Projekt 3 Metody Numeryczne

Jakub Sachajko 179976

Czerwiec 2021

1 Wstep

W podanym zadaniu należało dla wybranej trasy zastosować metody aproksymacji interpolacyjnej wykorzystujaca wielomian interpolacyjny Lagrange'a oraz wykorzystujaca funkcje sklejane trzeciego stopnia. Należało również zastanowić sie nad przydatnościa obu metod.
Program napisany został w pythonie z użyciem matplotlib na potrzeby wizualizacji oraz pandas jako najprostszy sposób wczytania danych.

2 Dane

W sprawozdaniu umieszczone zostały wykresy dla trzech zestawów danych:

- Mount Everest
- Spacerniak Gdański
- Wielki Kanion

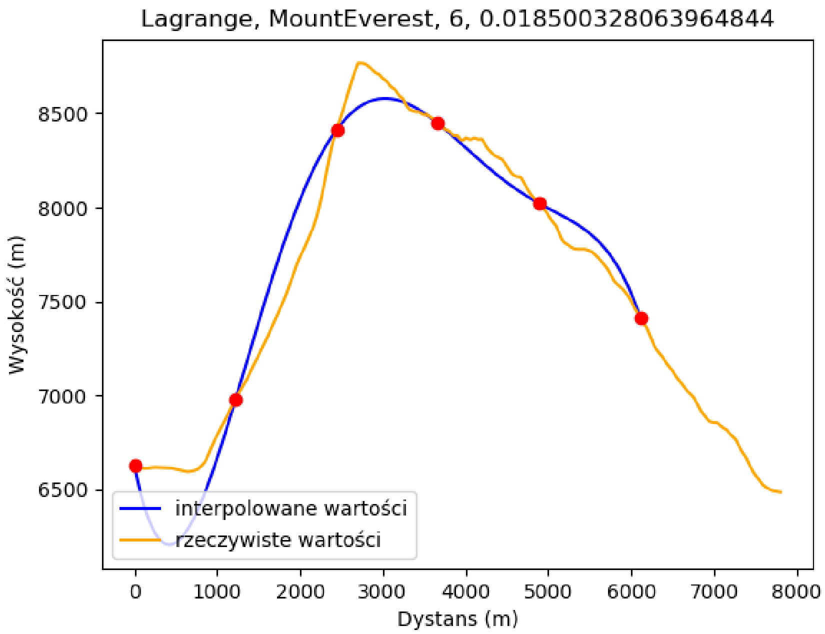
Wybrałem trzy zróżnicowane tereny najwyższy szczyt, wielki dół oraz płaski Spacerniak Gdański. Ponieważ używałem biblioteki pandas a tylko 5 zestawów danych posiadało tytuły kolumn stwierdziłem że wybiore te trzy ponieważ w przypadku Glebia Challengera pojawiał sie bład z ilościa danych x i y. Analogiczna sytuacja zdarzała sie przy 100. Dlatego ilość wykresów wyniesie 24 zamiast planowanych 32.

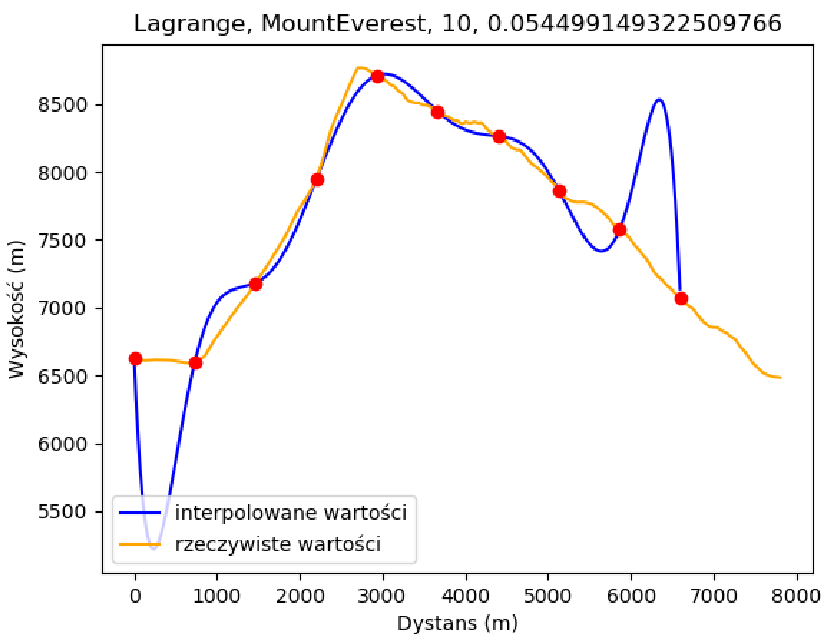
3 Interpolacja Lagrange

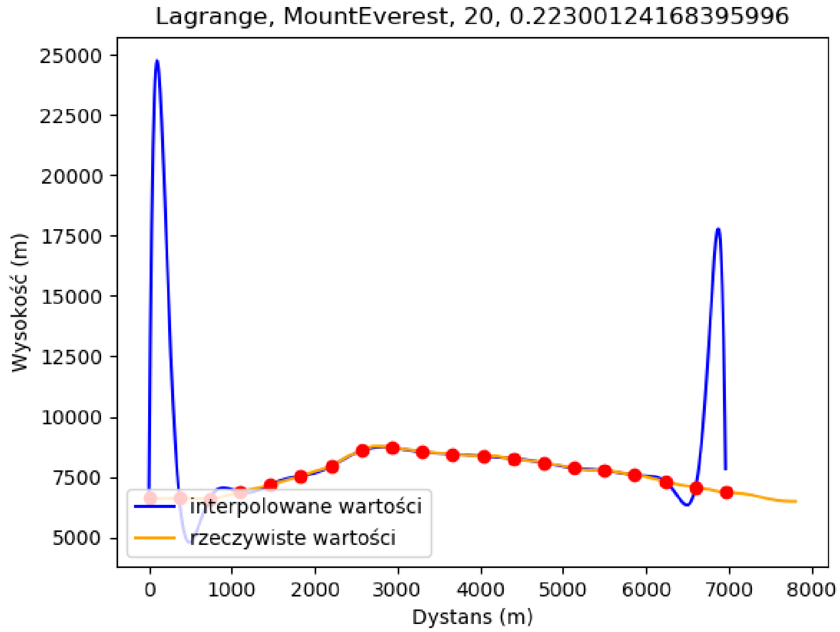
Interpolacja Lagrange'a była bardzo krótka i przyjemna, powiedzał bym nawet że można ja napisać znacznie szybciej niż splajny. Metoda interpolacji Lagrange'a to przybliżanie wielomianem n-tego stopnia w n+1 wezłach. Jednak patrzac na wstepne wyniki moge powiedzieć, że mała ilosć danych daje nam bardzo niedokładne przybliżenie, a za duża sprawia, że możemy zaobserwować efekt rungego. Jednak tak jak implementacja, czas jaki jest potrzebny aby wykonać interpolacje Lagrange'a jest bardzo mały.

