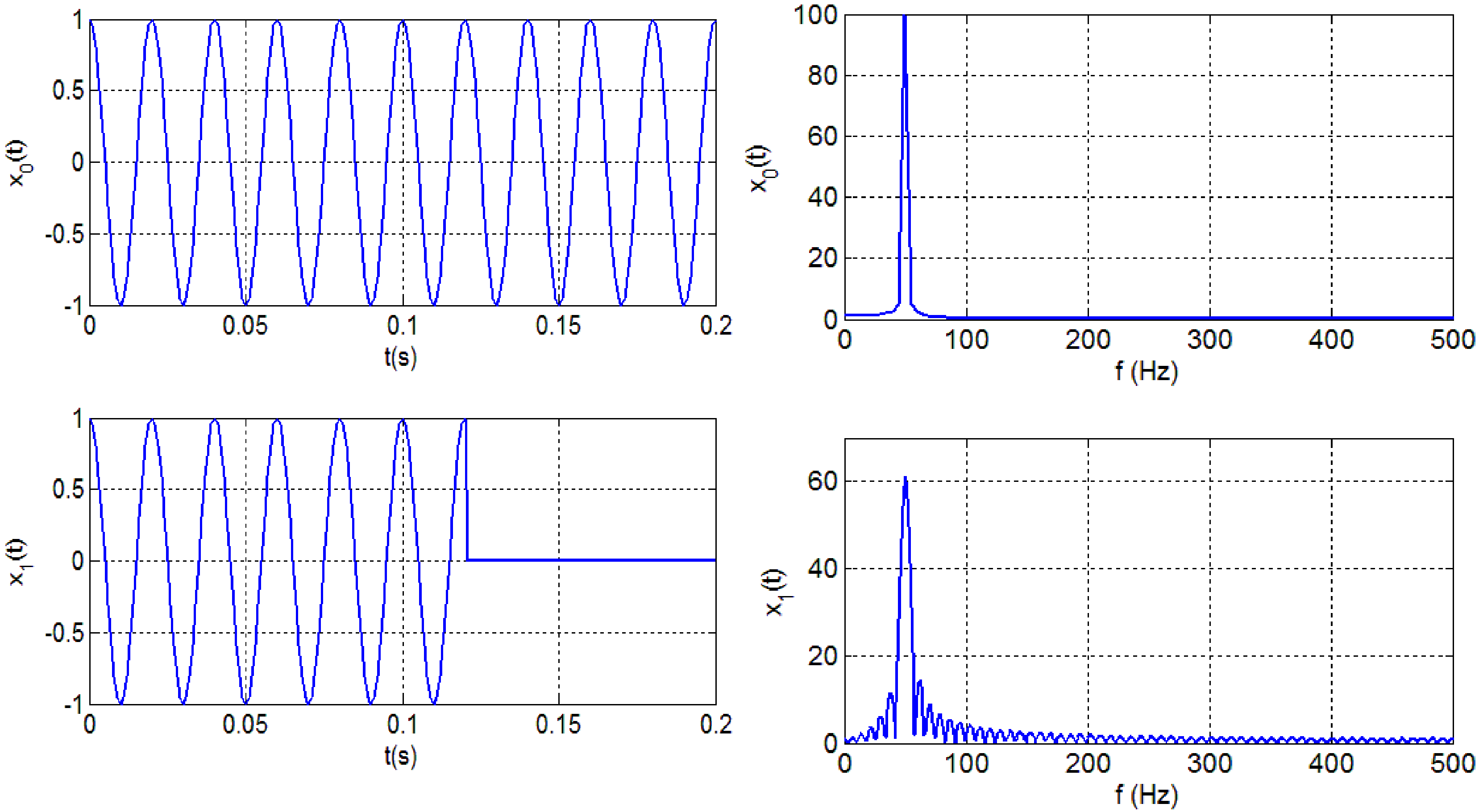
Remarque : il n'existe pas de filtre temporel ne modifiant pas le spectre du signal d'entrée (seul solution le Dirac en fréquence)

