ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

<<ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ>>

Μεταπτυχιακή εργασία:

Μελέτη της μετάβασης από την Αριθμητική στην Άλγεβρα και τρόποι βελτιστοποίησης της διδασκαλίας

Εξηνταβελώνη Σταυρούλα

Επιβλέπων καθηγητής

Δημήτριος Σπανός

Πάτρα, 17 Σεπτεμβρίου 2013

Αφιέρωση:

Η κάτωθι εργασία αφιερώνεται στους γονείς μου,

Φίλιππο και Μαρία

Ευχαριστίες:

Για την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου, Κ.Δημήτριο Σπανό.

<u>**Περιεχόμενα:**</u>

Διαγράμματα – Γραφήματα- Πίνακες

Περίληψη:

Η κάτωθι εργασία που θα εκπονήσουμε αφορά την μελέτη της συμπεριφοράς των μαθητών ηλικίας 14-15 ετών που βιώνουν την μετάβαση από την χρήση αριθμητικών παραστάσεων στα χρόνια του δημοτικού, στην χρήση αλγεβρικών παραστάσεων, την πρώτη γνωριμία με τους αγνώστους-μεταβλητές και την επίλυση εξισώσεων α’ βαθμού στις τάξεις του γυμνασίου.

Αφού κάνουμε μια ιστορική αναδρομή για το πώς φτάσαμε από τα πρώτα πρώιμα μαθηματικά, στην χρήση αγνώστων και στην επίλυση εξισώσεων έως τα σύγχρονα χρόνια, θα παραθέσουμε ένα ερωτηματολόγιο σε μαθητές ώστε να μελετήσουμε την αντιμετώπιση και την κατανόηση των προβλημάτων που απαιτούν την χρήση μεταβλητών και αγνώστων από αυτούς.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε τα εξαγόμενα της έρευνας και πως αυτά συμπίπτουν ή όχι με δεδομένα που έχουμε από αντίστοιχες έρευνες που πραγματοποίησαν πλήθος ερευνητικών ομάδων Ελλήνων και μη. Ποια είναι τα βασικά λάθη, που δυσκολεύονται οι μαθητές και ποίες οι πιο συνήθεις συγχύσεις. Αλλά θα προτείνουμε και τρόπους διευκόλυνσης της κατανόησης των πρώτων εννοιών της άλγεβρας, διδακτικά σχέδια που θα συνδέσουν την αριθμητική χρήση στην οποία έχουν εξοικειωθεί οι μαθητές, με τα νέα ζητούμενα και την αφηρημένη σχέση.

Τέλος θα παραθέσουμε τα συνολικά συμπεράσματα μας από την εκπόνηση της όλης εργασίας έπειτα από την έρευνα που απαιτήθηκε. Τι είναι τελικά αυτό που δυσκολεύει τους μαθητές;

Κεφάλαιο 1:

Ιστορική αναδρομή των μαθηματικών και της μετάβασης από την αριθμητική στην άλγεβρα

Βλέποντας τα πάντα γύρω μας συνειδητοποιούμε την ίδια την φύση των μαθηματικών. Το ότι η ιδέα της αρίθμησης και των μαθηματικών εν γένει είναι από την φύση κάτι που βρίσκεται μέσα μας. Είναι λοιπόν λογικό να αναρωτούμαστε ποιοι ήταν οι πρώτοι άνθρωποι ιστορικά που εξέφρασαν αυτήν την ιδέα, αναρωτήθηκαν αν υπάρχουν γενικά μοτίβα διαχείρισης των «έμφυτων» ερωτημάτων και γέννησαν εν τέλει την αριθμητική και γενικότερα τα μαθηματικά. Αυτοί οι οποίοι έγιναν το έναυσμα ώστε χιλιάδες επιστήμονες στα μετέπειτα χρόνια να εξελίξουν τη μαθηματική σκέψη και να γεννηθούν οι τόσοι τομείς των μαθηματικών.

Παρότι, όπως είναι λογικό ακόμα και οι πρώτοι άνθρωποι διερωτόταν αυτά τα οποία αναφέρουμε , η πρώτη ολοκληρωμένη μαθηματική σκέψη αποδίδεται στους Βαβυλώνιους περί το 2000 πΧ . Δηλαδή περίπου εδώ και 4.000 χρόνια δουλεύουμε και εκπαιδεύουμε το μυαλό μας προάγοντας τα μαθηματικά. Ιδιαίτερη σημασία έχει και το πρώτο αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποίησαν οι Βαβυλώνιοι καθότι είχε ως βάση το 60 (!) πράγμα αρκετά παράδοξο για τα δικά μας δεδομένα όντας χρήστες δεκαδικού συστήματος. Ας φανταστούμε μόνο και μόνο ότι όταν στην πληροφορική, ή στην αριθμητική ανάλυση απαιτείται η χρήση δυαδικού ή οκταδικού συστήματος σε μαθητευόμενους μεγάλης κιόλας ηλικίας αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία, πόσο μάλλον για Βαβυλώνιους μαθητές μικρότερης ηλικίας χωρίς μαθηματικό υπόβαθρο και με 60-δικό σύστημα.

Οι Βαβυλώνιοι είναι και οι πρώτοι που περί το 1700 πΧ θα ασχοληθούν σε πρώιμο στάδιο με αριθμητικά προβλήματα. Θα ασχοληθούν με αυτό που αργότερα αναφέρεται ως «Πυθαγόρειες τριάδες» της μορφής $α^2+β^2=γ^2$, με πρώτες μορφές γραμμικών συστημάτων ακόμη και δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

Σχεδόν παράλληλα χρονικά πρώτα σημάδια μαθηματικών (αν και έγιναν χάριν αστρονομίας) εμφανίζουν και οι Κινέζοι. Με την πραγματεία « 9 Κεφάλαια της Μαθηματικής τέχνης» χρησιμοποιώντας την για αστρονομικούς και φορολογικούς λόγους κατάφεραν να υπολογίζουν εμβαδά κλασσικών σχημάτων, να ασχολούνται με γραμμικές εξισώσεις πρώτου βαθμού (8ο Κεφάλαιο) αλλά και να υπολογίζουν μέχρι και κυβικές ρίζες σχεδόν με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιούμε σήμερα.

Από τους πρώτους επίσης που «έπρεπε» να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά θεωρούνται και οι Αιγύπτιοι. Και αυτό λόγω του ποταμού Νείλου. Καθώς στις διάφορες εποχές του χρόνου ο ποταμός είτε πλημμύριζε καλύπτοντας τεράστιες εκτάσεις είτε συρρικνωνόταν το μέγεθος του από περιόδους ξηρασίας έγινε απαραίτητη η γνώση της γεωμετρίας. Για την επιβολή των ανάλογων φόρων από τους αυτοκράτορες Φαραώ έπρεπε να γνωρίζουν ποιος έκανε χρήση του κάθε κομματιού γης. Γι αυτό και υπήρξαν κρατικοί υπάλληλοι για την μέτρηση της γης (γεω-μέτρες) ώστε να αποδίδονται ανάλογα και οι φόροι. Εξού και ο όρος γεωμετρία που έμελλε να γεννηθεί χάριν οικονομικών αναγκών.

Η μεγάλη άνθηση των μαθηματικών γίνεται από τους Έλληνες μαθηματικούς από το 300 πΧ έως και το 200 π.Χ. Παρότι έχουν απορροφήσει την βάση των μαθηματικών των Βαβυλώνιων από το 450 π.Χ. αρχίζουν να εξελίσσουν την πρότερη γνώση δίνοντας στην ανθρωπότητα αρκετούς αιώνες πλούσιους σε μαθηματικές ανακαλύψεις. Εμφανίζονται τεράστιες μορφές που θα καθορίσουν την ιστορία και την δομή της όλης επιστήμης των μαθηματικών.

Ο Θαλής ο Μιλήσιος (640 π.Χ. – 546 π.Χ.) ο πρώτος χρονικά μεγάλος μαθηματικός του Ελλαδικού χώρου. Ασχολήθηκε με την θεωρητική γεωμετρία ασχολούμενος με κριτήρια ισότητας τριγώνου, σχέσεις ισοσκελών τριγώνων, κύκλου και γωνιών και δίνοντας μας το ομώνυμο θεώρημα για τους λόγους ομοιότητας. Ιδρυτής της Ιωνικής σχολής που μέλλει να επηρεάσει τις μετέπειτα γενιές.

Ο Πυθαγόρας (570 π.Χ. – 495 π.Χ.) όπου ιδρύοντας την σχολή του θα δημιουργήσει γενιές μαθητών ασχολούμενων με τα μαθηματικά. Θα ανακαλύψει το ομώνυμο θεώρημα που ακόμα και σήμερα κάθε ενήλικας ίσως είναι το μόνο που θυμάται από τα σχολικά του χρόνια. Ορίζοντας μία δική του κοσμοθεωρία με θρησκευτικές και πολιτικές απολήξεις, μετέτρεψε τα μαθηματικά σε ζωτικής σημασίας ιδέα που καθόρισε την ίδια του την φύση ακόμα και τον θάνατο του καθώς όταν ανακάλυψε τα ασύμμετρα μεγέθη που απαρνούταν την ύπαρξη τους έμελλε να καθορίσει και την τύχη του. Η μελέτη των Μαθηματικών ως ένα αυτοτελές πεδίο άρχισε με τη Σχολή των Πυθαγορείων, που πιστώνονται και τον όρο «Μαθηματικά», από την αρχαία ελληνική λέξη «μάθημα», που σημαίνει «πεδίο μάθησης»

Η μεγάλη τριάδα των φιλοσόφων της αρχαιότητας (Σωκράτης- Αριστοτέλης – Πλάτων) θα πάρει και θα δώσει πολλά στα μαθηματικά και κυρίως στην λογική. Ο Σωκράτης (469 π.Χ. - 399 π.Χ) ως πρώτος χρονικά θα μας δώσει την μαιευτική μέθοδο διδασκαλίας όπου θα χρησιμοποιηθεί αργότερα και στην διδακτική των μαθηματικών αλλά κυρίως η μεγάλη συμβολή του θα είναι η επαγωγική συλλογιστική μέθοδος.

Ο Πλάτων (427 π.Χ.–347 π.Χ.) ως μαθητής του Σωκράτη επηρεασμένος και αυτός από τον τρόπο σκέψης θα ασχοληθεί με τον όμορφο αυτό κόσμο, ορίζοντας μάλιστα και ο ίδιος ένα μοντέλο δημιουργίας του κόσμου χρησιμοποιώντας τα «Πλατωνικά Στερεά». Ισχυρίζεται πως οτιδήποτε αισθητό αποτελείται από κάποιον ποικίλλοντα συνδυασμό τεσσάρων βασικών στοιχειωδών υλικών τα οποία είναι : πυρ, αήρ, ύδωρ και γη. Με την σειρά τους αυτά τα υλικά δεν είναι απλά αλλά σύνθετα. Η γη αποτελείται από στοιχειώδης κύβους, το ύδωρ από στοιχειώδη κανονικά εικοσάεδρα, ο αήρ από στοιχειώδη κανονικά οκτάεδρα και το πυρ από στοιχειώδη κανονικά τετράεδρα» (Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στην φιλοσοφία των μαθηματικών, 2005). Δημιουργώντας την Ακαδημία Πλάτωνος θα επηρεάσει μέσα στους αιώνες πλήθος μαθητών και ιστορικών που μελέτησαν τις ιδέες του.

Και κλείνοντας την τριάδα των φιλοσόφων, χρονικά και μόνο τελευταίος, μαθητής του Πλάτωνα , ο Αριστοτέλης (384πΧ - 322 π.Χ.) είναι ο πατέρας της λογικής. «Είναι ο πρώτος που χρησιμοποιεί τα μαθηματικά στην φυσική και από αυτή την άποψη δεν είναι υπερβολή να τον θεωρήσουμε ως ιδρυτή της Θεωρητικής και της Μαθηματικής Φυσικής.»(Σπάνδαγος, Τα μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων, 2000). Από μεθοδολογική άποψη δίνει τεράστια συμβολή στα μαθηματικά. Χρησιμοποιεί α) επαγωγή σε άτοπο β) τέλεια επαγωγή γ) αναλυτική και δ) ενορατική. Σε ίδιο επίπεδο με την εξέλιξη της λογικής θα μπορούσε να θεωρηθεί και η συμβολή του στις έννοιες της συνέχειας και του απείρου, ιδέες πρωτοποριακές για τα δεδομένα της εποχής. Αναλογιζόμενοι πόσο μας δυσκολεύουν σήμερα οι έννοιες αυτές, μαρτυρά το πόσο μεγάλη μορφή μπορεί να θεωρηθεί ο Αριστοτέλης.

Όλοι οι ανωτέρω ασχολούνταν φυσικά και με την αστρονομία που ακολουθεί από κοντά την εξέλιξη των μαθηματικών. Και ίσως αυτό να είναι το μεγαλείο των προσωπικοτήτων αυτών καθώς προήγαγαν εκτός από τα μαθηματικά, την αστρονομία, την φυσική , την ρητορική, την φιλοσοφία και τόσες άλλες επιστήμες.

Και κάπου εκεί περί το 300 π.Χ. εμφανίζεται στην μαθηματική κοινότητα το έργο του Ευκλείδη (325πΧ- 265πΧ). Ο λεγόμενος και «Πατέρας της γεωμετρίας». Και αυτό γιατί με το έργο του «Στοιχεία» , μια συλλογή 13 τόμων έθεσε μια αξιωματική βάση στην γεωμετρία. Μπορεί να μην του «ανήκουν» όλα αυτά τα οποία περιέχονται στο έργο του και να μην θεωρείται καινοτόμος παρόλα αυτά όμως εισήγαγε την απόδειξη στην γεωμετρία και συγκέντρωσε και οργάνωσε όλη την υπαρκτή γνώση της εποχής δημιουργώντας ένα έργο με τεράστια διδακτική αξία για τις επόμενες γενιές.

Μολονότι είναι γνωστός για το γεωμετρικό του έργο και η έννοια της άλγεβρας θα εμφανιστεί στον μεσαίωνα, πολλές «αλγεβρικές» έννοιες τις βρίσκουμε στο Βιβλίο 2 των Στοιχείων του Ευκλείδη. Και πιο συγκεκριμένα ασχολείται με δευτεροβάθμιες αλγεβρικές εξισώσεις. Μπορεί ο αλγεβρικός συμβολισμός να μην έχει επινοηθεί ακόμα αλλά ο Ευκλείδης αναπαριστά τους αριθμούς με ευθύγραμμα τμήματα. Οι αλγεβρικές ταυτότητες της μορφής $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ παρουσιάζονται με μορφή γεωμετρική. Με γεωμετρικές επίσης κατασκευές λύνει πρωτοβάθμιες γραμμικές εξισώσεις. Ανάγει δευτεροβάθμιες εξισώσεις σε ισοδύναμες που αντιστοιχούν σε εμβαδά λύνοντας με γνωστά θεωρήματα. Μοιάζει ο τρόπος του με τους Βαβυλώνιους όμως η μέθοδος αυτή μπορεί να δώσει λύση και άρρητους αριθμούς. Θεωρήθηκε βασικός τρόπος επίλυσης προβλημάτων ειδικά εκείνων που σχετίζονταν με το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Παρότι η εξέλιξη των μαθηματικών δεν σταμάτησε αλλά αντιθέτως οι Έλληνες μαθηματικοί συνέχιζαν το μεγάλο έργο τους, η εμφάνιση της άλγεβρας όμως όπως την γνωρίζουμε καθυστέρησε. Εμφανίστηκαν τα «άλυτα προβλήματα της γεωμετρίας» : α) ο τετραγωνισμός του κύκλου, β) η τριχοτόμηση οξείας γωνίας, γ) το Δήλιο πρόβλημα, δηλαδή το πρόβλημα διπλασιασμού του κύβου και δ) η κατασκευή κανονικών επταγώνου και εννεαγώνου.

Εμφανίζονται νέες μεγάλες μορφές μαθηματικών όπως ο Απολλώνιος ο Περγαίος (3ος-2ος πΧ αιώνας) με το έργο του «Κωνικά» που μελετά τις κωνικές τομές, ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος (276πΧ- 194 πΧ) με την πραγματεία «Κόσκινο του Ερατοσθένους» να διδάσκεται επί της ουσίας ακόμη και σήμερα στα σχολεία για την εύρεση πρώτων αριθμών, και ίσως ο μεγαλύτερος επιστήμονας όλων των εποχών ο Αρχιμήδης (287 π.Χ.-212 π.Χ.) με πραγματείες πάνω σε αριθμητική, επίπεδη γεωμετρία, στερεομετρία και μαθηματικά. Ανακάλυψε την αρχή του ειδικού βάρους και του μοχλού. Στα μαθηματικά μας έδωσε την «μέθοδο της εξάντλησης» που στην ουσία συνδέεται με τα όρια τα οποία θα ανακαλυφθούν περίπου 1700 χρόνια μετά αλλά και μια πρώτη πολύ καλή προσέγγιση του άρρητου π. Μαθηματικός φυσικός και μηχανικός ίσως η πιο εξέχουσα μορφή στην επιστήμη των αρχαίων χρόνων.

Και ο κατάλογος συνεχίζεται με μεγάλους επιστήμονες που δούλευαν όμως πάνω σε άλλα πεδία των μαθηματικών. Μέχρι να φτάσουμε στον 3ο μετά Χριστόν αιώνα και να γνωρίσουμε τον Διόφαντο που θα αλλάξει την ιστορία των μαθηματικών.   Και αυτό γιατί με το έργο του «Αριθμητικά» 13ων τόμων που όμως μόνο τα έξι σώζονται σήμερα (είναι μία από τις τέσσερις εργασίες που γνωρίζουμε ότι τις έγραψε ο Διόφαντος) θα παρουσιάσει για πρώτη φορά μια όχι γεωμετρική άλγεβρα στην οποία απουσιάζουν οι γενικές μέθοδοι αλλά υπάρχουν έξυπνα τεχνάσματα για την λύση 130 προβλημάτων. Αυτό όμως που θα τον διακρίνει είναι η χρήση συμβολισμών. Μια πρώτη λοιπόν μορφή άλγεβρας, γι’ αυτό και θεωρείται και «Πατέρας της άλγεβρας». Μπορεί να μην χρησιμοποιεί γράμματα αλλά συντομογραφίες που μοιάζουν με τις σημερινές μας μεθόδους. Ας δούμε έναν πίνακα με τα βασικά:

Συμβολισμός	**Έννοια**		**Συμβολισμός**	**Έννοια**
S	άγνωστος		$\dot{M}$	μονάδα
$\uparrow$	σύμβολο αφαίρεσης		$\Delta^{Y}\overline{\alpha}$	χ^2
$\beta^{\pi\lambda}$	διπλάσια		$\gamma^{\pi\lambda}$	τριπλάσια
ισ.	ίσο ή ίσα		π^{λ}	πλευρά

Αλλά επίσης χρησιμοποίησε και μια δική του ορολογία που μπορούμε να δούμε παραδείγματα παρακάτω.

Συμβολισμός	**Έννοια**		**Συμβολισμός**	**Έννοια**
Δύναμη	Δεύτερη δύναμη		Κύβος	Τρίτη δύναμη
Δυναμοδύναμη	Τέταρτη δύναμη		Κυβοκύβος	Έκτη δύναμη
Αριθμιστόν	1/χ		Διναμοστόν	$1/\chi^2$
Κυβοστόν	$1/\chi^3$		Κυβοκυβοστόν	$1/\chi^6$

Οι πίνακες είναι από το βιβλίο «Τα Μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων» του Εαύγγελου Σπάνδαγου (2000, Εκδόσεις Αίθρα)

Άρα μια ισότητα αλγεβρική σχέση που με τον σύγχρονο συμβολισμό θα γραφόταν σαν $18\chi=\chi^2$ με την γλώσσα του Διόφαντου θα γράφαμε : $S\overline{\iota\eta}$ ίσοι εισί $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$.

