Chapitre 5 : Convergence de Variables aléatoires
MA 361 : Probabilités continues

Pierre-Alain TOUPANCE
pierre-alain.toupance@esisar.grenoble-inp.fr

Grenoble INP - ESISAR
3$^{\text{ième}}$ année

14 janvier 2021

Inégalité de Bienaymé - Tchébychev

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$.
On a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(\mid X - \mathbb{E}(X) \mid \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Inégalité de Bienaymé - Tchébychev

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$.
On a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(\mid X - \mathbb{E}(X) \mid \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque :

1. Cette inégalité permet de majorer la probabilité que X soit éloigné d'au moins ε de $\mathbb{E}(X)$.
2. Cette probabilité est d'autant plus faible que $\mathbb{V}(X)$ est petit.

Démonstration : 1er cas X VAR discrète

Démonstration : 1er cas X VAR discrète
Soit $(x_i, p_i)_{i \in I}$ la loi de probabilité de X où
$I = \{1, 2, ..., n\}$ ou $\mathbb{N}$ Soit $J = \{i \in I, \mid x_i - \mathbb{E}(X_i) \mid \geqslant \varepsilon\}$

Démonstration : 1er cas X VAR discrète
Soit $(x_i, p_i)_{i\in I}$ la loi de probabilité de X où
$I = \{1, 2, ..., n\}$ ou $\mathbb{N}$ Soit $J = \{i \in I, \mid x_i - \mathbb{E}(X_i) \mid \geqslant \varepsilon\}$ On a :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i\in J}(x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i + \sum_{i\notin J}(x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i$$

Démonstration : 1er cas X VAR discrète
Soit $(x_i, p_i)_{i \in I}$ la loi de probabilité de X où
$I = \{1, 2, ..., n\}$ ou $\mathbb{N}$ Soit $J = \{i \in I, \mid x_i - \mathbb{E}(X_i) \mid \geqslant \varepsilon\}$ On a :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i \in J} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i + \sum_{i \notin J} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i$$

Ainsi

$$\mathbb{V}(X) \geqslant \sum_{i \in J} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i \geqslant \varepsilon^2 \sum_{i \in J} p_i$$

Démonstration : 1er cas X VAR discrète
Soit $(x_i, p_i)_{i \in I}$ la loi de probabilité de X où
$I = \{1, 2, ..., n\}$ ou $\mathbb{N}$ Soit $J = \{i \in I, \mid x_i - \mathbb{E}(X_i) \mid \geqslant \varepsilon\}$ On a :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i \in J} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i + \sum_{i \notin J} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i$$

Ainsi

$$\mathbb{V}(X) \geqslant \sum_{i \in J} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i \geqslant \varepsilon^2 \sum_{i \in J} p_i$$

D'où

$$\mathbb{V}(X) \geqslant \varepsilon^2 P(\mid X - \mathbb{E}(X) \mid \geqslant \varepsilon)$$

Démonstration : 2ième cas X VAR continue dont f est une densité.
Soit $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)$, on a

$$\mathbb{V}(X) =$$

Démonstration : 2ième cas X VAR continue dont f est une densité.
Soit $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)$, on a

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{\mathbb{E}(X)-\varepsilon} h(x)dx + \int_{\mathbb{E}(X)-\varepsilon}^{\mathbb{E}(X)+\varepsilon} h(x)dx + \int_{\mathbb{E}(X)+\varepsilon}^{+\infty} h(x)dx$$

Démonstration : 2ième cas X VAR continue dont f est une densité.
Soit $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)$, on a

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{\mathbb{E}(X)-\varepsilon} h(x)dx + \int_{\mathbb{E}(X)-\varepsilon}^{\mathbb{E}(X)+\varepsilon} h(x)dx + \int_{\mathbb{E}(X)+\varepsilon}^{+\infty} h(x)dx$$

Ainsi

$$\mathbb{V}(X) \geqslant \int_{-\infty}^{\mathbb{E}(X)-\varepsilon} h(x)dx + \int_{\mathbb{E}(X)+\varepsilon}^{+\infty} h(x)dx$$

Démonstration : 2ième cas X VAR continue dont f est une densité.
Soit $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)$, on a

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{\mathbb{E}(X)-\varepsilon} h(x)dx + \int_{\mathbb{E}(X)-\varepsilon}^{\mathbb{E}(X)+\varepsilon} h(x)dx + \int_{\mathbb{E}(X)+\varepsilon}^{+\infty} h(x)dx$$