Application : En pratique les signaux ne sont jamais utilisés intégralement mais sur une tranche temporelle.
L'opération se traduit par une multiplication avec une fenêtre :

$$x(t,T) = x(t) \cdot rectT(t/T) \quad \xrightarrow{\text{TF}} \quad X(f,T) = X(f) * \left(Tsinc(\pi f T)\right)$$

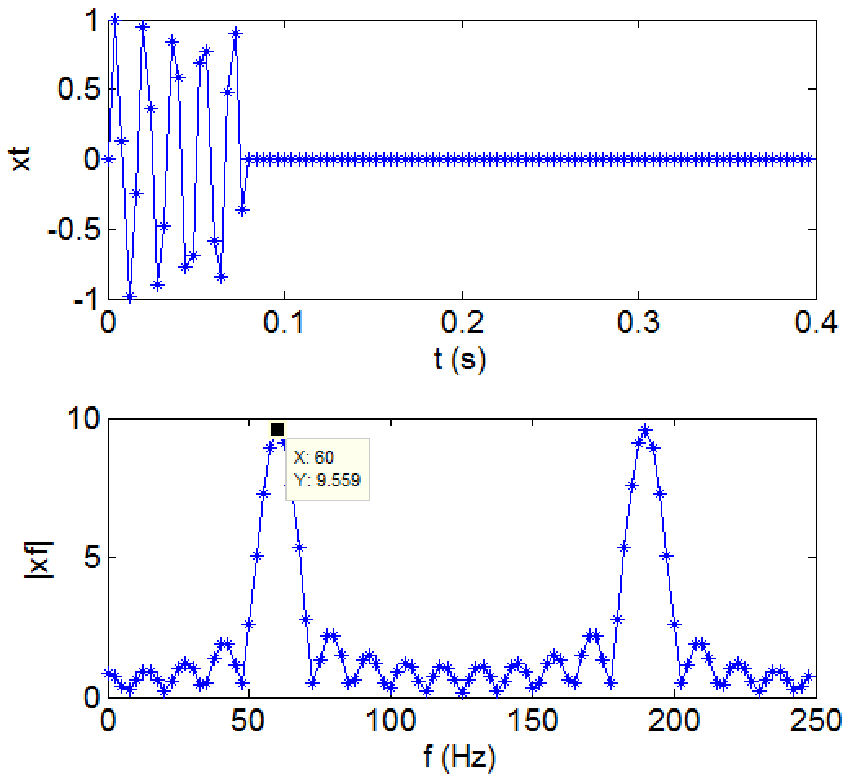
Apodisation (Filtrage temporel)

Exemple : fenêtre rectangulaire



Apodisation (Filtrage temporel)

Comme nous venons de le voir, le fait de ne prendre qu'une partie du signal à un effet sur le spectre :



Opération d'apodisation :

$$x_{ap}(t) = x(t) \cdot rect_T\left({}^{t}/_{T}\right)$$

TF

$$X_{ap}(f) = X(f) * Tsinc(\pi f T)$$

L'apodisation que l'on fait le plus souvent est fait avec une fenêtre rectangle mais il existe un grand nombre de fenêtre