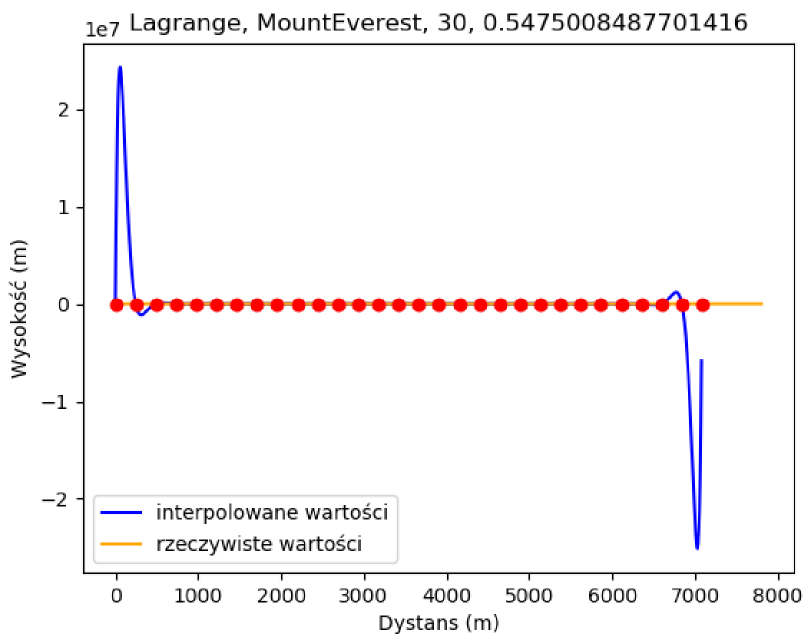
Poniżej przedstawione zostana wykresy dla interpolacji Lagrange'a dla liczby punktów n = 6,10,20,30, jako ostatnia zmienna w tytule został podany czas wykonania :