Ainsi

$$\mathbb{V}(X) \geqslant \int_{-\infty}^{\mathbb{E}(X)-\varepsilon} h(x)dx + \int_{\mathbb{E}(X)+\varepsilon}^{+\infty} h(x)dx$$

D'où

$$\mathbb{V}(X) \geqslant \varepsilon^2 \Big(\int_{-\infty}^{\mathbb{E}(X)-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\mathbb{E}(X)+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx \Big)$$

D'où

$$\mathbb{V}(X) \geqslant \varepsilon^2 \left(\int_{-\infty}^{\mathbb{E}(X)-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\mathbb{E}(X)+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx \right)$$

D'où

$$\mathbb{V}(X) \geqslant \varepsilon^2 \Big(\int_{-\infty}^{\mathbb{E}(X)-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\mathbb{E}(X)+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx \Big)$$

Or

$$P(\mid X - \mathbb{E}(X) \mid) > \varepsilon) = \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) < -\varepsilon) + \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) > \varepsilon)$$

$$= \int_{-\infty}^{\mathbb{E}(X)-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\mathbb{E}(X)+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx$$

Définition : moyenne empirique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Soit $(X_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ une suite de variables aléatoires réelles de même loi indépendantes.
La moyenne empirique de $(X_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est la VA :

$$\tilde{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Définition : moyenne empirique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Soit $(X_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ une suite de variables aléatoires réelles de même loi indépendantes.
La moyenne empirique de $(X_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est la VA :

$$\tilde{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Remarques : Si les VA X_i admettent des moments d'ordre 2 alors

Définition : moyenne empirique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Soit $(X_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ une suite de variables aléatoires réelles de même loi indépendantes.
La moyenne empirique de $(X_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est la VA :

$$\tilde{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Remarques : Si les VA X_i admettent des moments d'ordre 2 alors

1. $\mathbb{E}(\tilde{X}_n) = m$
2. $\mathbb{V}(\tilde{X}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

où $m = \mathbb{E}(X_i)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_i)$

Définition : convergence presque surement

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VA sur Ω, on dit que (X_n) converge presque surement vers une VAR X lorsque :

$$\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega,\ \lim X_n(\omega) = X(\omega)\}\big) = 1$$

Remarque : La partie de Ω où X_n ne converge par vers X est de probabilité nulle.

Loi faible des grands nombres

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant des moments d'ordre 2.
Soit m l'espérance de ces variables aléatoires.
On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim \mathbb{P}(\mid \tilde{X}_n - m \mid) \geqslant \varepsilon) = 0$$

Loi faible des grands nombres

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant des moments d'ordre 2.
Soit m l'espérance de ces variables aléatoires.
On a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim \mathbb{P}(\mid \tilde{X}_n - m \mid) \geqslant \varepsilon) = 0$$

Démonstration : D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, on a :

$$\mathbb{P}(\mid \tilde{X}_n - m \mid \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(\mid \tilde{X}_n - E(\tilde{X}_n) \mid \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\tilde{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

Loi faible des grands nombres

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant des moments d'ordre 2.
Soit m l'espérance de ces variables aléatoires.
On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim \mathbb{P}(\mid \tilde{X}_n - m \mid) \geqslant \varepsilon) = 0$$

Démonstration : D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, on a :

$$\mathbb{P}(\mid \tilde{X}_n - m \mid \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(\mid \tilde{X}_n - E(\tilde{X}_n) \mid \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\tilde{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

$$\mathbb{P}(\mid \tilde{X}_n - m \mid \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Loi faible des grands nombres

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant des moments d'ordre 2.
Soit m l'espérance de ces variables aléatoires.
On a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim \mathbb{P}(\mid \tilde{X_n} - m \mid) \geqslant \varepsilon) = 0$$

Démonstration : D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, on a :

$$\mathbb{P}(\mid \tilde{X_n} - m \mid\geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(\mid \tilde{X_n} - E(\tilde{X_n}) \mid\geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\tilde{X_n})}{\varepsilon^2}$$

$\mathbb{P}(\mid \tilde{X_n} - m \mid\geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

Ainsi $\lim \mathbb{P}(\mid \tilde{X_n} - m \mid) \geqslant \varepsilon) = 0$

Convergence presque sûr

On dit qu'une suite de VA (X_n) converge presque surement vers la VA X lorsque :

$$\mathbb{P}[\{\omega, \lim X_n(\omega) = X(w)) = 1$$

Loi forte des grands nombres (théorème de Kolmogorov)

On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ de même loi d'espérance m.