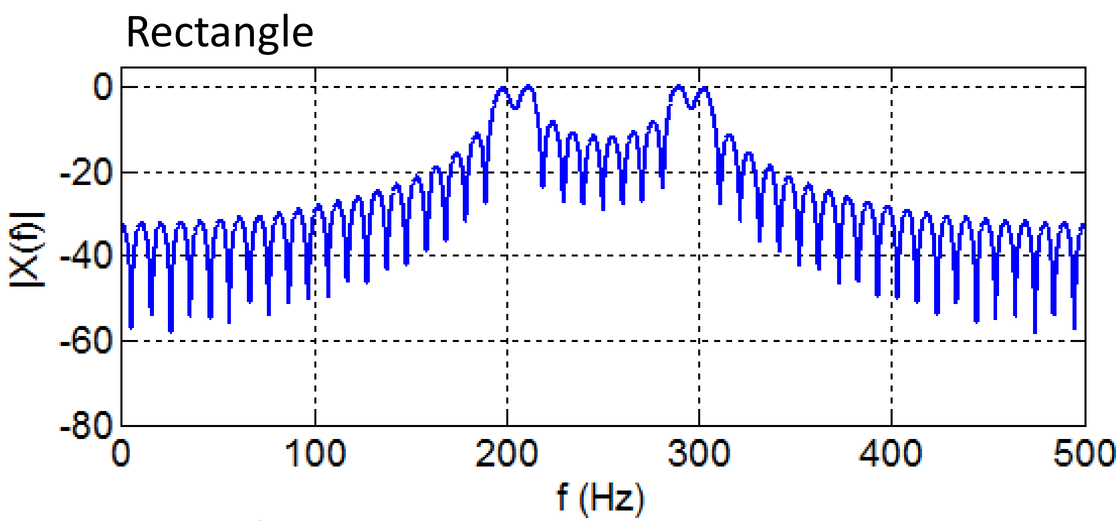
Apodisation (Filtrage temporel)

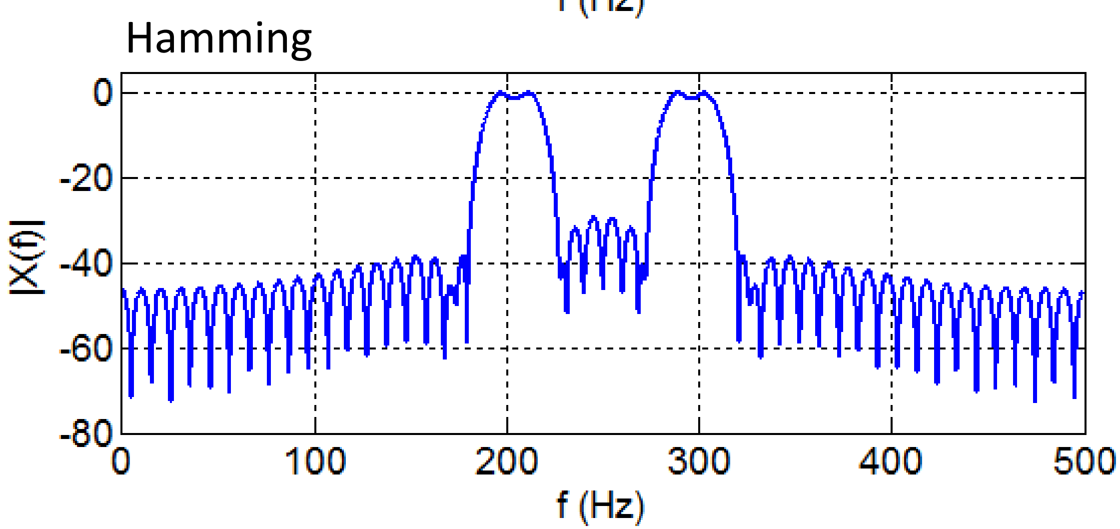
Type de fenêtre	Atténuation en dB entre lobe principal et premier lobe secondaire	Largeur du lobe principal
Rectangulaire	13	${2F_e}/{N}$
Bartlett	26	${4F_e}/{N}$
Hanning	31	${4F_e}/{N}$
Hamming	41	${4F_e}/{N}$
Blackman	57	${6F_e}/{N}$
Nuttall	95	${8F_e}/{N}$

Compromis à faire entre lobe secondaire et largeur du lobe principal.
Le choix de la fenêtre dépend du signal à observer

Apodisation (Filtrage temporel)