1. Mount Everest

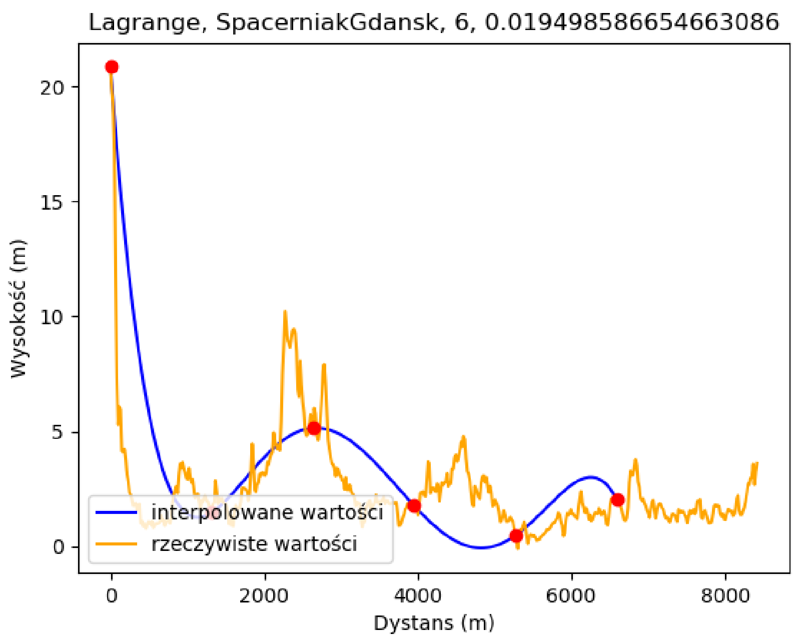


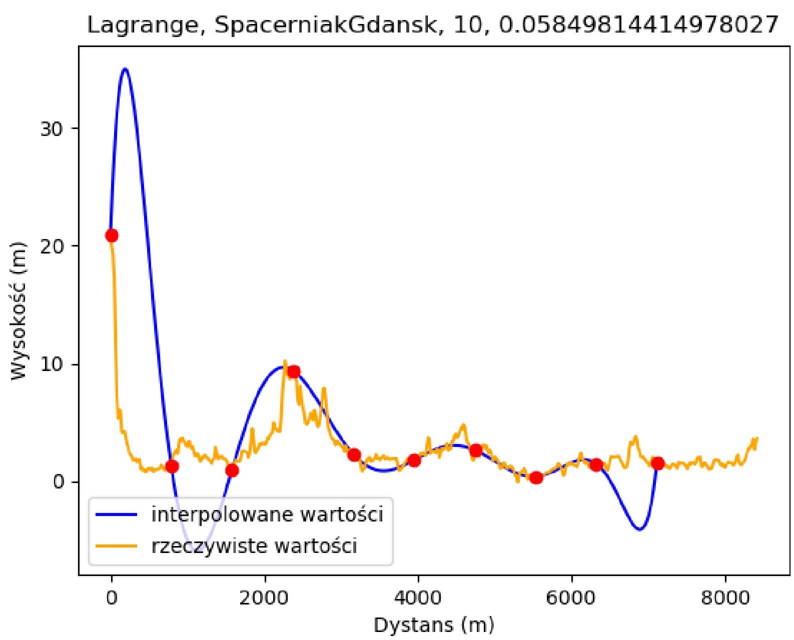


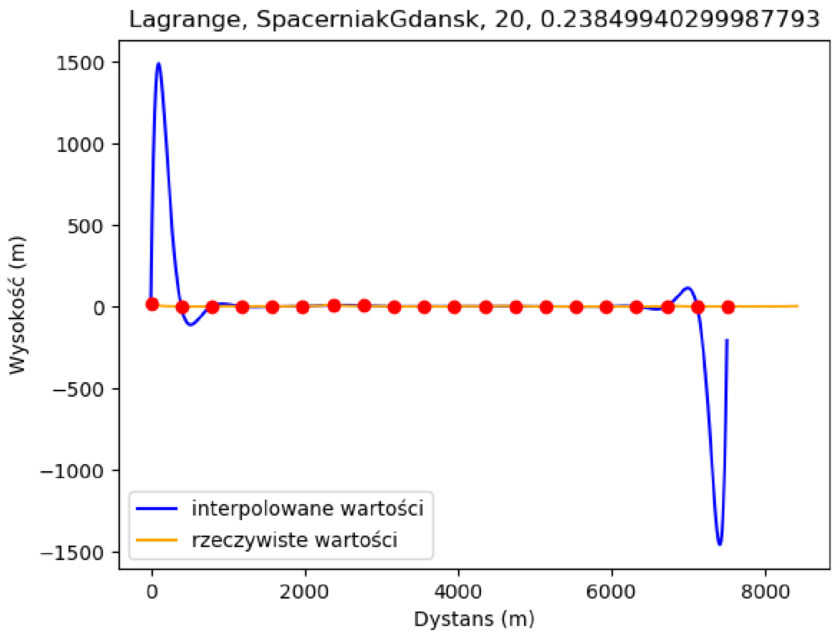

Lagrange, MountEverest, 20, 0.22300124168395996
25000
22500
20000
17500
15000
12500
10000
7500
5000
Wysokość (m)
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
Dystans (m)
interpolowane wartości
rzeczywiste wartości

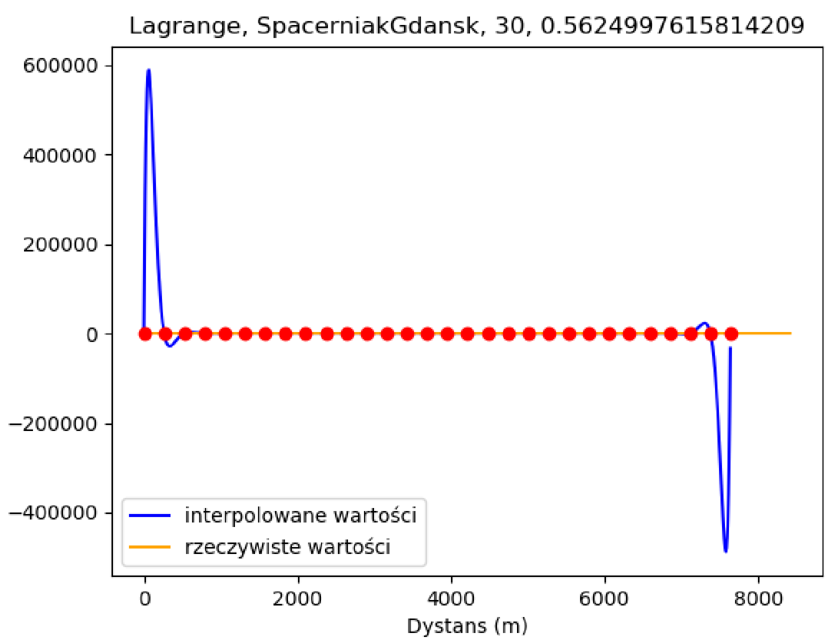

Lagrange, MountEverest, 30, 0.5475008487701416
1e7
2
1
0
−1
−2
Wysokość (m)
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
Dystans (m)
interpolowane wartości
rzeczywiste wartości