Soit $\tilde{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$

On a

$$\tilde{X_n} \to m \times 1_\Omega \text{ presque surement}$$

Convergence presque sûr

On dit qu'une suite de VA (X_n) converge presque surement vers la VA X lorsque :

$$\mathbb{P}[\{\omega, \lim X_n(\omega) = X(w)) = 1$$

Loi forte des grands nombres (théorème de Kolmogorov)

On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ de même loi d'espérance m.

Soit $\tilde{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$

On a

$$\tilde{X_n} \to m \times 1_\Omega \text{ presque surement}$$

Lorsque que l'on répète n fois de façon indépendante une même expérience, la moyenne obtenue par l'expérience tend vers la moyenne théorique quand n tend vers ∞.

Méthode de Monte Carlo appliquée au calcul d'intégrale

Application de la loi forte des grands nombres

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, et soit A un réel tel que $A > \sup_{x\in[a;b]} (f(x))$.

On utilise la loi forte des grands nombres pour calculer $\int_a^b f(t)dt$:

Méthode de Monte Carlo appliquée au calcul d'intégrale

Application de la loi forte des grands nombres

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, et soit A un réel tel que $A > \sup\limits_{x\in[a;b]} (f(x))$.

On utilise la loi forte des grands nombres pour calculer $\int_a^b f(t)dt$:

Si on prend un point au hasard dans le rectangle délimité par les droites d'équation $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et $y = A$, la probabilité qu'il soit sous la courbe de f est :

Méthode de Monte Carlo appliquée au calcul d'intégrale

Application de la loi forte des grands nombres

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, et soit A un réel tel que $A > \sup\limits_{x\in[a;b]}(f(x))$.

On utilise la loi forte des grands nombres pour calculer $\int_a^b f(t)dt$:

Si on prend un point au hasard dans le rectangle délimité par les droites d'équation $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et $y = A$, la probabilité qu'il soit sous la courbe de f est :

$$p = \frac{\int_a^b f(t)dt}{A(b-a)}$$

Méthode de Monte-Carlo

On choisit au hasard n points soit X_i la VA telle que

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la ième point est sous } \mathcal{C}_f \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to p1_\Omega$

Définition : convergence en loi

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VAR et X une VAR définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soient $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et F_X leur fonction de répartition.
On dit que X_n tend en loi vers X si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \lim F_{X_n}(t) = F_X(t)$$

Remarque : Dans le cas discret, cette convergence en loi se traduit par la convergence des probabilités $\mathbb{P}(X_n = k)$.

Approximation d'un loi Binomiale par un loi de Poisson

Théorème

Soit $\lambda \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit X_n une suite de V.A.R. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. X_n converge en loi vers une V.A.R. X de loi de Poisson de paramètre λ, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

En pratique Si X suit une loi binomiale de paramètre (n, p).
Si $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0,1$ et $np < 15$
alors on prendra comme approximation de X la V.A.R. Y qui suit un loi de Poisson de paramètre np ($Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(np)$).

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geqslant k$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geqslant k$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k}\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k}
\end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geqslant k$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k}\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k}
\end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geqslant k$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Or $\lim \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1$ et $\lim \left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geqslant k$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Or $\lim \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} = 1$ et $\lim \left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}$.

Ainsi

$$\lim \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Théorème central limite

Soit (X_n) une suite de VAR indépendantes de même loi, d'espérance m et d'écart type σ.
Soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$Z_n = \dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers une VAR $X^* \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, c'est à dire :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

Remarque : $\dfrac{\tilde{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}$ tend en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
Ainsi $\tilde{X}_n$ tend en loi vers une VAR qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma/\sqrt{n})$.

Exemple : Théorème de Moivre Laplace

Soit (X_n) une suite de VAR indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre p.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$$

$$Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

converge en loi vers $X^* \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

En pratique, la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par un loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ lorsque :

1. $n \geqslant 30$
2. $np \geqslant 5$

Exercice

Un vol Lyon - Strasbourg est assuré par un airbus de 140 places. La réservation est obligatoire. L'expérience a montré que la probabilité qu'une personne confirme sa réservation et retire son billet est 0,8.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de personnes ayant confirmé leur réservation et retiré leur billet.

1. La compagnie a accepté 160 réservations.
   1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
      Pour $k \leq 160$, exprimer $P(X = k)$ en fonction de k.
      Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de X.
   2. Justifier que X peut être approchée par une loi normale que l'on déterminera.
      Calculer la probabilité que plus de 135 personnes confirment leur réservation et retirent leur billet.