Από την μελέτη των πολυωνύμων και την επίλυση εξισώσεων γνωρίζουμε ότι ήταν γνώστης των αρνητικών και των μιγαδικών αριθμών τους οποίους ονομάτιζε «αδυνάτους» και «ατόπους» αντίστοιχα. Γνώριζε την επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού της μορφής $\alpha\chi^2=\beta\chi+\gamma$ χρησιμοποιώντας τον τύπο $\chi = \dfrac{\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 + \alpha\gamma}}{\alpha}$.

Ο Διόφαντος παρότι στο πρώτο βιβλίο των «Αριθμητικών» ασχολείται με την λύση πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων εξισώσεων , στα υπόλοιπα βιβλία ασχολείται με πολυωνυμικές εξισώσεις της μορφής $\Phi(\chi^1,\chi^2,\ldots,\chi^\nu)=0$ αναζητώντας όμως μόνο ρητές λύσεις όπου από εκεί βαπτίστηκαν αργότερα και οι «Διοφαντικές εξισώσεις» που χρησιμοποιούμε σήμερα.

Τέλος ο Διόφαντος συνεισέφερε πολύ στην ανάπτυξη της αριθμητικής αφού για πρώτη φορά σε ευρεία κλίμακα άρχισε να χρησιμοποιεί τα κλάσματα ως πραγματικούς αριθμούς.

Έπειτα από αυτά τα τρελά άλματα στα μαθηματικά, θα έρθει μια μεγάλη περίοδος ανομβρίας. Και αυτό λόγω της εμπόλεμης κατάστασης που επικρατούσε σε ολόκληρη την Ευρώπη. Όπως όλες οι επιστήμες έτσι και τα μαθηματικά για να ευημερήσουν χρειάζονται ανθρώπους σε κατάλληλο σταθερό περιβάλλον, συνήθως εύρωστους ή έστω με χορηγίες ώστε να μην απασχολούνται με τα προς το ζην. Και ένα τέτοιο περιβάλλον δεν μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει στον Μεσαίωνα στην Ευρώπη όπου οι μάχες ήταν καθημερινό φαινόμενο και η οικονομία σε γενικές γραμμές καταρρακωμένη.

Ως εκ τούτου το μαθηματικό ενδιαφέρον μεταφέρεται ανατολικότερα και κυρίως στην Αραβία. Θα πρέπει λοιπόν να φτάσουμε στον 9ο μΧ αιώνα ώστε να έχουμε κάτι το ιδιαίτερα αξιόλογο. Και αυτό είναι η εμφάνιση ξανά της άλγεβρας δομημένης στα πρώτα στάδια όπως την γνωρίζουμε σήμερα. Ο όρος "άλγεβρα" έχει λοιπόν αραβική προέλευση και είναι η παραφθορά του όρου Αλ-γκιαμπρ (al-jabr) που ο Άραβας μαθηματικός Αλ Χουαρίζμι (Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi) χρησιμοποιούσε στο βιβλίο του al-Kitāb al-muẖtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala , που σημαίνει "το συνοπτικό βιβλίο για υπολογισμούς με μεταφορά και απλοποίηση", το οποίο έγραψε περί το 820 μ.Χ. Η ίδια η λέξη "al-jabr" σημαίνει την μεταφορά ενός όρου από το ένα μέλος μιας σχέσης στο άλλο. Το αραβικό κείμενο έγινε γνωστό στην Ευρώπη από λατινικές μεταφράσεις. Μάλιστα το 1857 βρέθηκε μια λατινική μετάφραση που άρχιζε με το «Έχει πει ο Αλγορίθμι…» το όνομα δηλαδή του Αλ Χουαριζμι που έγινε Αλγοριθμι και από την παράφραση αυτή γεννήθηκε και η λέξη αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε σήμερα στα μαθηματικά. Επίσης η Ισπανική λέξη guarismo και η πορτογαλική algarismo προέρχονται από το όνομα του, όπου και οι δυο λέξεις σημαίνουν ψηφίο.

Για πολλούς θα πρέπει να θεωρηθεί αυτός ο «Πατέρας της Άλγεβρας» καθώς είναι αυτός που παρουσίασε για πρώτη φορά συστηματική λύση της πρωτοβάθμιας αλλά και της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, αντιμετωπίζει την άλγεβρα ως ξεχωριστό κλάδο και εισάγει πολλές έννοιες που ήταν μέχρι τότε άγνωστες, όπως την μεταφορά ενός όρου στο άλλο μέλος της σχέσης και την απάλειψη ίδιων όρων από τα δύο μέλη.

Στο βιβλίο του δεν χρησιμοποιεί τον σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό αλλά ούτε και εξισώσεις όπως τις ξέρουμε. Οτιδήποτε γράφει είναι με λέξεις. Αφορά το κείμενο εξισώσεις , έξι διαφορετικών τύπων μάλιστα. Αγνοεί την ύπαρξη των αρνητικών αριθμών (όπως και του μηδέν που θα εμφανιστεί πολύ αργότερα) , οπότε στις εξισώσεις δευτέρου βαθμού οι αρνητικές ρίζες δεν υπάρχουν. Υπάρχουν όμως κανόνες αριθμητικής , πράξεις με τετραγωνικές και κυβικές ρίζες όπως επίσης και με κλάσματα αλλά και η μέθοδος των τριών που χρησιμοποιούμε μέχρι και σήμερα.

Μετέπειτα και άλλοι Άραβες συνέχισαν το έργο του Αλ Χουαριζμι , μελετώντας πολυώνυμα και κατασκευάζοντας πίνακες με διάφορες τιμές πολυωνύμων για την διευκόλυνση πράξεων αλλά και για αποδεικτική μέθοδο σε σχέσεις δυνάμεων μονωνύμων και πολυωνύμων.

Για να ξαναεπιστρέψει όμως το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά στην Ευρώπη θα πρέπει να περιμένουμε μέχρι την Αναγέννηση όπου μέσω της οικονομικής άνθησης και των εμπορικών συναλλαγών με την ανατολή θα έρθουν προς την ευρωπαϊκή δύση όλα αυτά που χάνονταν στα βάθη του χρόνου ελέω της κατάστασης που επικρατούσε στην Ευρώπη. Λόγω λοιπόν τον μεγάλων εμπορικών συναλλαγών θα ξαναγεννηθεί η ανάγκη για τα μαθηματικά και οι Ευρωπαίοι μελετητές θα ανατρέξουν στην αρχή στα πρόσφατα για την εποχή τους Αραβικά μαθηματικά. Δεν θα αργήσει όμως η ώρα να ξαναέρθουν στο προσκήνιο και τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά.

Πρωτοπόροι στην νέα αυτή διαδικασία θα σταθούν οι Ιταλοί περί τον 14ο αιώνα μΧ όντας και «θαλάσσιος» λαός με μεγάλο εμπόριο. Αυτοί θα είναι και οι πρώτοι που θα εισαγάγουν τον συμβολισμό στην άλγεβρα αν και θα χρειαστούν περισσότεροι από 3 αιώνες ώστε να καθιερωθεί. Θα μελετήσουν εξισώσεις έως και πέμπτου βαθμού, δίνοντας κανόνες επίλυσης όπως πχ για τις διτετραγωνικές εξισώσεις.

Τους επόμενους δύο αιώνες θα πάρουν τα ηνία Γερμανοί , Άγγλοι και Γάλλοι. Πλέον τα μαθηματικά έχουν βρει ξανά στέρεο περιβάλλον ώστε να αναπτυχθούν πλήρως. Εμφανίζονται ξανά μεγάλοι μαθηματικοί όπως ο Hillbert, Taylor, ο Newton και τόσοι άλλοι που προήγαγαν γενικά τα μαθηματικά. Εμείς θα ξεχωρίσουμε μόνο κάποιους οι οποίοι συνέβαλαν στην εξέλιξη της Άλγεβρας.

Ο Γερμανός Cristoff Rudolff που θα εισαγάγει το σύμβολο της ρίζας, ο Άγγλος Robbert Recorde που θα χρησιμοποιήσει για πρώτη φορά το σύμβολο « = », ο Ιταλός Cardano που μοντελοποίησε την επίλυση της τριτοβάθμιας εξίσωσης, ο σκωτσέζος John Napier για την εισαγωγή της ιδέας του λογάριθμου (εξου και «Νεπερ-ιος») αλλά και οι Μπομπέλι και Πιερ ντε Φερμα που επηρεάστηκαν από το έργο του Διόφαντου αφού μεταφράστηκε από τον πρώτο στα λατινικά και συνέχισαν το έργο του.

Τέλος κλείνοντας θα πρέπει να κάνουμε ιδιαίτερη μνεία στον Φρανσουά Βιέτ (1540-1603) καθώς είναι ο άνθρωπος που έδωσε στην άλγεβρα το νόημα που σήμερα χρησιμοποιούμε. «Υπήρξε ο πρώτος μαθηματικός που χρησιμοποίησε σε ευρεία κλίμακα τα γράμματα για να εκφράσει αριθμητικές ποσότητες. Το 1593 ο Βιέτ κατάφερε να εκφράσει τον αριθμό π με τη βοήθεια ενός απειρογινόμενου και τον υπολόγισε με ακρίβεια εννέα δεκαδικών ψηφίων, βελτιώνοντας έτσι το σχετικό αποτέλεσμα του Αρχιμήδη. Συμπερασματικά ο Βιέτ υπήρξε ο πρώτος που υποκατέστησε στις μαθηματικές του αποδείξεις τις γεωμετρικές κατασκευές με αλγεβρικές διαδικασίες.» («Ε» Ιστορικά , Περιοδικό εφημερίδος «Έθνος» 21/01/2009)

Από κει και πέρα όλα ήταν θέμα χρόνου για να φτάσουμε στο σήμερα. Χιλιάδες επιστήμονες έβαλαν από ένα μικρό λιθαράκι στην εξέλιξη της άλγεβρας και των μαθηματικών εν γένει, αξίζουν όλοι μνεία αλλά για τα δεδομένα της εργασίας μας θα περιοριστούμε σε γενικές ευχαριστίες σε όλους για το έργο τους.

Κεφάλαιο 2:

Σκοπός και μεθοδολογία της έρευνας

Βλέποντας ιστορικά το πόσο δύσκολη αποδείχθηκε η ανακάλυψη της σημερινής μορφής της άλγεβρας, πως μέσα στους αιώνες προβλημάτισε τόσους μαθηματικούς και ότι στο επίπεδο που πλέον διδάσκεται βρίσκεται εδώ και λιγότερο από τετρακόσια χρόνια αναμένουμε να δυσκολέψει ιδιαιτέρως τους νέους μαθητές των τάξεων του γυμνασίου.

Η μετάβαση των μαθητών από την Πρωτοβάθμια στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση κατά γενική ομολογία, δημιουργεί πολλές δυσκολίες στους μαθητές, οι οποίες είναι ιδιαίτερα έντονες στο μάθημα των Μαθηματικών (Booth, 1988; Carpenter, 1981; Davis, 1975; Sfard & Linchevski, 1994). Αυτό συμβαίνει γιατί, οι παραπάνω έρχονται αντιμέτωποι με έναν καινούριο χώρο όπου έχει έναν διαφορετικό τρόπο σκέψης και γραφής, από αυτόν που είχαν συναντήσει στην Αριθμητική κατά τη φοίτηση τους στις τάξεις του Δημοτικού που συμπίπτει ηλικιακά με το κρίσιμο πέρασμα από το πιεζετικό στάδιο συγκεκριμένων διεργασιών στο στάδιο των αφηρημένων ενεργειών . Ο χώρος, αυτός δεν είναι άλλος από τον 'όμορφο' χώρο της Άλγεβρας. Οι μαθητές λοιπόν, στο μάθημα της Άλγεβρας έρχονται αντιμέτωποι με σωρεία καινούριων πληροφοριών παρατηρώντας πολλές διαφορές αλλά και αρκετές ομοιότητες με τις γνώσεις που είχαν λάβει από την Αριθμητική, γεγονός που πολλές φορές τους δημιουργεί σύγχυση.

Ιδιαίτερα έντονες είναι οι δυσκολίες τους στην κατανόηση βασικών εννοιών όπως της μεταβλητής αλλά και στην επίλυση μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης που παρουσιάζονται στην Άλγεβρα. Πολλοί ερευνητές προσέγγισαν το θέμα αυτό, αναλύοντας κάποιους από τους λόγους που μπορεί να οφείλονται οι δυσκολίες αυτών. Η Booth (1984) θεωρεί πώς ένας βασικός λόγος της αδυναμίας των μαθητών του Γυμνασίου να κατανοήσουν τη δομή της Άλγεβρας είναι τα γράμματα που εμφανίζονται σε αυτή ως αναπαράσταση τιμών αλλά και η διαφορετική σημασία που αυτά έχουν στην Αριθμητική. Για παράδειγμα, τα γράμματα 'm' και 'cm' χρησιμοποιούνται στην Αριθμητική για να αντιπροσωπεύσουν τα μέτρα και τα εκατοστά, ενώ στην Άλγεβρα δηλώνουν τον αριθμό των μέτρων και των εκατοστών αντίστοιχα. Επίσης, πολλοί μαθητές, ενώ γνωρίζουν στη θεωρία τα σύμβολα, εντούτοις δεν μπορούν να τα χειρισθούν (ή μπορούν με μικρότερη ευκολία) από ότι χειρίζονται άλλα μαθηματικής φύσεως ζητήματα. Για παράδειγμα, η μεταβλητή σα σύμβολο παρουσιάζεται στους μαθητές της τελευταίας τάξης του Δημοτικού με τις ακόλουθες τρείς μορφές, που δε συνδέονται μεταξύ τους:

α) Ως γενίκευση κανόνων της Αριθμητικής.

β) Ως άγνωστος στις εξισώσεις.

γ) Ως ποσότητα στα πλαίσια μιας σχέσης (τύποι εμβαδού, τριγώνου κλπ.).

Οι διαφορετικές αυτές χρήσεις της μεταβλητής στη διδασκαλία που δεν επεξηγούνται κάθε φορά, δημιουργεί συγκεχυμένα συμπλέγματα στους μαθητές με αποτέλεσμα οι προ-αλγεβρικές τους γνώσεις να μη τους βοηθούν να κατανοήσουν τη χρήση (και την ουσία) των συμβόλων που χρησιμοποιούνται σα μεταβλητές στην Άλγεβρα (Δεμίρη κ.α., 1994). Μια επιπλέον, απόρροια της παραπάνω κατάστασης είναι ότι οι μαθητές αδυνατούν να σχηματίσουν ακόμα και μια απλή εξίσωση που προκύπτει σε ένα αλγεβρικό πρόβλημα (Kieran, 1992).

Ένα ακόμη σύμβολο, όπου η σημασία του στην Αριθμητική δεν είναι συμβατή με τη σημασία του στην Άλγεβρα, είναι το σύμβολο της ισότητας. Πολλές έρευνες έχουν δείξει ότι ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας αυτού του συμβόλου στο Δημοτικό δεν προωθεί την ενόργανη (instrumental) κατανόηση του από τους μαθητές (Skemp, 1976), κυρίως γιατί στο Δημοτικό οι μαθητές διδάσκονται πολλαπλά παραδείγματα της μορφής $a \pm b = c$ μέσω της αριθμητικής μάθησης (Falkner .etc.., 1999; Saenz-Judlow & Walgamuth, 1998). Έτσι, οι μαθητές στην Άλγεβρα πρέπει να είναι σε θέση να ερμηνεύουν το σύμβολο της ισότητας όχι μόνο ως ένα σύμβολο που δίνει ένα αποτέλεσμα (όπως διδάσκονται στο Δημοτικό) αλλά και με τις εξής ερμηνείες: ως ταυτότητα, ως μια σχέση ισοδυναμίας ή ως ένα σύμβολο που έχει τη σημασία του προσδιορισμού για κάτι που βρίσκεται στο αριστερό μέλος του ίσον (Cortes κ.α., 1990).

Τέλος, ένας ακόμη λόγος των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη μετάβαση τους στο Γυμνάσιο είναι η διαφορά μεθόδου επίλυσης ενός προβλήματος στην Αριθμητική από την

Άλγεβρα. Στην Αριθμητική οι μαθητές δε χρειάζεται να δικαιολογήσουν τις μεθόδους που χρησιμοποιούν για την επίλυση ενός προβλήματος κυρίως γιατί βασίζονται περισσότερο στη διαίσθηση τους και στόχος τους είναι να δοθεί μια γρήγορη και τελική αριθμητική απάντηση. Αντίθετα, στην Άλγεβρα για την επίλυση ενός προβλήματος (που περιλαμβάνει τη δημιουργία μιας εξίσωσης) απαιτείται από τους μαθητές ένας αλγοριθμικός τρόπος σκέψης, με κανόνες ανεξάρτητους από τα δεδομένα και τις σχέσεις που υπάρχουν στο πρόβλημα (Λεμονίδης, 1996).

Πρόσφατα έχουν διατυπωθεί νέες ιδέες για να διευκολύνουν τις δυσκολίες των μαθητών σε αυτή την πρώτη τους επαφή με την τυπική επίλυση μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης ή ενός προβλήματος που περιλαμβάνει την επίλυση της, μέσω συναρτήσεων (Farmaki, Klaoudatos & Verikios, 2005; Yerushalmy, 2000) ή άλλων εναλλακτικών προσεγγίσεων, π.χ. με τη χρήση αριθμόκουτων (Pirie & Martin, 1997).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, σκοπός της δικής μας έρευνας είναι να μελετήσουμε το πώς κατανοούν οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου την έννοια της μεταβλητής που εμπλέκεται στην πρωτοβάθμια εξίσωση αλλά και το πώς κατανοούν και χειρίζονται ένα πρόβλημα που συνιστά την επίλυση μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης. Στην έρευνα μας λοιπόν, θα προσπαθήσουμε να συνθέσουμε ένα όσο το δυνατό πιο πιστό πίνακα των δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές στην περιγραφή της έννοιας της μεταβλητής και των πράξεων της σκέψης για ορισμένες κατηγορίες προβλημάτων που είναι χαρακτηριστικές της Άλγεβρας.

Για τον σκοπό αυτό λοιπόν θα πρέπει να έρθουμε σε επαφή με παιδιά αυτής της ηλικίας, να συζητήσουμε μαζί τους, να αναγνωρίσουμε όλα αυτά τα προβλήματα που μπορεί να αντιμετωπίζουν απέναντι στις γνώσεις που έχουν διδαχθεί στα πλαίσια της άλγεβρας.

Έτσι για μια χρονική περίοδο δύο μηνών ήρθαμε σε επαφή με τα παιδιά των σχολείων των περιοχών της Καλαμάτας και του Γυμνασίου Αρφαρών, χωριού 13 χιλιόμετρα από τη Καλαμάτα. Επιλέγουμε δύο διαφορετικές περιοχές της Μεσσηνίας σχετικά διαφορετικές ως προς πολλές μεταβλητές όπως το οικονομικό επίπεδο σε σημείο όμως που να μην επηρεάζει το δείγμα μας. Και αυτό γιατί δεν θέλουμε το δείγμα μας να επηρεάζεται από εξωσχολικούς παράγοντες όπως για παράδειγμα αν επιλέγαμε μαθητές από ένα ιδιωτικό σχολείο όπου οι διδακτικές ώρες είναι διαφορετικές, η οικονομική δυνατότητα για επιπλέον εξωσχολική επιμόρφωση είναι μεγαλύτερη και γενικά δεν αντικατοπτρίζει την γενική εικόνα του επιπέδου των σχολείων μας σε πανελλαδική κλίμακα.

