# MA 411 : Modélisation et analyse des processus stochastiques

**Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)**
Séance de TD du 13 mai 2020

Vous trouverez ci-après l'énoncé et le corrigé de l'exercice 25 de la séance de TD consacrée aux chaînes de Markov à temps continu. La correction a été rédigée dans le but de vous aider si vous êtes bloqué ou pour vérifier votre propre travail. Il se peut qu'elle contienne elle-même des erreurs. Si tel est le cas, elles seront corrigées au fur et à mesure qu'elles sont détectées. La version en ligne sur *https://chamilo.grenoble-inp.fr/courses/MA332* sera mise à jour de manière à intégrer ces corrections. Dans de nombreux exercices, il existe plusieurs méthodes pour aboutir au résultat. Si vous avez des doutes sur la méthode que vous avez vous-même employée, n'hésitez pas à m'en faire part (*laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr*).

**Exercice 25**
Une salle est équipée de $n$ ordinateurs. La durée de fonctionnement de chacun des ordinateurs suit une loi $Exp(\mu)$. La durée de remise en état de chaque ordinateur suit une loi $Exp(\lambda)$. Le réseau est maintenu en service par $n$ techniciens. Toutes les durées sont indépendantes. On note $X(t)$ le nombre d'ordinateurs qui fonctionnent à l'instant $t$.

1. Donner le graphe et les taux de transition pour $X(t)$
2. Donner la distribution stationnaire de probabilités
3. Donner, en régime stationnaire, le nombre moyen d'ordinateurs en fonctionnement.
4. Donner le graphe si la salle ne possède plus qu'un technicien

**Correction de l'Exercice 25**

1. On pose $X(t) \in E := \{0, \dots, n\}$, le nombre d'ordinateurs qui fonctionnent au temps $t > 0$. Il est facile de calculer, en reproduisant les mêmes raisonnements que dans les deux exercice précédents, les taux de transition entre les états de la CMTC qui modélise ce processus stochastique. Les taux qui correspondent aux transitions d'un état $k \in \{0, \dots, n-2\}$ vers un état $l \geq k+2$ sont tous nuls. De même, Les taux qui correspondent aux transitions d'un état $k \in \{2, \dots, n\}$ vers un état $l \leq k-2$ sont tous nuls également. La probabilité d'une transition entre l'état $k$ et l'état $k+1$ (pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$), pendant un intervalle de temps $dt$, correspond à la fin de la réparation d'un des $n-k$ ordinateurs en cours de réparation pendant cet intervalle de temps. Cette probabilité s'écrit :

$$\begin{aligned} p_{k,k+1}(dt) &= \sum_{p=1}^{n-k} P\left(T_p^\lambda \leq dt\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n-k} P\left(T_j^\lambda > dt\right) \prod_{l=1}^{k} P\left(T_l^\mu > dt\right) \\ &= (n-k)(1-e^{-\lambda\, dt}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n-k} e^{-\lambda\, dt} \prod_{l=1}^{k} e^{-\mu\, dt} \\ &= (n-k)\lambda\, dt\, \left(1 + O(dt)\right), \text{ pour } dt \to 0 \end{aligned}$$

où $T_l^\mu$ représente la durée de fonctionnement de l'ordinateur $l$ (parmi les $k$ en fonctionnement) et $T_p^\lambda$ représente la durée de réparation de l'ordinateur $p$ (parmi les $n-k$ en cours de réparation). Le taux de transition correspondant vaut :

$$\lambda_{k,k+1} := \lim_{dt \to 0} \frac{p_{k,k+1}(dt)}{dt} = (n-k)\lambda\,,\ \forall k \in \{0, \dots, n-1\} \qquad (1)$$

De la même manière, la probabilité d'une transition entre l'état $k$ et l'état $k-1$ (pour $k \in \{1, \dots, n\}$), pendant un intervalle de temps $dt$, correspond à la panne d'un des $k$ ordinateurs en fonctionnement pendant cet intervalle de temps. Cette probabilité s'écrit :

$$\begin{aligned} p_{k,k-1}(dt) &= \sum_{p=1}^{k} P\left(T_p^\mu \leq dt\right) \prod_{j=1}^{n-k} P\left(T_j^\lambda > dt\right) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq p}}^{k} P\left(T_l^\mu > dt\right) \\ &= k(1-e^{-\mu\, dt}) \prod_{j=1}^{n-k} e^{-\lambda\, dt} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq p}}^{k} e^{-\mu\, dt} \\ &= k\mu\, dt\, \left(1 + O(dt)\right), \text{ pour } dt \to 0 \end{aligned}$$