Exercice

1. La compagnie a accepté 160 réservations.
   1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
      Pour $k \leq 160$, exprimer $P(X = k)$ en fonction de k.
      Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de X.
   2. Justifier que X peut être approchée par une loi normale que l'on déterminera.
      Calculer la probabilité que plus de 135 personnes confirment leur réservation et retirent leur billet.
2. La compagnie accepte n réservations $(n \geq 140)$. Soit X_n le nombre de personnes qui ont confirmé et retiré leur billet.
   1. Déterminer la loi de probabilité de X_n et la loi normale qui approche X_n.
   2. Déterminer le nombre maximum de réservation que la compagnie peut accepter sachant qu'elle s'accorde un risque de 5% de ne pouvoir satisfaire toutes les personnes ayant reservé.

1. On a $X \backsim \mathcal{B}(160; 0,8)$.
   Ainsi $\forall \in [\![0;160]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{160}{k} 0,8^k \times 0,2^{160-k}$
2. Comme $n = 160 > 30$ et $np = 160 \times 0,8 = 128 > 5$, X peut être approchée par $Y \backsim \mathcal{N}(128; \sqrt{25,6})$.
   On a : $\mathbb{P}(X > 135) \simeq \mathbb{P}(Y > 135)$, or

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > 135) &= \mathbb{P}\big(Y^* > \frac{135-128}{\sqrt{25,6}})\big) \\ &= \mathbb{P}(Y^* > 1,38) \\ &= 1 - 0,9162 \\ &= 0,0838\end{aligned}$$

1.
   1. On a $X_n \backsim \mathcal{B}(n; 0,8)$.
      Or $n \geqslant 140 > 30$ et $np \geqslant 112 > 5$, on peut ainsi approcher X_n par :
      $$Y_n \backsim \mathcal{N}(0,8n; 0,4\sqrt{n})$$
   2. On souhaite déterminer n tel que $\mathbb{P}(X_n \leqslant 160) \geqslant 0,95$.

1. On a $X \backsim \mathcal{B}(160; 0,8)$.
   Ainsi $\forall \in [\![0;160]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{160}{k} 0,8^k \times 0,2^{160-k}$
2. Comme $n = 160 > 30$ et $np = 160 \times 0,8 = 128 > 5$, X peut être approchée par $Y \backsim \mathcal{N}(128; \sqrt{25,6})$.
   On a : $\mathbb{P}(X > 135) \simeq \mathbb{P}(Y > 135)$, or

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > 135) &= \mathbb{P}\big(Y^* > \frac{135-128}{\sqrt{25,6}})\big) \\ &= \mathbb{P}(Y^* > 1,38) \\ &= 1 - 0,9162 \\ &= 0,0838\end{aligned}$$

1.
   1. On a $X_n \backsim \mathcal{B}(n; 0,8)$.
      Or $n \geqslant 140 > 30$ et $np \geqslant 112 > 5$, on peut ainsi approcher X_n par :
      $$Y_n \backsim \mathcal{N}(0,8n; 0,4\sqrt{n})$$
   2. On souhaite déterminer n tel que $\mathbb{P}(X_n \leqslant 160) \geqslant 0,95$.

1. On a $X \backsim \mathcal{B}(160; 0,8)$.
   Ainsi $\forall \in [\![0;160]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{160}{k} 0,8^k \times 0,2^{160-k}$
2. Comme $n = 160 > 30$ et $np = 160 \times 0,8 = 128 > 5$, X peut être approchée par $Y \backsim \mathcal{N}(128; \sqrt{25,6})$.
   On a : $\mathbb{P}(X > 135) \simeq \mathbb{P}(Y > 135)$, or

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > 135) &= \mathbb{P}\big(Y^* > \frac{135-128}{\sqrt{25,6}})\big) \\ &= \mathbb{P}(Y^* > 1,38) \\ &= 1 - 0,9162 \\ &= 0,0838\end{aligned}$$

1.
   1. On a $X_n \backsim \mathcal{B}(n; 0,8)$.
      Or $n \geqslant 140 > 30$ et $np \geqslant 112 > 5$, on peut ainsi approcher X_n par :
      $$Y_n \backsim \mathcal{N}(0,8n; 0,4\sqrt{n})$$
   2. On souhaite déterminer n tel que $\mathbb{P}(X_n \leqslant 160) \geqslant 0,95$.