Στην δική μας περίπτωση επιλέγουμε δύο περιοχές όπου δεν μοιάζουν φαινομενικά αλλά δίνουν μια εικόνα γενική και αντικειμενική του επιπέδου των σχολείων. Για να είναι λοιπόν όσο πιο αντικειμενικό το δείγμα μας επιλέγουμε δύο σχολεία από κάθε περιοχή όπου από τα τρία τμήματα που σχηματίζονται συνήθως σε κάθε σχολείο επιλέγουμε ένα, ώστε με βάση τους είκοσι πέντε μαθητές που συνήθως έχει ένα τμήμα συνολικά να έχουμε τέσσερα διαφορετικά τμήματα που σημαίνει 100 διαφορετικές απόψεις μαθητών.

Οι μαθητές οι οποίοι συνεργάστηκαν μαζί μας ανήκαν σε τμήματα της Γ' Γυμνασίου πράγμα που μεταφράζεται σε ηλικίες από 14 χρόνων έως και 15 μισό. Η ηλικία των μαθητών πρέπει να επισημανθεί καθώς οι μαθητές έχουν ήδη διδαχθεί άλγεβρα και δεν είναι η πρώτη επαφή με τον μαγευτικό αυτό κόσμο.

Σύμφωνα με το πρόγραμμα του υπουργείου Παιδείας στην πρώτη τάξη του γυμνασίου επαναλαμβάνονται τα αριθμητικά μοντέλα που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές στα χρόνια του δημοτικού και έχουν τις πρώτες επαφές με τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης.

Στην δεύτερη τάξη του γυμνασίου είναι η πρώτη φορά που οι μαθητές καλούνται να αντιμετωπίσουν τις μεταβλητές και τις εξισώσεις. Εκεί ίσως να γίνονται οι πρώτες συγχύσεις και να μην δημιουργούνται οι σωστές βάσεις που θα απαιτηθούν για όσα θα μάθουν αργότερα οι μαθητές. Δεν εγκαταλείπονται όμως τα αριθμητικά μοντέλα και οι εφαρμογές αφού πρόκειται για το ενδιάμεσο στάδιο.

Στην τρίτη τάξη, όπου τους μαθητές της συναντήσαμε εμείς, είναι η περίοδος όπου οι μαθητές καλούνται να δουλεύουν μόνο μεταβλητές και να αφήσουν πλήρως τις αριθμητικές αντικαταστάσεις και εφαρμογές. Ασχολούνται με μονώνυμα, πολυώνυμα, πράξεις μεταβλητών, ταυτότητες και παραγοντοποιήσεις.

Ενδιαφέρον έχει ότι την περίοδο που ήρθαμε σε επαφή με τα παιδιά ήταν χρονικά λίγο πριν οι καθηγητές ασχοληθούν και διδάξουν συστήματα εξισώσεων. Η δική μας λοιπόν παρεμβολή θα μπορούσε να βοηθήσει τους καθηγητές χρησιμοποιώντας την επαφή αυτή ως επανάληψη των προηγούμενων γνώσεων.

Αυτό το οποίο ζητήσαμε εμείς από τους μαθητές αυτούς ήταν να συμπληρώσουν και να λύσουν ένα ερωτηματολόγιο το οποίο παραθέτουμε και αναλύουμε πλήρως στο επόμενο κεφάλαιο. Μετά το πέρας της επίλυσης συζητήσαμε ξεχωριστά με τον κάθε μαθητή , στα πλαίσια μιας μικρής συνέντευξης, ώστε να διαπιστώσουμε τι από τα ερωτήματα δυσκόλεψε και γιατί , τι επιλύθηκε εύκολα χωρίς δυσκολίες και γενικά να διαπιστώσουμε πλήρως το επίπεδο αποφεύγοντας την απλή μελέτη των ερωτηματολογίων που θα μπορούσαν να επηρεάζονται και από άλλους παράγοντες. (Αντιγραφή, επιλογή στην τύχη κτλ.)

Αφού συγκεντρώσαμε τα ερωτηματολόγια και τις συνεντεύξεις των μαθητών, μελετήσαμε και ομαδοποιήσαμε τις απαντήσεις όπου τα εξαγόμενα θα αναλυθούν πλήρως παρακάτω. Θα συγκρίνουμε και θα παραθέσουμε και χαρακτηριστικές απόψεις μαθητών όπου σχετίζονται με τα εξαγόμενα συμπεράσματα ερευνών από ερευνητικές ομάδες που έγιναν τις προηγούμενες δεκαετίες.

Κεφάλαιο 3:

Έρευνα πάνω στην δυσκολία της μετάβασης, μελέτη του ερωτηματολόγιου

Στα πλαίσια της εργασίας μας θα κάνουμε μία έρευνα με σκοπό να προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε τις μαθησιακές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές που εισέρχονται στα σχολικά πλαίσια του γυμνασίου και αντιμετωπίζουν την πρώτη γνωριμία με τον κόσμο της άλγεβρας. Θα διερευνήσουμε που πηγάζουν τα προβλήματα με την διαχείριση των μεταβλητών και των αγνώστων, σε σύγκριση και με τις μελέτες άλλων ομάδων επιστημόνων και ακόμα και να βρούμε τα εκπαιδευτικά εκείνα κενά που προκαλούν την αντιμετώπιση αυτή από τους μικρούς μαθητές.

Για να εκπληρώσουμε τον σκοπό μας θα παραθέσουμε σε μαθητές μας ένα ερωτηματολόγιο διαμορφωμένο έτσι ώστε η δυσκολία να είναι κλιμακωτή και να καθοδηγεί τους μαθητές στην επίλυση των πιο δύσκολων ερωτημάτων. Στο πρώτο κομμάτι του θα εισάγει τους μαθητές στην χρήση της μεταβλητής ως αναφορά και μόνο ώστε να «βαπτίζουμε» το ζητούμενο ως άγνωστη-μεταβλητή. Έπειτα θα ζητούνται λίγο πιο δύσκολα ερωτήματα που θα πρέπει να εισάγουν και πάλι μεταβλητή αλλά σε πιο δύσκολο επίπεδο ακόμα και να γίνουν οι πρώτες πράξεις των εξισώσεων. Σιγά σιγά λοιπόν θα μπούμε στο δεύτερο κομμάτι όπου θα πρέπει να λυθούν προβλήματα , ακόμα και γεωμετρίας, με χρήση των αγνώστων και εξίσωση.

Μετά την συμπλήρωση των ερωτηματολογίων θα βάλουμε τους μαθητές στην διαδικασία να μας παραθέσουν κάποιο είδος συνέντευξης ώστε να κατανοήσουμε με ποιο τρόπο εργάστηκαν και πού συνάντησαν τις δυσκολίες.

Παραθέτουμε παρακάτω το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές:

Ερωτηματολόγιο

Ομάδα Α

1. Να εκφράσετε με τη βοήθεια μιας μεταβλητής τις παρακάτω προτάσεις:

α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 10.
β) Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου.
γ) Η τιμή ενός προϊόντος μετά από έκπτωση 20%.
δ) η περίμετρος ενός ορθογωνίου που οι διαστάσεις του διαφέρουν κατά 2.
ε) Αν ν φυσικός, το άθροισμα τριών διαδοχικών άρτιων αριθμών.

2. Να γράψετε με τη βοήθεια μεταβλητών τις φράσεις:

α) Ο μέσος όρος δύο αριθμών είναι 5.
β) Το κόστος δύο ίδιων τετραδίων και τριών ίδιων βιβλίων.
γ) Ένας περιττός αριθμός αυξημένος κατά το διπλάσιο του επόμενού του αριθμού.

3. Να εκφράσετε με μια ισότητα τις παρακάτω προτάσεις:

α) Το άθροισμα τριών διαδοχικών περιττών αριθμών, από τους οποίους ο μεσαίος είναι ο 2x +1, είναι ίσο με 15.
β) Το αντίθετο του τριπλασίου ενός αριθμού αυξημένου κατά 5 ισούται με 20.
γ) Ο Μιχάλης είναι 4 χρόνια μεγαλύτερος από τον Γιώργο και το μισό της ηλικίας του Μιχάλη ισούται με το 1/6 της ηλικίας του Γιώργου αυξημένο κατά 8 χρόνια.

4.α) Αν α+β=3, τότε ποια τιμή παίρνει η αλγεβρική παράσταση

$A=3α−(α−2β)$;

β) Πώς μπορεί να γραφτεί απλούστερα η εξίσωση $2α + 6 – 3α = 25$;

5. Σημειώστε ποιές από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζουν την ίδια μαθηματική σκέψη με την εξίσωση $10x+2=5x+7$ (χωρίς να λυθούν οι εξισώσεις):

i. $x=1$ ii. $10x-1=5x+4$ iii. $5x=5$ iv. $10x+7+5x=5x+7$

6. Δίνεται η εξίσωση $αx+3μ=x+6$.

α) Να γράψετε την παραπάνω εξίσωση στη μορφή $Αx=Β$.

β) Να βρείτε τις τιμές των α, μ, ώστε η αρχική εξίσωση να είναι αόριστη. γ) Να βρείτε τις τιμές των α, μ, ώστε η αρχική εξίσωση να είναι αδύνατη.

Ομάδα Β

1. Ο Πέτρος και ο Σάκης αμείβονται για την εργασία τους με την ώρα. Ο Πέτρος κερδίζει 2 € την ώρα περισσότερα από τον Σάκη. Όταν ο Πέτρος εργάζεται 7 ώρες και ο Σάκης 5 ώρες, ο Σάκης κερδίζει 26 € λιγότερα από τον Πέτρο. Να βρεθεί το ωρομίσθιο του καθενός.

α) Να γράψετε μια εξίσωση με την οποία επιλύεται το ακόλουθο πρόβλημα.

β) Να επιλύσετε την εξίσωση που γράψατε στο ερώτημα (α) περιγράφοντας αναλυτικά το κάθε βήμα ξεχωριστά.

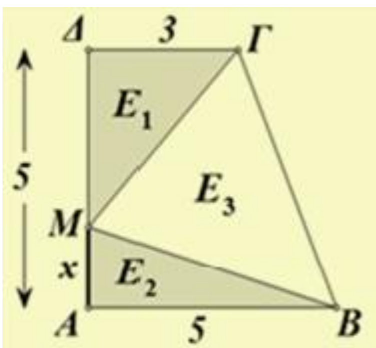
2. Το ρεζερβουάρ ενός αυτοκινήτου περιέχει διπλάσια ποσότητα βενζίνης από το ρεζερβουάρ ενός άλλου αυτοκινήτου. Αν το πρώτο αυτοκίνητο καταναλώσει 34 λίτρα και το δεύτερο 7

λίτρα, θα μείνει ίδια ποσότητα βενζίνης στα δύο αυτοκίνητα. Πόσα λίτρα βενζίνης περιέχει κάθε αυτοκίνητο;

α) Να γράψετε μια εξίσωση με την οποία επιλύεται το ακόλουθο πρόβλημα.

β) Να επιλύσετε την εξίσωση που γράψατε στο ερώτημα (α) περιγράφοντας αναλυτικά το κάθε βήμα ξεχωριστά.

3.



Στο διπλανό ορθογώνιο τραπέζιο να βρεθεί η θέση του σημείου M στην $ΑΔ$ ώστε για τα εμβαδά $E_1 = (ΜΔΓ)$, $E_2 = (ΜΑΒ)$ και $E_3 = (ΜΒΓ)$ να ισχύει η σχέση α) $E_1+E_2=E_3$ και β) $E_1=E_2$

Πάμε πρώτα να κάνουμε μία μελέτη του ερωτηματολογίου προτού αρχίσουμε να βλέπουμε τις απαντήσεις και τα αποτελέσματα της έρευνας.

Όπως βλέπουμε το ερωτηματολόγιο είναι χωρισμένο σε δύο τμήματα των έξι και τριών ερωτημάτων αντίστοιχα. Ξεκινώντας από την ομάδα Α έχουμε θέσει τις δύο πρώτες ασκήσεις σχεδόν ίδιας δυσκολίας όπου τα ερωτήματα αφορούν μετάφραση μίας λεκτικής έκφρασης στην γλώσσα της άλγεβρας, χρησιμοποιώντας μία μεταβλητή στην πρώτη άσκηση αλλά δύο μεταβλητές στην δεύτερη άσκηση. Θα δούμε και παρακάτω ότι στην πρώτη άσκηση πολλοί μαθητές αντί να εκφράσουν με μία μεταβλητή όλα τα ερωτήματα εισήγαγαν και μια άλλη, δεύτερη μεταβλητή.

Στην τρίτη άσκηση εισαγάγουμε και την ισότητα στα ζητούμενα μας. Πλέον χρειάζεται εκτός από την «μετάφραση» και την εισαγωγή της μεταβλητής, να ορίσουμε και μια ισότητα, δηλαδή μια εξίσωση. Η έννοια της εξίσωσης θα μας επηρεάσει πολύ στην έρευνα μας και ακόμα και το ίδιο το σύμβολο της ισότητας.

Στην τέταρτη άσκηση θα πρέπει οι μαθητές να διαχειριστούν δοθέντες σχέσεις με αλγεβρικούς συμβολισμούς. Θα πρέπει με βάση μια ισότητα να βγάλουμε ένα εξαγόμενο αλλά και να απλοποιήσουμε μια ισότητα, φέρνοντας τους μαθητές σε μια πρώτη γνωριμία με τις πράξεις εξισώσεων.

Στο πέμπτο ερώτημα μας οι μαθητές καλούνται να <u>σκεφτούν</u> τις εξισώσεις. Και όχι να λύσουν. Να καταλάβουν τι εκφράζουν και να δουν την ισοδυναμία ανάμεσα σε δύο σχέσεις.

Τέλος στην έκτη άσκηση μας θα πρέπει οι μαθητές να μετασχηματίσουν μία σχέση σε μία συγκεκριμένη μορφή ώστε να εισάγουμε νέες μεταβλητές. Δηλαδή να δουν ότι μία σχέση που είμαστε συνηθισμένοι να ψάχνουμε την λύση της (συγκεκριμένη αριθμητική ή γενικής μορφής συναρτήσει άλλης μεταβλητής) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως παράδειγμα για να βάλουμε ως έξτρα μεταβλητές αυτά που ήταν ήδη γνωστά, τους συντελεστές δηλαδή. Μια πρώτη επαφή λοιπόν με τις παραμετρικές εξισώσεις που θα συναντήσουν στα επόμενα σχολικά τους χρόνια. Επιπλέον θα ελέγξουμε την γνώση των εννοιών: αόριστη και αδύνατη εξίσωση.

Στην δεύτερη ομάδα ασκήσεων τώρα, το αντικείμενο μας θα είναι προβλήματα που ούτως ή άλλως είναι μεγάλος φόβος των μαθητών όλων των ηλικιών, τα οποία όμως θα πρέπει να εκφραστούν με αγνώστους, να μετασχηματιστούν σε εξισώσεις και να επιλυθούν.

Στις δύο πρώτες ασκήσεις μας το ερώτημα είναι έτσι διατυπωμένο ώστε να θεωρηθεί σε μία πρώτη ανάγνωση, ότι απαιτούνται δύο μεταβλητές και στην συνέχεια να διαπιστώσουν ότι οι δύο μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους και μπορούν να γραφούν συναρτήσει μόνο της μίας. Ζητείται και η επίλυση στάδιο –στάδιο προς έλεγχο της διαδικασίας.

Στο τελευταίο κομμάτι του ερωτηματολογίου θα φέρουμε τους μαθητές αντιμέτωπους με μερικές μαθηματικές φοβίες. Όχι μόνο θα θέσουμε πρόβλημα που θα πρέπει να λυθεί με εξίσωση , αλλά το πρόβλημα αυτό θα είναι και γεωμετρικό που παρότι είναι εύκολο στην επίλυση, η θέαση και μόνο του σχήματος μπορεί να φέρει σε δύσκολη θέση τους μαθητές.

Βλέποντας συνολικά την διαρρύθμιση του ερωτηματολογίου και την ανάλυση του, παρατηρούμε ότι εκτός από τον σκοπό της έρευνας μας θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και ως διδακτικό μέσο ώστε να φέρει βήμα – βήμα τους μαθητές πιο κοντά στην κατανόηση των εννοιών. Θα μπορούσε να ήταν το κομμάτι των ασκήσεων σε ένα σχολικό βιβλίο, ακόμα και διαγώνισμα πάνω στην ύλη των εξισώσεων της Β’ Γυμνασίου.

Στο παρακάτω κομμάτι θα δούμε μια μικρή ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών και των δυσκολίων που συνάντησαν. Για καλύτερη κατανόηση θα πάρουμε κομμάτι-κομμάτι το ερωτηματολόγιο ώστε άσκηση- άσκηση να εντοπίζουμε τα προβλήματα:

<u>Ομάδα Α:</u>

- Όσον αφορά την πρώτη άσκηση λοιπόν είπαμε ήδη ότι πρόκειται για ένα ερώτημα που απαιτεί την «μετάφραση» των λεκτικών εκφράσεων στην γλώσσα την άλγεβρας. Και εδώ τα υποερωτήματα αυξάνουν κάθε ένα την δυσκολία ώστε να ανεβάζουμε το επίπεδο. Αφορά λοιπόν το βασικό κομμάτι δυσκολίας. Την χρήση της μεταβλητής και που αυτή θα μπει. Σύμφωνα και με την έρευνα των Ε.Δεμίρη , Α. Μαρκέτος και Γ. Μπάρμπας (1994) όταν η μεταβλητή έχει διαφορετικές χρήσεις και δεν έχει επεξηγηθεί η ίδια η φύση της δημιουργεί συγχύσεις και αντιφάσεις. Για παράδειγμα στο ερώτημα «3β+2β» μόνο το 21,6% δίνει απάντηση κάνοντας πράξεις μεταξύ μεταβλητών (5β ή έστω 5^{β} που αν και λάθος χρησιμοποιήθηκε έστω η μεταβλητή), παίρνοντας ως πιο σύνηθες απάντηση ότι «πρέπει να έχω το β για να βρω το αποτέλεσμα».

  Στο δικό μας ερωτηματολόγιο όταν ζητείται στο α ερώτημα να μετασχηματιστεί το « το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 10» η πρώτη σύνηθες ερώτηση είναι «για ποιόν αριθμό;» μη έχοντας κατανοήσει την φύση του ερωτήματος. Μετά από λίγη σκέψη και ξαναδιαβάζοντας την εκφώνηση εύκολα προσεγγίζεται το ζητούμενο (3χ-10) αν και αναζητείται το αποτέλεσμα. Δεν είναι εύκολο για αρχή να αποδεχθούν οι μαθητές ότι η φύση του ερωτήματος δεν είναι αριθμητική και αναζητούν ένα νούμερο ως αποτέλεσμα. Booth, L.R. (1988).

  Στο β ερώτημα έχοντας ήδη μπει στην λογική ότι η απάντηση μας θα πρέπει να δοθεί με «γράμματα» οι μαθητές ψάχνουν ήδη κάτι για να το βαπτίσουν ως «χ». Παρότι αφορά γεωμετρικό ζητούμενο το ότι αυτό είναι το ισοσκελές τρίγωνο με τις «εύκολες» ιδιότητες του θα βοηθήσει στην διαδικασία επίλυσης.

Το γ ερώτημα είναι ίσως και το πιο δύσκολο. Και αυτό γιατί τα ποσοστά από μόνα τους δυσκολεύουν τους μαθητές , πόσο μάλλον συνδυασμένα με μεταβλητές και αγνώστους. Παρατηρείτε το εξής ενδιαφέρον. Μια πρώτη απάντηση που δίνεται στο ερώτημα είναι ότι η απάντηση είναι το «χ». Δηλαδή ψάχνοντας μια εύκολη απάντηση για να προχωρήσουν εφόσον αναζητάτε ένας άγνωστος βαπτίζουν το ίδιο το ερώτημα ως χ χωρίς να υπολογίζουν όλα τα δεδομένα. Μόνο ένα μικρό ποσοστό θα δώσει σωστή λύση και αυτό κυρίως σκεπτόμενοι ότι θα μείνει το 80% της αξίας μετά την έκπτωση, και όχι αφού κάνουν πράξεις της μορφής χ-0,2χ= 0,8χ. Αξιοσημείωτο επίσης το ότι οι περισσότερες απαντήσεις δίνονται στην μορφή 80% και όχι 0,8 κατάλοιπο της δυσχέρειας στην χρήση των ποσοστών και την μετάβαση από ποσοστά σε δεκαδικούς.

