Document autorisé : Les tables des lois de probabilité
Calculatrice autorisée : type collège.
Le barème est donné à titre indicatif et peut subir éventuellement quelques modifications.

Exercice 1 *(6 points)*

1. Soit le signal rectangle définie par

$$x(t) = A \quad rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & \text{si } -\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Calculer la transformée de Fourier de ce signal.

2. Déterminer la série de Fourier du signal $y(t)$ défini par
   - y est $2T$ périodique
   - $\forall t \in [-T; T],\ y(t) = x(t)$

   Quel est le mode de convergence de cette série ?

Exercice 2 *(4 points)*
Calculer la transformée de Fourier discrète de la suite (x_n) formée de $N = 8$ points obtenue en échantillonnant à la fréquence $f_e = 8$ Hz le signal :

$$x(t) = 2\sin(8\pi t) + 8\cos(4\pi t)$$

On prendra ainsi les points $x_k = x(k/8)$ pour $k \in [\![0; 7]\!]$

Exercice 3 *(8,5 points)*
On considère un couple de variables aléatoires continues (X, Y) dont la densité jointe est donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} k\left(\frac{1}{x^2} + y^2\right) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 5 \text{ et } -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de k la fonction f est-elle bien une densité ?
2. Calculer les densités marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la covariance de X et Y (Rappel $cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$)

Exercice 4 *(6 points)*
Robert et Brad doivent aller à une soirée, mais on leur a demandé pour le TD du lendemain de faire un exercice de probabilité. Ils commencent de travailler à 21h et la soirée se déroule juste à côté de chez eux.
Les temps de la résolution de l'exercice par Robert et Brad suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs 2λ et 3λ en mn où $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose qu'ils cherchent de façon indépendante cet exercice.

1. Déterminer la probabilité que Robert ait trouvé la solution de l'exercice avant Brad.
2. Dès que l'un des 2 aura résolu cet exercice, ils iront à la soirée. Montrer que la variable aléatoire T égale au temps passé avant leur départ à la soirée suit une loi exponentielle de paramètre 5λ.
3. Stéphanie part de chez elle à 21h pour aller à cette soirée, son temps de parcours en minutes suit une loi uniforme sur $[20; 40]$. Déterminer en fonction de λ la probabilité que Stéphanie soit avant Robert et Brad.

Exercice 5 *(5,5 points)*
Un restaurateur a été chargé de préparer un repas pour 1200 personnes, ce repas devant comporter deux types de menu A et B. Une longue expérience a montré à ce restaurateur que, devant un tel choix, une personne sur 3 choisit le menu A. Le restaurateur prévoit a menus A et b menus B.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui choisissent le menu A. Quelle est la loi de probabilité de X. Justifier que l'on peut approcher X par une variable aléatoire qui suit une loi normale.
2. Quelle valeur minimum doit-il donner à a s'il veut qu'il y ait une probabilité inférieure ou égale à 0,1 pour que les menus A soient en nombre insuffisant?
3. Quelle valeur minimum doit-il donner à b s'il veut qu'il y ait une probabilité inférieure ou égale à 0,1 pour que les menus B soient en nombre insuffisant?
4. En supposant que a et b aient les valeurs minimales trouvées aux questions précédentes, quelle est la probabilité que ce restaurateur ne puisse pas satisfaire la demande de tous ces clients?