1. On a $X_n \backsim \mathcal{B}(n; 0,8)$.
   Or $n \geqslant 140 > 30$ et $np \geqslant 112 > 5$, on peut ainsi approcher X_n par :
   $$Y_n \backsim \mathcal{N}(0,8n; 0,4\sqrt{n})$$
2. On souhaite déterminer n tel que $\mathbb{P}(X_n \leqslant 140) \geqslant 0,95$.
   On résout :
   $$\mathbb{P}(Y_n \leqslant 140) \geqslant 0,95 \Leftrightarrow \mathbb{P}\Big(Y_n^* \leqslant \frac{140 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}) \geqslant 0,95$$
   $$\Leftrightarrow \frac{140 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}} \geqslant 1,65$$
   $$\Leftrightarrow 0,8n + 1,65 \times 0,4\sqrt{n} - 140 \leqslant 0$$
   $$\Leftrightarrow \sqrt{n} \leqslant 12,82$$
   $$\Leftrightarrow n \leqslant 164$$

1. On a $X_n \backsim \mathcal{B}(n; 0,8)$.
   Or $n \geqslant 140 > 30$ et $np \geqslant 112 > 5$, on peut ainsi approcher X_n par :
   $$Y_n \backsim \mathcal{N}(0,8n; 0,4\sqrt{n})$$
2. On souhaite déterminer n tel que $\mathbb{P}(X_n \leqslant 140) \geqslant 0,95$.
   On résout :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n \leqslant 140) \geqslant 0,95 &\Leftrightarrow \mathbb{P}\Big(Y_n^* \leqslant \frac{140 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\Big) \geqslant 0,95 \\
&\Leftrightarrow \frac{140 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}} \geqslant 1,65 \\
&\Leftrightarrow 0,8n + 1,65 \times 0,4\sqrt{n} - 140 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{n} \leqslant 12,82 \\
&\Leftrightarrow n \leqslant 164
\end{aligned}$$

1. On a $X_n \backsim \mathcal{B}(n; 0,8)$.
   Or $n \geqslant 140 > 30$ et $np \geqslant 112 > 5$, on peut ainsi approcher X_n par :
$$Y_n \backsim \mathcal{N}(0,8n; 0,4\sqrt{n})$$
2. On souhaite déterminer n tel que $\mathbb{P}(X_n \leqslant 140) \geqslant 0,95$.
   On résout :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n \leqslant 140) \geqslant 0,95 &\Leftrightarrow \mathbb{P}\Big(Y_n^* \leqslant \frac{140 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\Big) \geqslant 0,95 \\
&\Leftrightarrow \frac{140 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}} \geqslant 1,65 \\
&\Leftrightarrow 0,8n + 1,65 \times 0,4\sqrt{n} - 140 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{n} \leqslant 12,82 \\
&\Leftrightarrow n \leqslant 164
\end{aligned}$$

1. On a $X_n \backsim \mathcal{B}(n; 0,8)$.
   Or $n \geqslant 140 > 30$ et $np \geqslant 112 > 5$, on peut ainsi approcher X_n par :
   $$Y_n \backsim \mathcal{N}(0,8n; 0,4\sqrt{n})$$
2. On souhaite déterminer n tel que $\mathbb{P}(X_n \leqslant 140) \geqslant 0,95$.
   On résout :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n \leqslant 140) \geqslant 0,95 &\Leftrightarrow \mathbb{P}\Big(Y_n^* \leqslant \frac{140 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\Big) \geqslant 0,95 \\
&\Leftrightarrow \frac{140 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}} \geqslant 1,65 \\
&\Leftrightarrow 0,8n + 1,65 \times 0,4\sqrt{n} - 140 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{n} \leqslant 12,82 \\
&\Leftrightarrow n \leqslant 164
\end{aligned}$$

1. On a $X_n \backsim \mathcal{B}(n;0,8)$.
Or $n \geqslant 140 > 30$ et $np \geqslant 112 > 5$, on peut ainsi approcher X_n par :
$$Y_n \backsim \mathcal{N}(0,8n;0,4\sqrt{n})$$
2. On souhaite déterminer n tel que $\mathbb{P}(X_n \leqslant 140) \geqslant 0,95$.
On résout :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n \leqslant 140) \geqslant 0,95 &\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Y_n^* \leqslant \frac{140-0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95 \\
&\Leftrightarrow \frac{140-0,8n}{0,4\sqrt{n}} \geqslant 1,65 \\
&\Leftrightarrow 0,8n + 1,65 \times 0,4\sqrt{n} - 140 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{n} \leqslant 12,82 \\
&\Leftrightarrow n \leqslant 164
\end{aligned}$$