2. Spacerniak Gdański

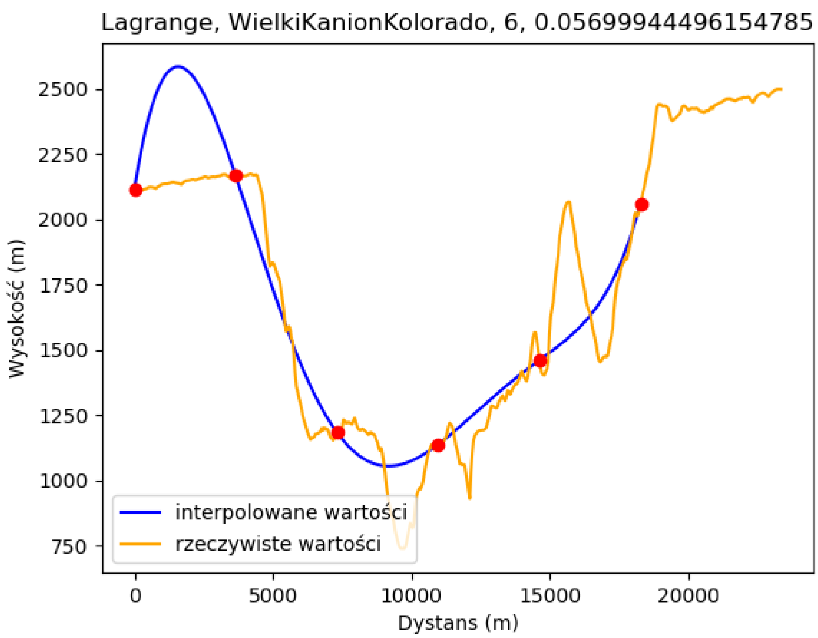


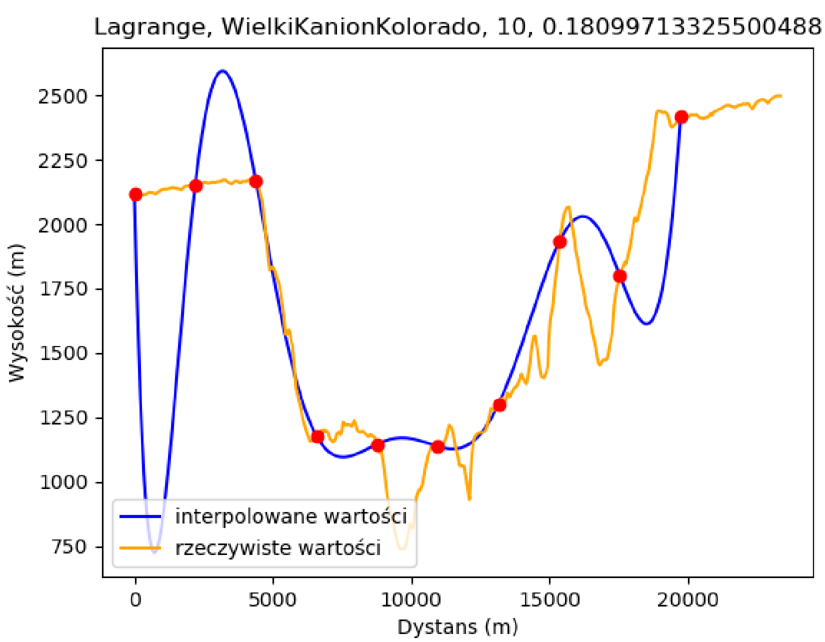


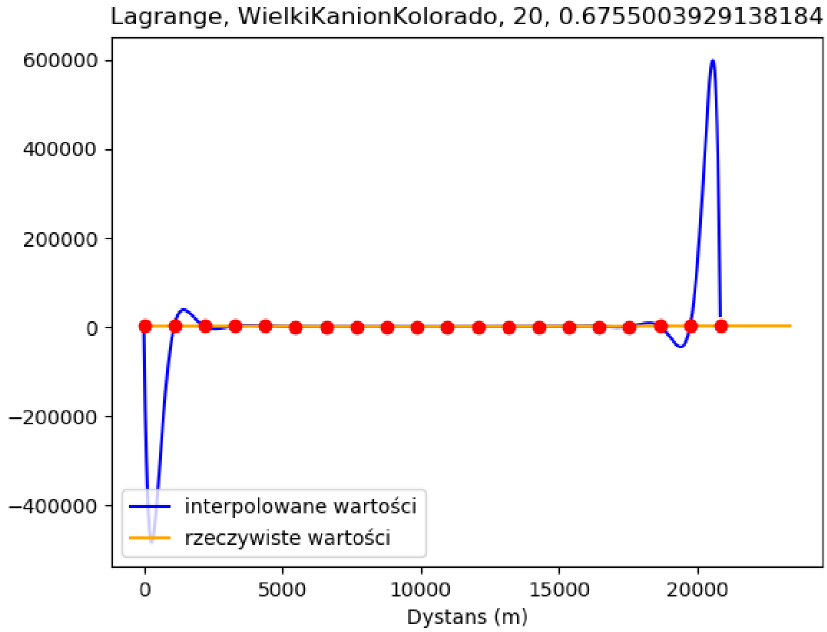

Lagrange, SpacerniakGdansk, 20, 0.23849940299987793
1500
1000
500
0
−500
−1000
−1500
Wysokość (m)
interpolowane wartości
rzeczywiste wartości
0
2000
4000
6000
8000
Dystans (m)

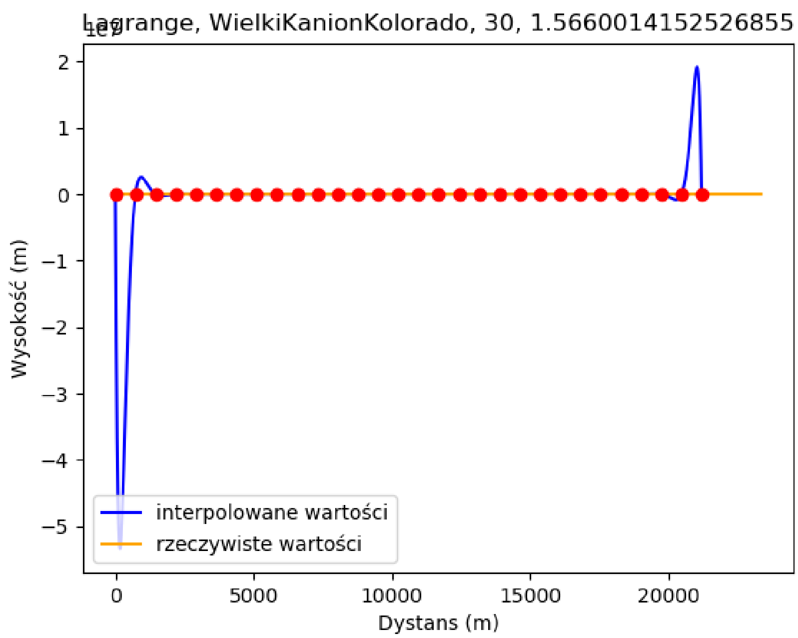

Lagrange, SpacerniakGdansk, 30, 0.5624997615814209
600000
400000
200000
0
−200000
−400000
interpolowane wartości
rzeczywiste wartości
0
2000
4000
6000
8000
Dystans (m)

3. Wielki Kanion






Lagrange, WielkiKanionKolorado, 20, 0.6755003929138184
600000
400000
200000
0
−200000
−400000
interpolowane wartości
rzeczywiste wartości
0
5000
10000
15000
20000
Dystans (m)


Lagrange, WielkiKanionKolorado, 30, 1.5660014152526855
1e7
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
Wysokość (m)
interpolowane wartości
rzeczywiste wartości
0
5000
10000
15000
20000
Dystans (m)

Jak można zauważyć dla górzystego terenu bez gwałtownych wzrostów i spadków wysokości, jakim jest mount everest możemy zaobserwować, że różnica miedzy 6 a 10 wezłami jest znaczaca, jednak pomimo tak małej ilości wezłów jak dziesieć można zauważyć efekt rungego. Dla wezłów 20 i 30 efekt rungego wyróżnia sie na wykresie i nawet nie można odczytać czy dany pomiar stał sie bardziej dokładny, jednak po przybliżeniu danego wykresu możemy zauważyć, że poza krańcami dokładność stale wzrasta.

Dla terenu płaskiego z gwałtownymi różnicami wysokości możemy zauważyć że pomiedzy 6 a 10 wezłem na poczatku i końcu wykresu możemy zaobserwować efekt rungego, tak jak na wykresach o 20 i 30 wezłach. Pomimo krótkiego czasu działania, możemy zauważyć że efekt rungego zawsze tworzy sie pomiedzy pierwszym a drugim oraz ostatnim i przedostatnim wezłem. Jeżeli wezły zamiast równomiernego położenia zostałyby przesuniete w strone krańców, wtedy można byłoby zredukować efekt rungego.