Έχοντας μπει στην λογική από τα προηγούμενα ερωτήματα και ειδικά από το (β) όπου έχουμε ήδη δουλέψει την περίμετρο αναμένουμε να είναι εύκολη η επίλυση. Το πρόβλημα που εμφανίζεται είναι στην χρήση μιας και μόνο μεταβλητής. Έχοντας μάθει από τα χρόνια του δημοτικού να έχουμε δύο αγνώστους για το μήκος και το πλάτος αντίστοιχα του ορθογωνίου, σε πολλές απαντήσεις που δόθηκαν σε αντίθεση με τα δεδομένα της εκφώνησης, χρησιμοποιήθηκαν δύο μεταβλητές. Δεν διαχειρίστηκαν εύκολα δηλαδή το δεδομένο ότι οι δυο διαστάσεις διαφέρουν κατά δυο μονάδες. Αξιοσημείωτη βέβαια είναι η χρήση συγκεκριμένων μεταβλητών. Το μεγαλύτερο ποσοστό των ερωτηθέντων χρησιμοποίησε τις μεταβλητές μ και π για το μήκος και το πλάτος αντίστοιχα. Ίσως η επιρροή από τα προηγούμενα σχολικά χρόνια όπως διαπιστώνει και η Booth L.R. Οι μαθητές συνδέουν την μεταβλητή που χρησιμοποιούμε με συγκεκριμένες παραστάσεις που λεκτικά αρχίζουν με το γράμμα που χρησιμοποιούμε για μεταβλητή. Θεωρούν αναγκαίο ότι αν χρησιμοποιήσω το «χ» θα πρέπει να αναπαριστά κάτι που λεκτικά να αρχίζει με χ όπως χαρτόνια, χτένες κτλ. Οπότε αναμενόμενη πρέπει να είναι και η χρήση για το μήκος της μεταβλητής «μ» και για το πλάτος το «π».

Στο ε ερώτημα αντιμετωπίζουμε νέα θέματα. Ορίζοντας ως ν τον φυσικό, προκαταβάλλονται πολλοί μαθητές στην χρήση των μεταβλητών. Ζητούμε επί της ουσίας τρία βήματα : α) να θέσουμε την μεταβλητή , έστω ν β) να ορίσουμε τον άρτιο συναρτήσει της μεταβλητής μας (2ν) και γ) να γράψουμε το άθροισμα των τριών διαδοχικών άρτιων (2ν,2ν+2,2ν+4)

Σύμφωνα και με όσα αναφέραμε νωρίτερα πολλοί μαθητές χρησιμοποίησαν τις μεταβλητές φ και α για τις έννοιες φυσικός και άρτιος αντίστοιχα. Εμφανίζεται εδώ λοιπόν σύμφωνα και με την Booth, L., R. (1984 σελ. 28) το πρόβλημα της «έλλειψης αριθμητικής αναφοράς» όπου ως χαρακτηριστικό παράδειγμα μας αναφέρει τον διάλογο με έναν 15χρονο μαθητή όπου στην έκφραση 3+5γ έλεγε ότι αναφέρεται σε 8 γιοτ ή 8 γιαούρτια.
Επίσης εμφανίζεται το πρόβλημα του συμβόλου της πρόσθεσης. Κι αυτό γιατί έχοντας στο μυαλό τους τις επιτρεπτές και μη πράξεις, οι μαθητές θα δώσουν πολλές διαφορετικές απαντήσεις. Μεταξύ αυτών ήταν « 2ν+2ν+2+2ν+4» , το ορθότερο «6ν+6» αλλά ακόμα και «12ν».

- Πάμε τώρα να δούμε κάποια ενδιαφέροντα εξαγόμενα από την δεύτερη άσκηση. Κι εδώ ζητείται να «μεταφραστούν» κάποιες εκφράσεις στην αλγεβρική γλώσσα. Με την ιδιαιτερότητα ότι εδώ θα χρειαστούμε δύο αγνώστους πράγμα που στους περισσότερους μαθητές λειτουργεί ως βοήθεια καθώς είναι πιθανό να μην χρειαστεί να εκφράσουν τον ένα άγνωστο συναρτήσει του άλλου.

Έτσι λοιπόν στο α υποερώτημα οι δύο άγνωστοι αριθμοί βαπτίζονται συνήθως ως χ και ψ με την ζητούμενη σχέση $\frac{\chi+\psi}{2}=5$ να ανακαλύπτεται σχετικά εύκολα αφού οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με την έννοια του μέσου όρου λόγω του «βαθμο-κεντρικού» σχολικού συστήματος.

Στο β υποερώτημα παρότι η ζητούμενη σχέση (έστω 2α+3β ή έστω 2τ+3β) βρίσκεται εύκολα παρατηρούμε ότι οι μαθητές ως επί το πλείστο αναζητούν την ισότητα. Και εδώ βλέπουμε περιπτώσεις υπολογισμού του αθροίσματος ως 5τβ λόγω ανάγκης αριθμητικής παράστασης και αντικατάστασης αλλά και εξαιτίας μη διαχωρισμού των μεταβλητών. [Booth, L.R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra]

Τέλος στο τελευταίο (γ) ερώτημα είχαμε από τα «χειρότερα» αποτελέσματα σωστών απαντήσεων. Ζητάμε έπειτα από ένα μικρό άλμα στην δυσκολία των ερωτημάτων να ορίσουμε αγνώστους αλλά και να συσχετίσουμε τον δεύτερο συναρτήσει του πρώτου. Σε ένα ποσοστό μικρότερο από 1 στους 12 μαθητές κατάφερε να σκεφτεί ως 2κ+1 τον περιττό (οι περισσότεροι από τους μαθητές αυτούς είχαν λύσει ορθά και το υποερώτημα των άρτιων 1(ε) και είχαν ήδη μια πρώτη σκέψη ως βάση) και ακόμα περισσότερο ότι ο επόμενος αριθμός που αναφέρεται θα πρέπει να είναι ο άρτιος (2κ+2).

Με βάση λοιπόν αυτά όπως είναι αναμενόμενο το αποτέλεσμα (2κ+1)+2(2κ+2) ως πρώτη έκφραση δεν εμφανίστηκε συχνά ανάμεσα στις δοθέντες απαντήσεις. Παρατηρούμε όμως ότι όσοι μαθητές απάντησαν σωστά είχαν εργαστεί τμηματικά σε στάδια, πράγμα που συγκρατούμε και θα μας χρειαστεί αργότερα στην μεθοδολογία και την προτεινόμενη διδασκαλία μας. Δηλαδή μια δομή της μορφής:

~ Ορίζω 2κ+1 τον περιττό
~ Ο επόμενος αριθμός είναι το 2κ+2
~ Το διπλάσιου του είναι 2(2κ+2)
~ Αυξημένο σημαίνει πρόσθεση
~ Άρα το αποτέλεσμα θα είναι (2κ+1)+2(2κ+2)….

Το δεύτερο πιο εμφανιζόμενο αποτέλεσμα στις απαντήσεις μας ήθελε ως ψ για παράδειγμα τον περιττό, άρα ψ+1 τον επόμενο αριθμό και ψ+2(ψ+1) το ζητούμενο αποτέλεσμα. Στις κατ' ιδίαν συζητήσεις στα πλαίσια των συνεντεύξεων των μαθητών διαπιστώσαμε το εξής παράδοξο ή μαθηματικό – εκπαιδευτικό κενό: Οι μαθητές μαθαίνουν ότι θα πρέπει ο ένας άγνωστος να ορισθεί ως μία μεταβλητή αγνοώντας παντελώς την περίπτωση ο ίδιος ο άγνωστος που θέλω να είναι μία αλγεβρική παράσταση. Ας δούμε ακόμα και στην περίπτωση όπου αναφέρουμε:
« Ωραία, και η παράσταση ψ+2(ψ+1) είναι σωστή…»

«Αν σου πω όμως επιπλέον ότι το ψ είναι ίσο με 2κ+1 σαν περιττός , τι μπορείς να κάνεις;»
Οι περισσότεροι μαθητές το αντιμετωπίζουν ως κάτι «εξωπραγματικό», ανωτέρας δυσκολίας, προσπαθώντας συνήθως είτε να λύσουν κάποια εξίσωση της μορφής ψ+2(ψ+1)= 2κ+1 είτε να αντικαταστήσουν μόνο το πρώτο ψ στην σχέση ψ+2(ψ+1) και να δουλεύουν κάτι σαν το 2κ+1+ 2(ψ+1).

Συγκεντρώνοντας ότι είδαμε από τις δύο πρώτες ασκήσεις διαπιστώνουμε μεγάλες δυσκολίες και κυρίως συγχύσεις ως προς τις έννοιες. Λείπει αυτό το οποίο ο Lins αναφέρει ως «Αλγεβρική Σκέψη» που μεταφράζεται σε :

1) αριθμητική σκέψη: που σημαίνει να «μοντελοποιούμε» τους αριθμούς

2) εσωτερική σκέψη : που σημαίνει να παραπέμπουμε μόνο στις διαδικασίες και τις ισότητες και

3) αναλυτική σκέψη : που σημαίνει να σκεφτόμαστε το άγνωστο ως κάτι γνωστό Lins R.C (1992)

- Στο επόμενο κομμάτι που αφορά την ανάλυση των εξαγομένων από την τρίτη άσκηση, το βασικό «πρόβλημα» που θα μας απασχολήσει είναι η έννοια της ισότητας. Και σε αυτήν την άσκηση ζητάμε να εκφραστεί ένα λεκτικό πρόβλημα σε συμβολική γραφή με το επιπλέον στοιχείο που απαιτείται να είναι η ισότητα στην σχέση. Προχωρούμε ένα βήμα περαιτέρω, ανεβάζοντας ελαφρά το επίπεδο, εισάγοντας όμως μια έννοια που θα μας απασχολήσει ιδιαιτέρως , όπως απασχόλησε και πλήθος ερευνητών κατά το παρελθόν.

Έχουμε λοιπόν στο α υποερώτημα να ζητείται ένα άθροισμα 3 περιττών αριθμών να ισούται με 15. Εκτός όμως της γενικής χρήσης των περιττών απαιτείται ο μεσαίος να είναι ο 2χ+1. Άρα σύμφωνα και με όσα είπαμε νωρίτερα σε προηγούμενα ερωτήματα, προλαβαίνουμε την αυθαίρετη χρήση του συμβολισμού ψ για ένα περιττό όπως πριν , ώστε να μην δούμε απαντήσεις της μορφής ψ+(ψ+2)+(ψ+4)=15 είτε (ψ-2)+ψ+(ψ+2)=15.

Παρόλα αυτά όμως δεν είναι λίγες οι απαντήσεις που δίνονται «εξαφανίζοντας» την έννοια του περιττού για δική τους διευκόλυνση. Συμβαίνει συχνά μαθητές, μη μπορώντας να ολοκληρώσουν πλήρως το ερώτημα να κάνουν πως δεν είδαν κάποιο δεδομένο ούτως ώστε να απαντήσουν κάτι έστω και αν αυτό είναι δομημένο σε λάθος βάση. Δίνοντας λοιπόν απαντήσεις της μορφής $2\chi+(2\chi+1)+(2\chi+2)=15$ ώστε τουλάχιστον να ικανοποιείται η συνθήκη ο μεσαίος αριθμός να είναι ο $2\chi+1$.

Ας δούμε τώρα τι θα μας δώσει το β υποερώτημα. Και εδώ μία σχέση λέξεων θα πρέπει να εκφραστεί με μια ισότητα. Το σημαντικότερο συμπέρασμα από τις απαντήσεις έγκειται στις δύο λύσεις που εμφανίστηκαν πιο συχνά. Όταν λοιπόν ζητάμε «Το αντίθετο του τριπλάσιου ενός αριθμού αυξημένου κατά 5 ισούται με 20» οι δύο λύσεις που δίχασαν το πλήθος των μαθητών ήταν :

$$-(3\chi+5)=20 \qquad \text{και} \qquad -3\chi+5=20$$

Δηλαδή οι μισοί μαθητές μετέφρασαν την φράση που δόθηκε ως το αντίθετο όλης της αλγεβρικής παράστασης που ακολουθούσε να είναι ίσο με το 20, ενώ οι άλλοι μισοί μεταφράζοντας λέξη- λέξη το κείμενο αφού έγραψαν ως -3χ το αντίθετο του τριπλάσιου του αριθμού, έπειτα πρόσθεσαν τις 5 μονάδες και ζητούσαν να είναι ίσο με το 20.

Παρατηρούμε λοιπόν εδώ ότι και ο Skemp στην έρευνα του το 1976 όπου σημειώνει την μη εν γένει κατανόηση των εννοιών με τον ίδιο τρόπο από διδάσκοντες και διδασκόμενους. Αυτό που μπορεί να θεωρούμε δεδομένο από την θέση του εκπαιδευτικού δεν σημαίνει ότι γίνεται αντιληπτό και από τους μαθητές μας.

Επιπλέον όταν οι μαθητές έλυναν την εξίσωση για να βρουν την λύση ώστε να επαληθεύσουν αν ταιριάζει στο ζητούμενο είτε έβρισκαν $\chi=-\frac{25}{3}$ είτε $\chi=-5$. Δηλαδή δεν υπάρχει κάποιο κριτήριο ώστε να απορριφθεί κάποια λύση. Αν για παράδειγμα στην εκφώνηση απαιτούνταν ο αριθμός να είναι ακέραιος θα μπορούσε να αποφευχθεί ένα πλήθος λανθασμένων απαντήσεων.

Όσον αφορά το τρίτο υποερώτημα, είναι ότι πιο δύσκολο καλούνται να διαχειριστούν οι μαθητές μέχρι στιγμής. Και αυτό διότι το κείμενο που δίνεται μοιάζει με σύστημα δύο εξισώσεων και όχι μιας ισότητας που ζητείται στην εκφώνηση. Εξαιτίας αυτής της δυσκολίας όσοι μαθητές επίλυσαν σωστά μας ανέφεραν στο στάδιο της συνέντευξης ότι επί της ουσίας έφτιαξαν δύο εξισώσεις τις οποίες μετά συγχώνευσαν. Συμβολικά λοιπόν χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές Μ για την ηλικία του Μιχάλη και Γ για την ηλικία του Γιώργου(οι λόγοι της επιλογής των συγκεκριμένων μεταβλητών αναφέρθηκαν νωρίτερα) σχημάτιζαν ως προσχέδιο την σχέση Μ= Γ+4 από το πρώτο μισό της εκφώνησης. Για το δεύτερο μισό όμως του ερωτήματος παρατηρούμε ότι ακριβώς και στο β υποερώτημα, οι μαθητές έδωσαν εξίσου τις απαντήσεις $\frac{M}{2}=\frac{1}{6}\Gamma+8$ και $\frac{M}{2}=\frac{1}{6}(\Gamma+8)$ μη γνωρίζοντας αν το $\frac{1}{6}$ αναφέρεται μόνο στην ηλικία του Γιώργου ή στην ηλικία του αυξημένη κατά 8. Η διαφορά όμως εδώ σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα είναι στις λογικές συνθήκες που βοηθούν να επιλέξουν κάποιοι μαθητές ποια απεικόνιση είναι σωστή. Αν λοιπόν προσπαθήσω να λύσω τις δύο αναπαραστάσεις με το πρώτο δεδομένο (Μ=Γ+4), η πρώτη εκδοχή μου δίνει Γ=18 και Μ=22 ενώ η δεύτερη έκφραση της σχέσης θα μου έδινε ότι ο Γιώργος είναι -2 χρονών και ο Μιχάλης δύο ετών που προφανώς ένας μαθητής θα απέρριπτε.

Αξίζει να αναφερθούμε σε μία πρότυπη λύση που πήραμε στο στάδιο της συνέντευξης.
Ακολουθεί ο χαρακτηριστικός διάλογος:
Δάσκαλος: «Πως λες να ξεκινήσεις;»
Μαθητής : « Θέλω κάτι για άγνωστο, ξέρω γώ , ένα χ»
Δάσκαλος: « Ναι αλλά έχεις δύο ηλικίες»
Μαθητής: « Ε, εγώ θα βρω την μία και η άλλη είναι εύκολο μετά»
Δάσκαλος: « Δηλαδή;»

Μαθητής : « Άμα είναι χ χρονών ο Γιώργος και το βρω αυτό ο Μιχάλης θα είναι 4 παραπάνω.»

Δάσκαλος : « Και τι προτείνεις να κάνουμε; Είσαι κοντά όντως»

Μαθητής : « Αφού ο Μιχάλης θα είναι χ+4 το μισό του θα είναι $\frac{\chi+4}{2}$ »

Δάσκαλος: « Για συνέχισε»

Μαθητής : « Ε ναι, άρα αυτό θα είναι ίσο με $\frac{1}{6}\chi+8$ όπως λέει»

Μαθητής: « Και άμα το λύσω, θα βρω το χ, δηλαδή την ηλικία του Γιώργου»

Κλείνοντας την ενότητα αυτή θα πρέπει να δώσουμε ιδιαίτερη βάση στο θέμα της ισότητας. Διαχρονικά σε πλήθος μελετών περί των δυσκολιών στην διδασκαλία και την κατανόηση της άλγεβρας, το σύμβολο του «ίσον» , η έννοια της ισότητας αλλά και η γενικότερη χρήση προβλημάτιζε μελετητές, εκπαιδευτικούς και μαθητές εξίσου. Ήδη και εμείς από τις πρώτες ασκήσεις όπου μελετήσαμε τα αποτελέσματα μπορούμε να δούμε κάποια πράγματα σχετικά με την έννοια του ίσον και την χρήση του, τα οποία όμως ισχύουν και για τα ερωτήματα που θα ακολουθήσουν. Βλέποντας χρονικά την χρήση του συμβόλου «=» από τα χρόνια που πρωτοεμφανίζεται στα τετράδια των μαθητών του δημοτικού μέχρι τις ηλικίες των παιδιών της έρευνας μας, μάλλον η άποψη τους δεν αλλάζει και πολύ. Όταν πρωτομαθαίνουν οι μαθητές το σύμβολο «=» διδάσκονται ότι το «βάζουμε» πριν το αριθμητικό αποτέλεσμα. Ότι αυτό δηλαδή μας δίνει την λύση. Χρονικά όμως μπορεί το επίπεδο των μαθηματικών γνώσεων γενικά να ανεβαίνει, η έννοια όμως του ίσον παραμένει ίδια. Όταν λοιπόν ερχόμαστε σε μία πρώτη γνωριμία με την άλγεβρα το ίσον αναμένουμε να μας δίνει το αποτέλεσμα. Δεν έχει τον δυναμικό ρόλο της εξισορρόπησης των δύο μελών αλλά μόνο έναν λειτουργικό ρόλο.

Αν δούμε έρευνες προηγούμενων ετών από ομάδες μελετητών , μας δίνουν περίπου τα ίδια αποτελέσματα. Η ομάδα των Saenz-Ludlow, A., & Walgamuth το 1998 παρατηρούν ότι τα παιδιά του δημοτικού δεν βλέπουν το ίσον ως σύμβολο στην σχέση αλλά ως ένα σήμα λειτουργίας για την εκτέλεση του υπολογισμού από τα αριστερά προς τα δεξιά. Γι’ αυτό και για την κατανόηση παραθέτουν ερωτήματα της μορφής $\square\chi\square=16$ όπου χ σύμβολο πράξης ώστε να αναζητούμε από τις μικρές ηλικίες τα ζητούμενα πριν το ίσον, προτού έρθουμε σε επαφή με άλγεβρα, αλλαγή μέλους κτλ. που βοηθούν στην κατανόηση της ίδιας της ισότητας. Τα σύμβολα στην ηλικία αυτή δεν εκφράζουν πλήρως όλη την σημασία τους χωρίς ερμηνεία των δραστηριοτήτων των ατόμων.

