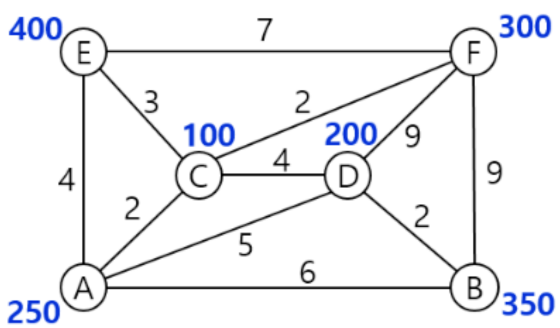
HW 3

2019145081 강태준

1. 다음 문제에 대해 최대 커버링 서비스센터를 구하고자 한다. 1개의 서비스 센터를 구축하여 커버하는 서비스를 최대화하고자 하며, 서비스 거리 5단위 이내에 수요지가 위치해 있으면 서비스 거리 범위 내에 있다. 최대 커버링 서비스센터의 위치를 구하기 위한 수리 모형을 제시하고 최적해를 구하시오. (행/열 단축이 가능하다면 수행하시오.)



	A	B	C	D	E	F
A	0	6	2	5	4	4
B	6	0	6	2	9	8
C	2	6	0	4	3	2
D	5	2	4	0	7	6
E	4	9	3	7	0	5
F	4	8	2	6	5	0
수요	250	350	100	200	400	300

해당 문제에서 노드와 노드 사이의 거리 행렬은

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 & 5 & 4 & 4 \\ 6 & 0 & 6 & 8 & 9 & 8 \\ 2 & 6 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 0 & 7 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 7 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 2 & 6 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

과 같고, 이를 커버 가능한 여부(노드와 노드 사이의 서비스 거리가 5단위 이내인 것)로 커버 가능하면 1, 불가능하면 0인 이진 거리 행렬로 나타내면:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

과 같다. 여기서 문제에 해당하는 수리적 모델을 수립하면 아래와 같이 수립할 수 있다.

Sets:

$$i, j \in N = \{A, B, C, D, E, F\}$$

Parameters:

$$D_i = \text{demand at node } i \in N = [250, 350, 100, 200, 400, 300]$$

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if node } i \text{ can be served by facility at node } j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Decision Variables:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{if node } i \text{ is served} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{if a facility is located at node } i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Maximize:

$$\sum_{i \in N} D_i x_i$$

Subject to:

$$\sum_{j \in N} B_{ij} y_j \geq x_i \quad \forall i \in N$$

$$\sum_{i \in N} y_i \leq 1$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N$$

B에 대해 우리는 Column elimination을 수행할 수 있는데, A Column이 D, E, F Column을 지배하므로 이들을 제거할 수 있고,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

과 같이 작성해도 동일한 최적해를 구할 수 있을 것이다.

Gurobi를 통해 해당 수리모델의 최적해를 구한다면 A 노드에 서비스 시설을 설치해 A, C, D, E, F를 커버해야 한다는 결과를 얻을 수 있다. 최적 목적식 값은 1,250이 된다.

2. Y 회사는 3단계의 공급 네트워크 – 공장, 2개의 잠정적 창고 입지, 4군데의 소매상 – 로 이루어져 있다(그림 2.1 참조). 회사는 잠정적인 입지 중 각각에 세 가지 서로 다른 크기로 (작은 규모, 중간 규모, 큰 규모) 창고를 건설할 수 있다. 2개 창고 입지에서의 투자 비용과 용량은 표 2.2와 같다. 각 입지에 1개 이상의 창고를 건설할 수 없으며, 표 2.3에 주어진 고객 수요는 반드시 충족되어야 한다. 회사가 건설에 가능한 총 투자 예산은 30,000 달러이다. 모든 고객의 수요를 만족하면서 투자 비용과 수송 비용의 합계를 최소화하고자 한다. 공급사슬 모델을 만들고 최적해를 구하시오.

해당 문제에서 주어진 정보를 바탕으로 아래와 같은 수리적 모델을 모델링 할 수 있다:

Sets:

$W = \{1, 2\}$ warehouses

$S = \{1, 2, 3\}$ warehouse sizes

$R = \{1, 2, 3, 4\}$ retailers

Parameters:

$C_{\max} = 30000$ maximum total warehouse cost

$K_s = [3000, 5000, 10000]$ warehouse capacity for size $s \in S$

$F_{ws} = \begin{bmatrix} 10000 & 15000 & 20000 \\ 8000 & 12000 & 17000 \end{bmatrix}$ fixed cost for warehouse w with size s

$D_r = [2000, 2500, 1000, 3500]$ demand at retailer $r \in R$

$C_w^F = [10, 15]$ unit transportation cost from factory to warehouse w

$C_{wr}^R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ unit transportation cost from warehouse w to retailer r

Decision Variables:

$y_{ws} = \begin{cases} 1 & \text{if warehouse } w \text{ is opened with size } s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$x_w^f \geq 0$ units shipped from factory to warehouse w

$x_{wr}^r \geq 0$ units shipped from warehouse w to retailer r

Minimize:

$$\sum_{w \in W} C_w^F x_w^f + \sum_{w \in W} \sum_{r \in R} C_{wr}^R x_{wr}^r + \sum_{w \in W} \sum_{s \in S} F_{ws} y_{ws}$$

Subject to:

$$\sum_{s \in S} y_{ws} \leq 1 \quad \forall w \in W$$

$$\sum_{w \in W} \sum_{s \in S} F_{ws} y_{ws} \leq C_{\max}$$

$$x_w^f \leq \sum_{s \in S} K_s y_{ws} \quad \forall w \in W$$

$$x_w^f = \sum_{r \in R} x_{wr}^r \quad \forall w \in W$$

$$\sum_{w \in W} x_{wr}^r \geq D_r \quad \forall r \in R$$

$$y_{ws} \in \{0, 1\} \quad \forall w \in W, s \in S$$

$$x_w^f, x_{wr}^r \in \mathbb{Z}^{0+} \quad \forall w \in W, r \in R$$

해당 수리모델을 Gurobi를 통해 구현한 후 최적해를 구하게 되면 다음과 같은 결과를 도출할 수 있다:

- 창고 설치 및 용량
  - 창고 1: 10,000 단위 창고 건설
  - 창고 2: X
- 공장 → 창고
  - 공장 → 창고 1: 9,000
  - 공장 → 창고 2: 0
- 창고 → 소매점
  - 창고 1 → 소매점 1: 2,000
  - 창고 1 → 소매점 2: 2,500
  - 창고 1 → 소매점 3: 1,000
  - 창고 1 → 소매점 4: 3,500
  - 창고 2 → 소매점 1: 0
  - 창고 2 → 소매점 2: 0
  - 창고 2 → 소매점 3: 0
  - 창고 2 → 소매점 4: 0

해당 최적해로 얻을 수 있는 최적 목적식 값은 140,500이 된다.