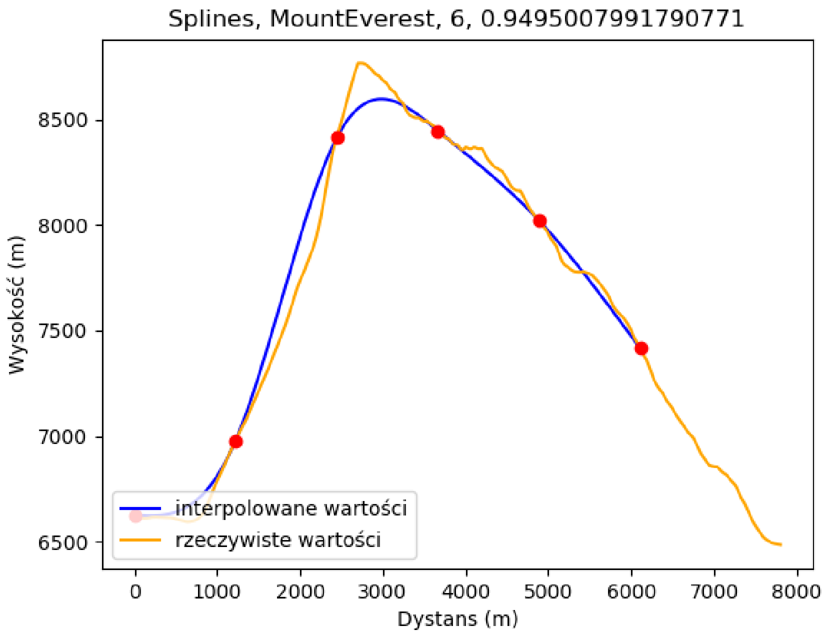
Dla terenu o gwałtownych skokach w wysokości oraz wiekszych zmianach wysokości możemy zauważyć, że dokładność z wezłów 6 na 10 nie zwiekszyła sie znaczaca, ponieważ wzrosty i spadki sa bardzo nieregularne do zaobserwowania zmian trzeba użyć wiekszej ilości wezłów, w tym momencie pomijajac efekt rungego możemy zauważyć przybliżenie.

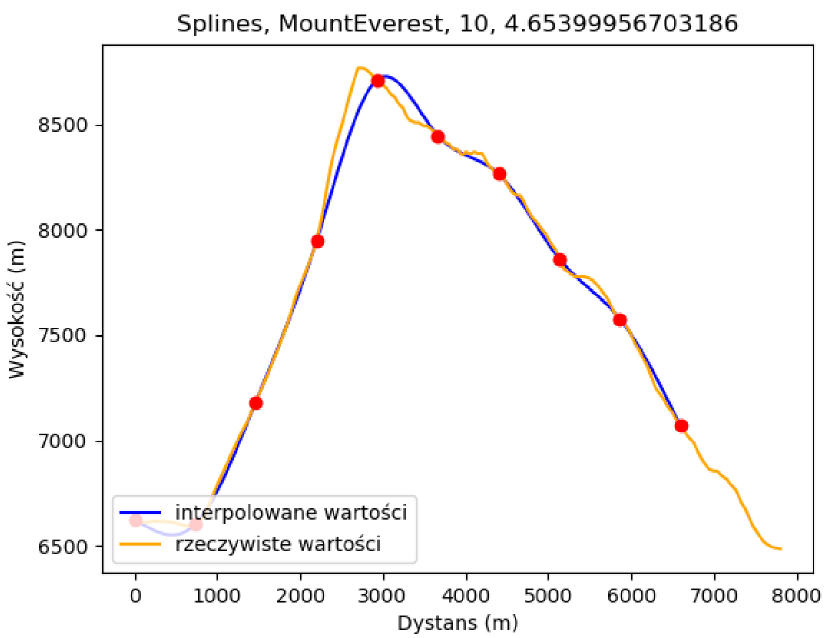
4 Interpolacja funkcje sklejane

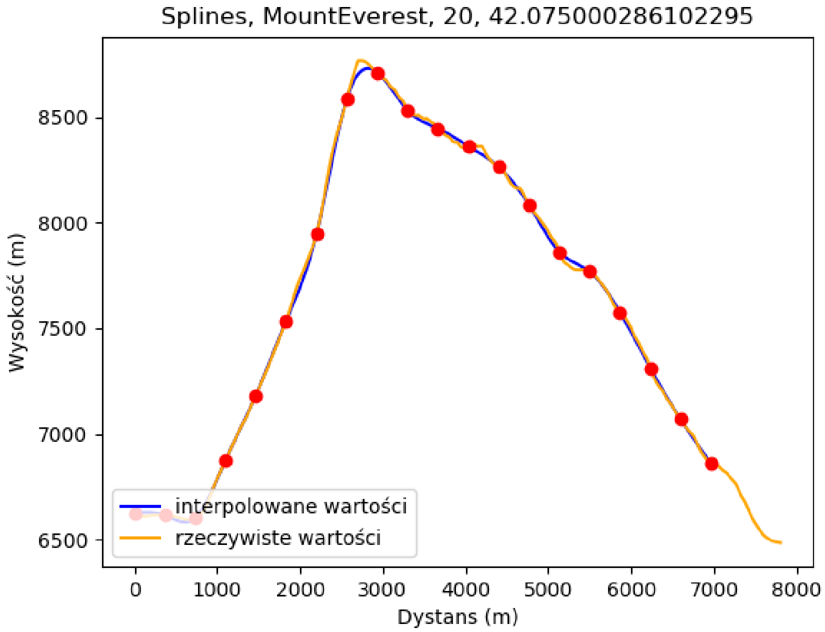
Interpolacja funkcji sklejanych zajeła znacznie wiecej czasu aby ja napisać. Metoda dla funkcji sklejanych dla n wezłów tworzy n-1 podprzedziałów i każdy ze stworzonych podprzedziałów interpolujemy funkcje wielomianem trzeciego stopnia. Zaczynajac od utworzenia układu równań dla 4n - 4 po których wywoływane sa faktoryzacja LU oraz pivoting.
Pomimo trudności w implementacji jak i czasie, w którym wykonywane sa dane wykresy, na pierwszy rzut oka można zauważyć że nie wystepuje efekt rungego.

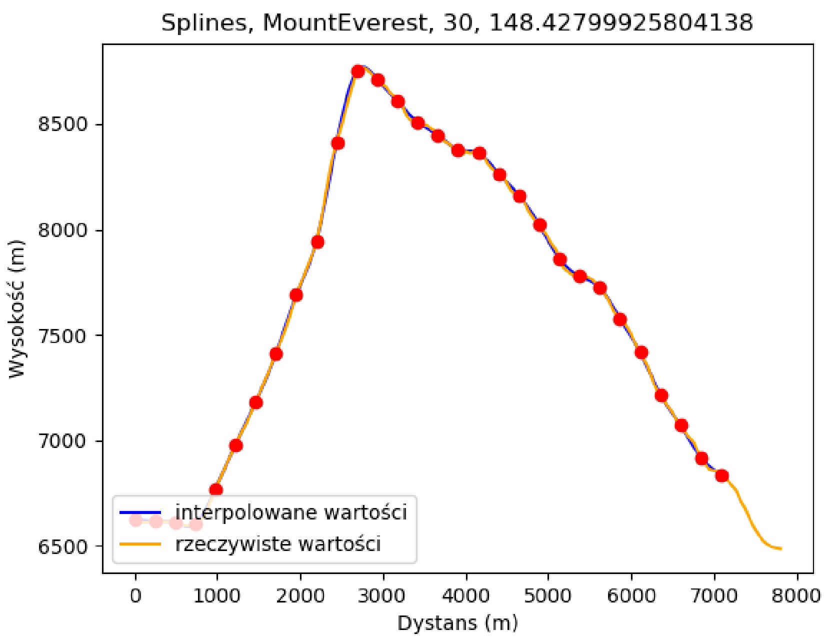
Poniżej przedstawione zostana wykresy dla interpolacji funkcji sklejanych dla liczby punktów n =6,10,20,30, jako ostatnia zmienna w tytule został podany czas wykonania :