Η ερευνητική επίσης ομάδα των Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P το 1999 μελετά το ίσον και την ισότητα. Διαπιστώνει ότι τα παιδιά έχουν μια λειτουργική άποψη του ίσον και όχι σχεσιακή και ότι η άποψη αυτή με τα χρόνια και την μαθηματική ωρίμανση δεν βελτιώνεται. Παρατηρούνται χαμηλά ποσοστά κατανόησης των εννοιών από το νηπιαγωγείο έως και τις μεγάλες ηλικίες.

Τέλος ακόμα και η Kieran, C.(1992) παρατηρεί τα ίδια με την ομάδα των Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P κάνοντας όμως έρευνα σε μαθητές που διδάσκονται άλγεβρα ηλικίας 12 έως 16 ετών.

- Ας δούμε στο σημείο αυτό τι ενδιαφέροντα στοιχεία θα πάρουμε από την χρήση της τέταρτης άσκησης της Α ομάδας. Αφορά απλοποίηση και υπολογισμό σχέσεων – εξισώσεων. Στο α υποερώτημα δοθέντος μιας σχέσης (α+β=3) θα πρέπει οι μαθητές να υπολογίσουν την αριθμητική τιμή της παράστασης Α=3α-(α-2β). Ένα πολύ βατό ερώτημα που απαιτεί πράξεις και μόνο, χωρίς να ζητείται από τους μαθητές να βρουν οι ίδιοι την εξίσωση είτε να μεταφράσουν κάποιο κείμενο. Αναμενόμενα οπότε και τα υψηλά ποσοστά επιτυχίας που συναντούμε, με ελάχιστες λανθασμένες απαντήσεις. Οι λάθος μάλιστα αυτές απαντήσεις αφορούν κυρίως παρανοήσεις σχετικά με το ίσον και την ισότητα εν γένει. Βλέποντας οι μαθητές , με τις λάθος απαντήσεις δύο ισότητες άρχισαν να μπερδεύονται. Τα κύρια λάθη αφορούν το δεύτερο κομμάτι όπου προσπάθησαν να το λύσουν βλέποντας το ως εξίσωση με τρείς (!) μάλιστα αγνώστους. Στα πλαίσια αυτής της σκέψης δεν έλειψαν και απαντήσεις όπου το Α γινόταν αυθαίρετα α (ίσως νομίζοντας ότι μπορεί να πρόκειται για τυπογραφικό λάθος). Έτσι μπορούν να λύσουν την δεύτερη εξίσωση χωρίζοντας γνωστούς – αγνώστους και εκφράζοντας το α συναρτήσει του β ώστε με την βοήθεια της πρώτης σχέσης α+β=3 να υπολογίσουν τα α και β , αγνοώντας την εκφώνηση.

Στο β υποερώτημα θα προσπαθήσουμε να κατευθύνουμε όσο γίνεται και πρέπει την σκέψη των μαθητών ώστε να αποφύγουμε «περίεργα» λάθη και παρανοήσεις. Ζητούμε μόνο να απλοποιηθεί η σχέση, να γραφθεί απλούστερα η εξίσωση 2α+6-3α=25. Το μόνο μας ίσως πρόβλημα αφορά το πού πρέπει να σταματήσει ο μαθητής ώστε να θεωρηθεί ολόσωστη η απάντηση. Δίνουμε κάποιες απαντήσεις ενδεικτικά ώστε να γίνει πιο κατανοητό αυτό που αναφέρουμε:

<u>Μαθητής 1</u>: -α+6=25

<u>Μαθητής 2</u>: 2α-3α=25-6
<u>Μαθητής 3</u> : -α=19 και τέλος με πλήρη επίλυση
<u>Μαθητής 4</u>: α=-19.

Κάθε μαθητής από τους παραπάνω μπορεί να επικαλεσθεί ότι είναι απλούστερη μορφή η απάντηση του και από την πλευρά μας δεν μπορούμε να την απορρίψουμε. Μπορεί το ερώτημα λοιπόν να μην προκαλεί ή να μην ενθαρρύνει λανθασμένες απαντήσεις, όμως έχει ενδιαφέρον από διδακτική αξία για το πώς θα πρέπει να θέτουμε τα ερωτήματα στους μαθητές. Το συγκρατούμε για συζήτηση στο τέταρτο κεφάλαιο όπου θα προτείνουμε ένα διδακτικό σχέδιο, για τα λάθη από την πλευράς μας.

Αξίζει κλείνοντας την ενότητα αυτής της άσκησης να δούμε συνολικά την παρανόηση των μαθητών σχετικά με τις μεταβλητές και τα σύμβολα. Όπως παρατηρεί και ο Davis στην έρευνα Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations, *Journal of Children's Mathematical Behavior*, το 1975 συχνά οι μαθητές έχουν μία περιορισμένη οπτική για τις αλγεβρικές παραστάσεις και χρησιμοποιούν περισσότερο αριθμητικά μοντέλα παρά αλγεβρικά (προσπάθεια υπολογισμού των α και β στο α υποερώτημα) οπότε χάνουν το νόημα που αποδίδεται στις μεταβλητές και τα «γραμματικά» σύμβολα.

- Προχωρώντας θα συναντήσουμε την άσκηση πέντε και την αναφερόμενη όσο και πολύπαθη « μαθηματική σκέψη». Ζητάμε από ένα πλήθος απαντήσεων να επιλέξουν τα παιδιά ποιες από αυτές , εκφράζουν το ίδιο νόημα με μία δοθείσα σχέση (10χ+2=5χ+7) με την ιδιαιτερότητα ότι δεν έχουν το δικαίωμα να λύσουν.

  Όπως ίσως ήταν αναμενόμενο σχεδόν όλοι οι μαθητές μας «μαρτύρησαν» ότι έλυσαν και την αρχική εξίσωση αλλά και τις δυνατές απαντήσεις ώστε να δουν ποιες από αυτές συμπίπτουν, κάνοντας το έστω και για επαλήθευση. Και λέμε αναμενόμενο αφού όπως έχουμε αναφέρει και νωρίτερα η «μαθηματική» και στην παρούσα φάση η «αλγεβρική» σκέψη απουσιάζει από τους μαθητές (Lins 1992). Εφόσον λοιπόν αναζητήθηκαν οι λύσεις είναι λογικό οι περισσότεροι μαθητές να δώσουν ως σωστές απαντήσεις τις τρείς πρώτες που έχουν ως λύση το χ=1 , ότι δηλαδή και η εξίσωση της εκφώνησης. Αξιοσημείωτο είναι επίσης ότι κανείς μαθητής δεν απάντησε το δ υποερώτημα αφού και σαν αποτέλεσμα δίνει κάτι διαφορετικό αλλά και σαν εικόνα είναι μια μεγαλύτερη εξίσωση, που θεωρήθηκε ότι δεν θα ήταν δυνατόν να είναι αυτή η ζητούμενη απάντηση.

  Τέλος, κλείνοντας αυτό το κομμάτι το μεγαλύτερο ενδιαφέρον αφορά την «μαθηματική σκέψη» η οποία από μόνη της κιόλας, αναφερόμενη ως έκφραση στην εκφώνηση φόβισε και προβλημάτισε πολλούς μαθητές. Πληροφορούμαστε λοιπόν από το στάδιο των συνεντεύξεων, ότι λόγω αυτής της αναφοράς κάποιοι μαθητές απαντούν μόνο το (β). Κι αυτό γιατί σκεπτόμενοι ότι ζητείται μια ίδια μαθηματική σκέψη απαιτείται κάτι που να μοιάζει έστω και οπτικά. Με το δεδομένο αυτό από την δικιά μας πλευρά, αν είχαμε αλλάξει το 4 για παράδειγμα με 3, όπου και πάλι θα έμοιαζε οπτικά με την αρχική εξίσωση αλλά θα έδινε λάθος αποτέλεσμα και πάλι θα συγκέντρωνε αρκετές προτιμήσεις από όσους δεν έλυσαν όπως ζητούνταν ούτε έστω για επαλήθευση.

Επίσης ενδιαφέρον είναι ότι όσοι επέλεξαν το (α) που δοκιμάζεται εύκολα στην αρχική δοθείσα σχέση, αφού είναι η λύση και δεν απαιτεί πράξεις, επέλεξαν ταυτόχρονα και το (γ) ως επίσης προφανή λύση.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι πρέπει να προσέχουμε και τις αναφορές μας αλλά και τις λύσεις που δίνουμε σε τέτοιου είδους ασκήσεις, ώστε να έχουμε το νου μας όσο αφορά την καθοδήγηση. Δεδομένα που κρατούμε και για τον σχεδιασμό του δικού μας πλάνου διδασκαλίας.

- Κλείνουμε την ανάλυση των ασκήσεων της ομάδας Α με τα συμπεράσματα που παίρνουμε από την άσκηση έξι και τις απαντήσεις που δόθηκαν για αυτή. Λίγο πριν αρχίσουμε να παραθέτουμε «προβλήματα» όπου αποτελούν ίσως την δυσκολότερη ιδέα των μαθηματικών για τους νεαρούς μαθητές, δίνουμε μια άσκηση επίσης υψηλού επιπέδου. Πρόκειται επί της ουσίας για μια παραμετρική εξίσωση δηλαδή εξίσωση που χώρια από τον άγνωστο του ερωτήματος έχει επιπλέον και κάποιους άγνωστους συντελεστές. Πράγμα που από μόνο του αναμένουμε να δυσκολέψει πολύ τους μαθητές. Έχουμε ήδη αναφερθεί στην δυσχέρεια των μαθητών για την χρήση των μεταβλητών και την μη κατανόηση της έννοιας τους. Όταν οπότε θα προσθέσουμε και άλλον άγνωστο οι περισσότεροι μαθητές αναμένεται να «αποτύχουν». Και ίσως για αυτόν το λόγο να πρέπει να δούμε την άσκηση σε δύο τμήματα. Το α υποερώτημα από την μία ξεχωριστά και από την άλλη τα β και γ μαζί.

Και αυτό γιατί η σωστή επίλυση του α υποερωτήματος θα μας βοηθήσει – καθοδηγήσει για να λύσουμε και τα άλλα δύο. Παρατηρούμε όντως ότι οι περισσότεροι μαθητές που έγραψαν την εξίσωση $αχ+3μ=χ+6$ στην μορφή $(α-1)χ=6-3μ$ μόνο και μόνο με την χρήση της θεωρίας μπορούσαν να βρουν εύκολα τα άλλα δύο υποερωτήμα και ιδίως το β. Αντιθέτως όμως κανείς μαθητής που δεν έλυσε το α δεν κατάφερε να λύσει κάποιο από τα άλλα δύο. Βλέπουμε λοιπόν ότι η δική μας καθοδήγηση μέσω του πρώτου υποερωτήματος ήταν αυτή που βοήθησε στην επίλυση των άλλων δύο.

Αξίζει στο σημείο αυτό να αναφερθούμε στην δική μας καθοδήγηση στις ασκήσεις. Ο Davis (1988) αναφέρεται στο φαινόμενο αυτό και παρατηρεί ότι αν εξετάσουμε τους «επιτυχείς» σπουδαστές θα δούμε ότι κρατούν πολλές παρερμηνείες για τα μαθηματικά και η επιτυχία τους εν τέλει οφείλεται στις οδηγίες : « Κάνε αυτό, μετά αυτό…» από τους καθηγητές. Και το πιο σημαντικό είναι ότι οι καθηγητές δέχονται την σωστή διαδικασία ως αρκετή επιτυχία. Μαθαίνουν δηλαδή του σπουδαστές να λειτουργούν ως ένα μαθηματικό πρόγραμμα του υπολογιστή χρησιμοποιώντας μια στείρα γλώσσα όπως του προγραμματισμού με σειρές εντολών. (Αν βγει αυτό κάνε αυτό, αλλιώς κάνε εκείνο. Το κλασσικό δίδυμο if – else του προγραμματισμού)

Χάνουμε έτσι την δημιουργική σκέψη και την κατανόηση των εννοιών, πράγμα που θα δούμε και αργότερα αφού θα ασχοληθούμε με προβλήματα τα οποία δεν μπορούν να μπουν σε «καλούπια εργασίας» που χρησιμοποιούμε όταν μας έχει δοθεί έτοιμη η εξίσωση και δεν θα χρειαστεί να την σχηματίσουμε εμείς.

Στην δική μας άσκηση βέβαια η καθοδήγηση δεν φθάνει σε τέτοιο βαθμό άλλα υπάρχει τόσο όσο χρειάζεται και πρέπει. Τόσο όσο να επηρεάσει την ψυχολογία των λυτών απέναντι στην άσκηση, πράγμα ίσως βασικότερο όλων. Με την δική μας βοήθεια ο μαθητής θα πάρει αυτό το μικρό σκαλοπάτι ώστε να αποφύγει να δει συνολικά όλες τις μεταβλητές και να χάσει το νόημα αλλά να απομονώσει σε τμήματα κατά μέλη τους έξτρα αγνώστους.

Ας δούμε όμως και το δεύτερο κομμάτι της άσκησης που αφορά τα υποερωτήματα β και γ. Όπως είπαμε νωρίτερα και ίσως είναι και λογικό όσοι μαθητές δεν έλυσαν το α δεν κατάφεραν να δουλέψουν σωστά τα επόμενα δύο. Δεν ισχύει όμως και το αντίστροφο. Όσοι δηλαδή βρήκαν το α δεν βρήκαν απαραίτητα και τα άλλα δύο, ειδικότερα δε το γ. Και εδώ ας δώσουμε λίγη έμφαση. Θυμίζουμε ότι για να είναι αδύνατη μια εξίσωση θα πρέπει να είναι της μορφής 0χ=Β. Οπότε όταν οι μαθητές προσπαθούσαν να λύσουν το

ζητούμενο αυτό ξεκινούσαν με την προϋπόθεση Α=0 ή α-1=0 οπότε έπαιρναν α=1 και έβρισκαν το α. Όμως δεν ήταν εύκολο να βρουν το μ. Και αυτό γιατί δεν έχουν εξοικειωθεί με την έννοια του διάφορου και του συμβόλου $\neq$. Μάλιστα ενδιαφέρον έχει ότι μαθητές που έλυσαν το γ χρησιμοποίησαν την άρνηση του β. Κρατούσαν δηλαδή ότι πρέπει το πρώτο μέλος να κάνει μηδέν όπως και στο β αλλά το δεύτερο κομμάτι ζητούμε το αντίθετο. Και αφού εκεί έβρισκαν μ=2 τώρα θέλουμε να μην ισχύει οπότε παίρνουν $\mu \neq 2$. Οι περισσότεροι μαθητές δεν γνωρίζουν καν ότι το $\neq$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακριβώς όπως το = , αν και με αντίθετη έννοια.
Εξ αυτού έλλειψαν απαντήσεις της μορφής:

Α=0 <u>και</u> $B \neq 0$

α-1=0 <u>και</u> $6-3\mu \neq 0$

α=1 <u>και</u> $6 \neq 3\mu$

α=1 <u>και</u> $\mu \neq 2$

Τέλος να σημειωθεί και η έλλειψη της εξήγησης και της χρήσης του συμβόλου $\neq$ στα σχολικά βιβλία, το οποίο εμφανίζεται ιδιαίτερα στα χρόνια του λυκείου και άπτεται στη διάθεση και την χρονική δυνατότητα του καθηγητή να το διδάξει ή έστω να το θυμίσει σε όποιους το έχουν ακούσει κάπου. Δεν είναι λίγα τα παραδείγματα που συναντούμε από την μη κατανόηση της έννοιας του διαφόρου. Οι περισσότεροι καθηγητές έχουν βρεθεί αντιμέτωποι με απαντήσεις στο ερώτημα $\alpha \cdot \beta \neq 0$ της μορφής $\alpha \neq 0$ <u>ή</u> $\beta \neq 0$, επηρεασμένοι οι μαθητές από το $\alpha \cdot \beta = 0$ όπου απαιτεί α=0 ή β=0 και όχι να ισχύουν ταυτόχρονα και τα δύο όπως στο διάφορο.

Συνολικά βλέπουμε εκτός από τις δυσκολίες που γεννώνται από την φύση των ερωτημάτων, να έχουμε προσθέσει επιπλέον και άλλες εμείς οι ίδιοι από τα κενά και τις παραλήψεις του παιδαγωγικού συστήματος και των βιβλίων μας.

Κάπου εδώ θα κλείσουμε την μελέτη των ερωτημάτων της Α ομάδας και των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές. Συνολικά βλέποντας όσα πραγματεύτηκαν οι μαθητές σε ερωτήματα που είχαν δοσμένη την εξίσωση ή ένα τμήμα της ή έστω μια μικρή καθοδήγηση και προτού δούμε τι συνέβη όταν ήρθαν αντιμέτωποι με προβλήματα, παρατηρούμε κυρίως την έλλειψη της μαθηματικής σκέψης. Ας δούμε τον ορισμό της αλγεβρικής σκέψης που μας δίνει η Kieran το 1992 στην εργασία της με τίτλο « The learning and Teaching of the School algebra» όπου μελέτησε την συμπεριφορά μαθητών 12- 16 ετών και κύριο μέλημα της έρευνας ήταν 1) η αναζήτηση της φύσης της άλγεβρας , 2) η διάκριση αλγεβρικής και αριθμητικής σκέψης και τέλος 3) αναζητώντας τα κύρια συστατικά της αλγεβρικής δραστηριότητας.

Μας ορίζει λοιπόν ότι ο αλγεβρικός τρόπος σκέψης θα πρέπει μεταξύ άλλων να περιλαμβάνει :

1) Εστίαση στις σχέσεις και όχι στον υπολογισμό
2) Εστίαση στις διεργασίες και τις αντίστροφες τους
3) Εστίαση στην αναπαράσταση και επίλυση του προβλήματος και όχι μόνο στην λύση
4) Εστίαση και σε γράμματα με αριθμούς και όχι μόνο νούμερα
5) Προσανατολισμός στην έννοια του συμβόλου του ίσον.

Οπότε, αν δεχτούμε αυτόν τον ορισμό μας φανερώνει τις δυσκολίες των παιδιών που αναφέραμε νωρίτερα λόγω της απουσίας αυτού του τρόπου σκέψης. Κάθε ένα κομμάτι από τα προαπαιτούμενα το έχουμε επισημάνει στις απαντήσεις και στα λάθη που έκαναν οι μαθητές. Εύλογα οπότε διαπιστώνουμε την κακή σχέση των μαθητών ως προς την άλγεβρα και ίσως όχι τόσο ως προς την χρήση αλλά ως προς την κατανόηση της. Και αυτό είναι που προκαλεί και αυτήν την «αντιπάθεια». Η μη κατανόηση της φύσης της , ακόμα και της χρησιμότητας της. Ποιος καθηγητής δεν έχει έρθει αντιμέτωπος με κάποιον μαθητής που εκφράζει την άποψη : « Εμένα που θα μου χρησιμεύσει αυτό στην ζωή μου;» αναφερόμενος στα χ και ψ, τις μεταβλητές, τις εξισώσεις και την άλγεβρα γενικότερα. Οπότε μάλλον το μεγάλο βάρος απέναντι σε αυτήν την αντιμετώπιση πέφτει σε εμάς τους διδάσκοντες. Εμείς είμαστε αυτοί που δεν κεντρίσαμε το ενδιαφέρον, δεν αναδείξαμε την χρησιμότητα της άλγεβρας και δεν εκπαιδεύσαμε σωστά τους μικρούς μαθητές.