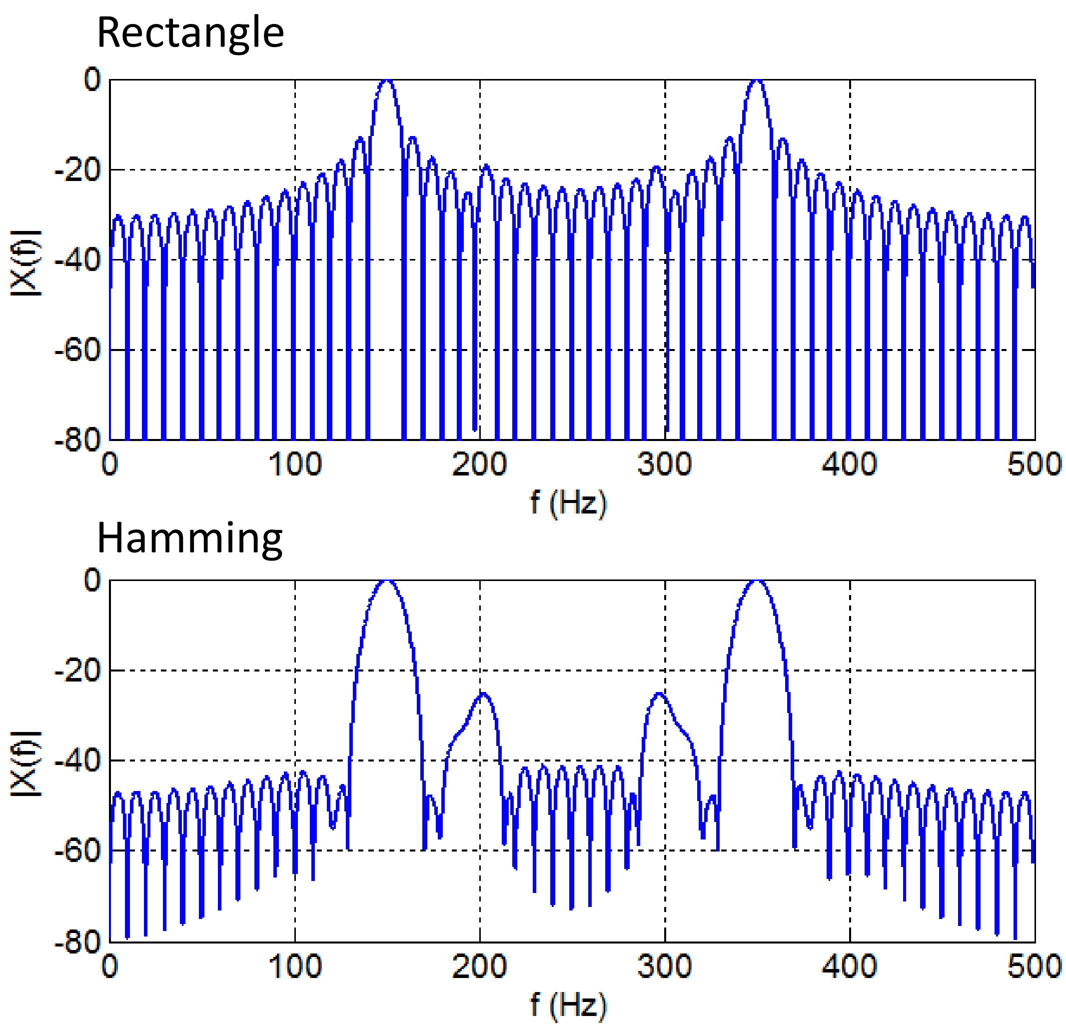
Signaux des fréquences très proches





Apodisation (Filtrage temporel)

Signaux avec de grandes différences d'amplitude



A retenir

Représentations en temps : signaux
Représentations en fréquence : spectre

Représentation :
- **Différentes**
- **Complémentaires**
- **Sans perte d'énergie ! (th. de Parseval)**

Passage de l'une à l'autre représentation :
- **Transformée de Fourier**
- **Opérateur réversible**