1. Mount Everest

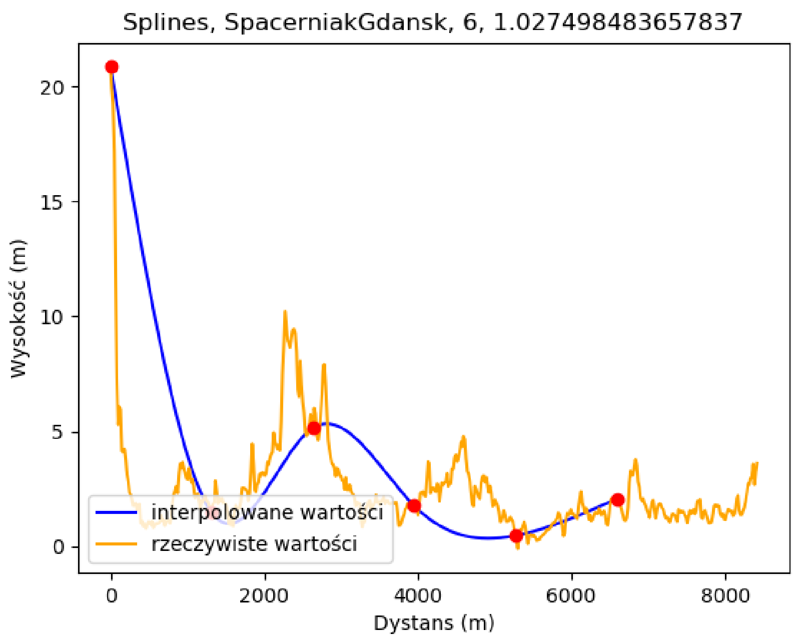


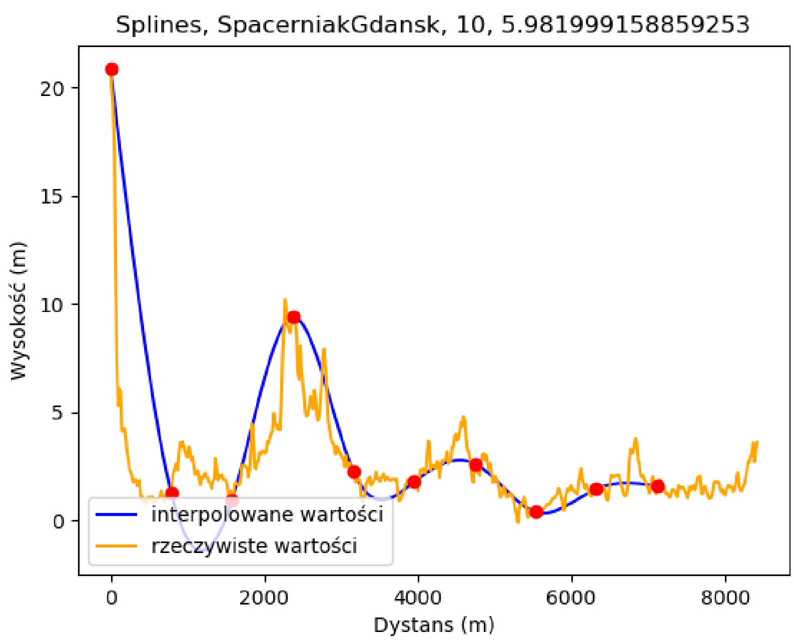


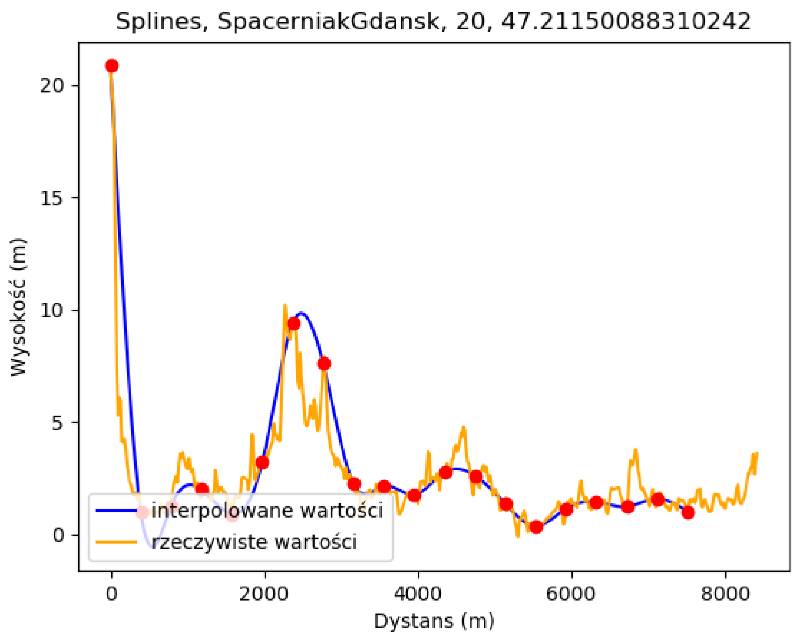

Splines, MountEverest, 20, 42.075000286102295
Wysokość (m)
Dystans (m)
interpolowane wartości
rzeczywiste wartości