Κλείνοντας αξίζει μόνο μια αναφορά ακόμη που θα επιβεβαιώσει το ανώτερο. Η Booth (1988) καταλήγει ως συμπέρασμα ότι οι απλές ιδέες σε εμάς δεν είναι τόσο απλές και για τους μαθητές, και ότι αυτό που θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τις δυσκολίες είναι η μελέτη των λαθών σε κάθε νέο κομμάτι που διδάσκεται. Πόσοι άραγε εκπαιδευτικοί όταν διδάσκουν παρατηρούν τα λάθη των μαθητών ώστε να διαπιστώνουν την φύση της παρανόησης αυτών των λαθών ή πόσοι εξ αυτών θα σκέφτονταν να χρησιμοποιήσουν κάτι λάθος ώστε να προκαλέσουν την αναζήτηση του από τους μαθητές;

Ομάδα Β:

Στην Β ομάδα των ασκήσεων που παραθέσαμε στους μαθητές θα δούμε τρία προβλήματα μαθηματικών. Δύο προβλήματα τα οποία θυμίζουν σύστημα εξισώσεων με δύο ζητούμενα όπως είδαμε και νωρίτερα σε άλλο παράδειγμα και ένα γεωμετρικό πρόβλημα που σίγουρα είναι ότι πιο δύσκολο θα κληθούν να επιλύσουν οι μαθητές. Μόνο και μόνο το ότι απομονώνουμε το κομμάτι αυτών των ασκήσεων, αποδεικνύει ότι πρόκειται για κάτι διαφορετικό. Αποτελεί ένα ξεχωριστό κομμάτι που χρήζει ιδιαίτερης μελέτης, για ποιους λόγους ένα πρόβλημα μπορεί να δυσκολέψει τόσο τους μαθητές, μελέτη όμως που ξεφεύγει από τα πλαίσια της δικής μας έρευνας. Θα δούμε και εδώ όπως και στην Α ομάδα, κομμάτι – κομμάτι , την κάθε άσκηση ξεχωριστά, αναλύοντας τα εξαγόμενα από τις απαντήσεις των μαθητών και τις συνεντεύξεις τους. Αξίζει να αναφέρουμε, ότι αναγνωρίζοντας την ιδιαιτερότητα των προβλημάτων και την δυσχέρεια απέναντι τους, προτού καν γίνει η έρευνα αναμέναμε (όπως και συνέβη) χαμηλά ποσοστά επιτυχίας.

- Στην πρώτη άσκηση λοιπόν της Β ομάδας αναζητούμε ωρομίσθια δύο ατόμων με βάση τα στοιχεία που δίνονται. Έχουμε ήδη ελαφρώς προετοιμάσει τους μαθητές με ανάλογο ερώτημα στην Α ομάδα έστω και σε πιο πρώιμη μορφή. Η αναμενόμενη δυσκολία έγκειται στην εύρεση μιας και μόνο εξίσωσης όπως απαιτεί το α υποερώτημα. Έχοντας δηλαδή δύο αγνώστους επί της ουσίας, το ωρομίσθιο του Σάκη και το ωρομίσθιο του Πέτρου, οι περισσότεροι μαθητές αντιμετώπιζαν πρόβλημα ως προς το τι πρέπει να λύσουν όπως μας εκμυστηρεύτηκαν αργότερα. Το τι θα πρέπει να βαπτίσουν ως χ (τον συνήθη άγνωστο, όπως έχουμε ξαναναφέρει). Δυστυχώς ελάχιστοι ήταν οι μαθητές που ανέμειξαν τις δύο εξισώσεις που έπρεπε να βρουν σε μια. Που αναγνώρισαν και ανέγραψαν ως Π=Σ+2 την πρώτη σχέση (όπου Π το ωρομίσθιο του Πέτρου και Σ το ωρομίσθιο του Σάκη) και αντικατέστησαν το ωρομίσθιο αυτό του Πέτρου στην σχέση που έβγαλαν από την δεύτερη φράση, με Σ+2.

Παρόλα ταύτα όμως ίσως και λόγω των αναμενόμενων χαμηλών ποσοστών επιτυχίας μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το β υποερώτημα. Και αυτό διότι ως αυτόνομο ερώτημα παρουσιάζει πιο υψηλά ποσοστά σωστών απαντήσεων. Καθώς από τους μαθητές ζητείται να λύσουν την όποια εξίσωση έχουν βρει από το α , περιγράφοντας αναλυτικά το κάθε βήμα, ζητείται επί της ουσίας η μοντελοποίηση που αναφέραμε στα τέλη της ανάλυσης μας των ασκήσεων της Α ομάδας. Διδασκόμενοι οι μαθητές την διαδικασία επίλυσης εξισώσεων α βαθμού, μαθαίνουν την ακόλουθη διαδικασία:

Κάνω με την σειρά

1) Απαλοιφή παρονομαστών
2) Απαλοιφή παρενθέσεων
3) Χωρίζω γνωστούς – αγνώστους
4) Αναγωγή ομοίων όρων
5) Διαιρώ με τον συντελεστή του αγνώστου.

Έτσι λοιπόν όταν εμείς ζητάμε να επιλύσει την εξίσωση που νωρίτερα συνέθεσε, στην ουσία επικαλούμαστε αυτήν την διαδικασία, μοντελοποιημένη βήμα- βήμα ως βήματα προγράμματος υπολογιστή. Στην παρούσα φάση όμως είναι αναγκαίο αφού πρόκειται για «στάνταρ» μέθοδο επίλυσης, που μία αλλαγή σταδίων επίλυσης μπορεί να προκαλέσει άλματα λογικής και μαθηματικές αυθαιρεσίες.

Άρα οι περισσότεροι μαθητές έλυσαν σωστά με την ιδιαιτερότητα όμως ότι δεν έλυσαν όλοι την ίδια εξίσωση. Μπορεί δηλαδή να είχαμε πολλές διαφορετικές εξισώσεις ως απαντήσεις στο α υποερώτημα αλλά στο β οι περισσότεροι τις έλυναν σωστά θεωρώντας ότι αυτή είναι η εξίσωση που πρέπει να λύσουν. Ευτυχώς για τους μαθητές υπήρξαν και διατυπώσεις της εξίσωσης που μετά από επίλυση έδιναν μη λογικές συνθήκες όπως αρνητικά ωρομίσθια. Έτσι ανάγκασαν τους μαθητές να ξανασκεφτούν το α ερώτημα και να διορθώσουν ατυχής αβλεψίες.

- Όσον αφορά τώρα το δεύτερο πρόβλημα, αναμένουμε περίπου τα ίδια αποτελέσματα με αυτά του πρώτου προβλήματος. Και αυτό διότι οι δύο ασκήσεις «μοιάζουν» πολύ, τόσο οπτικά όσο και ως προς τα ερωτήματα που ταυτίζονται πλήρως. Και όντως ισχύει ότι και για την προηγούμενη άσκηση με μόνο ένα στοιχείο επιπρόσθετο. Εδώ βρίσκουμε ελαφρά πιο υψηλά ποσοστά επιτυχίας σε σχέση με την προηγούμενη άσκηση και αυτό γιατί η σχέση που προκύπτει από την πρώτη έκφραση είναι πιο απλή. Όταν δηλαδή γνωρίζουμε ότι το ένα ρεζερβουάρ είναι διπλάσιο του άλλου, ήταν περισσότεροι πλέον οι μαθητές οι οποίοι τα αντιστοίχιζαν με αγνώστους χ και 2χ αντίστοιχα, ώστε να βρουν μετά μία και μόνο εξίσωση.

Σημειώνουμε προς αποφυγή παρανοήσεων ότι το πλήθος σωστών απαντήσεων είναι υψηλότερο από την προηγούμενη άσκηση και όχι γενικά υψηλά αφού όπως είπαμε πρόκειται για προβλήματα που δεν αναμένεται να μας δώσουν γενικά πολλές σωστές απαντήσεις. Άλλωστε όπως αναφέρουν και οι Farmaki, V., Klaoudatos, N. & Verikios, (2005)

- Και θα τελειώσουμε την ανάλυση των ασκήσεων της Β ομάδας αλλά και ολόκληρου του ερωτηματολόγιου με τα συμπεράσματα από την τρίτη άσκηση. Όπως είπαμε αφορά ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Θα πρέπει οι μαθητές μέσω του γεωμετρικού σχήματος που δίνεται να σχηματίσουν και να επιλύσουν δύο εξισώσεις ούτως ώστε να βρουν κάθε φορά το χ, για να ισχύει η δοθείσα σχέση μεταξύ των εμβαδών.

Για να αποφύγουμε την πλήρη αποτυχία θα «βοηθήσουμε» λίγο την διαδικασία. Πρώτον το χ αναπαρίσταται πάνω στο σχήμα ώστε να ζητείται μόνο να εκφραστεί το τμήμα ΔΜ συναρτήσει του χ ως 5-χ. Και δεύτερον δίνουμε ως «οδηγό» των εξισώσεων τις σχέσεις γραμμένες οπτικά και όχι με φράσεις. (πχ $E_1=E_2$ και όχι «το πρώτο εμβαδό να ισούται με το δεύτερο»)

Παρόλη όμως την βοήθεια μας οι σωστές απαντήσεις δεν ήταν πολλές και αναφερόμαστε κυρίως στο πρώτο ζητούμενο. Και αυτό έγκειται στο ότι πρέπει το E_1 να εκφραστεί σαν συναρτήσει του χ ως 3*(5-χ) και αφετέρου ότι το E_3 θα πρέπει να γραφθεί ως διαφορά εμβαδών. Απαιτείται για την επίλυση να γράψουμε το E_3 ως Ετραπ $-E_1$-E_2 πράγμα που δεν επιλύθηκε παρά από πραγματικά ελάχιστους μαθητές. Οι περισσότεροι δε προσπαθούσαν να το εκφράσουν απευθείας συναρτήσει του χ, είτε έφερναν κάποιο ύψος χωρίς ούτε αυτό να φέρει κάποιο αποτέλεσμα.

Αυτό όμως που θα πρέπει να κρατήσουμε είναι η μεγάλη «επιτυχία» του β υποερωτήματος. Δεδομένου ότι τα παιδιά έχουν το χ μέσα στο σχήμα και την σχέση $E_1=E_2$ ως οδηγό αρκούσε μόνο να γράψουν το ΜΔ ως 5-χ και να αντικαταστήσουν ως

$$3(5-\chi)=5\chi$$

Η περαιτέρω επίλυση ήταν εύκολη δουλειά. Και αναφέρουμε ότι πρέπει να συγκρατήσουμε αυτήν την λεπτομέρεια ώστε να προβληματιστούμε για την διάρθρωση των ερωτημάτων στις ασκήσεις. Κατά πόσο είναι ορθό το να ξεκινάμε μια άσκηση με κάτι αρκετά δύσκολο και να συνεχίζουμε με κάτι πιο βατό είτε αν θα πρέπει να ακολουθούμε την αντίστροφη πορεία ώστε να επηρεάσουμε θετικά την ψυχολογία των σπουδαστών. Συγκρατούμε τον προβληματισμό μας αυτόν, ώστε να τον χρησιμοποιήσουμε στο δικό μας διδακτικό πλάνο.

Τέλος κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό παρότι αναφέραμε ότι το «μαθηματικό πρόβλημα» χρίζει εκτενούς αναλύσεως , αξίζει να αναφέρουμε δύο λόγια από το βιβλίο του κυρίου Δημητρίου Καραγιώργου με τίτλο « Το πρόβλημα και η επίλυση του, μία διδακτική προσέγγιση» που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε την φύση του και πώς μπορούμε να βοηθηθούμε.

Αναφέρει χαρακτηριστικά : « Το πρόβλημα είναι μία πρόκληση. Μια ευχάριστη πρόκληση. Το σπουδαιότερο είναι να μάθουμε στον μαθητή πώς να μάθει να προσεγγίζει την λύση με ορθό τρόπο. Αυτό θα τον γεμίσει ικανοποίηση και θα εντείνει την προσπάθεια του να φτάσει στην λύση». Καθώς επίσης αναφέρει : « Είναι σημαντικό όχι μόνο να διδάξουμε στους μαθητές πώς να γίνουν καλύτεροι λύτες προβλημάτων αλλά και πώς να φτιάχνουν οι ίδιοι προβλήματα. Αυτό μπορεί να διδαχθεί συγχρόνως με την διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων….. Το τελευταίο αυτό στάδιο τους προσφέρει ιδιαίτερη ικανοποίηση. Αισθάνονται ότι είναι και αυτοί μικροί δημιουργοί. Έτσι θα καταλάβουν καλύτερα τι είναι τα προβλήματα και γιατί γίνεται τόσος «θόρυβος» γι’ αυτά. Σε συγκεκριμένες ενότητες θα παρατηρήσουμε ότι θα υπάρχει συναγωνισμός μεταξύ των μαθητών για το ποιος θα κατασκευάσει και παρουσιάσει το καλύτερο πρόβλημα»

Κεφάλαιο 4:

Συμπεράσματα της έρευνας, προτεινόμενοι τρόποι διευκόλυνσης στην διδασκαλία

Στο κεφάλαιο αυτό, αφού μελετήσαμε πλήρως το ερωτηματολόγιο που παραθέσαμε στους μαθητές θα καταστρώσουμε ένα διδακτικό σχέδιο βασισμένο στα λάθη των μαθητών και τις λοιπές παρατηρήσεις που είδαμε νωρίτερα.

Θα δώσουμε ένα πλάνο διδασκαλίας της άλγεβρας στις μαθητικές αίθουσες, με ποιους τρόπους θα πρέπει να μεταδώσουμε τις γνώσεις και τον ενθουσιασμό μας για την άλγεβρα και με ποια τεχνολογικά μέσα. Προτείνουμε ένα ερωτηματολόγιο ελέγχου αυτής της διαδικασίας. Το κύριο σημείο μας είναι, ότι θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την κατανόηση της άλγεβρας κυρίως και έπειτα την αλγοριθμική διαδικασία επίλυσης. Θα πρέπει δηλαδή το σχέδιο μας αυτό να κάνει τους μαθητές να κατανοήσουν το τι ζητείται να λύσουν και όχι να τους εκπαιδεύσει σε μια στείρα διαδικασία επίλυσης εξισώσεων. Και αυτό γιατί προχωρώντας στο χρόνο και στις βαθμίδες της εκπαίδευσης, οι μαθητές θα καλούνται να επιλύσουν όλο και πιο σύνθετα θέματα που δεν θα μπορούν να μοντελοποιηθούν σε τυποποιημένες διαδικασίες αλγεβρικές επίλυσης.

<u>**Διαδικασία μέσα στην αίθουσα:**</u>

Θα ξεκινήσουμε να προτείνουμε λοιπόν μια διδακτική διαδικασία για τους διδάσκοντες εντός των αιθουσών. Το σχέδιο αυτό βασίζεται στην εργασία των Farmaki, V., Klaoudatos, N. & Verikios, P.(2005) επηρεασμένο όμως από τα λάθη και τις παραλήψεις που εντοπίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και από τις δύο πλευρές (Μαθητών και καθηγητών).

Ας δώσουμε για αρχή κάποια βασικά στοιχεία της έρευνας των Farmaki, V., Klaoudatos, N. & Verikios, P. ώστε να περιγράψουμε το που θα βασιστούμε. Για τις ανάγκες της έρευνας με τίτλο Introduction of algebraic thinking: Connecting the concepts of linear function and linear equation πραγματοποίησαν συνεντεύξεις σε μαθητές δεκατριών χρονών με βασικό θέμα την συσχέτιση της ψ=αχ+b με την αχ+b=c. Αφού παρέθεσαν είκοσι έξι μαθήματα διάρκειας 45 λεπτών (4 ανά εβδομάδα) συγκέντρωσαν τα αποτελέσματα. Εντοπίζοντας εξ αρχής την ανάγκη για κατανόηση των μαθηματικών, προτείνουν στην εργασία τους την χρήση εντός των διδακτικών αιθουσών διαφορετικών μεθόδων αναπαράστασης για καλύτερη κατανόηση των εννοιών.

Συνδέουν ένα πρόβλημα και με γράφημα και με πίνακα αλλά και συμβολικά. Στο ξεκίνημα δίνουν προσοχή στην γραφική επίλυση ορίζοντας ως χ συνήθως τον άγνωστο. Έπειτα μεταβαίνουν σε πίνακες και σε σύμβολα. Πλέον για τα κλασσικά προβλήματα αγνώστων που απαιτούν αλγεβρική επίλυση μέσω μιας εξίσωσης , εμείς θα συμπληρώνουμε πίνακες ακόμη και με δοκιμές, θα κάνουμε γραφική επίλυση, θα λύνουμε φυσικά την εξίσωση αλλά θα μπορούμε να εμπλέκουμε ακόμη και ανίσωση προσπαθώντας να αποσυνδέσουμε την τυπική διαδικασία επίλυσης και βλέποντας όσο γίνεται περισσότερες αναπαραστάσεις.

Το σημαντικότερο όμως ίσως στοιχείο αυτών των διαδικασιών ήταν και η χρήση των νέων τεχνολογιών στην διαδικασία για την οπτική αποτύπωση των προαναφερθέντων αναπαραστάσεων. Στην έρευνα τους κατά την περίοδο των μαθημάτων χρησιμοποίησαν υπολογιστή και projector για την αναπαράσταση των γραφικών παραστάσεων , των πινάκων ακόμη και για τα στάδια επίλυσης των εξισώσεων και ανισώσεων

Μπορεί από πρακτικής άποψης να μην είναι απαραίτητα εφόσον δύναται να αναπαρασταθούν και στον μαυροπίνακα με κιμωλία είναι όμως μεγάλη η συμβολή στην έκκληση του ενδιαφέροντος από την πλευρά των μαθητών. Είναι προφανής η σχέση και η οικιοποίηση των νεαρών μαθητών με τις νέες τεχνολογίες και πως αυτές μέσω των οπτικών ερεθισμάτων προκαλούν το ενδιαφέρον τους.

Ας φτιάξουμε στο μυαλό μας δυο συγκριτικές εικόνες:

Από την μία ο δάσκαλος με ξυλοχάρακα και κιμωλία ανά χείρας, με γυρισμένη την πλάτη στους μαθητές να σχεδιάζει στον μαυροπίνακα ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ή ένα πίνακα προς συμπλήρωση.

Από την άλλη ο δάσκαλος όντας ανάμεσα στους μαθητές, να περπατά μεταξύ των θρανίων με το χειριστήριο στο χέρι αλλάζοντας εικόνες στον projector και ρωτώντας τους μαθητές για το επόμενο βήμα, για το τι θα εμφανιστεί μετά. Προφανώς και η δεύτερη εικόνα είναι αυτή που θα εξάψει το ενδιαφέρον των μαθητών απαιτώντας μόνο λίγο χρόνο εξωσχολικής ασχολίας από τους καθηγητές αλλά και κάποιο κόστος αγοράς του εξοπλισμού.

Και αυτό το πρώτο σημείο της εκπαιδευτικής μας πρότασης μοιάζει ως εμπόδιο ανυπέρβλητο λόγω του κόστους. Κι όμως δεν είναι έτσι. Παρόλο που σε ένα τέλειο σύστημα άφθονων πόρων, θα μπορούσαμε να γεμίσουμε όλες τις αίθουσες διδασκαλίας της χώρας με υπολογιστές και προβολείς διαφανειών ακόμη και με τα δικά μας δεδομένα μπορούμε να μην αποκλείσουμε την χρήση των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση.

Κι αυτό γιατί πλέον σε κάθε σχολείο υπάρχει αν μη τι άλλο ένας υπολογιστής έστω και κάποιας «ηλικίας». Μας αρκεί όμως αφού απαιτείται μόνο μια εφαρμογή προβολής διαφανειών όπως το Power point που κάθε υπολογιστής στα σχολεία έχει προ εγκατεστημένο. Θα μπορούσε λοιπόν το υπουργείο να ετοιμάσει και να διαθέσει ένα τέτοιο αρχείο ώστε να περιγράφει εικονικά την έννοια και την χρήση των μεταβλητών. Αν και αυτό θεωρείται δύσκολο λόγω της ανάμειξης του υπουργείου (με τις γραφειοκρατίες και τις καθυστερήσεις) , δεν θα ήταν δύσκολο και για τον ίδιο τον διδάσκοντα να το ετοιμάσει εφόσον απαιτούνται ελάχιστες γνώσεις , τις οποίες θα μπορούσε να ζητήσει και από τον καθηγητή της πληροφορικής.