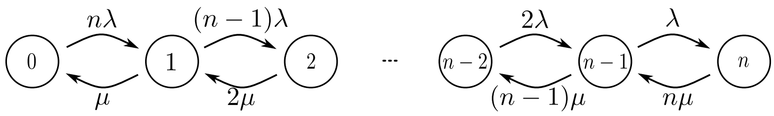

Figure 1: La chaîne de Markov à temps continu qui modélise le nombre d'ordinateurs fonctionnant au temps $t > 0$

Le taux de transition correspondant vaut :

$$\lambda_{k,k-1} := \lim_{dt \to 0} \frac{p_{k,k-1}(dt)}{dt} = k\mu \,,\ \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

Nous venons d'établir, pour le procesus stochastique considéré, le modèle par CMTC représenté à la figure 1. Le *générateur infinitésimal* correspondant s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -n\lambda & n\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu & -\mu-(n-1)\lambda & (n-1)\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu-(n-2)\lambda & (n-2)\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & (n-1)\mu & -(n-1)\mu-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n\mu & -n\mu \end{pmatrix}$$

2. les équations d'équilibre en chaque noeud sont des récurrences à trois termes. Il sera plus facile ici d'écrire plutôt les équations issues de la méthode des coupes, avec les coupes illustrées à la figure 2. Les équations qui correspondent aux coupes $C_k$, pour $k \in \{1, \dots, n\}$ s'écrivent :

$$(n - (k-1))\, \lambda \boldsymbol{\pi}_{k-1} = k\mu \boldsymbol{\pi}_k \tag{2}$$

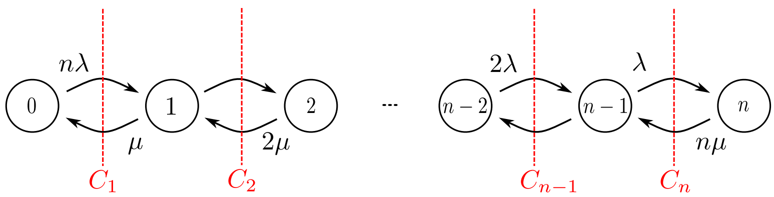

Figure 2: Les coupes qui permettent d'obtenir plus facilement, dans l'exemple de la salle d'ordinateurs, la distribution stationnaire de probabilités

On obtient directement :

$$\boldsymbol{\pi}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \boldsymbol{\pi}_0$$

Et la condition de normalisation s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \boldsymbol{\pi}_0 \left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \frac{\mu^n}{(\mu+\lambda)^n}$$

3. On définit le nombre moyen d'ordinateurs qui fonctionnent par

$$\bar{N} = E\left(X_\infty\right) := \sum_{n=0}^{K} n\boldsymbol{\pi}_n = \sum_{n=1}^{K} n\boldsymbol{\pi}_n$$

La somme des équations (2) donne

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} \left(n-(k-1)\right)\boldsymbol{\pi}_{k-1} = \mu \sum_{k=1}^{n} k\boldsymbol{\pi}_k$$

c'est-à-dire

$$\lambda\left[n\left(1-\boldsymbol{\pi}_n\right) - \left(\bar{N} - n\boldsymbol{\pi}_n\right)\right] = \mu\bar{N}$$

On trouve ainsi

$$\bar{N} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} n$$

4. Dans le cas où il n'y a qu'un seul technicien, un seul ordinateur peut être réparé à la fois. Il faut donc remplacer les taux de transition de l'équation (1) par les taux

$$\lambda_{k,k+1} := \lambda\,,\ \forall k \in \{0,\ldots,n-1\}$$

On obtient alors la CMTC illustrée à la figure 3.


Figure 3: LLa CMTC qui modélise la salle d'ordinateurs avec un seul technicien