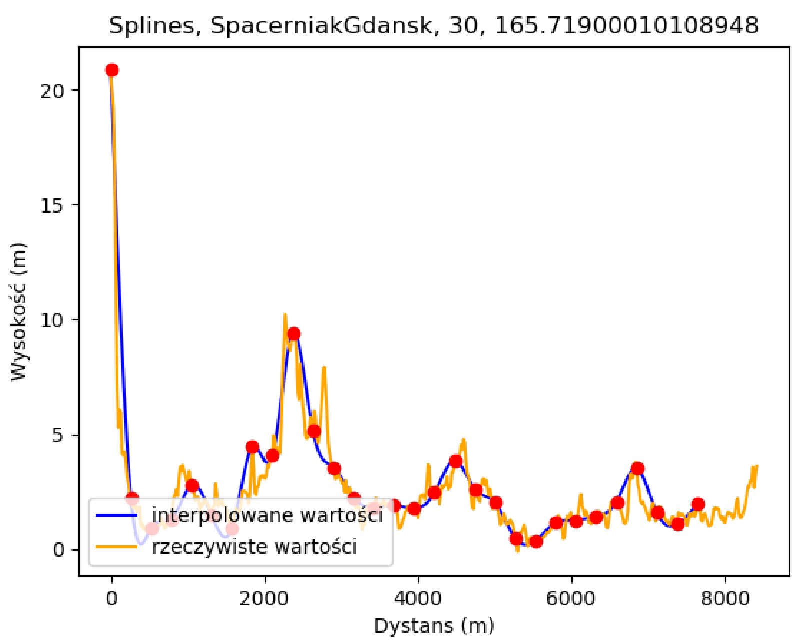

Splines, MountEverest, 30, 148.42799925804138
Wysokość (m)
Dystans (m)
interpolowane wartości
rzeczywiste wartości

2. Spacerniak Gdański

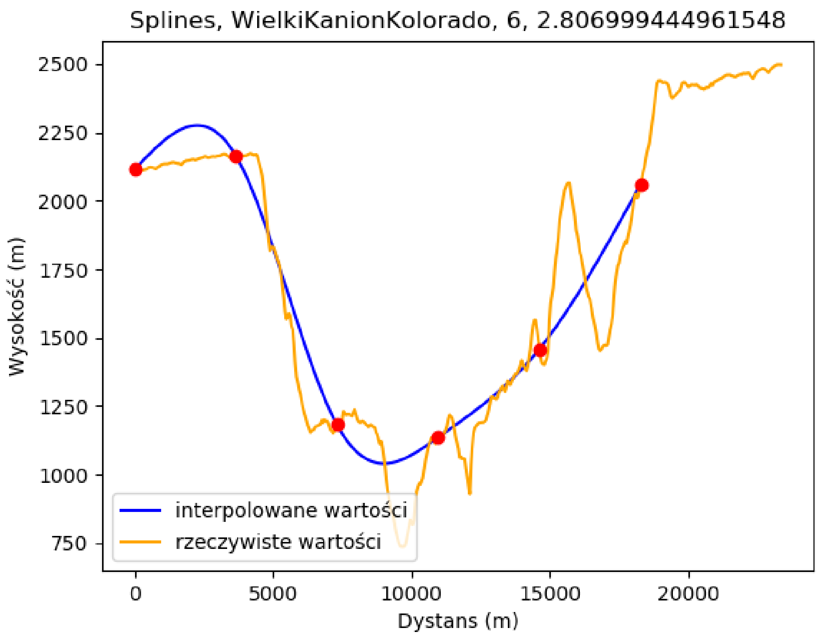


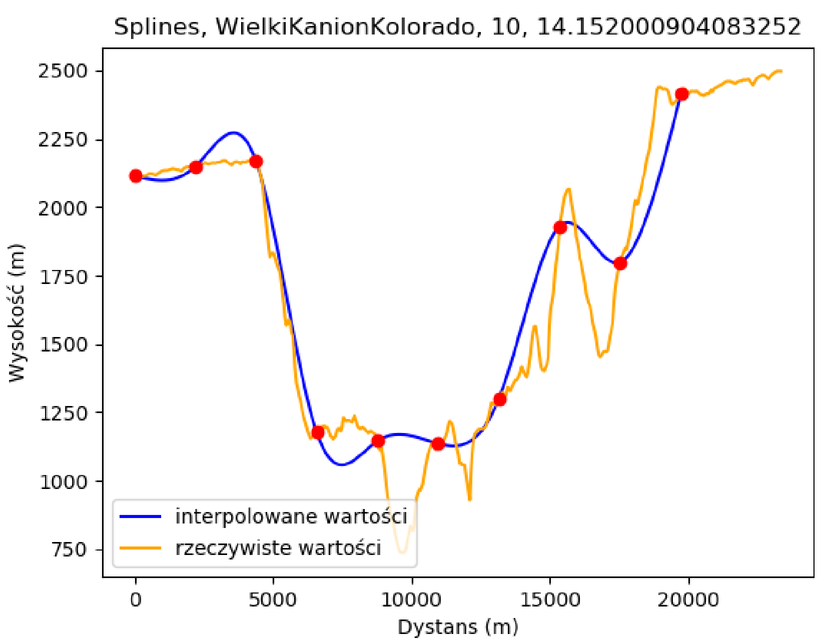


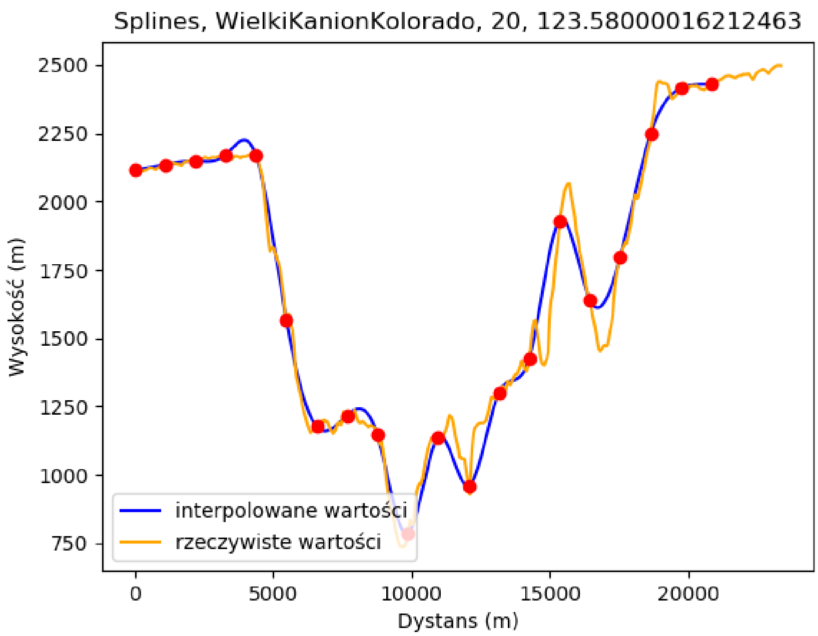

Splines, SpacerniakGdansk, 20, 47.21150088310242
Wysokość (m)
Dystans (m)
interpolowane wartości
rzeczywiste wartości
0
5
10
15
20
0
2000
4000
6000
8000