Συμπεραίνουμε οπότε ότι το μόνο που απαιτείται εν τέλει είναι η διάθεση και η όρεξη να ασχοληθούμε ως διδάσκοντες με την δύσκολη αυτή μετάβαση από τα αριθμητικά μοντέλα στις αλγεβρικές παραστάσεις.

Ως αντίκτυπο όμως μπορούμε να δούμε τα συμπεράσματα της εργασίας των Farmaki, V., Klaoudatos, N. & Verikios, P. για να καταλάβουμε το τι θα αναμένουμε ως «αντάλλαγμα».

Αναφέρουν χαρακτηριστικά :

1. Η χρήση συναρτήσεων βοηθά στην κατανόηση των εννοιών.
2. Η εξίσωση λύθηκε πρώτα γραφικά και με πίνακα και έπειτα αλγεβρικά.
3. Οι διαφορετικές μέθοδοι ενθαρρύνουν τους μαθητές.
4. Τα σύμβολα παίρνουν το κατάλληλο νόημα ως μεταβλητές.
5. Ο ρόλος των συνεντεύξεων δίνει την ευκαιρία να ξαναδούν και να αναθεωρήσουν την πρώτη γνώση.
6. Περισσότερες μέθοδοι σημαίνει περισσότερες ερωτήσεις που βοηθούν στην κατανόηση των εννοιών.

Και σε αυτό το τελευταίο βασιζόμαστε. Κρατάμε λοιπόν μέχρι στιγμής την ανάγκη για περισσότερες μεθόδους αναπαράστασης αλλά και την χρήση των νέων τεχνολογιών στην διδακτική διαδικασία.

Για να γίνει πιο αντιληπτό αυτό που προτείνουμε θα δούμε πως θα μπορούσαμε να διδάξουμε και να λύσουμε μια άσκηση. Η σειρά εκμάθησης των ενοτήτων και οι αυξήσεις του επιπέδου θα μπορούσαν να είναι αντίστοιχη αυτής του ερωτηματολόγιου. Και ας υποθέσουμε ότι ασχολούμαστε με μια άσκηση επιπέδου αντίστοιχου με το τέλος της Α ομάδας ή με την αρχή της Β. Έστω δηλαδή ότι θα διδάξουμε ένα πρόβλημα όπως το παρακάτω παράδειγμα :

Πρόβλημα :

Ο Γιώργος πρέπει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο εταιρίες κινητής τηλεφωνίας. Η μία του προσφέρει ένα συμβόλαιο με πάγιο 15 ευρώ και 0,5 ευρώ κόστος ανά μήνυμα ενώ η δεύτερη 23 ευρώ πάγιο και 0,25 ευρώ κόστος ανά μήνυμα.

Ερωτήματα:

1) Από τι εξαρτάται το ποσό που θα πληρώσει;
2) Αν ο λογαριασμός είναι ψ ευρώ και στέλνει χ μηνύματα να εκφράσετε σε κάθε περίπτωση μια εξίσωση που να τα συνδέει.
3) Να συμπληρώσετε τον πίνακα για την κάθε μια περίπτωση:

χ	5	10	15	20	25	30	35	40
ψ								

4) Περιγράψτε πως θα φτιάξετε ένα γράφημα για κάθε περίπτωση και πώς ένα κοινό που θα περιλαμβάνει και τις δύο περιπτώσεις
5) Αν ο Γιώργος στέλνει περίπου 27 μηνύματα το μήνα, ποια εταιρία τον συμφέρει να επιλέξει;
6) Γίνεται να πληρώσει το ίδιο ποσό κάποιον μήνα είτε επιλέξει την μία είτε την άλλη εταιρία;
7) Τον συμφέρει πάντα η ίδια εταιρία;

Το πρόβλημα θα μπορούσε να είχε τυπωθεί σε φωτοτυπίες και να είχε μοιραστεί στους μαθητές ή να φαίνεται στον προβολέα ώστε να το βλέπουν όλοι και να το αντιγράψουν χωρίς να υπαγορεύει ο καθηγητής χάνοντας πολύτιμο διδακτικό χρόνο.

Αξίζει όμως να επισημάνουμε το θέμα της άσκησης και το πόσο οικείο είναι στους μαθητές, ως μέρος της καθημερινότητάς τους καθώς και καλό παράδειγμα ως απάντηση στην ερώτηση που αναφέραμε νωρίτερα : « Εμένα που θα μου χρειαστούν αυτά;». Κανείς μαθητής δεν μπορεί να θεωρήσει αδιάφορο ή «άχρηστο» το αντικείμενο της άσκησης.

Επιστρέφουμε στην εικόνα του μαθήματος. Ανάβοντας τον προβολέα διαφανειών ο καθηγητής, εμφανίζεται το πρόβλημα, διανθισμένο ίσως και με σκίτσα ή εικόνες χάριν οπτικών ερεθισμάτων. Ο διδάσκων οφείλει και ο ίδιος να αναδείξει την αξία και την χρησιμότητα του θέματος εντός της τάξης.

Αφού δώσει λίγο χρόνο στους μαθητές ώστε να διαβάσουν και να το συνειδητοποιήσουν, αλλάζει διαφάνεια όπου η νέα αυτή θα περιέχει ξανά την εκφώνηση ώστε να έχουν οι μαθητές τα δεδομένα αλλά και το πρώτο ερώτημα. Δίνει τον λόγο σε μαθητές ώστε να απαντήσουν αιτιολογημένα κάνοντας το μάθημα διαδραστικό.

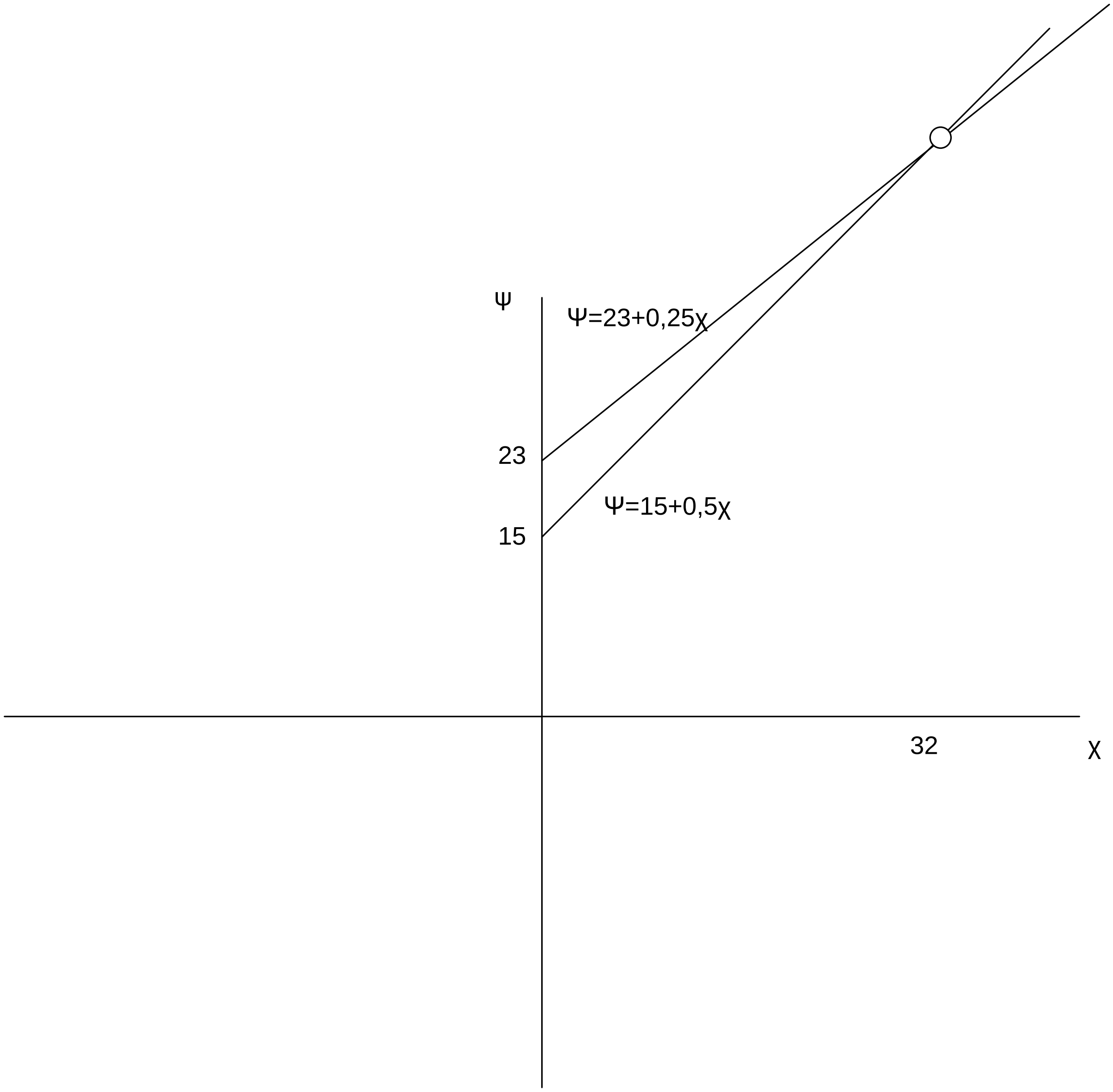
Όταν εκφράσουν σωστή και αιτιολογημένη άποψη, πατώντας το χειριστήριο εμφανίζεται η επόμενη διαφάνεια, πάλι με την εκφώνηση αλλά το β ερώτημα από κάτω. Εφόσον εδώ ζητούνται οι εξισώσεις ζητά από τους μαθητές να γράψουν τις λύσεις στα τετράδια τους ώστε να περιφέρεται στην τάξη και να ελέγχει όποιον μαθητή του το ζητήσει δίνοντας χρόνο στους υπολοίπους να το σκεφτούν και βοηθώντας όσους αναγράφουν λάθος λύση.

Αφού τελειώσει και αυτό το στάδιο αλλάζει πάλι διαφάνεια εμφανίζοντας την άσκηση με τον πίνακα του γ ερωτήματος. Ακολουθεί την ίδια λογική όπως πριν, κερδίζοντας έτσι την συμμετοχή όλων των μαθητών από το να επιλέγει ανάμεσα σε αυτούς που σηκώνουν το χέρι ή φέρνοντας σε δύσκολη θέση κάποιον μαθητή που δεν σήκωσε χέρι. Με την κατ' ιδίαν συζήτηση περνώντας από το θρανίο του εν λόγω μαθητή θα μπορέσει να τον βοηθήσει δίνοντας του ένα μικρό έναυσμα στην σκέψη του.

Και συνεχίζει με την επόμενη διαφάνεια. Εδώ το ερώτημα δεν απαιτεί την κατασκευή και μόνο των γραφημάτων ή έστω του κοινού. Ζητάμε από τους μαθητές να μας περιγράψουν την διαδικασία κατασκευής . Μπαίνουν εν μέρει στην θέση του καθηγητή που θα πρέπει να εξηγήσουν και να περιγράψουν όσο πιο απλά γίνεται την κατασκευή. Πολύ σημαντικό στοιχείο που πρέπει να κρατήσουν οι εκπαιδευτικοί. Να ανταλλάσσουν με τους μαθητές ρόλους αφού για να εξηγηθεί κάτι θα πρέπει να το γνωρίζεις καλά, να το αποσυνθέτεις και να το αναδιοργανώνεις κάνοντας το κτήμα σου. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι μαθητές κατέχουν την γνώση και έχουν καταλάβει τις διδασκόμενες έννοιες.

Στην επόμενη διαφάνεια με την εκφώνηση και το πέμπτο ερώτημα ζητάμε την τιμή της κάθε συνάρτησης για χ=27. Υποθέτοντας ότι πολλοί μαθητές θα ανατρέξουν στην γραφική παράσταση, κάποιοι θα λύσουν τις εξισώσεις για χ=27 του β ερωτήματος, θα ρίξουν μια ματιά στον πίνακα μήπως υπάρχει η τιμή που ζητάμε και θα δουν την μικρή διαφορά στις τιμές προετοιμάζοντας το επόμενο ερώτημα.

Όταν λοιπόν θα εμφανίσουμε την επόμενη διαφάνεια με το ερώτημα : «Γίνεται να πληρώσει το ίδιο ποσό κάποιον μήνα είτε επιλέξει την μία είτε την άλλη εταιρία; » ήδη οι μαθητές είναι υποψιασμένοι. Κάποιοι θα κάνουν δοκιμές για νούμερα από το 27, άλλοι θα κοιτάξουν το γράφημα αλλά θα έχουμε και απαντήσεις όπου θα λύνουν τα ίδια ψ. Εξισώνοντας τα ψ=15+0,5χ και ψ=23+0,25χ θα λύνουν και την εξίσωση. Εδώ ίσως θα χρειαστεί και μια μικρή καθοδήγηση από την μεριά του καθηγητή. Έχοντας πάντως το γράφημα μπροστά μας όπως το παρακάτω πολλοί μαθητές θα απαντούσαν απευθείας μέσω των συντεταγμένων του σημείου τομής των ευθειών:



Εδώ επιπλέον ο καθηγητής θα πρέπει να αναφερθεί και στις λογικές συνθήκες των προβλημάτων. Ίσως παίρνοντας αφορμή από μια λύση δεκαδικής μορφής ή ακόμη και αρνητικό που πιθανόν θα δει σε κάποιο τετράδιο. Τα νούμερα φυσικά έχουν επιλεγεί ώστε η λύση να είναι ακέραια για να μην προκληθεί σύγχυση. Δεν αγνοούμε όμως την περίπτωση αυτή και μπορεί ο καθηγητής προφορικά να αλλάξει τα δεδομένα, λέγοντας για παράδειγμα να ξαναλύσουν με κόστος μηνύματος 24 λεπτά του ευρώ για την δεύτερη εταιρία.

Τέλος στην έβδομη και τελευταία διαφάνεια θα εμφανίζεται το πρόβλημα και το ερώτημα που αφορά την ανίσωση όσο και αν αυτή δεν είναι τόσο προφανής. Ως τελευταίο ερώτημα οφείλει να είναι το πιο δύσκολο γι' αυτό και δεν θέτουμε προφανώς το ερώτημα. Βάζουμε τους μαθητές να σκεφτούν γενικά κάποιον τρόπο για να συγκρίνουν τις δύο εταιρίες. Είτε με σύγκριση από πριν είτε με ανίσωση. Έχοντας ήδη λύσει για το πότε θα πληρώσει ο Γιώργος το ίδιο ποσό εμπλέκουμε και την ανισότητα ώστε να δουν οι μαθητές ότι δεν πρόκειται για κάτι τόσο ξένο ή για μια διαφορετική ενότητα. Ότι αρκεί να ξαναλύσουν τα ίδια αντικαθιστώντας το ίσον με ένα σύμβολο ανισότητας και ακολουθώντας τους κανόνες της όμως.

Να παρατηρήσουμε κλείνοντας την ενότητα αυτή την εκφώνηση. Το γεγονός ότι οι εταιρίες καλούνται «η μία» και « η άλλη». Αποφεύγουμε την χρήση συμβολισμών πχ. εταιρία Α και εταιρία Β αντίστοιχα ώστε να μην θεωρηθούν μεταβλητές. Όπως έχουμε αναφέρει νωρίτερα στο προηγούμενο κεφάλαιο οφείλουμε να προβλέπουμε παρανοήσεις και να παραθέτουμε θέματα τέτοια ώστε να προλάβουμε λάθη από δικές παραβλέψεις .

Έλεγχος της διαδικασίας:

Προτείνουμε στο κεφάλαιο αυτό ένα διδακτικό σχέδιο, μία μέθοδο για το πώς θα κάνουμε τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την άλγεβρα, να τραβήξουμε το ενδιαφέρον τους και να αυξήσουμε τα ποσοστά επιτυχίας.

Σε αυτά τα πλαίσια όμως είδαμε νωρίτερα πως μπορεί ένας διδάσκοντας να θεωρήσει αρκετή επιτυχία μια τυποποιημένη και υπό καθοδήγηση επίλυση (Davis 1988). Εξ αυτού παρατηρούμε το πόσο λανθασμένη εικόνα μπορεί να έχει ο καθηγητής (εσκεμμένα ή μη) για το επίπεδο γνώσης των μαθητών και τις δυνατότητες τους. Έτσι εκτός από την διαδικασία μέσα στην αίθουσα που αναλύσαμε πριν, θα πρέπει ανά τακτά χρονικά διαστήματα να γίνεται ένας έλεγχος της προόδου αυτής της διαδικασίας.

Ας δούμε τι ισχύει σήμερα στις σχολικές μας αίθουσες. Λειτουργώντας υπό ενός βαθμοθηρικού συστήματος, οι καθηγητές «ελέγχουν» την πρόοδο των μαθητών ανά τρίμηνο- τετράμηνο λόγω ότι ο νόμος το υπαγορεύει αλλά και για να διασφαλιστούν οι ίδιοι. Δηλαδή εφόσον θα πρέπει να παραδώσουν βαθμολογία για την καρτέλα ελέγχου, υποβάλλουν τους μαθητές σε ένα διαγώνισμα ανά τρίμηνο ή τετράμηνο, που ο βαθμός αυτού του διαγωνίσματος θα είναι πάνω κάτω και ο βαθμός του ελέγχου. Έτσι βλέπουν την ελεγκτική αυτή διαδικασία ως ένα χαρτί που θα χρησιμεύσει ως αντίλογος σε αντίδραση κάποιου γονέα για το βαθμό που πήρε το παιδί του. Δεν δίνουν λοιπόν την δέουσα σημασία στο γραπτό έλεγχο, ώστε να αναγνωρίσουν που έχουν γίνει λάθη στην μάθηση, τι κενά έχουν οι μαθητές εν γένει και ο καθένας ξεχωριστά και τι οφείλουν οι ίδιοι να κάνουν προς διόρθωση.

Και αυτό είναι που προτείνουμε εμείς. Αφότου ολοκληρωθεί το στάδιο εντός της αίθουσας με τις νέες τεχνολογίες και όσα αναλύσαμε νωρίτερα για μία ενότητα, θα πρέπει να αξιολογήσουμε τι από αυτά έχει γίνει κατανοητό και τι όχι. Μη βαθμολογημένα όμως. Να αποσυνδέσουμε την μάθηση από την βαθμολογία. Προφανώς και πρέπει να βαθμολογηθούν οι μαθητές και σίγουρα ένας καλός βαθμός επαινεί έναν μαθητή και τον παροτρύνει να συνεχίσει όμως δεν γίνεται να υποβάλλουμε συνέχεια τους μαθητές σε αυτή την διαδικασία. Γιατί ακριβώς όπως ο καλός βαθμός επαινεί , ο κακός βαθμός αντίστοιχα προκαλεί άρνηση και απομάκρυνση από τα μαθηματικά .

Με βάση αυτά λοιπόν προτείνουμε το εξής:

Κάθε περίπου τέσσερις έως έξι ώρες που περνάμε στην αίθουσα, θα πρέπει να παραθέτουμε ένα μη βαθμολογούμενο ερωτηματολόγιο. Με βάση το πρόγραμμα του υπουργείου και τις ώρες που περνάμε στην αίθουσα εβδομαδιαίως, αυτό αντιστοιχεί περίπου σε μία φορά εβδομαδιαίως ή δεκαήμερο το πολύ. Επίσης κάθε τρείς εβδομάδες ή ένα μήνα μπορούμε να δίνουμε και ένα βαθμολογούμενο ερωτηματολόγιο χάριν των βαθμολογικών αναγκών αλλά και χάριν των ψυχολογικών ενισχύσεων. Έτσι ανά τρίμηνο που οφείλουμε να δώσουμε βαθμούς έχουμε δέκα με δεκαπέντε έγγραφα ανά μαθητή ώστε να έχουμε πιο πλήρη εικόνα.