Splines, SpacerniakGdansk, 30, 165.71900010108948
Wysokość (m)
Dystans (m)
interpolowane wartości
rzeczywiste wartości
0
5
10
15
20
0
2000
4000
6000
8000

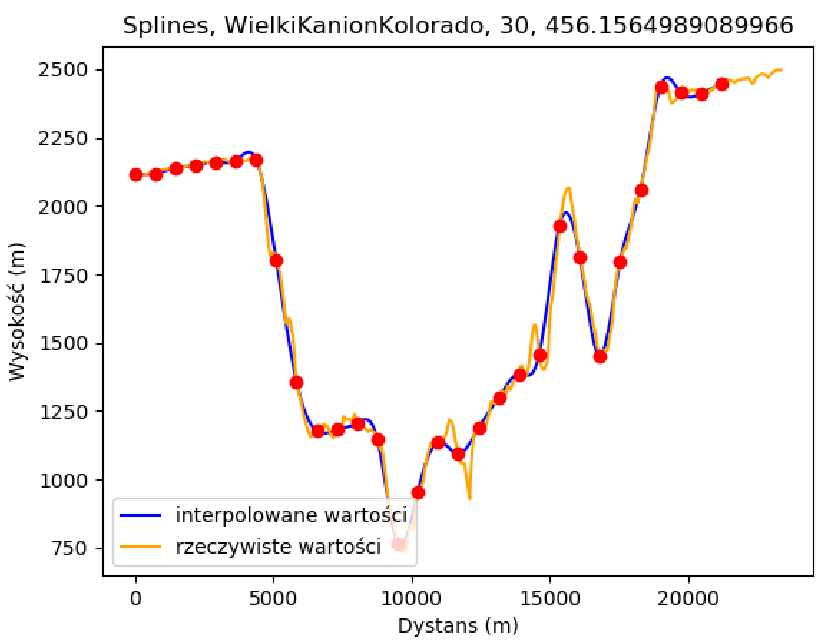
3. Wielki Kanion







Splines, WielkiKanionKolorado, 20, 123.58000016212463
Wysokość (m)
Dystans (m)
interpolowane wartości
rzeczywiste wartości



Splines, WielkiKanionKolorado, 30, 456.1564989089966
Wysokość (m)
Dystans (m)
interpolowane wartości
rzeczywiste wartości

Jak można zauważyć dla górzystego terenu bez gwałtownych wzrostów i spadków wysokości, jakim jest mount everest możemy zaobserwować, że różnica miedzy 6 a 10 wezłami jest widoczna, jednak pomimo tak małej ilości wezłów jak dziesieć można zauważyć, że czas potrzebny do wykonania danego pomiaru jest pieć razy wiekszy. Dla 20 i 30 wezłów przybliżenie jest praktycznie takie samo, jednak czas wykonania różni sie o 108 sekund. Przy wezłach w ilości wiekszej niż 20 przybliżenie w porównaniu z rzeczywistymi wartościami jest praktycznie takie same.

Dla terenu płaskiego z gwałtownymi różnicami wysokości możemy zauważyć że pomiedzy 6 a 10 wezłem różnica w czasie jest prawie 6 razy wieksza jednak pomimo 6 sekund trwania danego programu, wykres wciaż nie jest dobrym przybliżeniem rzeczywistych wartości, można wrecz powiedzieć, że dla 20 wezłów przybliżenie także wyglada dosyć niepoprawnie. Dopiero od trzydziestu wezłów widać powiazanie trasy z przybliżeniem ale można zauważyć także miejsa, w których wykres ten można jeszcze poprawić.

Dla terenu o gwałtownych skokach w wysokości oraz wiekszych zmianach wysokości możemy zauważyć, że dokładność z wezłów 6 na 10 nie zwiekszyła sie znaczaca, ponieważ wzrosty i spadki sa bardzo nieregularne, ale nie aż tak czeste. Możemy zabserwować dla dwudziestu wezłów znaczaca poprawe. Dla 30 wezłów wiekszość wartości znajduje sie w odpowiednich miejscach, myśle że jeszcze 10 wezłów oraz 4 razy wiekszy czas, który już i tak wynosi 7 minut i 30 sekund.

5 Podsumowanie

Przejdźmy teraz do podsumowania wiedzy nabytej na podstawie danych wykresów. Zaczynając od metody interpolacji Lagrange'a, która jest szybka(czas wykonania), prosta w implementacji oraz posiada lepsze przybliżenie w pewnych (środkowych) odcnkach. Efekt rungego sprawia że ta metoda nie jest najbardziej dokładną metodą, wraz ze wzrostem węzłów, efekt rungego nasila się, przez co nie jest możliwym określenie jakości przybliżenia, jak w przypadku wykresów o 30 węzłach gdyż efekt rungego osiąga około 60000 metrów dla spacerniaka w Gdańsku.
Metoda interpolacji funkcjami sklejanymi jest znacznie wolniejsza, oraz znacznie trudniej się ją implementuje, jednak nie występuje u niej efekt rungego poza tym, jeżeli poczekamy wystarczająco długo, wtedy dostaniemy przybliżenie praktycznie równe danym wartościom.
Wraz ze wzrostem punktów w obu metodach wyniki są coraz lepsze, pomijając efekt rungego dla interpolacji Lagrange'a. Odnosząc się do pytania o rozmieszczenie wraz ze wzrostem punktów przybliżenie rośnie i nie uważam żeby rozmieszczenie stanowiło wielką rolę w przybliżeniu. Prawdopodobnie po przeanalizowaniu tras można ustawić punkt w odpowiednie miejsca, ale wtedy metoda staje się mniej uniwersalna.
Jeżeli chodzi o rodzaj trasy, możemy zauważyć że przybliżenie dla trasy Spacerniak Gdański która posiada częste i gwałtowne zmiany wysokości zajmuje znacznie więcej czasu jak i węzłów do odpowiedniego przybliżenia, natomiast trasa taka jak Mount Everest przybliżenia były znacząco lepsze w porównaniu do trasy Spacerniak Gdański dla takiej samej ilości węzłów.
Jeżeli miałbym dużo czasu oraz chciałbym bardzo dokładnych przybliżeń, wtedy użyłbym metody funkcji sklejanych, jednak jeżeli chciałbym w bardzo szybki czasie sprawdzić przybliżenie dla danej trasy to pomimo efektu rungego wybrałbym interpolację Lagrange'a