Χώρια όμως από την άποψη για τον βαθμό του μαθητή, το βασικό που μας δίνει είναι η εικόνα για το επίπεδο κατανόησης όσων διδάσκουμε. Μπορούμε έτσι να γνωρίζουμε όσο είμαστε «κοντά» στο κάθε κεφάλαιο τι παραλήψεις και τι παρανοήσεις συνέβησαν ώστε να προλάβουμε νωρίς και να τις διορθώσουμε. Αν αναμένουμε ένα διαγώνισμα στο τέλος ενός τριμήνου ή τετραμήνου και δούμε κάποιες λάθος απαντήσεις μπορούμε να τις αποδώσουμε στην λάθος κατανόηση της συγκεκριμένης άσκηση ή ότι ξέχασαν ένα κομμάτι, δημιουργώντας μια λανθασμένη εικόνα για το επίπεδο της τάξης και του κάθε μαθητή ξεχωριστά.

Και ας δούμε πως θα μπορούσε να ήταν αυτό το ερωτηματολόγιο που θα καλούνται οι μαθητές να επιλύσουν. Η βασική μορφή θα μπορούσε να είναι σαν αυτή του ερωτηματολόγιου της έρευνας μας, ίσως όμως πιο εύκολου επιπέδου ή πιο μικρής έκτασης χάριν οικονομίας χρόνου στις αίθουσες.

Θα μπορούσε να μην χωρίζεται σε δύο τμήματα ώστε να μην φοβίζει η ομάδα των προβλημάτων αλλά θα πρέπει η δυσκολία να ανεβαίνει όπως και σε αυτό το ερωτηματολόγιο. Να ξεκινάμε λοιπόν ζητώντας απλά ερωτήματα και άσκηση – άσκηση αλλά και ερώτημα – ερώτημα να αυξάνουμε την δυσκολία. Έτσι θα γνωρίζουμε ποιός μαθητής έχει κατανοήσει πλήρως τις έννοιες που διδάξαμε και ποιος αντιμετωπίζει δυσκολίες σε κάποιο συγκεκριμένο στάδιο ώστε να ασχοληθούμε πιο εκτενώς μαζί του.

Επίσης οι εκφωνήσεις μας θα πρέπει να είναι αρκετά μελετημένες. Ούτε να προδίδουν την λύση απλοποιώντας πλήρως τα πάντα, αλλά σίγουρα όχι να είναι σε τέτοια μορφή ώστε να είναι δυσνόητες και να προκαλούν παρανοήσεις. Έχουμε πει ήδη ότι είναι αυτονόητο για εμάς δεν ισχύει το ίδιο και για τους μαθητές, άρα θέλουμε ξεκάθαρα ερωτήματα με ελάχιστη καθοδήγηση. Τόση ώστε να προκαλεί το ενδιαφέρον, να δίνει αυτήν την πρώτη σπίθα χωρίς να λύνει όλη την άσκηση ικανοποιώντας την δικής μας ανάγκη για καλούς βαθμούς και καλές όσο όμως και ψεύτικες απαντήσεις.

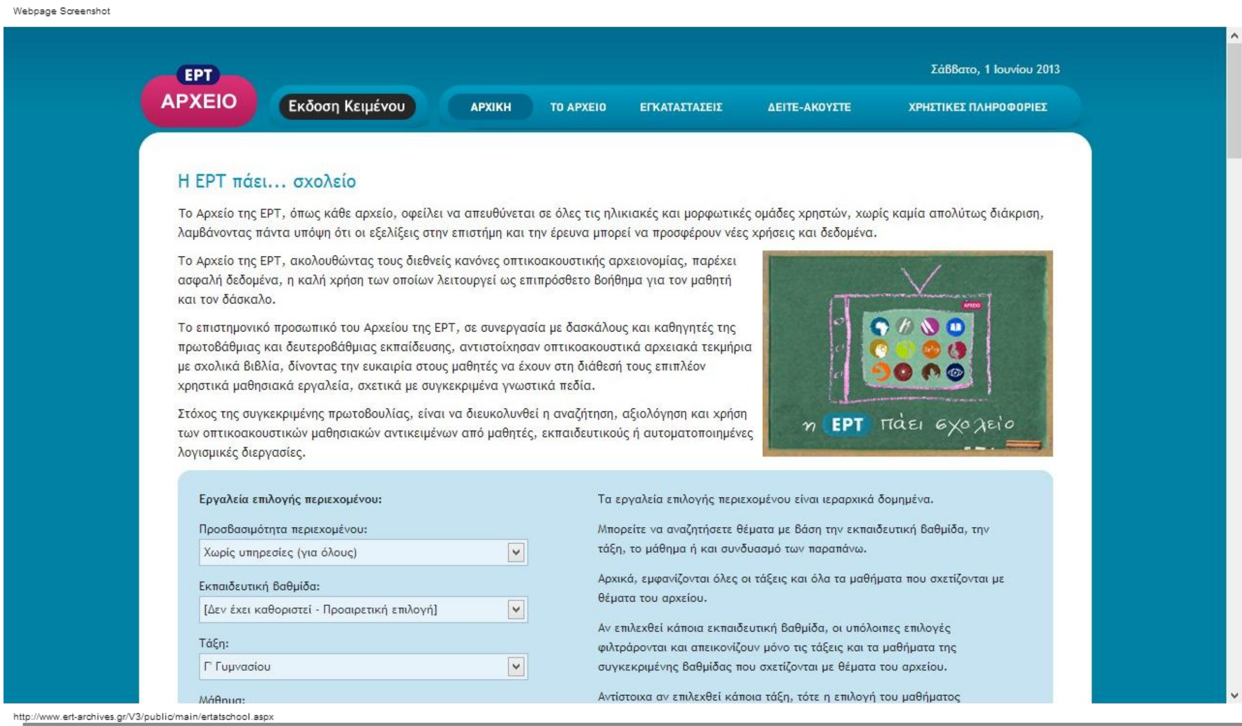
Μία πρωτοβουλία της ΕΡΤ

Την περίοδο συγγραφής αυτής της εργασίας ανακοινώθηκε από την κρατική τηλεόραση ότι στην ιστοσελίδα του ηλεκτρονικού αρχείου της (www.ert-archives.gr) διατίθεται πλέον και υλικό σχετικό με τα σχολεία. Με το σλόγκαν «Η ΕΡΤ πάει σχολείο» η προσπάθεια να συγκεντρωθεί οπτικοακουστικό υλικό που θα βοηθήσει στην εκπαίδευση πήρε την πρώτη πνοή. Την δεδομένη δυστυχώς περίοδο το μάθημα των μαθηματικών δεν περιλαμβάνετε στις δυνατές επιλογές υλικού προς εκπαίδευση αλλά αναμένεται.

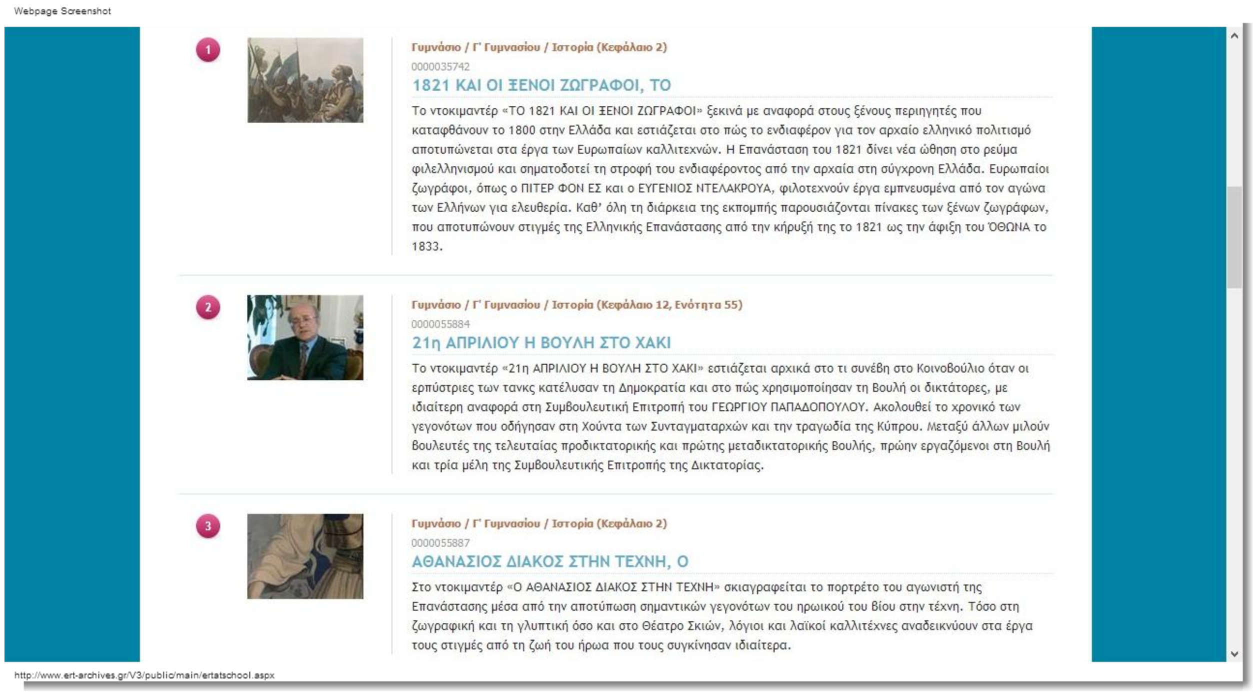
Να λοιπόν που η ιδέα που αναλύσαμε νωρίτερα δεν είναι τόσο ανέφικτη. Ας δούμε παρακάτω μία πρώτη γεύση:

1. Το λογότυπο

2. Το κεντρικό μενού επιλογής χωρίς δυστυχώς ακόμη τα μαθηματικά.



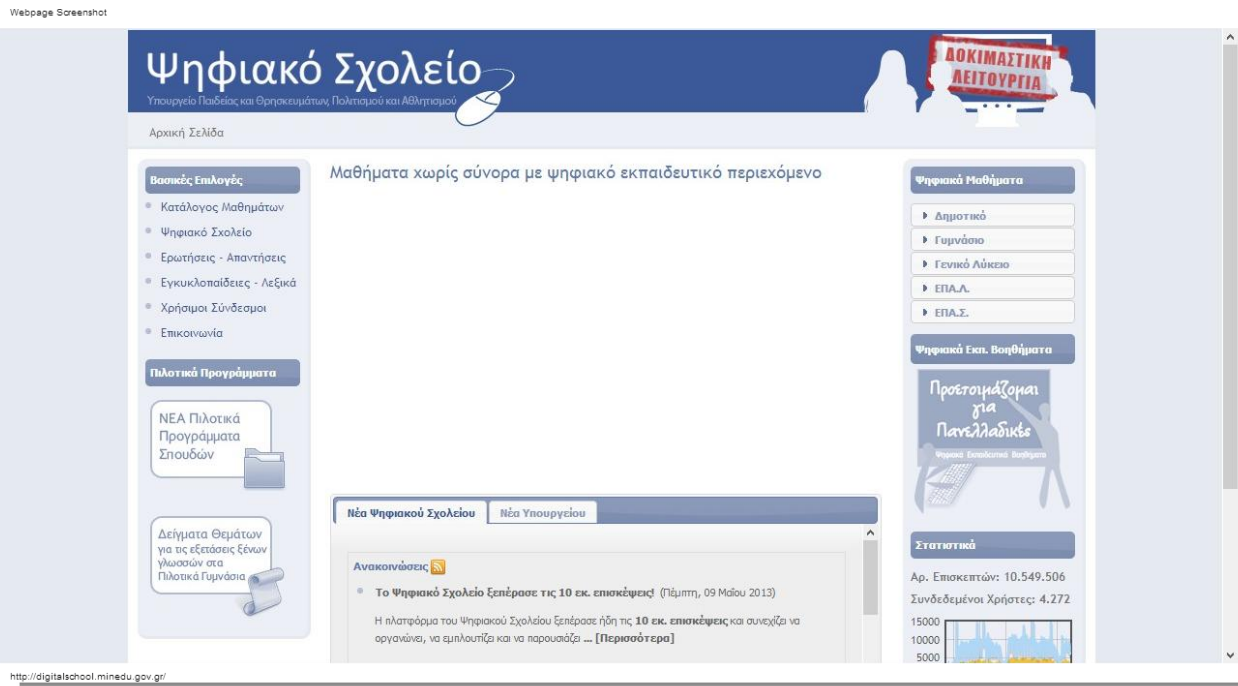
3. Ένα παράδειγμα από τα βίντεο που εμφανίζονται επιλέγοντας Ιστορία Γ Γυμνασίου



Όμως και το υπουργείο Παιδείας έχει μια διαδικτυακή πύλη με ψηφιακό υλικό. Στην σελίδα «Ψηφιακό Σχολείο» (www.digitalschool.minedu.gov.gr/) οι μαθητές μπορούν να δουν κάποιο υλικό χωρίς δυστυχώς να είναι ακόμη διαδραστικό. Μπορούν δηλαδή να δουν και να «κατεβάσουν» τα βιβλία, να συλλέξουν πληροφορίες για το μάθημα (ύλη, σκοπός, διδακτικό πλάνο και στόχοι) αλλά δεν υπάρχουν οι εφαρμογές που θα μπορούσε ένας μαθητής να λύνει, να επιλέγει ανάμεσα σε Σωστά και Λάθος και όλα εκείνα που θα κέντριζαν το ενδιαφέρον του.

Ας πάρουμε μια ιδέα:

1. Η αρχική σελίδα



2. Το μενού που εμφανίζεται στην Γ Γυμνασίου

3. Το ηλεκτρονικό βιβλίο της Γ Γυμνασίου

Επίλογος:

Θα κλείσουμε την εργασία αυτή συγκεντρώνοντας εδώ όλα τα συμπεράσματα που βγάλαμε από την ανάμειξη με τους μαθητές, την μελέτη των ερωτηματολογίων που κλήθηκαν να απαντήσουν και από τις συνεντεύξεις που μας παρέθεσαν.

Συγκεντρωτικά λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι :

<u>Οι μαθητές:</u>

- Δεν έχουν αναπτύξει την μαθηματική – αλγεβρική σκέψη.
- Δεν έχουν κατανοήσει πλήρως την ισότητα και το σύμβολο του ίσον παρά βλέπουν μόνο την λειτουργική άποψη του από τα χρόνια του δημοτικού.
- Έχουν συνηθίσει στην επίλυση ίδιων ή παρόμοιων προβλημάτων
- Χρησιμοποιούν ακόμη αριθμητικά και όχι αλγεβρικά μοντέλα .
- Δεν έχουν αποδώσει πλήρως το νόημα των μεταβλητών
- Μαθαίνουν να λειτουργούν ως μηχανές ή πρόγραμμα με ακολουθίες εντολών στην διαδικασία επίλυσης
- Συνδέουν τη μεταβλητή ως το πρώτο γράμμα του αντικειμένου που αντιστοιχεί (πχ. χ για χάρτες)

<u>Οι καθηγητές:</u>

- Οφείλουν να αντιλαμβάνονται ότι όσα σε αυτούς μοιάζουν απλά και προφανή δεν είναι και για τους μαθητές
- Οφείλουν να μελετούν τα λάθη των μαθητών ώστε να αναγνωρίζουν τις ελλείψεις, τις παρανοήσεις και όσα δεν έχουν γίνει κατανοητά.

- Οφείλουν να προκαλούν το ενδιαφέρον των μαθητών για τον υπέροχο κόσμο της άλγεβρας
- Δεν πρέπει να καθοδηγούν τους μαθητές σε τέτοιο βαθμό που να θεωρούν επιτυχία των μαθητών, την πιστή αναπαράσταση των οδηγιών τους.
- Οφείλουν να προσπαθούν να εντοπίζουν τρόπους, διαδικασίες, μεθόδους αναπαράστασης και ότι άλλο είναι δυνατό ώστε να επιτύχουν την μεγαλύτερη δυνατή κατανόηση των νέων εννοιών.

Και τέλος το Υπουργείο Παιδείας οφείλει να διαθέτει τους πόρους, την τεχνολογία και τεχνογνωσία και κυρίως να ενδιαφέρεται για το πώς θα μάθουν οι μαθητές μας σωστά μαθηματικά και όχι μόνο για τους βαθμούς τους που θα τους οδηγήσουν αργότερα στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Να αναζητά τους τρόπους που θα κάνει τους μαθητές να πλησιάσουν αυτό το πεδίο γνώσης χωρίς να τους φοβίζει καθώς τα μαθηματικά είναι μέσα μας, γύρω μας, είναι η φύση μας.

Βιβλιογραφία:

- «Ε» Ιστορικά , Περιοδικό Εφημερίδος «Έθνος» 21/01/2009

- Ευάγγελος Σπάνδαγος (2000) Τα μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων , Εκδόσεις Αίθρα

- Διονύσιος Αναπολιτάνος (Αθήνα 2005) Εισαγωγή στην φιλοσοφία των μαθηματικών , Εκδόσεις Νεφέλη (5η έκδοση)

- Δημήτρης Λ. Καραγεώργος (Σαββάλας 2000) Το πρόβλημα και η επίλυση του. Μια διδακτική προσέγγιση (Σελ. 8 και 337)

- Booth, L., R. (1984). Algebra: Children's strategies and errors. Windsor: NFER Nelson.

- Booth, L.R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In Arthur F. Coxford, *&* Albert P. Shulte *(Eds), The ideas of algebra, K-12* (1988 yearbook of the NCTM) *(pp.* 20–32*).* Reston, VA*:* NCTM.

- Carpenter, T., P., Corbitt, M., K., Kepner, H., S., J., Lindquist, M., M., & Reys, R., E.(1981). Results from the second mathematics assessment of the national assessment of educational progress. Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Cortes, A., Vergnaud, G., & Kavafian, N. (1990). From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process. In G. Booker, P. Cobb, & T. deMendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth PME Conference* (Vol IJ, pp. 27-34). Mexico: International Conference for the Psychology of Mathematics Education.

- Davis, R., B. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, **1** (3), 7-35.

- Δεμίρη, Ε., Μαρκέτος, Α., Μπάρμπας, Γ. (1994). Οι αντιλήψεις των μαθητών της Α γυμνασίου για την μεταβλητή. Διάσταση, 63 - 70, Εκδ. Ε.Μ .Ε Κεντρικής Μακεδονίας.

- Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: a foundation for algebra, *Teaching Children Mathematics*, 6, 232-236.

- Farmaki, V., Klaoudatos, N. & Verikios, P. (2005). Introduction of algebraic thinking: Connecting the concepts of linear function and linear equation, Proccedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education, Palermo, Italy, Vol II, 407-422.

- Kieran, C. (1992). The learning and Teaching of the School algebra. In D. Grouws (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). New York.

- Λεμονίδης Χ (1996). Εμπειρική έρευνα στην ικανότητα επίλυσης εξισώσεων Α΄ βαθμού από μαθητές Γυμνασίου. Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών, Τεύχος 1. Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας, 14-35.

- Pirie, S. & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 159-181.

- Saenz-Ludlow, A., & Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 35(2), 153-187.

- Sfard, A., Linchevski, L. (1994). "The Gains and the Pitfalls of Reification - The Case of Algebra." *Educational Studies in Mathematics* 26, 191-228.

- Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

- Yerushalmy, M. (2000). Problem solving strategies and mathematics resources: A longitudinal view on problem solving in a functional based approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics, 43*, 125-147.

- Lins R.C (1992) A framework for understanding what algebraic thinking is, Thesis submitted to the University of Nottingham for the degree of Doctor of Philosophy

- Ψηφιακό αρχείο ΕΡΤ (www.ert-archives.gr)

- Ψηφιακό Σχολείο (http://digitalschool.minedu.gov.gr/)